Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής
Επιστημονικός Υπολογισμός
Ιούνιος 2011
Εξεταστής: Καθ. Ευστράτιος Γαλλόπουλος

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

Θέμα 1° (3.5 μονάδες)

Έστω τετραγωνικά μητρώα $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ με $n=2^k$ και k θετικός ακέραιος.

α) Περιγράψτε την βασική ιδέα καθώς και ψευδοκώδικα του υπερταχύ αλγορίθμου πολλαπλασιασμού μητρώων Strassen

(2 μονάδες)

β) Να γράψετε συνάρτηση Matlab που να υλοποιεί τον υπερταχύ πολλαπλασιασμό Strassen.

`function c = Strassen_simple(A, B)` (1.5 μονάδες)

Θέμα 2° (3.5 μονάδες)

Ζητούμενο είναι ο υπολογισμός του $C = A + (x * y^T)^p$ όπου $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $x, y \in \mathbf{R}^n$ και p θετικός ακέραιος.

α) Να υπολογίσετε το μ_{min} (2 μονάδες)

β) Να γράψετε συνάρτηση Matlab που να υλοποιεί τον αλγόριθμο που επιτυγχάνει το μ_{min}

`function C = alg_mu_min(A, x, y, p)` (1.5 μονάδα)

Θέμα 3° (1.5 μονάδες)

Να βελτιωθεί ο ακόλουθος κώδικας ως προς τον χρόνο εκτέλεσης τόσο σε προγραμματιστικό αλλά και αλγοριθμικό κομμάτι.

```
n = 1024;
for i = 1:n
 s(i,1) = rand(1,1);
end
for i = 1:n
 s(i,1) = s(i,1) + i;
end
y = 0;
for i = 1:n
  for j = 1:n
     y = y + (i+j-1) ^ (-1) * s(i,1) * s(j,1);
  end
end
```

Θέμα 4° (1.5 μονάδες)

Έστω διάνυσμα $x \in \mathbf{R}^n$ με n = 8. Έστω ότι για τον υπολογισμό του αθροίσματος των στοιχειών του διαθέτουμε τους αλγορίθμους:

Sum1: σειριακό άθροισμα από το x_1 έως το x_n με την χρήση καταχωρητή για το μερικό-ενδιάμεσο άθροισμα.

Sum2: οι αριθμοί αθροίζονται ανά δύο, τα επιμέρους αθροίσματα αθροίζονται ανά δύο κ.ο.κ. δημιουργώντας με τον τρόπο αυτό μια δενδρική δομή πράξεων.

Να συγκριθούν οι αλγόριθμοι Sum1 και Sum2 έως προς **α)** την έμπροσθεν ευστάθεια (1 μονάδα), **β)** απαιτήσεις σε υλικό (0.5 μονάδες)

-Καλή Επιτυχία-

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
Φροντιστήριο 12/11/2011

Πίνακας συναρτήσεων matlab για την εξέταση
<u>sum,dot,abs,power</u>
ψευδοκώδικας για BLAS – να τερματίζονται οι βρόχοι και τα if με end

- **<u>Σφαλματα:</u>**

i)ΠΡΟΣΟΧΗ στα απόλυτα:

$|xy|=|x||y|$
$|x+y|\leq|x|+|y|$
$|x-y|\leq|x|+|y|$
$|x|=0 \leftrightarrow x=0$
$|x|\leq \alpha \leftrightarrow -\alpha\leq \lambda\leq \alpha$ με $\alpha>0$
$|x|\geq\alpha \leftrightarrow x\geq\alpha$ ή $x\leq- \alpha$ με $\alpha>0$

ii)'Οταν το άνω φράγμα ειναι χαμηλό τότε και το σφάλμα ειναι χαμηλό.
iii)Το αντίστροφο δεν ισχύει !! Ούτε απο μαθηματική άποψη ούτε από πρακτικη (ελήφθησαν δυο φορες ανισότητες)
iv)Μεγάλη προσοχή στην σειρά των ανισοτήτων! Με την λάθος σειρά βγαίνει πάντα ευσταθής .
v)Σημαντικό ρόλο παίζει η υλοποίηση (λχ για άθροιση n αριθμών!)
vi)Ο αριθμητής θα "μοιάζει" με τον παρανομαστή.
vii)Οι "περιπλοκές" προκαλούνται κατα βάση από το απόλυτο και το γεγονός οτι η f έχει προσθαφαιρέσεις. 'Οταν υπάρχουν μόνο πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις, τότε η ανάλυση καθίσταται ευκολοτερη . Χαρακτηριστικό παράδειγμα η εκτίμηση τιμής δεδομένου πολυωνύμου p_0 σε σημείο x_0 σε δυναμομορφή και μορφή Horner.

