11/1/2013

Επιστημονικός (Φροντιστήριο)

$A=LU$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.5 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \to LU$ χωρίς οδήγηση $\quad L \to$ κάτω τριγωνικό

$A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ $\quad U \to$ άνω τριγωνικό

στο $\underline{LU}$ άσσοι στη διαγώνιο

* Στην Cholesky δεν έχουμε οδήγηση και αντί για τα μητρώα L, U έχουμε τα L, L^{-1}. Το L είναι κάτω τριγωνικό, αλλά δεν είναι απαραίτητο να έχουμε άσσους στη διαγώνιο.

→ Θεωρούμε μητρώο A αραιό: $A \in \mathbb{R}^{5\times5}$

* Έστω τετραγωνικό μητρώο $n\times n$. Για να είναι αραιό ισχύει $nnz = O(n)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

← Θέλουμε να αποθηκεύσουμε τα μη-μηδενικά στοιχεία.

1) $\underline{\text{1ος Τρόπος Αποθήκευσης}}$ (κατά γραμμές)

Με τρία Διανύσματα: values, col.index, row.pointer

→ σε ποια στήλη ανήκουν τα values

→ σε ποια θέση του values έχουμε αλλαγή γραμμής

Οπότε values = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]

col.index = [1, 4, 1, 2, 4, 1, 3, 4, 5, 3, 4, 5]

length = n+1 ← row.pointer = [1, 3, 6, 10, 12, 13] → δείχνει το τέλος

η δεύτερη γραμμή ξεκινάει στο 3 (όχι ως τιμή, ως θέση μν του values)

2) $\underline{\text{2ος Τρόπος Αποθήκευσης}}$ (κόστος $3 \times nnz$)

Με τρία διανύσματα: 1 διανύσμα με τις τιμές, 1 με τις στήλες και 1 με τις γραμμές.

TETTRIS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \underline{3} & -1 & 1 \\ 0 & \underline{4} & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Μας ζητάει να μηδενίσουμε τη θέση που βρίσκεται το 3 και το 4.
Μέσω Householder θα πολ/με με "κάτι" από αριστερά.

Γενική Περίπτωση: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m>n$
στη διάσπαση $\underline{QR}$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$
↳ διαγώνιο ↳ άνω τριγωνικό

$H_3 H_2 H_1 A = R$ Λύνουμε ως προς A

$A = H_1^{-1} H_2^{-1} H_3^{-1} \cdot R$

$A = H_1^T H_2^T H_3^T R$; οι ανακλαστές είναι ορθογώνια μητρώα και άρα $H^{-1} = H^T$

$A = \underbrace{(H_3 H_2 H_1)^T}_{Q} R$

$$A(:,1) - \left(\pm \|A(:,1)\|\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

μετά την πρώτη στήλη προχωράμε στο υπομητρώο που ορίζεται από τη δεύτερη γραμμή και δεύτερη στήλη και κάνουμε το ίδιο όπως στην πρώτη στήλη.

Σειρά για να μηδενίσουμε:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \left(-\sqrt{29}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Διαλέγουμε το − για να έχουμε ίδιο πρόσημο κι να αποφύγουμε καταστροφ. απαλοιφή.

Για να μηδενίσουμε μόνο τη θέση που βρίσκεται το 4, θα ξεκινάγαμε από μια θέση πιο κάτω:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \left(-\sqrt{25}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$$\underset{1\times n}{x^T}\ \underset{n\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{x} = s \in \mathbb{R}$$

```
S=0
for i=1:n
   for j=1:n
      S=x(j)*A(i,j)*x(j)+S;
   end
end
```

$$x^T A x = (x_1\ \ x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$$
$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 = \dots$$

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

S = x'*A*x; → ταχύτερο.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn}\end{pmatrix}$$

```
v = zeros(m,1);
for i=1:n
   for j=1:n
      v(i)=v(i)+A(i,j);
   end
end
```

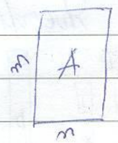
cumsum → εντολή που δίνει τα μερικά αθροίσματα
norm(x,1) → $\|x\|_1$
norm(x,2) → $\|x\|_2$
norm(x,inf) → $\|x\|_\infty$

