Μάθημα 3°

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ LU και QR

Θεωρία : "Γραμμική Άλγεβρα" : εδάφιο 1, σελ. 45,
εδάφιο 2, σελ. 52, (όχι Πρόταση 3.5)
εδάφιο 6, σελ. 103.

Ορισμοί :

1. Ένας $\mu \times \nu$ πίνακας $\mathbf{A}$ ονομάζεται ***πλήρους βαθμού*** ακριβώς όταν $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \min\{\mu, \nu\}$.
2. Αν $\mu > \nu$ και ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι πλήρους βαθμού, κάθε $\nu \times \mu$ πίνακας $\mathbf{M}$ τέτοιος ώστε $\mathbf{MA} = \mathbf{I}_\nu$, ονομάζεται ***αριστερά αντίστροφος*** του $\mathbf{A}$.
3. Αν $\mu < \nu$ και ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι πλήρους βαθμού, κάθε $\nu \times \mu$ πίνακας N τέτοιος ώστε $\mathbf{AN} = \mathbf{I}_\mu$, ονομάζεται ***δεξιά αντίστροφος*** του $\mathbf{A}$.

Από τον δεύτερο και τρίτο ορισμό είναι προφανές ότι ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι δεξιά αντίστροφος του $\mathbf{M}$ και αριστερά αντίστροφος του $\mathbf{N}$.

Παράδειγμα 3.1 Αν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ άμεσα διαπιστώνουμε ότι κάθε

πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -8 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι δεξιά αντίστροφος του $\mathbf{A}$, ο δε $\mathbf{A}$

είναι αριστερά αντίστροφός τους.

Από το παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι για έναν πίνακα ο αριστερά ή δεξιά αντίστροφός του, εφόσον υπάρχει, *δεν είναι μοναδικός*.

Πρόταση 3.1 *Αν* $\mu > \nu$ *και ο πίνακας* $\mathbf{A}$ *είναι πλήρους βαθμού, ο πίνακας* $\mathbf{M} = \left(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}$ *είναι αριστερά αντίστροφος του* $\mathbf{A}$.

Απόδειξη : Επαληθεύουμε ότι $\mathbf{MA} = \left(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}\mathbf{A} = \mathbf{I}_{\nu}$. Από την έκφραση του $\mathbf{M}$, αρκεί να διαπιστώσουμε ότι ο πίνακας $\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος, *ισοδύναμα* ότι το ομογενές σύστημα $\mathbf{A}^{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Πράγματι,

$$\mathbf{A}^{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^{T}\mathbf{A}^{T}\mathbf{Ax} = 0 \Rightarrow (\mathbf{Ax})^{T} \circ \mathbf{Ax} = 0 \Rightarrow \|\mathbf{Ax}\|^{2} = 0 \Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

διότι οι στήλες του $\mathbf{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. □

Όμοια αποδεικνύουμε :

Πρόταση 3.2 *Αν* $\mu < \nu$ *και ο πίνακας* $\mathbf{A}$ *είναι πλήρους βαθμού, ο πίνακας* $\mathbf{N} = \mathbf{A}^{T}\left(\mathbf{AA}^{T}\right)^{-1}$ *είναι δεξιά αντίστροφος του* $\mathbf{A}$.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 3.1 *Να βρείτε τις παραγοντοποιήσεις LU και Cholesky του πίνακα.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

Λύση : Ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι συμμετρικός. Στο λογιστικό σχήμα

$$\begin{array}{c|c} & \mathbf{I}_3 \\ \hline \mathbf{I}_3 & \mathbf{A} \end{array}$$

μετά τους μετασχηματισμούς γραμμών $\mathbf{H}_{12}^{-1}$, $\mathbf{H}_{13}^{-1}$, $\mathbf{H}_{23}^{-1}$ και τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς στηλών Θ_{12}^{-1}, Θ_{13}^{-1} και Θ_{23}^{-1}, βρίσκουμε

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \vdots & 1 & -1 & 0 \\ & & & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ & & & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 9 \end{array} = \begin{array}{c|c} & \mathbf{Q} \\ \hline \mathbf{P} & \mathbf{D} \end{array}$$

