Ονοματεπώνυμο: .... Α.Μ. .... Έτος ...

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι *Εξέταση Προόδου (24/11/07)*

Εκτός αν υπο/δηλώνεται διαφορετικά, τα διανύσματα είναι στήλες.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Να απαντήσετε περιεκτικά και συνοπτικά, στα παρακάτω ερωτήματα. Για πλήρη αξιολόγηση του γραπτού σας πρέπει να παρουσιάσετε όλο σας τον συλλογισμό και όλα τα ενδιάμεσα αποτελέσματα. Σε κάθε περίπτωση χρειάζεται επαρκής εξήγηση. Αν τα αποτελέσματα δεν προκύπτουν από τους υπολογισμούς στο γραπτό (πρόχειρους και μη), δεν βαθμολογείστε για την ερώτηση. Επίσης δεν βαθμολογείστε για τις ερωτήσεις Σωστό/Λάθος που απαντάτε απλά ΝΑΙ ή ΟΧΙ. Εκτός αν αναφερέται διαφορετικά, μπορείτε να υποθέσετε ότι όλα τα δεδομένα κάθε προβλήματος είναι α.κ.υ.

1. Να εξηγήσετε τι απλοποίηση γίνεται στο υπολογιστικό μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε στο μάθημα σε σχέση με τις σύγχρονες αρχιτεκτονικές Η/Υ, όταν λέμε ότι ο χρόνος έκτέλεσης, T ενός προγράμματος είναι $T = T_{\text{αρϑ}} + T_{\text{μετ}}$, όπου $T_{\text{αρϑ}}, T_{\text{μετ}}$ είναι οι χρόνοι για την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων και των πράξεων μεταφοράς μεταξύ επεξεργαστή και μνήμης. ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ: Η απλοποίηση είναι ότι στις σύγχρονες αρχιτεκτονικές αναμένουμε να υπάρχει μερική επικάλυψη πράξεων μεταφοράς με πράξεις αριθμητικής. *Προσοχή: Οι υπόλοιπες απλοποιήσεις του μοντέλου δε μας αφορούν καθότι δεν εξηγούμε πώς υπολογίστηκαν οι χρόνοι* $T_{\text{αρϑ}}, T_{\text{μετ}}$ *π.χ. θα μπορούσαν να είχαν υπολογιστεί με πολύ μεγάλη ακρίβεια και χωρίς απλοποιήσεις..*

2. Δίδονται οι θετικοί α.κ.υ. $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4$. Έχετε κάθε ελευθερία να χρησιμοποιήσετε όποιον τρόπο άθροισης επιθυμείτε αλλά θα πρέπει να εκτελείται χρησιμοποιώντας το πολύ 3 πράξεις. Να προτείνετε έναν τρόπο άθροισης που ελαχιστοποιεί το μέγιστο αναμενόμενο σφάλμα. ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ: Έστω ότι (i_1, i_2, i_3, i_4) αποτελεί μια (άγνωστη προς το παρόν) μετάθεση των $(1, 2, 3, 4)$. Για συντομία, θα συμβολίζουμε τη σειρά άθροισης με την κατάλληλη τοποθέτηση παρενθέσεων στην παραπάνω μετάθεση, π.χ. η άθροιση από τα αριστερά προς τα δεξιά συμβολίζεται ως $((i_1, i_2), i_3), i_4$ ενώ η άθροιση με αναγωγή ως $((i_1, i_2), (i_3, i_4))$. Δεδομένου του μικρού πλήθους των πράξεων, συμπεραίνουμε ότι οι δυο πιθανοί τρόποι άθροισης είναι οι εξής:

$$S1 := ((\xi_{i_1} + \xi_{i_2}) + \xi_{i_3}) + \xi_{i_4}$$
$$S2 := (\xi_{i_1} + \xi_{i_2}) + (\xi_{i_3} + \xi_{i_4}).$$

Τότε, σύμφωνα με το μοντέλο διάδοσης σφάλματος, μπορούμε να πούμε ότι η τιμή που θα υπολογίζαμε με το $S1$ είναι

$$\begin{aligned} \text{fl}(s) &= (((\xi_{i_1} + \xi_{i_2})(1 + \delta_1) + \xi_{i_3})(1 + \delta_2) + \xi_{i_4})(1 + \delta_3) \\ &= \xi_{i_1}(1 + \theta_3) + \xi_{i_2}(1 + \hat{\theta}_3) + \xi_{i_3}(1 + \theta_2) + \xi_{i_4}(1 + \delta_3) \end{aligned}$$

