ΠΡΟΟΔΟΣ 2006

8

(9)

Ασκ. 7

```
S=0;
for i=1:4
    S=S+x(i)x(i)
end
```

FMA

$\hat{S} =$

$fl(fl(fl(fl(0 + x(1)x(1)) + x(2)x(2)) + x(3)x(3)) + x(4)x(4))$

$= ((((0 + x(1)x(1))(1+\delta_1) + x(2)x(2))(1+\delta_2) + x(3)x(3))(1+\delta_3) + x(4)x(4))(1+\delta_4)$

$= x(1)x(1)(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3)(1+\delta_4) + x(2)x(2)(1+\delta_2)(1+\delta_3)(1+\delta_4) + x(3)x(3)(1+\delta_3)(1+\delta_4) + x(4)x(4)(1+\delta_4)$

$= x_{(1)}^2(1+\theta_4) + x_{(2)}^2(1+\theta_3) + x_{(3)}^2(1+\theta_2) + x_{(4)}^2(1+\theta_1)$

$|\theta_n| \le \gamma_n$

$\gamma_n = \frac{nu}{1-nu}$

$|S - \hat{S}| = |\cancel{x_1^2} + \cancel{x_2^2} + \cancel{x_3^2} + \cancel{x_4^2} - \cancel{x_1^2} - x_1^2\theta_4 - \cancel{x_2^2} - x_2^2\theta_3 - \cancel{x_3^2} - x_3^2\theta_2 - \cancel{x_4^2} - x_4^2\theta_1|$

$= |x_1^2\theta_4 + x_2^2\theta_3 + x_3^2\theta_2 + x_4^2\theta_1| \le \gamma_4 \left|\sum_i x_i^2\right|$

$|\theta_n| \le \gamma_n$

Επιστημονικός Υπολογισμός (1)

- Μητρώο (κεφαλαία)
- Διανύσματα (μικρά)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

Εσωτερικό γινόμενο

$$ab^T = \sum_i^n a_i b_i \qquad \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_2 \end{bmatrix} =$$

Πολ/σμος πινάκων

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ & \end{bmatrix}$$

Πρέπει $\overset{n_1 \times n}{A} = \overset{n \times n_2}{B} = \overset{n_1 \times n_2}{C}$

MATLAB

Δήλωση πίνακα $\quad$ `A=[1,2,3; 1,2,3; 1,2,3];`

`B=rand(3,3);` $\quad$ Τυχαία ~~.....~~ στοιχεία σε πίνακα 3×3

Πολ/σμος πινάκων $\quad$ `C=B*A;`

Πολ/σμος στοιχείο προς στοιχείο $\quad$ `C=B.*A;`

Ύψωση του πίνακα στο τετράγωνο $\quad$ `A=A.^2`

$$\boxed{\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}$$

Σε ανάστροφο πίνακα.

$$a_{ij} \rightarrow a_{ji}$$

Άσκηση 1.7.1

stavridi@ceid.

Πολυώνυμο $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

$a_{n-1} \neq 0$

$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$ Ο υπολογισμός του p σε m σημεία $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή $V \cdot a$

a)

$$p = \begin{bmatrix} p(\zeta_1) \\ \vdots \\ p(\zeta_m) \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

$$p(\zeta_1) = a_0 + a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_1^2 + \ldots + a_{n-1} \zeta_1 x^{n-1}$$

$$p(\zeta_2) = a_0 + a_1 \zeta_2 + a_2 \zeta_2^2 + \ldots + a_{n-1} \zeta_2 x^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$p(\zeta_m) = a_0 + a_1 \zeta_m + a_2 \zeta_m^2 + \ldots + a_{n-1} \zeta_m x^{n-1}$$

Άρα έχουμε:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p(\zeta_1) \\ p(\zeta_2) \\ \vdots \\ p(\zeta_m) \end{bmatrix}}_{m \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \zeta_1 & \zeta_1^2 & \ldots & \zeta_1^{n-1} \\ 1 & \zeta_2 & \zeta_2^2 & \ldots & \zeta_2^{n-1} \\ & & & & \\ 1 & \zeta_m & \zeta_m^2 & \ldots & \zeta_m^{n-1} \end{bmatrix}}_{m \times n} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}}_{n \times 1}$$

$$p = V \cdot a$$

$$\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$$

② 2

$(p)^T = (V \cdot a)^T \Rightarrow p^T = a^T V^T \Rightarrow [p(j_1) \dots p(j_m)] = [a_0 \dots a_{n-1}]$ [πίνακας Vandermode]