όπου $\mathbf{P} = \mathbf{H}_{23}^{-1}\mathbf{H}_{13}^{-1}\mathbf{H}_{12}^{-1}$ και $\mathbf{Q} = \Theta_{12}^{-1}\Theta_{13}^{-1}\Theta_{23}^{-1}$. Επειδή $\left(\mathbf{H}_{ij}^{k}\right)^{T} = \mathbf{H}_{ji}^{k} = \Theta_{ij}^{k}$, έχουμε $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{T}$ και $\mathbf{PAP}^{T} = \mathbf{D}$. Συνεπώς, η παραγοντοποίηση Cholesky είναι

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\left(\mathbf{P}^{T}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{BB}^{T},$$

όπου $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Για την παραγοντοποίηση LU είναι προφανές ότι $\mathbf{A} = \left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\right)\left(\mathbf{P}^{T}\right)^{-1} = \mathbf{LU}$.

* * *

Άσκηση 3.2 *Να βρείτε την QR παραγοντοποίηση του πίνακα*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση : Ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει βαθμό 3. Με τη μέθοδο της ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt, βρίσκουμε ορθογώνια διανύσματα

$$\xi_1 = \boldsymbol{\eta}_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^{T}$$

$$\xi_2 = \boldsymbol{\eta}_2 - \frac{3}{4}\xi_1 = [-3/4 \quad 1/4 \quad 1/4 \quad 1/4]^{T}$$

$$\xi_3 = \boldsymbol{\eta}_3 - \frac{1}{2}\xi_1 - \frac{2}{3}\xi_2 = [0 \quad -2/3 \quad 1/3 \quad 1/3]^{T}$$

όπου $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ και $\boldsymbol{\eta}_3$ είναι οι στήλες του $\mathbf{A}$. Τότε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 & \boldsymbol{\eta}_2 & \boldsymbol{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 + \frac{3}{4}\xi_1 & \xi_3 + \frac{2}{3}\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Xi \mathrm{T}$$

Αν $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left(\|\xi_1\|, \ \|\xi_2\|, \ \|\xi_3\| \right) = \mathrm{diag}\left(2, \ \sqrt{3}/2, \ \sqrt{2/3}\right)$, έχουμε

$$\mathbf{A} = \Xi\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$$

όπου

$$\mathbf{Q} = \Xi\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{3} & -\sqrt{2/3} \\ 1/2 & 1/2\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/2 & 1/2\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{2/3} \end{bmatrix}.$$

Σημειώστε ότι $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}_3$ και ο πίνακας $\mathbf{R}$ είναι αντιστρέψιμος. Ο πίνακας $\mathbf{M} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T$ είναι αριστερά αντίστροφος του $\mathbf{A}$.

* * *

Άσκηση 3.3 *Αν τα διανύσματα* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ *και* $\mathbf{x}_3$ *του* $\mathbb{R}^k$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα, βρείτε την QR παραγοντοποίηση του πίνακα*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix}.$$

Λύση : Έστω $\mathbf{x}_3 = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$ και τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt στα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ έχουμε

$$\xi_1 = \mathbf{x}_1$$
$$\xi_2 = \mathbf{x}_2 + \lambda\xi_1, \quad \text{όπου} \quad \lambda = -(\xi_1 \circ \mathbf{x}_2)/(\xi_1 \circ \xi_1)$$
$$\xi_3 = \mathbf{x}_3 + \mu\xi_1 + \nu\xi_2, \quad \text{όπου} \quad \mu = -(\xi_1 \circ \mathbf{x}_3)/(\xi_1 \circ \xi_1), \quad \nu = -(\xi_2 \circ \mathbf{x}_3)/(\xi_2 \circ \xi_2).$$

Επειδή

$$\xi_1 \circ \mathbf{x}_3 = \alpha(\xi_1 \circ \mathbf{x}_1) + \beta(\xi_1 \circ \mathbf{x}_2)$$
$$\xi_2 \circ \mathbf{x}_3 = \alpha(\xi_2 \circ \mathbf{x}_1) + \beta(\xi_2 \circ \mathbf{x}_2) = \beta(\xi_2 \circ \mathbf{x}_2) = \beta(\xi_2 \circ \xi_2)$$

είναι $\mu = -\alpha + \beta\lambda$ και $\nu = -\beta$. Τότε

$$\xi_3 = \mathbf{x}_3 + (-\alpha + \beta\lambda)\mathbf{x}_1 - \beta(\mathbf{x}_2 + \lambda\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_3 - \alpha\mathbf{x}_1 - \beta\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$$