με τις γνωστές ανισότητες $|\delta_3| \le u, |\theta_j| \le \gamma_j = \frac{ju}{1-ju}$. Επομένως, το σφάλμα (καθώς τα ξ_i είναι θετικά)

$$\begin{aligned} |\text{fl}(s) - s| &= |\xi_{i_1}\theta_3 + \xi_{i_2}\hat{\theta}_3 + \xi_{i_3}\theta_2 + \xi_{i_4}\delta_3| \\ &\le \xi_{i_1}|\theta_3| + \xi_{i_2}|\hat{\theta}_3| + \xi_{i_3}|\theta_2| + \xi_{i_4}|\delta_3| \\ &\le \xi_1\gamma_3 + \xi_2\gamma_3 + \xi_3\gamma_2 + \xi_4 u \\ &\le s\gamma_3. \end{aligned}$$

Με βάση την παραπάνω σειρά άθροισης, η βέλτιστη επιλογή με βάση την ελαχιστοποίηση της μέγιστης αναμενόμενης τιμής για το σφάλμα θα είναι $(((1, 2), 3), 4)$. Εναλλακτικά, η ενθετική άθροιση χρησιμοποιεί την παρακάτω σειρά άθροισης: 1) $t = \xi_1 + \xi_2$, 2) αν $t \le \xi_4$ τότε $s = (t + \xi_3) + \xi_4$, αλλοιώς $s = (\xi_3 + \xi_4) + t$. Η πρώτη περίπτωση της (2) είναι ίδια με την περίπτωση που αναλύσαμε παραπάνω ($S1$). Η δεύτερη περίπτωση είναι ίδια με την αναγωγική άθροιση σε ζεύγη ($S2$) με την επιλογή $((1, 2), (3, 4))$ για τους δείκτες, οπότε έχουμε την παρακάτω ανάλυση (τα ενδιάμεσα βήματα παραλείπονται):

$$\begin{aligned} |\text{fl}(s) - s| &\le \xi_{i_1}|\theta_2| + \xi_{i_2}|\hat{\theta}_2| + \xi_{i_3})|\tilde{\theta}_2| + \xi_{i_4})|\tilde{\theta}_2'| \\ &\le s\gamma_2. \end{aligned}$$

Επομένως, αν $\xi_1 + \xi_2 > \xi_4$ προτιμάται η $S2$ ειδάλλως η $S1$ (επιλέγουμε αυθαίρετα σε περίπτωση ισότητας). Σημειωση: Και οι 2 απαντήσεις είναι σωστές. Χρειάζεται όμως να τα τεκμηριώσετε με βάση τη διάδοση σφάλματος που έχετε διδαχθεί.

3. Σωστό ή Λάθος: Γενικά, αν ένας αλγόριθμος είναι πίσω σταθερός, τότε μικρές αλλαγές στα στοιχεία εισόδου του αλγορίθμου οδηγούν κατ΄ ανάγκη σε μικρές αλλαγές στο υπολογισμένο αποτέλεσμα. ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ: Προβληματιζόμαστε επομένως για το μέγεθος που μπορεί να λάβει το $\|f_{\rm prog}(x) - f_{\rm prog}(\hat{x})\|$ όταν το $\|x - \hat{x}\|$ είναι μικρό, εαν γνωρίζουμε ότι για κάθε x, υπάρχει αντίστοιχο $x_{\rm prog}$ τέτοιο ώστε α) $\|x_{\rm prog} - x\|$ είναι μικρό, και β) $f_{\rm prog}(x) = f(x_{\rm prog})$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε ότι υπάρχουν $x_{\rm prog}$ και $\hat{x}_{\rm prog}$ τέτοια ώστε $f_{\rm prog}(x) = f(x_{\rm prog})$ και $f_{\rm prog}(\hat{x}) = f(\hat{x}_{\rm prog})$, και $\|x_{\rm prog} - x\|$, $\|\hat{x}_{\rm prog} - \hat{x}\|$ μικρά. Επομένως,

$$\begin{aligned}\|f_{\rm prog}(x) - f_{\rm prog}(\hat{x})\| &= \|f(x_{\rm prog}) - f(\hat{x}_{\rm prog})\| \\ &\leq \mathrm{cond}(f; x_{\rm prog})\|x_{\rm prog} - \hat{x}_{\rm prog}\|.\end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος δεξιά μπορεί να δειχτεί ότι είναι μικρός καθώς

$$\|x_{\rm prog} - \hat{x}_{\rm prog}\| \leq \|x_{\rm prog} - x\| + \|\hat{x}_{\rm prog} - \hat{x}\| + \|x - \hat{x}\|$$

και οι όλοι οι όροι είναι μικροί από τους περιορισμούς του προβλήματος. Δυστυχώς, όμως, δεν υπάρχει τρόπος να φράξουμε το $\mathrm{cond}(f; x_{\rm prog})$, οπότε μια μικρή αλλαγή στα δεδομένα μπορεί να έχει για αποτέλεσμα μεγάλη αλλαγή στο υπολογισμένο αποτέλεσμα.