– dot : $x^T y$, x'*y

x : n×1, y : n×1	x'*y 1×1
x : 1×n, y : 1×n	x'*y n×n

Φροντιστήριο 7/12/13

Μητρωο $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m>n$



Παραγοντοποιηση QR : $A = \underbrace{Q}_{m\times m}\underbrace{R}_{m\times n}$

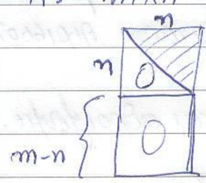
MATLAB QR = A

Q: ορθογωνιο μητρωο ⇒ • εσωτερικό γινομενο 0

• μετρο καθε στηλης = 1

($\Leftrightarrow \|στηλη_i\|_2 = 1$)

R: m×n μητρωο της μορφης:

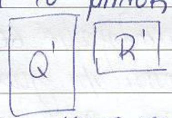


⟶ ανω τριγωνικό

- Οικονομική QR (στο MATLAB QR = (A,0))

  επιστρεφει τις πρωτες n στηλες του Q (m×n)

  και το μπλοκ του R n×n (το άνω τριγωνικο)



Γενικά δεν κανει τους πολλαπλασιασμους με τα μηδενικά

\

Θέλουμε να λύσουμε $Ax=b$ με $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m>n$

$b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

$x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

Ελάχιστα Τετράγωνα

$r = b - Ax^*$ → έστω μια λύση

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^2$$

Για να βρούμε μια προσέγγιση της λύσης, την οποία θεωρητικά δεν την ξέρουμε, πρέπει να βρούμε μια διαφορά r, την οποία να ελαχιστοποιήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο

⊳ Για κάθε στοιχείο του x, παίρνουμε το x^* και βρίσκουμε το r^2, τα οποία και αθροίζουμε.

Για να λύσουμε το πρόβλημα των Ελαχίστων Τετραγώνων.

1) Κανονικές Εξισώσεις (με A^T)

$Ax = b$ ⇒ πολ/με από αριστερά με το A^T:

$$\underbrace{A^TA}_{n \times n} x = \underbrace{A^Tb}_{n \times 1}$$

→ οπότε καταλήξαμε σε τετραγωνικό σύστημα και χρησιμοποιούμε γνωστές μεθόδους επίλυσης

ες του
α ανεξάρτητη

Το όφελος είναι ότι προκύπτει πρόβλημα μικρότερου μεγέθους.

Ισχύει $cond(A^TA) \simeq cond(A)^2$

ορισμός για Σ.Θ.Ο πιν. $x^TMx > 0$ $\forall x \neq [0]$

A^TA είναι Σ.Θ.Ο άρα θα κάνουμε Cholesky

⊳ αφού $x^TA^TAx = (Ax)^T(Ax)$ πάντα >0 ως εσωτερ. γινόμ. διανυσμάτων

↓

πάντα θα υπάρχει

$$Ax = b$$

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$ $\quad A^TAx = A^Tb$ και $A^TA = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon^2 \end{bmatrix}$

και με $\varepsilon \le \sqrt{eps}$ (eps μηχανής)

οπότε για $\varepsilon^2 \to 0$ για το υπολογιστικό σύστημα

και άρα θα γίνει $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to$ πρόβλημα

2) Κανονικές Εξισώσεις (με QR)

$Ax = b \to$ παραγοντοπ. QR

$QRx = b$

$Q^{-1}QRx = Q^{-1}b$

$Rx = Q^{-1}b \Rightarrow Rx = Q^Tb$

το Q ορθογώνιο άρα $Q^{-1} = Q^T$

$$\|b - Ax^*\| = \|Q^T\| \, \|b - Ax^*\| = \|Q^T(b - Ax^*)\| =$$

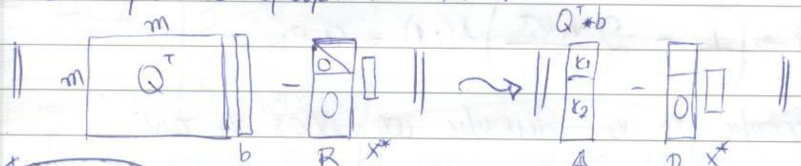
$\to = 1$, γιατί το Q είναι ορθογώνιο και η νόρμα του είναι ίση με 1, το ίδιο για (

