$$H_1 \cdot A(:,2) = \left(I - \frac{2u_1u_1^T}{u_1^Tu_1}\right)A(:,2) = \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix} - \frac{2\begin{pmatrix}5\\3\\2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}(5\ 3\ 2\ \sqrt{2})\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}{(5\ 3\ 2\ \sqrt{2})\begin{pmatrix}5\\3\\2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}}$$

τυχαία

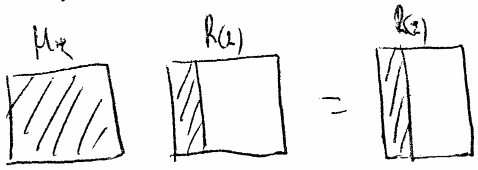
$$= \begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix} = R_{(1)}(:,2)$$

Ομοίως βρίσκω $R_{(1)}(:,3) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \to$ τυχαία

Άρα $H_1 \cdot A = R_{(1)} = \begin{pmatrix}4&1&1\\0&2&1\\0&2&1\\0&4&1\end{pmatrix}$

2ος Μετασχηματισμός

$$u_2 = x_2 + \mathrm{sign}(\xi_2)\|x_2\|_2 e_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\2\\4\end{pmatrix} + \sqrt{24}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix}0\\x\\x\\x\end{pmatrix}$$



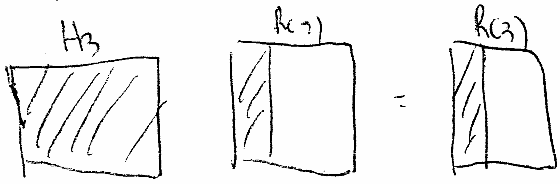
$R_1(:,1) = R_2(:,1)$

$H_2 \cdot R_{(1)}(:,2) = R_{(2)}(:,2)$

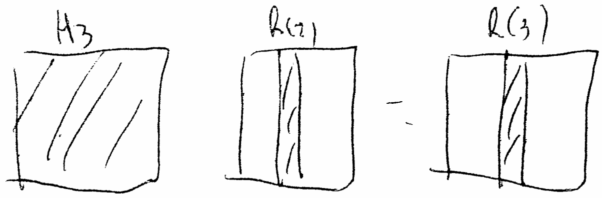
$H_2 \cdot R_{(1)}(:,3) = R_{(2)}(:,3)$

3ος Μετασχηματισμός

$$u_3 = x_3 + \mathrm{sign}(\xi_3)\|x_3\|_2 e_3 = \ldots = \begin{pmatrix}0\\0\\x\\x\end{pmatrix}$$



$\Rightarrow R_{(2)}(:,1) = R_3(:,1)$

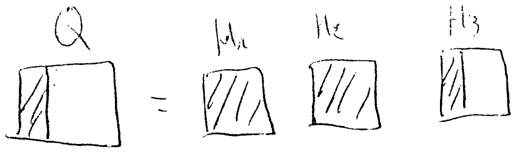


$\Rightarrow R_{(2)}(:,2) = R_3(:,2)$

$H_3 \cdot R_{(2)}(:,3) = R_{(3)}(:,3)$

$R_{(3)} = R$

Επιστημονικό Φροντιστήριο 20/12/11 (3)



$Q = H_1 H_2 H_3$

$$\Rightarrow Q = \left(I - \frac{2u_1u_1^T}{u_1^Tu_1}\right)\left(I - \frac{2u_2u_2^T}{u_2^Tu_2}\right)\left(I - \frac{2u_3u_3^T}{u_3^Tu_3}\right)$$

$$\Rightarrow Q(:,1) = \left(I - \frac{2u_1u_1^T}{u_1^Tu_1}\right)\left(I - \frac{2u_2u_2^T}{u_2^Tu_2}\right)\left(I - \frac{2u_3u_3^T}{u_3^Tu_3}\right) \cdot e_1 \quad * \quad \left(\text{Από δεξιά προς τα αριστερά}\right)$$

$$\Rightarrow Q(:,2) = Q \cdot e_2 \qquad (- \ \text{''} \ -)$$

$$\Rightarrow Q(:,3) = Q \cdot e_3 \qquad (- \ \text{''} \ -)$$

$$*: \pi.\chi. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Mina [illegible]

[illegible]

