Ονοματεπώνυμο: .... Α.Μ. ....· Έτος ...

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ *(Σεπτέμβριος 2001)* **ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

I. *(40 β.)* Να απαντήσετε σύντομα και περιεκτικά στα παρακάτω ερωτήματα (στις ερωτήσεις Σωστό/Λάθος πρέπει να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις για να βαθμολογηθείτε).

1)[6β] Να εξηγήσετε τι είναι η μονάδα στρογγύλευσης για ένα σύστημα αριθμών κινητής υποδιαστολής και να τη γράψετε σα συνάρτηση του αριθμού των ψηφίων της ουράς t και της βάσης β.

Η μονάδα στρογγύλευσης είναι η ελάχιστη σχετική απόσταση μεταξύ διαδοχικών κανονικοποιημένων αριθμών κινητής υποδιαστολής και ισούται με $u = \beta^{1-t}/2$.

2) [6β] Ποιά συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί το μητρείο A ώστε να είναι εφικτή η παραγοντοποίηση Cholesky;

Να είναι συμμετρικό θετικά ορισμένο.

3) [6β] Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ την οποία υλοποιούμε με κάποιον αλγόριθμο. Να εξηγήσετε ακριβώς τι εννοείται αν σας πουν ότι ο αλγόριθμος αυτός είναι *πίσω σταθερός*.

Σημαίνει ότι αν τρέξουμε τον αλγόριθμο σε ένα υπολογιστικό σύστημα, τότε το υπολογισμένο αποτέλεσμα $\hat{f}$ *που θα προκύψει για τα δεδομένα του προβλήματος και που θα εμπεριέχει, κατ' ανάγκη σφάλματα από τους διαδοχικούς υπολογισμούς, θα είναι ίσο με το αποτέλεσμα που θα είχαμε αν εκτελούσαμε τις πράξεις με άπειρη ακρίβεια χρησιμοποιώντας όμως στην είσοδο δεδομένα που μπορεί να είναι λίγο διαφορετικά από τα ακριβή.*

4) [6β] Σωστό ή Λάθος: Αν ένα μητρείο είναι αντιστρέψιμο, τότε πάντα υπάρχει παραγοντοποίηση $A = LU$, όπου L είναι κάτω τριγωνικό και U άνω τριγωνικό μητρείο.

Λάθος: Για παράδειγμα, $A = [0, 1; 1, 0]$ *δεν μπορεί να γραφτεί ως* LU *γιατί τότε* $l_{11}u_{11} = 0$ *άρα* $u_{11} = 0$, *οπότε το μητρείο* U *είναι μη αντιστρέψιμο, κάτι που αποκλείεται γιατί τότε και το γινόμενο* LU *θα ήταν μη αντιστρέψιμο.*

5) [6β] Σωστό ή Λάθος: Το αντίστροφο ενός τυχόντος, αντιστρέψιμου κάτω διδιαγώνιου μητρείου είναι επίσης κάτω διδιαγώνιο.

Λάθος: Ας δούμε την πρώτη στήλη $s = [s_1, s_2, s_3]^\top$ *του αντίστροφου του μητρείου*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_{21} & 1 & 0 \\ 0 & t_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $t_{21}t_{32} \neq 0$. *Ισχύει ότι* $Ts = e_1$ *και αρκεί να δείξουμε ότι* $s_3 \neq 0$. *Εκ κατασκευής θα πρέπει να ισχύει ότι* $s_1 = 1$, $t_{21} + s_2 = 0$, $t_{32}s_2 + s_3 = 0$. *Επομένως, αν* $s_3 = 0$ *τότε* $s_2 = 0$, *επομένως* $t_{21} = 0$, *που είναι αδύνατο.*

6) [10β] Έστω ότι ένα πολυώνυμο δίνεται στη μορφή γινομένου $p_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - \rho_j)$. Να γράψετε, σε MATLAB , αλγόριθμο για τον υπολογισμό των συντελεστών της δυναμομορφής του $p_n(x)$.

Αντίστοιχη διαδικασία ακολουθήσαμε στη 2η άσκηση. Ειδικότερα, έχουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο:

$a(2) = 1; a(1) = -r(1); a(3 : n + 1) = 0$
for $j = 2 : n$
$\quad t(2 : j + 1) = a(1 : j)$, $t(1) = 0$
$\quad a(1 : j + 1) = t(1 : j + 1) - r(j) * a(1 : j + 1)$
end

II. *(60 β.)*

1. (20β) Να δείξετε α) ότι το εμπρός απόλυτο σφάλμα στον υπολογισμό της ορίζουσας $D = ad - bc$ του μητρείου $[a, b; c, d]$ (συμβολισμός MATLAB) είναι φραγμένο ως εξής: $|\hat{D} - D| \leq Au + Bu^2$, όπου u είναι η μονάδα στρογγύλευσης και να υπολογίσετε τα A και B ως προς a, b, c, d. β) Ότι το σχετικό εμπρός σφάλμα του παραπάνω υπολογισμού μπορεί να είναι πολύ μεγάλο.

   Σημειώσεις, ενότητα 3.4.4.