και

$$\mathbf{M} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3] = [\xi_1 \quad \xi_2 - \lambda\xi_1 \quad -\mu\xi_1 - \nu\xi_2] = [\xi_1 \quad \xi_2]\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & -\mu \\ 0 & 1 & -\nu \end{bmatrix} = \mathbf{QR},$$

όπου

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \xi_1/\|\xi_1\| & \xi_2/\|\xi_2\| \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \operatorname{diag}(\|\xi_1\|, \ \|\xi_2\|)\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & -\mu \\ 0 & 1 & -\nu \end{bmatrix}.$$

<u>*Σχόλιο:*</u> Από την QR παρααγοντοποίηση του πλήρους βαθμού υποπίνακα $[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2]$, έχουμε

$$[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2] = [\xi_1 \quad \xi_2]\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{QR}_1$$

όπου $\mathbf{R}_1 = \operatorname{diag}(\|\xi_1\|, \ \|\xi_2\|)\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Τότε, για τον πίνακα $\mathbf{M}$ συμπεραίνουμε

$$\mathbf{M} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2] = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{bmatrix} = \mathbf{QR}_1\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{bmatrix}$$
$$= \mathbf{Q}\operatorname{diag}(\|\xi_1\|, \ \|\xi_2\|)\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & \alpha - \lambda\beta \\ 0 & 1 & \beta \end{bmatrix} = \mathbf{QR},$$

καταλήγοντας στην ισότητα

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{bmatrix}.$$

* * *

Άσκηση 3.4 *Να παραγοντοποιηθεί ο πίνακας*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

στις μορφές LU και QR και μετά να λυθεί το σύστημα $\mathbf{Ax}=\boldsymbol{\beta}$, *όπου* $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\end{bmatrix}^T$.

Λύση : Για την παραγοντοποίηση LU, θεωρώ το σχήμα

$$\begin{array}{c|c} & \mathbf{I}_4 \\ \hline \mathbf{I}_3 & \mathbf{A} \end{array}$$

και κάνουμε τους μετασχηματισμούς γραμμών $\mathbf{H}_{12}^{-1}$, $\mathbf{H}_{23}^{-1}$ και τους μετασχηματισμούς στηλών $\boldsymbol{\Theta}_{12}^{1}$, $\boldsymbol{\Theta}_{23}^{-1}$ και $\boldsymbol{\Theta}_{34}$. Έτσι, έχουμε

$$\begin{array}{cccccccc} & & & \vdots & 1 & 1 & 0 & -1 \\ & & & \vdots & 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} = \begin{array}{c|c} & \mathbf{Q} \\ \hline \mathbf{P} & \mathbf{D} \end{array}$$

όπου $\mathbf{P}=\mathbf{H}_{23}^{-1}\mathbf{H}_{12}^{-1}$ και $\mathbf{Q}=\boldsymbol{\Theta}_{12}^{1}\boldsymbol{\Theta}_{23}^{-1}\boldsymbol{\Theta}_{34}$ και $\mathbf{PAQ}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_3 & \mathbf{O}\end{bmatrix}$.

Συνεπώς,

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_3 & \mathbf{O}\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_3 & \mathbf{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\mathbf{LU}$$

όπου $\mathbf{L}=\mathbf{P}^{-1}$ και $\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_3 & \mathbf{O}\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{-1}$.

Έτσι, το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax}=\boldsymbol{\beta}$, γράφεται ισοδύναμα

$$\mathbf{LUx}=\boldsymbol{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Ux}=\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{P}\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{\beta}}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$. Μια *μερική λύση* του συστήματος είναι

$$\mathbf{x}_0=\mathbf{U}^T\left(\mathbf{UU}^T\right)^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}=\begin{bmatrix}2/3 & 1/3 & 0\\-1/3 & 1/3 & 0\\1/3 & 2/3 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5/3 & -1/3 & 4/3 & 1\end{bmatrix}^T.$$

Για τη γενική λύση του συστήματος $\mathbf{Ux} = \hat{\boldsymbol{\beta}}$, από τις εξισώσεις

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 \qquad\qquad &= 2 \\
x_2 + x_3 \qquad &= 1 \\
x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

έχουμε $x_1 = 2 + x_2$, $x_3 = 1 - x_2$, $x_4 = 1$ και συνεπώς

$$\mathbf{x} = [2 \quad 0 \quad 1 \quad 1] + k[1 \quad 1 \quad -1 \quad 0].$$

Για $k = -1/3$, είναι φανερό ότι $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