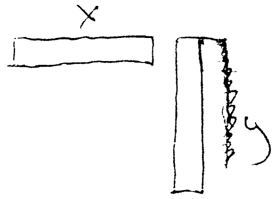
Επιστημονικός Φροντιστήριο

(1)

10/10/1

• DOT : $x \in \mathbb{R}^n$
$y \in \mathbb{R}^n$

$(m\times n)(n\times k)$ → $m\times k$

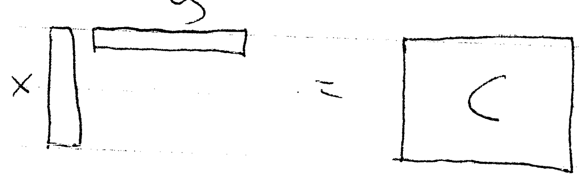


$$(x_1, x_2, \dots, x_n)\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = (x_1y_1+\dots+x_ny_n$$

$$\Phi_{min} = \left.\begin{matrix}\text{loads} & 2n\\ \text{Store} & 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2n+1$$

$$\underline{O} = n+n-1 = 2n-1$$

• Εξωτερικό γινόμενο

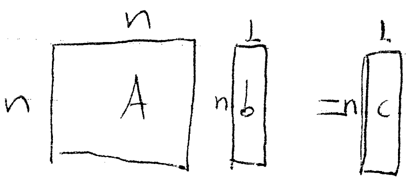


$$\Phi_{min} = \overset{(x)}{n} + \overset{(y)}{n} + \overset{(C)}{n^2}$$

$$\underline{O} = n^2$$

• $C = Ab$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$b \in \mathbb{R}$

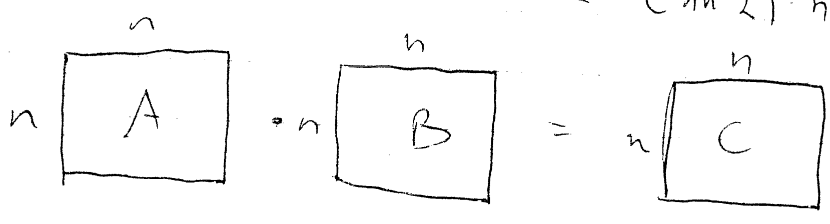


$$\Phi_{min} = \overset{(A)}{n^2} + \overset{(b)}{n} + \overset{(C)}{n}$$

$$\underline{O} = (2n-1)\cdot n \quad [n \cdot DOT]$$

• $C = A\cdot B$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$



$$\Phi_{min} = \overset{(A)}{n^2} + \overset{(B)}{n^2} + \overset{(C)}{n^2} = 3n^2$$

$$\underline{O} = (2n-1)\cdot n^3 \quad [n^2 \cdot DOT]$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\1 & 2 & 2\\1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2\\1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2\\1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 4\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\7\\10\end{pmatrix}$$

AXPY $\quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot(1) = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\cdot(1) = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\cdot(1) = \begin{pmatrix}7\\7\\10\end{pmatrix}$$

π.χ. σε δίσημο πρόβλημα

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \varepsilon < \sqrt{\varepsilon_{machine}}$ $\qquad \varepsilon^2 < \varepsilon_{machine}$ $\rightarrow$ ισίζων

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon^2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

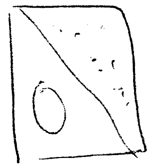
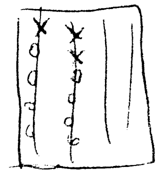
$\rightarrow$ Έχει άπειρο δείκτη κατάστασης

2ος Τρόπος QR

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$A = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

$A = QR, \quad Q \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad R \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Θέλω $R =$  Ας και $A =$ 

$$H = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv} \qquad v = A_i \pm e_i \|A_i\|$$

Householder: Ορθογώνιοι κ' Συμμετρικοί
αναλλοιωτές)

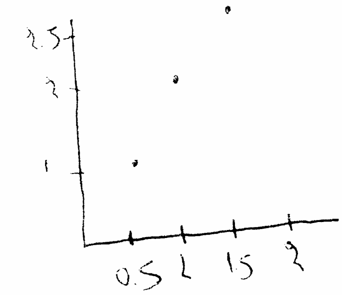
H_i' είναι $(m-1)\times(m-1)$, θέλω $m \times m$

- Μπορώ να θέσω με είναι 0 το v_1 κ' τότε $m \times m$
- H' $\quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_2' \end{bmatrix}$

$$H_n(H_{n-1} \ldots (H_2(H_1 A))) = R$$

$$A = \underbrace{H_1^T \ldots H_n^T}_{Q} R = \underbrace{H_1 \ldots H_n}_{Q} R$$

Ελάχιστα Τετράγωνα



$f(x)$: ...