2. (20β) α) Να εφαρμόσετε παραγοντοποίηση LU με μερική οδήγηση και να υπολογίσετε τον παράγοντα U για το μητρείο $A = [1, 0, 0, 1; -1, 1, 0, 1; -1, -1, 1, 1; -1, -1, -1, 1]$. β) Ο δείκτης κατάστασης, ως προς την ευκλείδια νόρμα, για την επίλυση συστήματος με το A είναι $\kappa_2(A) = 1.8$. Τι συμπεραίνετε για το

εμπρός σφάλμα στην επίλυση του συστήματος $Ax = b$ για τυχόν b και το παραπάνω A όταν χρησιμοποιείται μερική οδήγηση; γ) Ποιός είναι ο παράγοντας U που προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε πλήρη οδήγηση;

Σημειώσεις, ενότητα 5.7. Το συμπέρασμα είναι ότι το εμπρός σφάλμα μπορεί να είναι μεγάλο, και θα οφείλεται, κατά κύριο λόγο, στο πίσω σφάλμα για την παραγοντοποίηση LU με μερική οδήγηση, που εξαρτάται από το συντελεστή αύξησης για το παραπάνω μητρείο.

3. (20β) Έστω η διαφορική εξίσωση (ΔΕ) $\frac{du}{dt}(t) = -Au(t)$ όπου $A = [2, -1; -1, 2]$, $u = [u_1(t), u_2(t)]^\top$ και οι συναρτήσεις u_1, u_2 είναι επιλεγμένες ώστε $u_1(0) = 2$, $u_2(0) = 1$. α) Να χρησιμοποιήσετε την εμπρός μέθοδο Euler με σταθερό βήμα $\Delta t = 0.5$ για να υπολογίσετε αριθμητική προσέγγιση της λύσης στο σημείο $T = 4.0$.

   β) Να χρησιμοποιήσετε την ίδια μέθοδο αλλά με βήμα $\Delta t = 0.8$ για να υπολογίσετε αριθμητική προσέγγιση της λύσης στο σημείο $T = 4.0$.

   Ο αλγόριθμος περιγράφεται στην ενότητα 8.2.2. Πρόκειται για την αναδρομική σχέση $U(t + \Delta t) = (I - A\Delta t)U(t)$. Εφαρμόζοντάς την, εκκινώντας από το διάνυσμα $U(0) = [2, 1]^\top$, προκύπτουν τα ακόλουθα, με τις παραπάνω επιλογές βήματος:

t	0	0.5000	1.0000	1.5000	2.0000	2.5000	3.0000	3.5000	4.0000
U_1	2.0000	0.5000	0.5000	0.1250	0.1250	0.0313	0.0313	0.0078	0.0078
U_2	1.0000	1.0000	0.2500	0.2500	0.0625	0.0625	0.0156	0.0156	0.0039

t	0	0.8000	1.6000	2.4000	3.2000	4.0000
U_1	2.0000	-0.4000	1.0400	-1.3600	1.9232	-2.6886
U_2	1.0000	1.0000	-0.9200	1.3840	-1.9184	2.6896

   γ) Είναι γνωστό ότι η ακριβής λύση του παραπάνω συστήματος των ΔΕ τείνει στο 0 καθώς το $t \to \infty$. Με βάση αυτό το στοιχείο, να σχολιάσετε τη συμπεριφορά των προσεγγίσεων που λάβατε χρησιμοποιώντας το (α) και το (β). (Υπόδειξη: Για μια πλήρη εξήγηση, είναι χρήσιμο να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του A.)

   Παρατηρούμε ότι όταν $\Delta t = 0.5$, σε κάθε βήμα οι τιμές των U_1, U_2 φθίνουν, ενώ όταν $\Delta t = 0.8$, οι τιμές αυξάνουν σε απόλυτη τιμή ενώ το πρόσημό τους αλλάζει κάθε φορά. Έτσι φαίνεται ότι καθώς το $t \to \infty$, η πρώτη προσέγγιση θα τείνει στο 0, όπως δηλαδή η ακριβής λύση του προβλήματος, ενώ η δεύτερη διαρκώς μεγαλώνει (σε απόλυτη τιμή). Για μια λεπτομερή ανάλυση του τι συμβαίνει, μπορείτε να εξετάσετε τις ιδιοτιμές: Αφού $U(t + \Delta t) = (I - A\Delta t)U(t)$ και $Q^\top AQ = \mathrm{diag}[3, 1]$ για $Q^\top Q = I$, τότε $U(t + \Delta t) = QQ^\top(I - A\Delta t)QQ^\top U(t) = Q(I - \mathrm{diag}[3\Delta t, \Delta t])Q^\top U(t)$ άρα $U(t + \Delta t) = Q\mathrm{diag}[1 - 3\Delta t, 1 - \Delta t]Q^\top U(t)$. Όταν $\Delta t = 0.5$, τότε $\max(|1 - 3\Delta t|, |1 - \Delta t|) = 0.5 < 1$, όταν όμως $\Delta t = 0.8$ τότε $\max(|1 - 3\Delta t|, |1 - \Delta t|) = 1.4 > 1$, και σε κάθε βήμα, η προσέγγιση αυξάνει σε απόλυτη τιμή.