Μπορώ να γράψω:

$$p(x) = a_0 + (a_1 + a_2 x + \dots + a_{n-1} x^{n-2}) x$$

$$= a_0 + (a_1 + (a_2 + \dots + a_{n-1} x^{n-3}) x) x$$

Μέθοδος Horner (σελ.33)

$$\vdots$$

$$= a_0 + (a_1 + (a_2 + (\dots + (a_{n-2} + a_{n-1} x) x) \dots) x) x$$

H Matlab δε δέχεται το 0

s = a_{n-1}

for i = n-2 : -1 : 0

s = s·x + a_i

1η φορά υπολ. $a_{n-2} + a_{n-1} x$

$\vdots$

ones(2,2) = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

eye(2) = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = I$

$A I = A$

B) Function [ ] = Horner(a, x)

s = a_{n-1}

for i = n-2 : -1 : 0

s = s·x + a_i

```
Function [p] = my_Va(z)
  for i = 1:length(z)
      p(i) = Horner(a, z(i));
  end
```

(3)

Άσκηση 1.8.1

$$X_k = \sum_{l=0}^{L-1} x_l e^{-j\frac{2\pi k}{L} l}$$

Θέτω $\omega_L = e^{-\frac{2\pi j}{L}}$ συνάρτηση βάση του μετασχηματισμού Fourier

$$X_k = \sum_{l=0}^{L-1} x_l \, \omega_L^{lk}$$

Για $k=0$ $\quad X_0 = x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot 1 + \dots + x_{L-1} \cdot 1$

Για $k=1$ $\quad X_1 = x_0 \cdot 1 + x_1 \omega_L^{1} + \dots + x_{L-1} \omega_L^{(L-1)\cdot 1}$

Για $k=2$ $\quad X_2 = x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot \omega_L^{1\cdot 2} + \dots + x_{L-1} \omega_L^{(L-1)\cdot 2}$

$\vdots$

Για $k=L-1$ $\quad X_{L-1} = x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot \omega^{1(L-1)} + \dots + x_{L-1} \omega_L^{(L-1)(L-1)}$

$$\Downarrow \quad V \qquad\qquad x$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_L^1 & \omega_L^2 & \dots & \omega_L^{(L-1)} \\ 1 & \omega_L^2 & \omega_L^{2\cdot 2} & & \omega_L^{(L-1)2} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \omega_L^{L-1} & \omega_L^{2(L-1)} & \dots & \omega_L^{(L-1)(L-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{L-1} \end{bmatrix}$$

μητρώο Vandermonde (Γιατί η πρώτη γραμμή υψώνεται στη μηδενική
η 2η — // — στην πρώτη
η 3η — // — δευτέρα.
κ.τ.λ.
)

Κατασκευάζουμε το μητρώο Vandermonde

```
for i = 1:L
   w_L(i) = w^(i-1)
end
```

$W = e^{-j\frac{2\pi k}{L}}$

```
V = zeros(L,L);
for i = 1:L
   V(:,i) = (w') .^ (i-1)
end
```

Δημιουργία V

$X_k = V * x$

Matlab

if - else εκτελείται πάντα η else αν δεν ισχύει το if
if - elseif εξετάζεται πάντα η συνθήκη του elseif

length(a); μέγεθος διανύσματος
size μέγεθος πίνακα/μητρώου

Με ; στο τέλος της εντολής δεν εκτυπώνονται τα αποτελέσματά της.

Υψώνω πίνακα στο τετράγωνο

```
b=a.^2;        ή        for i=1:len
                            c(i)=a(i)^2;
                        end
```

Σύγκριση πινάκων

```
if (b==c)
    disp( )  ← εντολή εκτύπωσης
end
```

control - R → βάζω σχόλια
control - T → βγάζω τα σχόλια

help bench.