$f(0.5)=1$

$f(1)=2$

$f(1.5)=2.5$

$t_i,\ i\in[0,m]$

m παρατηρήσεις

Έστω $x=\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

Να προσεγγίσω το x ως γραμμικός συνδυασμός των k_1, k_2

Θεωρώ $A=\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 \end{bmatrix}$

- έχω τόσες γραμμές όσες οι παρατηρήσεις μου
- 3 στήλες βάζω τις η συναρτήσεις που δέχεται την f (τις επιλέγω εγώ)

$$A\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_m) \end{bmatrix}$$

Ψάχνω το X. Το A είναι υπερορισμένο. Άρα έχω πολλούς περιορισμούς & είναι δύσκολο να βρω ακριβή λύση. Παίρνω προσέγγιση.

$p=x_1+x_2t+x_3t^2$ Όπου p το πολυώνυμο που προσεγγίζει της λύσης

$r=b-Ax$

Θέλω να ελαχιστοποιήσω $\sum_{i=1}^{n} r_i^2$

Έστω οι στήλες του A γραμμικά ανεξάρτητες

1ος Τρόπος: Κανονικές Εξισώσεις

PC wizard

Επιστημονικό Φροντιστήριο 10/10/11

Ασκ) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad y = (A - wI)x = A \cdot x - wIx = Ax - wx$

$w \in \mathbb{R}$

$I = eye(n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$x \in \mathbb{R}^n$

$\underline{O} = (2n-1)n + n + n$

$\Phi_{min} = \underset{(A)}{n^2} + \underset{(x)}{n} + \underset{(w)}{1} + \underset{(y)}{n}$

Επιστημονικό Φροντιστήριο 14/10/11

- DOT: $\sigma = x^T y$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ $\quad \underline{O} = 2n-1$, $\Phi = 2n+1$
- SAXPY: $y = y + \alpha x$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \underline{O} = n + n = 2n$, $\Phi = 3n+1$
- Πολλαπλασιασμός μητρώου-διανύσματος MV

$y = y + Ax$ $\quad \Phi_{min} = n_1 + n_1 \cdot n_2 + n_2 + n_1$

$\underline{O} = (2n_2 - 1) \cdot n_1 + n_1 = 2n_1 n_2$

i) με DOT

```
for i=1:n1 (Load y_i)
  for j=1:n2 (Load A(i,j), x(j))
    y_i = y_i + A(i,j) • x(j)
  end
end (Store y_i)
```

ii) με SAXPY

```
for j=1:n2 (Load x_j)
  for i=1:n1 (Load A(i,j), y_i)
    y_i = y_i + A(i,j) • x(j)
  end
end (Store y_i)
```

[ger-ij ⟵ 1η Άσκηση (II) ⟶ ger-ji]

* SAXPY: $\Phi_{min} = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_2 + n_2 = n_2 + 3n_1 n_2$

$\underline{O} = 2n_1 n_2$

DOT: $\Phi_{min} = n_1 + n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_2 + n_1 = 2n_1 + 2n_1 n_2$

$\underline{O} = 2n_1 n_2$

*: cache O(1)

$$1.X \quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & \boxed{2} & 3\\ 1 & \boxed{2} & 2\\ 1 & \boxed{2} & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \boxed{1}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1\\ 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1\\ 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 4\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\7\\10\end{pmatrix}$$

$$\text{SAXPY}: \quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot(1) = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\cdot(1) = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\cdot(1) = \begin{pmatrix}7\\7\\10\end{pmatrix}$$

Επιστημονικός Φροντιστήριο 14/10/11

magic(A) : τυχαίο τετραγωνικό μητρώο με σταθερό άθροισμα γραμμών / στηλών

sum(A): άθροισμα γραμμών
sum(A'): άθροισμα στηλών
mean(A): μέσο όρο γραμμών
trace(A): άθροισμα διαγωνίων
fliplud(A): αλλάζει τάξη το A
trace(fliplud(A)): άθροισμα αντιδιαγωνίων
rank(A) : πλήθος ανεξάρτητων στηλών