- **<u>BLAS</u>**

i) Γράφουμε ψευδοκώδικα και οχι matlab.
ii)Τα for,if,while να τερματιζονται κατάλληλα.
iii)Συνήθως διδονται ασκήσεις όπου τα μητρεία ή τα διανύσματα έχουν ειδική μορφή. Αυτή και η λογικη σας χρησιμοποιούνται για την απλοποιήσητων πράξεων.
iv)Συνήθως στόχος είναι η μείωση των μεταφορών.

- **<u>Γραμμική άλγεβρα</u>**

i) Δεν υπάρχει διαίρεση μητρείων.
ii)Δεν αντιμετατίθονται πάντα δυο μητρεία.
Γενικά $AB\neq BA$,εκτος αν δίνεται. Όμως:

1.Το A αντιμετατίθεται με τον εαυτό του $A^{m+n}=A^{n+m}$
2.Το A αντιμετατίθεται με το I (το ταυτοτικό μητρείο)
3.Το A αντιμετατίθεται με το 0 (το μητρείο με μηδενικά στοιχεία)
4.Το A αντιμετατίθεται με το A^{-1} (αν υπάρχει)

Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής
Επιστημονικός Υπολογισμός
Φεβρουάριος 2011

Εξεταστής: Δρ. Γιώργος Αθ. Τσιρογιάννης

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες και 30 λεπτά

Θέμα 1° (4 μονάδες)

α) Δώστε τα χαρακτηριστικά του υπολογιστικού μοντέλου με ιεραρχία μνήμης (0.5 μονάδες).

β) Ποιες οι βασικές προδιαγραφές του προτύπου αριθμητικής κινητής υποδιαστολής IEEE 754 (0.5 μονάδες).

γ) Τι γνωρίζετε για την στρογγύλευση στα συστήματα αριθμητικής κινητής υποδιαστολής. Να δοθούν παραδείγματα (1 μονάδα).

δ) Έστω $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ και $C = AB$. Αναφέρετε παραδείγματα αλγορίθμων που i) ικανοποιούν την σχέση $|C - \hat{C}| \leq nu|A||B| + O(u^2)$ και ii) δεν την ικανοποιούν. Τι πλήθος πράξεων απαιτούν οι αλγόριθμοι που προτείνατε στα (i), (ii). Ποια η σχέση μεταξύ πράξεων και $|\acute{C} - \hat{C}|$; (1 μονάδα)

ε) Δώστε περιγραφικό ορισμό (χωρίς την χρήση περίπλοκων μαθηματικών εκφράσεων, εξισώσεων) της εμπρός και πίσω ευστάθειας αλγορίθμου (γενικά) και του δείκτη κατάστασης προβλήματος (γενικά) (1 μονάδα).

Θέμα 2° (2.5 μονάδες)

Έστω ότι ενδιαφέρεσθε να εργαστείτε για την Ευρωπαϊκή Εταιρεία Διαστήματος και το βιογραφικό σας τράβηξε την προσοχή του υπευθύνου προσλήψεων. Σας καλεί για συνέντευξη και σας ζητάει να του προτείνετε ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις θα επιλέγατε για το σύστημα διόρθωσης της τροχιάς του δορυφόρου στον υπολογισμό του $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{(1+i)!}$ ($0 \leqslant x < 10^{-5}$). Σας εξηγεί πως το σύστημα αυτό είναι εξαιρετικής σημασίας και απαιτεί μεγάλη ακρίβεια και ταχύτητα εκτέλεσης. Ποια συνάρτηση επιλέγετε <u>και γιατί</u>;

```
function y = alg1(x)
if x == 0
    y = 1;
else
    y = (exp(x) - 1) / x;
end
```

```
function y = alg2(x)
t = exp(x);
if t == 1
   y = 1;
else
    y = (1 - t) / log(t);
end
```

Θέμα 3° (2 μονάδες)

Να γράψετε αλγόριθμο που για τριδιαγώνιο μητρώο και βαθμωτούς $p_i \in \mathbf{R}$ υπολογίζει το γινόμενο $\left(\prod_{k=1}^{i} (A - p_k I) \right) x$ με κόστος γραμμικής τάξης ως προς το n (όπου I το ταυτοτικό μητρώο και $x \in \mathbf{R}^n$). Στην συνέχεια υπολογίστε το ακριβές πλήθος πράξεων του αλγορίθμου σας.

