ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2005-6

ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ - ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Η εξίσωση της ευθείας στο επίπεδο ΟΧΥ, από αλγεβρικής πλευράς, παριστάνεται από ένα πολυώνυμο $Αx+Βy+Γ=0$ πρώτου βαθμού ως προς x και y. Η αμέσως επόμενη περίπτωση είναι οι επίπεδες καμπύλες που παριστάνονται από πολυώνυμα δευτέρου βαθμού ως προς x και y, δηλ. πολυώνυμα της μορφής :

$$Αx^2+2Βxy+Γy^2+2Δx+2Εy+Ζ=0 \quad (1)$$

[(1)]

Κάθε καμπύλη του επιπέδου της μορφής (1) ονομάζεται **καμπύλη δευτέρου βαθμού**. Οι καμπύλες που παριστάνει η (1) είναι :

α) **έλλειψη** , (ειδική περίπτωση ο κύκλος)

β) **υπερβολή**

γ) **παραβολή**

Επειδή οι καμπύλες αυτές μπορούν να προκύψουν σαν τομές ενός ορθού κυκλικού κώνου και ενός επιπέδου, (Σχ. 1), γι' αυτό ονομάσθηκαν από αρχαιοτάτων χρόνων **κωνικές τομές**. Συγκεκριμένα, όταν το επίπεδο είναι παράλληλο προς μια γενέτειρα του κώνου, η καμπύλη ονομάζεται παραβολή. Σε άλλη περίπτωση η καμπύλη ονομάζεται έλλειψη ή υπερβολή όταν το επίπεδο τέμνει την μία μόνο χώνη ή και τις δυο.

Είναι δυνατό για ορισμένες τιμές των παραμέτρων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, το πρώτο μέλος της (1) να γράφεται σαν γινόμενο δυο πολυωνύμων πρώτου βαθμού ως προς x και y. Επειδή κάθε πρωτοβάθμιο πολυώνυμο ως προς x και y παριστάνει μια ευθεία, τότε η εξί-

---

[(1)] Η εμφάνιση του αριθμού 2 στους όρους 2Βxy, 2Δx, 2Εy γίνεται μόνο για να απλοποιηθούν οι μετέπειτα όροι που θα προκύψουν.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2005-6

Η εξίσωση της ευθείας στο επίπεδο ΟΧΥ, από αλγεβρικής πλευράς, παριστάνεται από ένα πολυώνυμο $Ax+By+\Gamma=0$ πρώτου βαθμού ως προς x και y. Η αμέσως επόμενη περίπτωση είναι οι επίπεδες καμπύλες που παριστάνονται από πολυώνυμα δευτέρου βαθμού ως προς x και y, δηλ. πολυώνυμα της μορφής :

$$Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0 \quad (1)$$ [1]

Κάθε καμπύλη του επιπέδου της μορφής (1) ονομάζεται **καμπύλη δευτέρου βαθμού**. Οι καμπύλες που παριστάνει η (1) είναι :

α) **έλλειψη** , (ειδική περίπτωση ο κύκλος)

β) **υπερβολή**

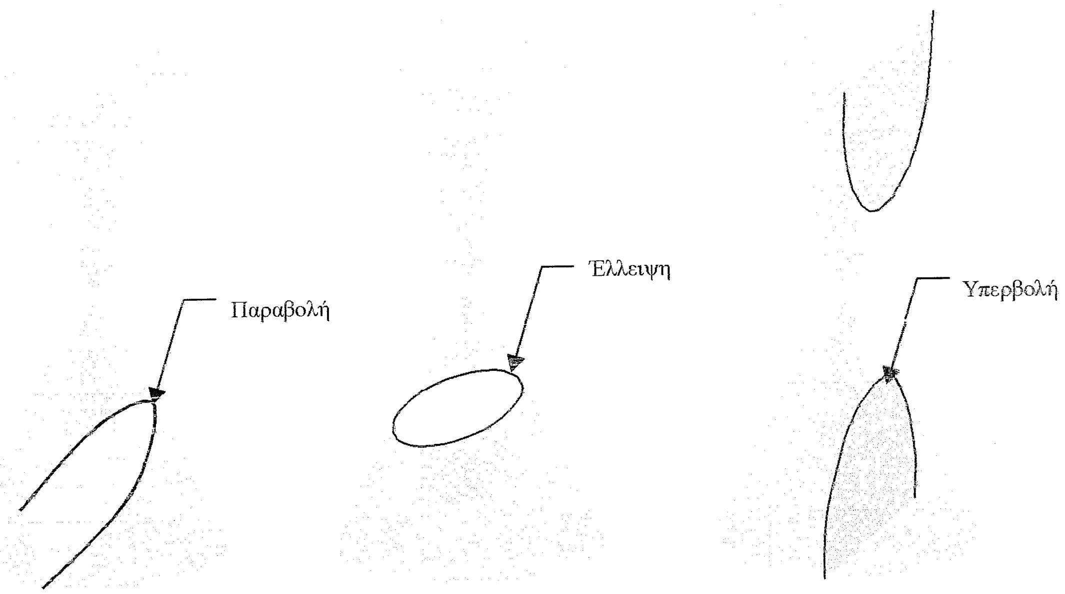
γ) **παραβολή**

Επειδή οι καμπύλες αυτές μπορούν να προκύψουν σαν τομές ενός ορθού κυκλικού κώνου και ενός επιπέδου, (Σχ. 1), γι' αυτό ονομάσθηκαν από αρχαιοτάτων χρόνων **κωνικές τομές**. Συγκεκριμένα, όταν το επίπεδο είναι παράλληλο προς μια γενέτειρα του κώνου, η καμπύλη ονομάζεται παραβολή. Σε άλλη περίπτωση η καμπύλη ονομάζεται έλλειψη ή υπερβολή όταν το επίπεδο τέμνει την μία μόνο χώνη ή και τις δυο.