Για την *QR παραγοντοποίηση* του $\mathbf{A}$, θα βρούμε από τις γραμμές $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ του $\mathbf{A}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων, διότι rank $\mathbf{A} = 3$. Με τη μέθοδο ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt, βρίσκουμε τα ορθογώνια διανύσματα

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}_1 &= \boldsymbol{\eta}_1 = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] \\
\boldsymbol{\xi}_2 &= \boldsymbol{\eta}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}_1 = \left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 0\right] \\
\boldsymbol{\xi}_3 &= \boldsymbol{\eta}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]
\end{aligned}
$$

3 γραμ. ανεξάρτητες στήλες =
3 γραμ. ανεξάρτ. γραμμές.
(ΠΑΝΤΑ ίδιο το πλήθος του

και $\|\boldsymbol{\xi}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\boldsymbol{\xi}_2\| = \sqrt{3/2}$, $\|\boldsymbol{\xi}_3\| = 1$. Συνεπώς

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \\ \boldsymbol{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_3 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_2 \\ \boldsymbol{\xi}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{D}\mathbf{D}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\|\boldsymbol{\xi}_1\|, \|\boldsymbol{\xi}_2\|, \|\boldsymbol{\xi}_3\|) = \operatorname{diag}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3/2}, 1\right)$. Τότε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & \sqrt{3/2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & \sqrt{3/2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & \sqrt{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{RQ}.$$

Επειδή $\mathbf{QQ}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}_3$, το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ γράφεται

$$\mathbf{RQx} = \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \mathbf{Qx} = \mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\beta}$$

και έχει μερική λύση $\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\beta}$.

* * *

Έστω το διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^\nu$. Ο πίνακας ***Householder***

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

είναι συμμετρικός και ορθογώνιος, με συνέπεια $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$. Για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\nu$, το διάνυσμα $\mathbf{Hx}$ είναι συμμετρικό του $\mathbf{x}$ ως προς τον υπόχωρο $\mathbf{E} = \{\, \text{span}\{\, \mathbf{u} \,\}\,\}^\perp$.

Πρόταση 3.3 *Για κάθε διάνυσμα* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\nu$ *όχι συγγραμμικό του* $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = [1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]^T$, *υπάρχει πίνακας Householder* $\mathbf{H}$, *ώστε το διάνυσμα* $\mathbf{Hx}$ *είναι συγγραμμικό του* $\boldsymbol{\varepsilon}_1$.

Απόδειξη : Αν θεωρήσουμε το διάνυσμα $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \|\, \mathbf{x} \,\|\boldsymbol{\varepsilon}_1$ για τον αντίστοιχο πίνακα $\mathbf{H}$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Hx} &= \mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^T + \|\mathbf{x}\|\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1\mathbf{x}^T + \mathbf{x}\boldsymbol{\varepsilon}_1^T\right) + \|\mathbf{x}\|^2\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_1^T}{2\|\mathbf{x}\|\left(\|\mathbf{x}\| + x_1\right)}\mathbf{x} \\
&= \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}\left(\|\mathbf{x}\| + x_1\right) + \|\mathbf{x}\| \cdot \left(\|\mathbf{x}\| + x_1\right)\boldsymbol{\varepsilon}_1}{\|\mathbf{x}\| + x_1} = \mathbf{x} - \frac{\left(\|\mathbf{x}\| + x_1\right) \cdot \left(\mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|\boldsymbol{\varepsilon}_1\right)}{\|\mathbf{x}\| + x_1} \\
&= -\|\mathbf{x}\|\boldsymbol{\varepsilon}_1,
\end{aligned}$$

όπου $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_1$. □

Πρόταση 3.4 *Στην QR παραγοντοποίηση του* $\nu \times \nu$ *πίνακα* $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, *ο ορθογώνιος πίνακας* $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \ldots \mathbf{Q}_{\nu-1}$ *όπου* $\mathbf{Q}_i = \text{diag}\left(\mathbf{I}_{i-1}, \quad \mathbf{H}_{\nu-i+1}\right)$ *και* $\mathbf{H}_{\nu-i+1}$ $\left(i = 1, 2, \ldots, \nu - 1\right)$ *είναι πίνακες Householder.*

Απόδειξη : Από την πρώτη στήλη $\boldsymbol{\alpha}_1$ του $\mathbf{A}$ κατασκευάζεται ο πίνακας