1.1. $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

$F_3^{(3)} = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$ $\qquad F_4^{(3)} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$ $F_3^{(3)}$

$F_4^{(3)} = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_3 \\ f_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_4 \\ f_3 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 \\ f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow F_{(n)}^{(3)} = A \cdot F_{(n-1)}^{(3)}$

άρα) $F_n = A^{n-3} F_3$

1.2. $A = S \cdot \Lambda \cdot S^{-1}$

$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$ ιδιοτιμές

$A^2 = A \cdot A = S \cdot \Lambda S^{-1} S \cdot \Lambda S^{-1}$
$\Rightarrow A^2 = S \Lambda^2 S^{-1}$

$S = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}$ ιδιοδιανύσματα

$A^{100} = \underbrace{\underset{A}{S\Lambda S^{-1}} \; \underset{A}{S\Lambda S^{-1}} \dots \underset{A}{S\Lambda S^{-1}}}_{100\ A}$

$\Lambda^3 \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & & \\ & \lambda_2^3 & \\ & & \lambda_3^3 \end{bmatrix}$ πάει από $O(kn^3) \to O(n^3)$ $\Rightarrow A^{100} = S \Lambda^{100} S^{-1}$

Επιστημονικός Υπολογισμός 31/1/11 (1)

Ασκ. $f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ να μελετηθεί ως προς την πίσω ευστάθεια

Πρέπει $X \simeq X^*$ & $f_{prog}(X) = f(X^*)$

$$f_{prog}(X) = \left\{\left[\left(x_1^2(1+\delta_1) + x^2(1+\delta_2)\right)(1+\delta_3) + x^3(1+\delta_4)\right](1+\delta_5) + x_4^2(1+\delta_6)\right\} =$$

$$= x_1^2(1+\theta_4) + x_2^2(1+\theta_4') + x_3^2(1+\theta_3) + x_4^2(1+\theta_2)$$

Άρα $X^* = \begin{bmatrix} x_1\sqrt{1+\theta_4} \\ x_2\sqrt{1+\theta_4'} \\ x_3\sqrt{1+\theta_3} \\ x_4\sqrt{1+\theta_2} \end{bmatrix} \Rightarrow f(X^*) = f_{prog}(X)$

Για το X_1^*: $\quad \dfrac{|x_1^* - x_1|}{|x_1|} = \dfrac{|x_1\sqrt{1+\theta_4} - x_1|}{|x_1|} = \dfrac{|x_1(\sqrt{1+\theta_4} - 1)|}{|x_1|}$

$$\Rightarrow \frac{|x_1^* - x_1|}{|x_1|} \leq \left|\sqrt{1+\theta_4} - 1\right|$$

$$\Rightarrow \frac{|x_1^* - x_1|}{|x_1|} \leq \frac{|\theta_4|}{|\sqrt{1+\theta_4} + 1|} \leq |\theta_4| \leq |\gamma_4|$$

Άρα πίσω ευσταθής

T

MATLAB

- $Ax = b$
  $\Rightarrow PAx = Pb$
  $\Rightarrow LUx = Pb$

  $[L, U, P] = lu(A)$

  $x = U \backslash (L \backslash (P * b))$
  $= U^{-1}(L^{-1}(Pb))$

  $Ux = y$
  $y = Pb$ (1)
  $Ux = y$ (2)

  Άρα κόστος $\frac{2}{3}n^2 + O(n^2)$ για LU
  n^2 για U^{-1}
  n^2 για L^{-1}

- Άρα αν το κάνω n φορές θα έχω $O(n^4)$, πολύ μεγάλο
  Αν βγάλω το βήμα $[L, U, P] = lu(A)$ έξω από το βρόχο
  το κόστος μου θα είναι $\frac{2}{3}(n^3) + O(n^3)$

- $Ax = b$
  $\Rightarrow QRx = b$
  $\Rightarrow Rx = Q^T b$ Άρα λύνω το τριγωνικό σύστημα με κόστος n^2

- Για να βρω $A^{-1} = R^{-1}Q^T$

Σ.Θ.Ο : $A = A^T$ και $x^T A x > 0$ και μπορεί να γραφεί $A = L \cdot L^T$ Cholesky