Θέμα 4° (1.5 μονάδα)

Έστω μητρώο $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ συμμετρικό και μη ιδιάζον που επιδέχεται τον μετασχηματισμό $A = LDM^T$, όπου L, M κάτω τριγωνικά μητρώα με μονάδα στην κύρια διαγώνιο και D διαγώνιο μητρώο. Να δειχθεί ότι $L = M$.

- Καλή Επιτυχία -

θεωρία 2ο κεφ. - 3ο κεφ. , BLAS

Θέμα 3 Ιούνιος 2011

• για το 2ο for:

```
for i=1:n
  s(i,1)= s(i,1) + i;
end
```

$$\begin{pmatrix} s(1,1) \\ s(2,1) \\ \vdots \\ s(n,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(1,1) \\ s(2,1) \\ \vdots \\ s(n,1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

άρα γίνεται: `s = s +(1:n)'`

↳ επειδή είναι γραμμή βάζω ( )' για να γίνει στήλη.

Για το 3ο for:

```
for i=1:n
  for j=1:n
      y = y + (i+j-1)^(-1) * s(i,1) * s(j,1);
  end
end
```

γενικά αν $A \in R^{n\times n}$, $x \in R^{n\times 1}$, $y \in R^{n\times 1}$ τότε

$\underline{x}^{\tau} A \underline{x}$ ← τετραγωνική μορφή

$y^{\tau} A y$ ← γραμμική μορφή

} παραβολή στις n διαστάσεις

$\underline{x} = (x_1 \quad x_2)^{\tau}$

$$x^{\tau} \cdot A \cdot x = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\underset{1\times 2}{(x_1 \quad x_2)} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}\cdot x_2 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}} = a_{11}\cdot x_1^2 + a_{12}\cdot x_2 \cdot x_1 + \cdots\cdots =$$

$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\, x_i x_j$, άρα σε matlab θα γίνει:

$x_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$ → μητρώο Wilkinson

$I = (1:n)'$

$J = (1:n)' - 1 = (0 : n-1)'$

$E = ones(n,1)$ ← μονάδες

Εξωτερικό γινόμενο: $x \in R^{n \times 1}$, $y \in R^{n \times 1}$: $x \cdot y^T = A$ (μητρώο 1ης τάξης)

$$\begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ x_n y_1 & & - & x_n y_n \end{pmatrix}$$

$\underbrace{(1:n)}_{I}^{T} * E^T + E * \underbrace{(0:n-1)}_{J} = A$

$\boxed{y = s' * A * s}$ $A = 1./A$

Θέμα 3 Φεβρουάριος 2011

$\prod_{k=1}^{t} (A - p_k \cdot I) x$

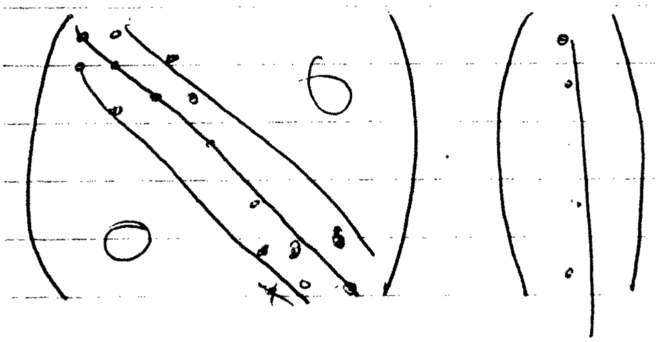
$A \cdot A \cdot \; \underbrace{A \cdot x}$: Κάνουμε τον πολ/σμό από δεξιά προς τα αριστερά γιατί είναι λιγότερες οι πράξεις.