4. Να εξεταστεί κατά πόσον η πράξη του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων ($xy^\top$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ διανύσματα στήλες) είναι πίσω ευσταθής. ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ: Κεφ. 4.2.2, σελ. 120-1.

5. Να εξηγήσετε ποια είναι η αρχή ακριβούς στρογγύλευσης και με ποιό τρόπο θεμελιώνει τη διάδοση σφάλματος σε κάθε στοιχειώδη πράξη κινητής υποδιαστολής. ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ: Η αρχή περιγράφεται ακριβώς στο κεφ. 3.3, σελ. 59. *Δεν αρκεί μόνον η αναφορά της σχέσης (3.5), χρειάζεται και επεξήγηση.* Η αρχή αυτή θεμελιώνει τη διάδοση του σφάλματος μια και από αυτήν ακολουθεί η σχέση *(3.6)* ή μπορείτε ισοδύναμα να αναφέρετε σχέση/εις από το Πόρισμα 3.3.1 ή την Παρατήρηση 3.3.3.

6. Έστω τα διαστήματα (πραγματικών) αριθμών $[1, 2]$ και $[2, 3]$. Σε ποιο από αυτά περιέχονται περισσότεροι α.κ.υ.; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ: Διαισθητικά, όπως έχουμε δει από την κατασκευή των α.κ.υ. η πυκνότητά τους σε διάστημα δοθέντος μήκους μειώνεται καθώς μεγαλώνουν (εξάλλου αυτό είναι που επιτρέπει την αναπαράσταση τόσο μεγάλων αριθμών). Ειδικότερα, γνωρίζουμε ότι η απόλυτη απόσταση δυο διαδοχικών α.κ.υ. είναι $2^{1-t} \times 2^e$. Επομένως, στο διάστημα $[1, 2]$ η απόσταση είναι ακριβώς 2^{1-t}. Η πυκνότητα είναι διπλάσια από το $[2, 3]$, όπου η ελάχιστη απόσταση είναι $2 \times 2^{1-t}$. Επομένως το διάστημα $[1, 2]$ περιέχει περισσότερους α.κ.υ. (πλήθος $= 2^{t-1}$). Για άλλα διαστήματα που βρίσκονται πιο δεξιά (π.χ. $[1000, 1001]$) η απόσταση διαδοχικών α.κ.υ. είναι ακόμα μεγαλύτερη, επομένως το διάστημα θα περιέχει ακόμα λιγότερους σε πλήθος α.κ.υ.

7. Δίδονται τα στοιχεία $A \in \mathbb{R}^{10\times n}$ και $b \in \mathbb{R}^n$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το $y \leftarrow Ab$. Το n δεν έχει κανέναν περιορισμό. α) Ποιό είναι το $\Phi_{\min}$ για την πράξη· β) Να δείξετε πώς μπορείτε να υλοποιήσετε τον πολλαπλασιασμό με $\Phi = \Phi_{\min}$ χρησιμοποιώντας κρυφή μνήμη και καταχωρητές $O(1)$ (δηλ. χώρο ταχέως προσπελάσιμης προσωρινής αποθήκευσης μεγέθους ανεξάρτητου του n). ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ: Θεωρούμε ότι $y = 0$ οπότε ο υπολογισμός είναι ισοδύναμος με τον $y \leftarrow y + Ab$. α) Το $\Phi_{\min} = 11n + 20$, δηλ. όσα είναι και το πλήθος των χρήσιμων στοιχείων εισόδου και εξόδου. Εναλλακτικά μπορείτε να θέσετε $\Phi_{\min} = 11n + 10$. β) Η σχετική ύλη υπάρχει και στις διαφάνειες. Συνοψίζουμε λέγοντας ότι η υλοποίηση μπορεί να κωδικοποιηθεί ως εξής, εφόσον διατίθεται χώρος για την αποθήκευση σε καταχωρητές και cache της τάξης του $O(1)$.