T = bench(N)

πόσες φορές θα το τρέξουμε

Αποτελέσματα

T = ____ ____ ____ ____ ____ ____
____ ____ ____ ____ ____ ____

Για το πρώτο
πρόβλημα η 1η
κ' η 2η εκτέλεση.
αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 2

Μέθοδος Newton

$$x_{i+1} = x_i + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Μέθοδος χορδών

$$x_{i+1} = x_i + \frac{f(x_i)\,(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

$$= x_i + \frac{f(x_i)}{\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}} \quad \text{παράγωγος}$$

Άσκηση 2.3.1

$C \leftarrow C + AB$

$C \in R^{n_1 \times n_2}, \; A \in R^{n_1 \times n_3}, \; B \in R^{n_3 \times n_2}$

$$\mu_{min} = \frac{\varphi_{min}}{\underline{\rho}}$$

μεταφορά του C πίσω

$$\varphi_{min} = \underbrace{n_1 \cdot n_2}_{C} + \underbrace{n_1 \cdot n_3}_{A} + \underbrace{n_3 n_2}_{B} + n_1 \cdot n_2$$

$\underline{\rho} = ;$

Για ~~πολλ/σμό~~ πινάκων $(1\times n)(n\times 1)$ έχουμε $\underbrace{n}_{\text{πολλ/σμοί}} + \underbrace{n-1}_{\text{προσθέσεις}} = 2n-1$ πράξεις

Για $\overset{n_1\times n_3}{A}\;\overset{n_3\times n_2}{B}$ έχουμε $\underbrace{(2n_3-1)}_{\text{για 1 γραμμή}} n_1 n_2$

n πολλαπλασιασμοί

n−1 προσθέσεις.

$$\underline{\rho} = (2n_3-1)\, n_1 n_2 + \overbrace{n_1 n_2}^{C}$$

2n−1 (πράξεις για κάθε στοιχείο) το καθένα

$(2n-1)\cdot n_1 n_1$ τα γινόμενα

$$\mu_{min} = \frac{\varphi_{min}}{\underline{\rho}}$$

Άσκηση 2.3.2

κρυφή: $O(n)$ = χωράει μέχρι ~~…~~ τάξης n στοιχεία

$A \in R^{n\times n}$, $x \in R^n$, $\omega \in R$

$$y = (A - \omega I)x$$

$$\Downarrow$$

$$y = \underbrace{Ax}_{n\times n \;\; n\times 1} - \omega x$$

$$\downarrow$$

$$(2n-1)\cdot n$$

$$f_{min} = \frac{\varphi_{min}}{Q}$$

$$Q = \overset{\omega\cdot x}{n} + (2n-1)\cdot n + \overset{\text{αφαίρεση}}{n}$$

$$\varphi_{min} = \underset{A}{n^2} + \underset{x}{n} + \underset{\omega}{1} + \underset{\text{αποθήκευση}}{n}$$

Load ω, x

for $i=1:n$

 load $A(i,:)$

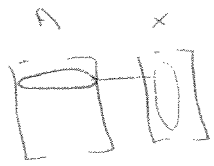
 $y_i = A(i,:)x + \omega x_i$

end

store y

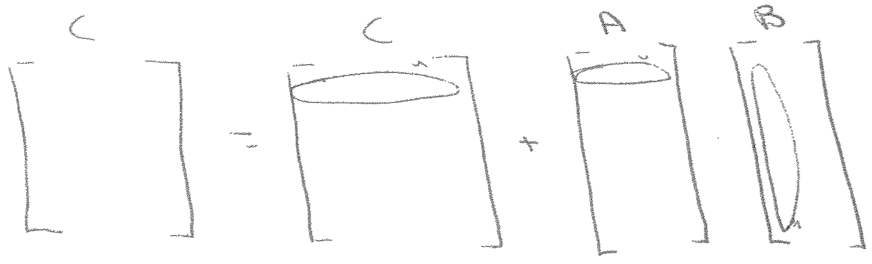
αυτό διάνυσμα

κάθε ένα στοιχείο $\omega\cdot$



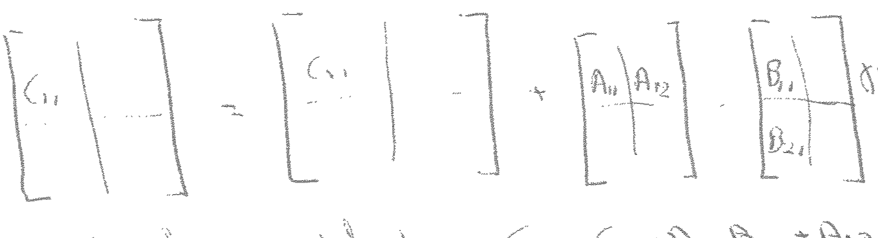
Άσκηση

$C = C + AB$! Δεν έχουμε κρυφή $O(n^3)$!