Αν $A = A^T$ και $\lambda_i > 0 \Rightarrow$ Σ.Θ.Ο

Π.χ. με δείκτη κατάστασης

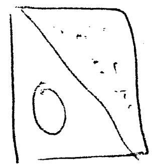
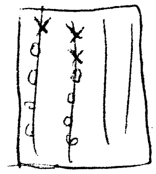
$A=\begin{bmatrix}1&1\\ \varepsilon&0\\0&\varepsilon\end{bmatrix}$, $\varepsilon<\sqrt{\varepsilon_{machine}}$ $\varepsilon^2<\varepsilon_{machine}$ → Ισχύει

$$A^TA=\begin{bmatrix}1&\varepsilon&0\\1&0&\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\ \varepsilon&0\\0&\varepsilon\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\varepsilon^2&1\\1&1+\varepsilon^2\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$ → Έχει άπειρο δείκτη κατάστασης

Λύση => Τρόπος QR

$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ $A=\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$

$A=QR$, $Q\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $R\in\mathbb{R}^{m\times n}$

Θέλω $R=$  Από $A=$ 

$$H=I-2\frac{vv^T}{v^Tv}\qquad v=A_i\pm e_i\|A_i\|$$

Householder: Ορθογώνιοι κ' Συμμετρικοί ανακλαστές)

H_2' είναι $(m-1)\times(m-1)$, θέλω $m\times m$

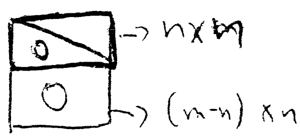
- Μπορώ να θέσω να είναι 0 το v_2 κ' την $m\times m$
- Ή $H_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&H_2'\end{bmatrix}$

$$H_n(H_{n-1}\dots(H_2(H_1A)))=R$$

$$A=\underbrace{H_1^T\dots H_n^T}_{Q}R=\underbrace{H_1\dots H_n}_{Q}R$$

$$\|b-Ax\|=\|Q^T\|\,\|b-Ax\|=\|Q^Tb-Q^TAx\|=\|Q^Tb-Q^TQRx\|=\|Q^Tb-Rx\|\quad (1)$$

$\|Q^T\|=1$ ο.τ. ορθογώνιος μετασχηματισμός

Στη γενική μορφή $A=\boxed{m\times n}$ 

$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ $b_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $b_2\in\mathbb{R}^{(m-n)\times n}$

$Q^Tb=\begin{bmatrix}Q^Tb_1\\Q^Tb_2\end{bmatrix}$

$$(1)=\left\|\begin{bmatrix}Q^Tb_1\\Q^Tb_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}R^*\\0\end{bmatrix}x\right\|=\left\|\begin{bmatrix}Q^Tb_1-R^*x\\Q^Tb_2\end{bmatrix}\right\|$$

Άρα μπορώ να βρω x για να μηδενίσω το πάνω μέρος ώστε το σφάλμα μου να είναι Q^Tb_2 που δεν μπορώ ...

Πιο καλύτερο να τόσο (μπορώ) ξεφύγει το σφάλμα

Επισυστηματικός τριγωνισμός

Μερική οδήγηση:

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ → αλλάζω 1η με 3η γραμμή Ι

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P \cdot A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Πλήρη οδήγηση: → Αλλάζω 1η με 3η στήλη Ι

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{PA}$$

ή και $PA = LU$

2) Cholesky

1) $A = A^T$ (A συμμετρικός)

2) $x^T A x > 0$ (θετικά ορισμένο)

Τσεκάρω ιδιότητες, αν είναι SO τότε θετικά ορισμένο

Χρησιμοποιώ θεώρημα Gerschgorin ή βρίσκω πεδίο τιμών ιδιοτιμών

$A = R^T R$ ή $A = R R^T$

R^T: άνω τριγωνικό, R: κάτω τριγωνικό

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 16 \end{pmatrix}$

$|4-\lambda| \le |1|+|1| = 2$ κύκλος με $k=4$, $\rho=$

$|4-\lambda| \le |1|+|2| = 3$ κύκλος με $k=4$, $\rho=$

$|16-\lambda| \le |1|+|2| = 3$ κύκλος με $k=16$, $\rho=$

Ένωση των κύκλων δίνει πεδίο τιμών ιδιοτιμών

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ r_2 & r_3 & 0 \\ r_4 & r_5 & r_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_4 \\ 0 & r_3 & r_5 \\ 0 & 0 & r_6 \end{pmatrix}$$