1. LOAD y
2. for $j = 1 : n$
3.   LOAD $b(j)$
4.   for $i = 1 : 10$
5.   LOAD $A(i, j)$
6. $y(i) = y(i) + A(i, j) * b(j)$
7.   end
8. end
9. STORE y

Αν μετρήσετε το κόστος μεταφορών θα είναι $10+n(1+10)+10$ δηλ. ίδιο με το $\Phi_{\min}$. Εναλλακτικά, αν δεν θελήσετε να χρησιμοποιήσετε την αρχικοποίηση στο y μπορείτε να θεωρήσετε ότι αρχικοποιούνται 10 καταχωρητές με 0 (έστω οι $R1, R2, ..., R10$ και μετά η πράξη υπ. αριθμ. 6 αφορά τον κάθε καταχωρητή Rj. Τέλος, στο βήμα 9, γίνεται ανάθεση από τους καταχωρητές στη μεταβλητή y. Με τον τρόπο αυτό το ελάχιστο κόστος μεταφορών καθώς και το κόστος μεταφορών του αλγορίθμου είναι $\Phi_{\min} = 11n + 10$. *ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν επιχειρήσετε να κάνετε LOAD και να διατηρήσετε το b στην cache θα χρειαστούν $O(n)$ θέσεις, επομένως η λύση αυτή αποκλείεται. Η σειρά των βρόχων επίσης επιβάλλεται για το συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Επίσης δεν θέλετε να αναθέσετε στο y εντός του βρόχου γιατί τότε θα αυξηθούν κατά πολύ οι μεταφορές.*

8. Να εξηγήσετε συνοπτικά ποιο είναι το χαρακτηριστικό των σύγχρονων επεξεργαστών που αξιοποιούν κατά κύριο λόγο οι πράξεις BLAS-3 και εκμεταλλεύονται καλύτερα το Υ/Σ· α) Pipelining, β) αριθμητική κινητής υποδιαστολής, γ) ιεραρχία μνήμης, δ) αρχιτεκτονική RISC; <u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ:</u> Το (β). Οι πράξεις BLAS-3 έχουν μικρό $\mu_{\min}$, επομένως δυνάμει μεγάλη τοπικότητα σε σύγκριση με τις υπόλοιπες κατηγορίες BLAS. Αν αξιοποιηθεί η ιεραρχία της μνήμης, επιτυγχάνεται μεγάλη επίδοση.

9. Έστω ο κώδικας MATLAB που χρησιμοποιεί για στοιχεία εισόδου το μητρώο `A` (μεγέθους $n \times n$) και τα διανύσματα `y` (μεγέθους n) και `x` (μεγέθους `s`) και επιστρέφει το διάνυσμα z. Θεωρούμε ότι το s είναι πολύ μεγαλύτερο του 1 αλλά όχι μεγαλύτερο του n.

```
[z] = function(A, y, x);
I = eye(n); B = I; for j=1:length(x), B = (x(j)*A+I)*B; end; z = B*y;
```

α) Να υπολογίσετε το Ω για τον παραπάνω υπολογισμό (οι πράξεις εκτελούνται όπως ακριβώς δηλώνει ο παραπάνω κώδικας) β) Να ξαναγράψετε τον κώδικα για να πετύχετε βελτίωση στο Ω. <u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ:</u> α) Για την κατασκευή του κάθε όρου `x(j)*A+ I` χρειάζονται n^2+n πράξεις. Επίσης χρειάζονται s πράξεις MM και (εκτός βρόχου) 1 πράξη MV. Συνολικά επομένως $\Omega = s(n^2+n+n^2(2n-1))+n(2n-1) = 2n^3s + 2n^2 + ns - n$.

β) Μπορούμε να αξιοποιήσουμε την επιμεριστική και προσεταιριστική ιδιότητα και να γράψουμε αντί για το παραπάνω `z = y; for j=1:length(x), z = x(j)*(A*z) + z; end` οπότε $\Omega = s(n(2n-1) + 2n) = 2n^2s + ns$ που είναι βέβαια πολύ μικρότερο (κατά $O(1/n)$).

10. Ποιο από τα παρακάτω θα είναι το αποτέλεσμα της εκτέλεσης του κώδικα MATLAB : `1+eps-eps/2` ; α)`1`, β)`1+eps`, γ)τίποτε από τα (α),(β). Δικαιολογήστε την απάντησή σας. <u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ:</u> Η απάντηση είναι (α). Εξηγούμε: Από τον ορισμό του eps ισχύει $\mathrm{fl}(1 + \mathsf{eps}) = 1 + \mathsf{eps}$. Η επόμενη αφαίρεση μας πηγαίνει ακριβώς στο μέσο του 1 και του 1^+. Λόγω όμως της στρογγύλευσης προς το πλησιέστερο ζυγό όταν ισαπέχουμε από τους περιβάλλοντες α.κ.υ. θα βρεθούμε κατ΄ ανάγκη στο 1 δηλ. $\mathrm{fl}(1 + \mathsf{eps} - \mathsf{eps}/2) = 1$.