$n * DOT_n(2n-1) = O(n)$

$n \cdot (3+2) = 5n = O(n)$

$((((A_1 \cdot A_2) A_3 \dots A_n) x \rightarrow O(n^2)$

$A_1 (\dots (A_{n-2}(A_{n-1}(A_n \cdot x))) \rightarrow O(n^2)$



$\rightarrow n + (n-1)$

2πολ/σμοι + 1 πρόσθεση (1η γραμμή)

3πολ/σμοί + 2 προσθ. (2η γραμμή)

:

$5n - 4 \in O(n)$

load {P}, A, x // n P, n A, n x } $n^2 + 2n$

$A_n = A - P_n \cdot I$ // n

$Z = A_n * x$ / $O(n)$

for $i = (n-1) : -1 : 1$

$A_i = A - p_i I$ // n

$Z_i = A_i + Z$ // $O(n)$ } $O(n^2)$ | store Z // n

end

$n^2 + 3n$ load/store $= O(n^2) =$ $O(n^2)$ πράξεις

BLAS πράξεις βαθμωτών, φ: μεταφορές, ρ: αρ. πράξεων.

Θέμα 2 Ιούνιος 2011

$$C = A + (x*y^T)^p = A + \overbrace{x*y^T(x*y^T)x\cdots}^{p\ \text{φορές}}(x\cdot y^T) =$$

$$= A + \underbrace{(y^Tx)\cdots(y^Tx)}_{p-1\ \text{φορές}}\, xy^T = A + (y^T\cdot x)^{p-1}\cdot(x\cdot y^T)$$

$A + (xy^T)^p$ με load/store // ~~∄~~ περιορισμοί στην κρυφή μνήμη

1ος τρόπος

load x, y, A, p επιτρέπεται

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$n\quad n\quad n^2\quad 1$ άρα $n^2 + 2n + 1$

$Z_1\cdot Z_1^2\cdot Z_1\cdots \to O(\log p)\,\Theta(n^3)$

$Z = x\cdot y^T$, όπου $Z = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_n \\ \vdots & & \\ x_ny_1 & & x_ny_n \end{pmatrix}$

$Z^p - (p-1)\cdot\Theta(n^3)$

$C = A + Z^p$ / store C: n^2 (μεταφορές) άρα

2ος τρόπος

$$C = A + (y^T\cdot x)^{p-1}(xy^T)$$

load A, x, y, p // όπως και πριν

$a_0 = y^T\cdot x$ // DOT $- 2n-1$

$b_0 = a_0^{p-1} \to O(\log p)$

$X = b_0\cdot x$ // n

$Z = x\cdot y^T$ // n^2

$C = A + Z$ // $n^2 \to$ store C // n^2

Κυρίαρχος όρος: n^2

Θέμα 4 Ιούνιος 2011

Άθροισμα 2 αριθμών:

Εαν το φράγμα του σχετικού σφάλματος είναι χαμηλό φράσσεται σ' όταν έχει του

$$\left| \frac{f_{prog}(x^*) - f(x)}{f(x)} \right| \qquad f(x) = x_1 + x_2, \quad x = x_1 + x_2$$

$$|x + y| \le |x| + |y|$$

$x_1(1+\delta_1) + x_2(1+\delta_2) = (x_1(1+\delta_1) + x_2(1+\delta_2))(1+n) =$

$= x_1(1+\delta_1)(1+n) + x_2(1+\delta_2)(1+n)$, $|\delta_1| |\delta_2| |n| \le n$ ← μονάδα στρογγύλευσης

$|x_1(\delta_1 + n + \delta_1 n)(1+n) + x_2(\delta_2 + n + \delta_2 \cdot n)| =$

$= |f_{prog}(x^*) - f(x)| = |x_1(n + \delta_1 + \delta_1 n) + x_2(n + \delta_2 + \delta_2 n)| =$

$= |(x_1(n + \delta_1 + \delta_1 n)| + |x_2(n + \delta_2 + \delta_2 n)| \le |x_1| |n + \delta_1 + \delta_1 n| + |x_2| |n + \delta_2 + \delta_2 n|$

$= |x_1| \cdot (|n| + |\delta_1| + |\delta_1 n|) + |x_2| \cdot (|n| + |\delta_2| + |\delta_2 n|) \le$

$|x_1|(2u + u^2) + |x_2|(2u + u^2) = (|x_1| + |x_2|)(u^2 + 2u)$.

Αν x_1, x_2 ομόσημα → ευσταθές.

$$\frac{(|x_1| + |x_2|)(u^2 + 2u)}{|x_1 + x_2|} \le \frac{|f_{prog}(x^*) - f(x)|}{|f(x)|}$$