κόστος $n^3/3$

Π.χ. με δείκτη κατάστασης

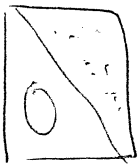
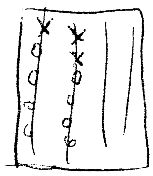
$A=\begin{bmatrix}1&1\\ \varepsilon&0\\0&\varepsilon\end{bmatrix}$, $\varepsilon<\sqrt{\varepsilon_{machine}}$ $\quad \varepsilon^2<\varepsilon_{machine}$ → Ισχύει

$$A^TA=\begin{bmatrix}1&\varepsilon&0\\1&0&\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\ \varepsilon&0\\0&\varepsilon\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\varepsilon^2&1\\1&1+\varepsilon^2\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$ → Έχει άπειρο δείκτη κατάστασης

2ος) Τρόπος QR

$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad A=\begin{bmatrix}\; \\ \; \\ \;\end{bmatrix}$

$A=QR$, $Q\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $R\in\mathbb{R}^{m\times n}$

Θέλω $R=$  Άρα και $A=$ 

$$H=I-2\frac{vv^T}{v^Tv}\qquad v=A_i\pm e_i\|A_i\|$$ Householder: Ορθογώνιοι και Συμμετρικοί ανακλαστές

H_2' είναι $(m-1)\times(m-1)$, θέλω $m\times m$

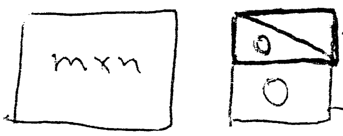
- Μπορώ να θεωρήσω ότι είναι 0 το v_1 και τότε $m\times m$
- Ή $H_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&H_2'\end{bmatrix}$

$$H_n(H_{n-1}\ldots(H_2(H_1A)))=R$$

$$A=\underbrace{H_1^T\ldots H_n^T}_{Q}R=\underbrace{H_1\ldots H_n}_{Q}R$$

$$\|b-Ax\|=\|Q^T\|\,\|b-Ax\|=\|Q^Tb-Q^TAx\|=\|Q^Tb-Q^TQRx\|=\|Q^Tb-Rx\|\quad (1)$$

$\|Q^T\|=1$ ως ορθογώνιος μετασχηματισμός

Στη γενική μορφή $A=$  $m\times n$ → $n\times n$, $(m-n)\times n$

$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ $\quad b_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $b_2\in\mathbb{R}^{(m-n)\times n}$

$Q^Tb=\begin{bmatrix}Q^Tb_1\\Q^Tb_2\end{bmatrix}$

$(1)=\left\|\begin{bmatrix}Q^Tb_1\\Q^Tb_2\end{bmatrix}-R\,x\right\|$ → R^*

$$=\left\|\begin{bmatrix}Q^Tb_1-R^*x\\Q^Tb_2\end{bmatrix}\right\|$$

Άρα μπορώ να βρω x για να μηδενίσω το πάνω μέρος ώστε το σφάλμα μου να είναι Q^Tb_2 που δεν μπορώ

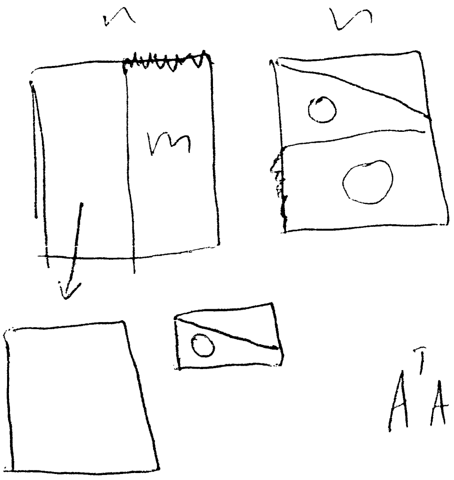
Όσο μικρότερο η τόσο μικρό ξεφεύγει το σφάλμα

Επιστημονικός Φροντιστήριο 9/12/11 (5)

m < n

n×m

$A = QR \rightarrow$



δεν πολύ λεπτομέρεια

$$A^TA = (QR)^T(QR) = R^TQ^TQR = R^TR$$

ίσως πως σε μικρότερη διάσταση n×m

Μεγάλος βαθμός πολυωνύμου ⇒ μεγάλο πολλαπλασιασμό ⇒ αλλάζει ο δείκτης κατάστασης και condition