Householder $\mathbf{H}_1$ ώστε

$$\mathbf{H}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\|\boldsymbol{\alpha}_1\| & \vdots & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & & \mathbf{A}_1 & \end{bmatrix},$$

όπου με $*$ σημειώνουμε τα υπόλοιπα στοιχεία του γινομένου των πινάκων. Όμοια, από την πρώτη στήλη $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1$ του $(\nu-1)\times(\nu-1)$ πίνακα $\mathbf{A}_1$, κατασκευάζεται πίνακας ο Householder $\mathbf{H}_2$ ώστε

$$\mathbf{H}_2\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1\| & \vdots & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & & \mathbf{A}_2 & \end{bmatrix}.$$

Αν $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}_1$ και $\mathbf{Q}_2 = \mathrm{diag}(1,\ \mathrm{H}_2)$, προφανώς

$$\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\|\boldsymbol{\alpha}_1\| & * & \vdots & * & \cdots & * \\ 0 & -\|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1\| & \vdots & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \mathbf{O} & \vdots & & \mathbf{A}_2 & \\ & & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

Συνεχίζοντας τη διαδικασία με τον $(\nu-2)\times(\nu-2)$ πίνακα $\mathbf{A}_2$, έχουμε

$$\mathbf{H}_3\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} * & \vdots & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & & \mathbf{A}_3 & \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{Q}_3\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\|\boldsymbol{\alpha}_1\| & * & * & \vdots & * & \cdots & * \\ 0 & -\|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1\| & * & \vdots & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \vdots & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \mathbf{O} & & \vdots & & \mathbf{A}_3 & \\ & & & \vdots & & & \end{bmatrix},$$

όπου $\mathbf{Q}_3 = \mathrm{diag}(\mathbf{I}_2,\ \mathrm{H}_3)$. Τελικά, θα έχουμε

$$\mathbf{Q}_{\nu-1}\cdots\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & & * \end{bmatrix} = \mathbf{R}$$

ο δε πίνακας $\mathbf{H} = \mathbf{Q}_{\nu-1} \ldots \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ είναι ορθογώνιος, ως γινόμενο ορθογωνίων πινάκων. Συνεπώς $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, όπου $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^T = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \ldots \mathbf{Q}_{\nu-1}$. □

Η προηγούμενη μεθοδολογία για την QR παραγοντοποίηση πίνακα εφαρμόζεται και όταν ο πίνακας $\mathbf{A}$ δεν είναι τετραγωνικός.

Άσκηση 3.5 *Να παραγοντοποιηθεί σε μορφή QR ο πίνακας*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση : Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3, για

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T + \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

και

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{I}_3 - 2\frac{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T}{\|\mathbf{u}_1\|^2} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

έχουμε

$$\mathbf{H}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -3/\sqrt{2} \\ 0 & (1-\sqrt{2})/2 \\ 0 & -(1+\sqrt{2})/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \vdots & -3/\sqrt{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}.$$

Για $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} (1-\sqrt{2})/2 \\ -(1+\sqrt{2})/2 \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{3}{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0176 \\ -1.2071 \end{bmatrix}$, θα είναι

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{I}_2 - 2\frac{\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T}{\|\mathbf{u}_2\|^2} = \begin{bmatrix} 0.1691 & 0.9856 \\ 0.9856 & -0.1691 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{H}_2\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1.2247 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, για

$$\mathbf{H}=\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1=\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2\\ -1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -0.7071 & -0.7071\\ -0.8165 & -0.4083 & 0.4083\\ -0.5774 & 0.5774 & -0.5774\end{bmatrix}$$

έχουμε

$$\mathbf{HA}=\begin{bmatrix}-\sqrt{2} & -3/\sqrt{2}\\ 0 & -1.2247\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{Q}=\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2=\begin{bmatrix}0 & -0.8165 & -0.5774\\ -0.7071 & -0.4083 & 0.5774\\ -0.7071 & 0.4083 & -0.5774\end{bmatrix}$$

Η QR παραγοντοποίηση του $\mathbf{A}$ είναι

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -0.8165\\ -0.7071 & -0.4083\\ -0.7071 & 0.4083\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sqrt{2} & -3/\sqrt{2}\\ 0 & -1.2247\end{bmatrix},$$

καθόσον η μηδενική γραμμή του γινομένου $\mathbf{HA}$ ακυρώνει την $3^{η}$ στήλη του πίνακα $\mathbf{Q}$.

* * *