Για $O(n)$

άρα $3n$ τάξης n



για $> O(n)$

χωρίζω σε blocks $C_{11} = C_{11} + A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$

(5)

(6)

Άσκηση 2.3.3

```
for i=1:n
    y(i) = a x(i)+y(i)
end
```

(loop unrolling 3)

$\Longrightarrow$

ξετύλιγμα μήκους b=3

```
z=mod(n,3)
for i=1:3:n-z
  y(i) = a x(i) + y(i)
  y(i+1) = a x(i+1) + y(i+1)
  y(i+2) = a x(i+2) + y(i+2)
end
if (z~=0) ← όχι ίσο
  for j=i+1:n
     y(j) = a x(j) + y(j)
  end
end
```

Άσκηση 2.4.1

$$p_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x-\rho_i)$$ ρίζες

$$\|$$

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}$$

είσοδος $r = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix}$ έξοδος $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

Για $n=1$ $\quad x-\rho_1 \qquad a_1 = [-\rho_1 \quad 1]$

Για $n=2$ $\quad (x-\rho_1)(x-\rho_2) = x^2 - x\rho_2 - x\rho_1 + \rho_1\rho_2$

$$= x^2 - x(\rho_1+\rho_2) + \rho_1\rho_2$$

Για $n=3$ $\quad (x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3) = \left(x^2 - x(\rho_1+\rho_2) + \rho_1\rho_2\right)(x-\rho_3)$

$$= x^3 - x^2(\rho_1+\rho_2) + x\rho_1\rho_2 - \rho_3 x^2 + x(\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3) - \rho_1\rho_2\rho_3$$

$$= x^3 - x^2(\rho_1+\rho_2+\rho_3) + x(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3) - \rho_1\rho_2\rho_3$$

Για $n=4$ $\quad ()()()() = x^4 - x^3(\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4) + x^2(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3+\rho_1\rho_4+\rho_2\rho_3+$

$$+\rho_2\rho_4+\rho_3\rho_4) - x(\rho_1\rho_2\rho_3+\rho_1\rho_2\rho_4+\rho_1\rho_3\rho_4+\rho_2\rho_3\rho_4)+\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4$$

a(1) = -r(1); a(2) = 1; a(3:n+1) = 0; $*^1$

→ γιατί η matlab ξεκινάει από 1

for j = 2 : n

t(1) = 0; t(2:j+1) = a(1:j) $*^2$ → κάναμε shift right

a(1:j+1) = t(1:j+1) - r(j)*a(1:j+1) $*^3$ $t = [0, -r_1, 1]$

end

Για την πρώτη εκτέλεση έχουμε

$*^1$ $a = [-\rho_1, 1, 0, \dots 0]$

$*^2$ $t = [0, -\rho_1, 1, 0, \dots 0]$

$*^3$ $a = [\rho_1 \rho_2, -(\rho_1+\rho_2), 1, 0, 0 \dots 0]$

__Άσκηση__

$$c^s = \left(\prod_{i=1}^{s} \underbrace{\left(t B + (1-t) \frac{e \cdot e^T}{e^T e} \right)}_{=A} \right) \cdot b$$

- Η πράξη π.χ. $\underline{\underline{e^T e}}$ μας βολεύει γιατί είναι αποτέλεσμα αριθμό

$B \in R^{n \times n}$, $e, b \in R^{n \times 1}$, $t \in R$,

t_{min}

i) $c^s = \left(\left(\left((A \cdot A) \cdot A \right) \cdot A \right) \dots A \right) b$

ii) $c^s = \left(A \left(A \dots (A b) \right) \right)$

iii) $c^s = A \left(A \dots (A (A b)) \right)$

$$\varphi_{min} = \overset{b}{n} + \overset{t}{1} + \overset{B}{n^2} + \overset{e}{n} + \overset{store}{n}$$