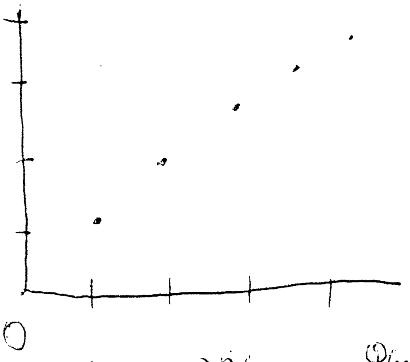
Έξω από τα δοσμένα σημεία δε ανταποκρίνεται

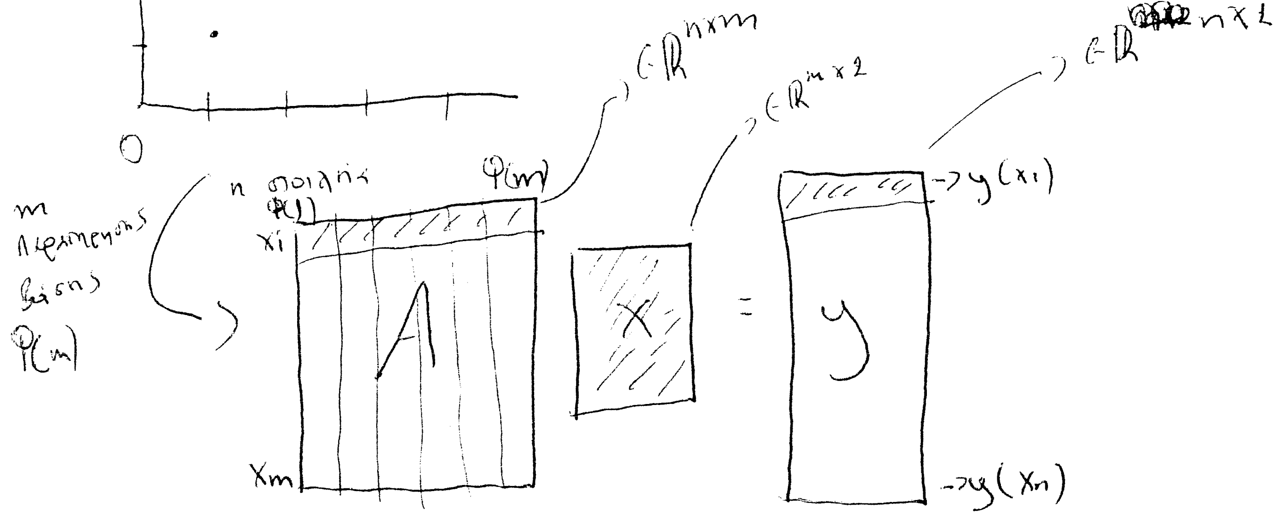
Ελάχιστα τετράγωνα

$(x_i, y(x_i))$

$y(x_i)$, $i = 1, \dots, n$

n μετρήσεις





Για την 1η στήλη: $\varphi_1(x_i)$, $i = 1, \dots, n$

π.χ. $\varphi_1(x_i) = x_i^{n-1}$

π.χ. $\varphi_2(x_i) = x_i^{n-2}$

$\vdots$

$\varphi_m(x_i) = x_i^{n-2}$

κι αφού ξέρω τα x_i ξέρω όλο το A

$$Ax = y \Rightarrow \underbrace{A^T A}_{m \times m} x = A^T \cdot y \Rightarrow x = (A^T A)^{-1} \cdot A^T y$$

πολλαπλασιάζει τους δείκτες κατάστασης $\text{cond}(A^T A) = \text{cond}(A)^2$ που είναι πολύ μεγάλο

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \Rightarrow A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & \delta & 0 \\ 1 & 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\delta^2 & 1 \\ 1 & 1+\delta^2 \end{bmatrix}$

Αν δ πολύ μικρό π.χ. 10^{-4} τότε $A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ που δεν αντιστρέφεται άρα δεν βρίσκω x

Επιστημονικό Φροντιστήριο 16/12/11 (1)

ΠΑΡ/ΣΗ QR $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (με Householder)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι μετασχηματισμοί Householder είναι ορθογώνιοι, άρα $H_i^{-1} = H_i$. Το Q είναι ορθογώνιο κι το R άνω τριγωνικό.