$$= \|Q^Tb - Q^TAx^*\| =$$

$$= \|Q^Tb - \underbrace{Q^TQ}_{1}Rx^*\| = \|Q^Tb - Rx^*\|$$

οπότε τώρα το πρόβλημα μετατίθεται στο να ελαχιστοποιήσουμε το

Θέλουμε να βρούμε το x^*:



χωρίς σφάλμα

Η ακριβής λύση της εξίσωσης θα είναι ένα x^* που πολ/μενο με R και αφαιρούμενο από το $m \times 1$ θα δίνει 0

Όμως το r_2 θα μένει γιατί έχουμε τα μηδενικά του R → δηλ

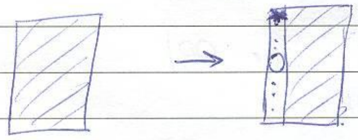
⇝ Πως κανουμε την QR.

$A = QR$

Το R προφανως προερχεται απο A, "ανωτριγωνοποιουμε" το **A**.


A R

Ξεκιναμε από το A, μετα δημιουργούμε το A_1, το οποιο εχει μηδενικα στην πρωτη στήλη κατω από τη διαγωνιο



παιρνουμε το A_1, πολ/ντας το από αριστερα με το μητρωο

A $\qquad$ $A_1 = H_1 A$

Εστω e_1 διανυσμα στήλης

$$\Rightarrow k = \frac{e_1 e_1^T}{e_1^T e_1} \rightarrow \text{ορθογωνιος προβολέας}$$

$e_1^T e_1$ ← αριθμός

Για καθε διανυσμα x: το kx, μας μεταφερει σε ενα χώρο ορισμενο από το e_1.

$k \rightarrow (e_1)$

$I - k \rightarrow (e_1^{\perp})$

Θέλουμε το H_1 που θα πολ/σει με την πρώτη στήλη του A και θα μας δώσει ουσιαστικά την πρώτη στήλη του ταυτοτικού μητρώου, επι a.

Δηλαδή: $H_1 A(:,1) = a e_1$

$$\Rightarrow \left(I - 2\frac{v_1 v_1^T}{v_1^T v_1}\right) A(:,1) = a e_1.$$

Για να βρουμε το v_1 λύνουμε ως προς v_1 την:

$$A(:,1) - 2\frac{v_1 v_1^T}{v_1^T v_1}(A(:,1)) = a e_1$$

$$\Rightarrow v_1 = A(:,1) - p e_1, \text{ οπου } p = \pm \|A(:,1)\|$$

↳ το ± για να αποφευχθεί η καταστροφική απαλοιφή

Για να δημιουργήσουμε μηδενικά στη
κάτω από το στοιχείο της διαγώ

$A_2 = H_2 H_1 A$

Εν τέλει θα έχουμε $H_n H_{n-1} \dots H_1 A$

Και $A = \underbrace{H_1^{-1} \dots H_{n-1}^{-1} H_n^{-1}}_{Q} R =$

→ Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1.0 & 1 \\ 1 & -0.5 & 0.25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε το διάνυσμα Householder

$$v_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{A(:,1)} - \underbrace{(\pm\sqrt{5})}_{p} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_1} = \begin{bmatrix} 1-(-\sqrt{5}) \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε με αυτό το v_1, θα "καταστρέ

$$H_1 A = \begin{bmatrix} -2.35 & 0 & -1.118 \\ 0 & -0.141 & -0.405 \\ 0 & 0.309 & -0.655 \\ 0 & 0.809 & -0.405 \\ 0 & 1.309 & 0.345 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε το v_2 παίρνουμε το μ

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.141 \\ 0.309 \\ 0.809 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1.581 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ και άρα $H_2 H_1 A$