Αποτέλεσμα
$n \times n$ $n \times 1$ ⇒ $n \times 1$

$\overset{n \times n}{(A\, A) \cdot A} \dots b$

$\overset{n \times n}{A}$

i)

A: $\Theta_1 = \underset{tB}{n^2} + \underset{e \cdot e^T}{n^2} + \underset{e^T e}{(2n-1)} + \underset{1-t}{1} + \underset{\frac{1-t}{e^T e}}{1} + \underset{\dots e e^T}{n^2} + \underset{πρόσθεση}{n^2}$

⑥

(7)

$\underline{O}_2 = \underbrace{(n^2(2n-1))}_{A\cdot A}\,(s-1)$

$\underbrace{A\cdot A\cdot A\cdot A \dots}_{s-1} = D$

$D\,b \quad \underline{O}_3 = (2n-1)\cdot n$

$$f_{min} = \frac{\varphi_{min}}{\underline{O}_1 + \underline{O}_2 + \underline{O}_3}$$

ii) $\varphi_{min} = \text{ίδιο}$

$\underline{O}_1 = \text{ίδιο}$

$A^{n\times n}$

$\underline{O}_2 = \underbrace{n(2n-1)}_{A\cdot b}\cdot s$ ← για s φορές το A

$$f_{min} = \frac{\varphi_{min}}{\underline{O}_1 + \underline{O}_2}$$

iii)

$D \cdot \left(f\cdot B + (1-f)\frac{ee^T}{e^Te}\right)\cdot b = f\,B\,b + (1-f)\,\frac{ee^T}{e^Te}\cdot b$

$\underline{O}_1 = \text{ίδιο}$

$\underline{O}_D = (2n-1)\,n + n + 2n-1 + 2n-1 + 1 + 1 + 1 + n + n$

$\underset{n\times 1}{B\cdot b}$ $f\cdot(Bb)$ e^Tb e^Te $1-f$ $\frac{1-f}{e^Te}$ ...e^Tb $\cdot e$ πρόσθεση

$\overset{n\times n}{A}\cdot\overset{n\times 1}{d}$
$\wedge$
$A\cdot b$

$\underline{O}_3 = (2n-1)\cdot n\,(s-1)$

$\underbrace{A\cdot A \dots A\cdot d}_{s-1}$

$$f_{min} = \frac{\varphi_{min}}{\underline{O}_1 + \underline{O}_D + \underline{O}_3}$$

Πρόοδος 2005 ⑦

(8)

II2.

i) realmax+realmin Βοηθητικά υπολογιστικά

realmax

Πρότυπο IEEE

ii) realmin/0

inf

iii) realmin/2 == 0

false

μετά απ' αυτό

γίνεται η

μονοδικοποίηση

και είναι 0

iv) realmax+realmax/2

inf.

II3. FMA Να υπολογισθεί το σφάλμα.

s = 0

for i=1:4

s = s + x(i) y(i)

end

FMA: $fl(s+xy) = (s+xy)(1+\delta)$

όχι FMA $fl(s+xy) = (s+xy(1+\delta_1))(1+\delta_2)$

1η εκτέλεση $fl(0+x(1)y(1))$

2η –//– $fl(fl(0+x(1)y(1)) + x(2)y(2))$

Άρα $fl(s) = fl(fl(fl(fl(0+x(1)y(1)) + x(2)y(2)) + x(3)y(3)) + x(4)y(4))$

$= ((((0+x(1)y(1))(1+\delta_1) + x(2)y(2))(1+\delta_2) + x(3)y(3))(1+\delta_3) + y(4)x(4))(1+\delta_4)$

$= x(1)y(1)\prod_i (1+\delta_i) + \dots + x(4)y(4)\prod_i (1+\delta_i)$

από λήμμα

$= x(1)y(1) + 1 + \Theta_4 + \dots +$ $|\Theta_n| \le \frac{nu}{1-nu}$

$|s - fl(s)| = \dots \le$

⑤ Διπλής ακρίβειας 52 bit

- Πόσοι μη κανονικοποιημένοι αριθμοί μπορούν να κανονικοποιηθούν

  - 0 0
  - 0111 1

από 0 έως και $1 \cdot 2^{51} + 2^{50} + \dots + 2^{0}$