$$H_3(H_2(H_1 A)) = R$$
$$\Rightarrow A = (H_3 H_2 H_1)^{-1} R$$
$$\Rightarrow A = H_1^{-1} H_2^{-1} H_3^{-1} R$$
$$\Rightarrow A = H_1 H_2 H_3 R$$
$$\Rightarrow A = QR$$

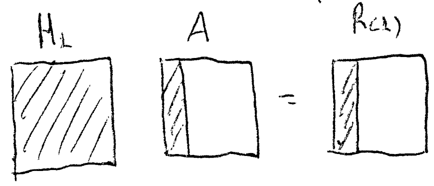
- $Ax = b \Rightarrow H_1 H_2 H_3 R x = b \Rightarrow Rx = H_3 H_2 H_1 b$
- $H = I - \dfrac{2uu^T}{u^T u}$ → διάνυσμα Householder
- $u = x + \mathrm{sign}(\xi)\,\|x\|_2\, e_k$

- x: το διάνυσμα που θέλω να μηδενίσω (π.χ. κάποια στήλη)
- ξ: το στοιχείο πάνω από αυτά που θέλω να μηδενίσω.
- e_k: μοναδιαίο διάνυσμα

Αποφεύγω τον υπολογισμό, λόγω του εξωτερικού γινομένου.

1ος Μετασχηματισμός

$$u_1 = x_1 + \mathrm{sign}(\xi_1)\,\|x_1\|_2\, e_1 =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \sqrt{1^2+3^2+2^2+\sqrt{2}^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$



$$H_1 \cdot A(:,1) = \left(I - \frac{2u_1u_1^T}{u_1^T u_1}\right) \cdot A(:,1) =$$
$$= A(:,1) - \frac{2u_1 (u_1^T A(:,1))}{u_1^T u_1} =$$ → Εσωτερικό γινόμενο!!

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{\left((5\ 3\ 2\ \sqrt{2})\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right)}{(5\ 3\ 2\ \sqrt{2})\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{20}{40} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = R_1(:,1)$$

[illegible] [illegible] $\quad$ 1 3 (1 1 1 1 1 $\quad$ ①

- $Ax = b$

$A^T A x = A^T b$

$x = (A^T A)^{-1} A^T b$

$b \simeq Ax = \boxed{A (A^T A)^{-1} A^T} b \Rightarrow$ Τελεστής προβολής ✱

με SVD: $A = U\Sigma V^T$

$A^T A = (U\Sigma V^T)^T U \Sigma V^T$

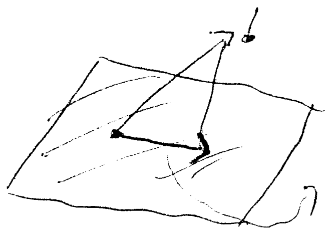
$A^T A = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T$

$A^T A = V (\Sigma^T \Sigma) V^T$

$\Rightarrow (A^T A)^{-1} = V (\Sigma^T \Sigma)^{-1} V^T$

$\Rightarrow x = V(\Sigma^T\Sigma)^{-1} V^T V \Sigma^T U^T b$

$\Rightarrow x = V(\Sigma^T\Sigma)^{-1} \Sigma^T (U^T b)$



η προβολή του b στο χώρο

- $A = QR$

Αν Q ορθογώνιο τότε $\|Qy\|_2 = \|y\|_2$

$\hookrightarrow QQ^T = I$

$\|b - Ax\| = \|b - QRx\| \overset{①}{=} \|Q^T b - Rx\|$

$Q = [Q_1, Q_2]$

$= \left\| \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} b - \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} x \right\|$

$= \left\| \begin{bmatrix} Q_1^T b \\ Q_2^T b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_1 x \\ 0 \end{bmatrix} \right\|$

$Q_2^T b \Rightarrow$ περισσεύει

Αν το b δεν είχε προβολή στο Q_2, τότε ήταν ακριβής λύση (κ χαμένα)

Άρα για να το ελαχιστοποιήσω είναι $R_1 x = Q_1^T b$

$\Rightarrow x = R_1^{-1} Q_1^T b$

✱: $\dfrac{xx^T}{x^T x} y \rightarrow$ προβολή του y στο x

Για κάποιο ορθογώνιο πίνακα P αν είναι $\hat{A} = P^T A P$ δεν αλλάζουν οι ιδιοτιμές του A

A