Είναι δυνατό για ορισμένες τιμές των παραμέτρων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, το πρώτο μέλος της (1) να γράφεται σαν γινόμενο δυο πολυωνύμων πρώτου βαθμού ως προς x και y. Επειδή κάθε πρωτοβάθμιο πολυώνυμο ως προς x και y παριστάνει μια ευθεία, τότε η εξί-

---

[1] Η εμφάνιση του αριθμού 2 στους όρους 2Bxy, 2Δx, 2Ey γίνεται μόνο για να απλοποιηθούν οι μετέπειτα όροι που θα προκύψουν.



Σχ. 1

σωση (1) θα παριστάνει ένα **ζεύγος ευθειών**, (πραγματικών ή φανταστικών[(2)]). Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να παριστάνει η εξίσωση (1) ένα ζεύγος ευθειών, είναι :

$$\begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Πράγματι με $A \neq 0$ η (1) γράφεται :

$$Ax^2+2(By+\Delta)x+\Gamma y^2+2Ey+Z=0 \qquad (3)$$

και επομένως μπορεί να θεωρηθεί σαν δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x. Εαν το πρώτο μέλος της (3) αναλύεται σε γινόμενο δυο πρωτοβάθμιων πολυωνύμων, τότε η (3) πρέπει να έχει ως προς x δυο ρίζες, οι οποίες είναι πρωτοβάθμια πολυώνυμα του y.

Θεωρούμε μια κωνική τομή με εξίσωση την (1)

$$Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$$

και δυο σημεία του επιπέδου $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$. Εαν $P(x, y)$ τυχαίο σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία αυτά , τότε οι παραμετρικές εξισώσεις αυτής της ευθείας είναι :

$$x=x_1+t(x_2-x_1) \ , \ y=y_1+t(y_2-y_1)$$

(4)

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της κωνικής τομής και της ευθείας (4) αντικαθιστούμε τις σχέσεις (4) στην εξίσωση της κωνικής τομής και έχουμε :

$$A[x_1+t(x_2-x_1)]^2+2B[x_1+t(x_2-x_1)][y_1+t(y_2-y_1)]+\Gamma[y_1+t(y_2-y_1)]^2+2\Delta[x_1+t(x_2-x_1)]+$$

$$+2E[y_1+t(y_2-y_1)]+Z=0 \qquad (5)$$

Η εξίσωση (5) μετά από απλές πράξεις γράφεται :

$$Lt^2+2Mt+N=0 \qquad (6)$$

όπου :

$$L= A(x_2-x_1)^2+2B(x_2-x_1)(y_2-y_1) +\Gamma(y_2 -y_1)^2 \qquad (7)$$

$$M= Ax_1(x_2-x_1)+B(x_2-x_1)y_1+B(y_2-y_1)x_1+\Gamma(y_2-y_1)y_1 +\Delta(x_2-x_1)+E(y_2-y_1) \qquad (8)$$

$$N= Ax_1^2+2Bx_1y_1+\Gamma y_1^2+2\Delta x_1+2Ey_1+Z \qquad (9)$$

Γενικά από την (6) παίρνουμε δυο τιμές του t , οι οποίες όταν αντικατασταθούν στην (7) δίνουν τα δυο κοινά σημεία της ευθείας, που διέρχεται από τα σημεία P_1 και P_2, και της κωνικής τομής. Τα δυο αυτά σημεία είναι δυνατό να είναι πραγματικά ή φανταστικά. Εαν τα κοινά σημεία συμπίπτουν, δηλ. εάν η εξίσωση (6) έχει μια διπλή ρίζα, τότε λέμε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία P_1 και P_2 είναι **εφαπτομένη της κωνικής τομής**. Η εξίσωση τώρα (6) έχει διπλή ρίζα αν και μόνο αν :

$$M^2-LN=0 \qquad (10)$$

Επομένως η (10) είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η ευθεία, η διερχόμενη από τα σημεία P_1 , P_2 , εφαπτόμενη της κωνικής τομής.

Για να βρούμε τώρα την εξίσωση της εφαπτομένης, θεωρούμε ότι το σημείο $P_1(x_1, y_1)$ βρίσκεται πάνω στην κωνική τομή, Έστω $P(x, y)$ ένα τυχαίο σημείο της εφαπτομένης. Τα σημεία P_1 , P πρέπει να πληρούν την (10). Αλλά το σημείο P_1 βρίσκεται πάνω στην κωνική τομή και επομένως από την (12) έχουμε : $N=0$

Άρα η (10) γράφεται : $M^2=0$ ή $M=0$ δηλ.

$$Ax_1x+B(x_1y+y_1x)+\Gamma y_1y+\Delta(x_1+x)+E(y_1+y)+Z=0 \qquad (11)$$

Η (11) είναι η εξίσωση της ζητουμένης εφαπτομένης

Στην ίδια εξίσωση καταλήγουμε εάν χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της βάθμωσης :

Θεωρούμε το βαθμωτό πεδίο $f(x,y)=Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z$, του οποίου η βάθμωση :

$$\nabla f(x,y)=(2Ax+2By+2\Delta)\mathbf{i}+(2\Gamma y+2Bx+2E)\mathbf{j}$$

είναι διάνυσμα κάθετο στις ισοσταθμικές καμπύλες του βαθμωτού πεδίου $f(x,y)$. Θεωρούμε το σημείο $P_1(x_1,y_1)$, με διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_1(x_1,y_1)$, σημείο της ισοσταθμικής καμπύλης

$f(x,y)=0$ και ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{r}(x,y)$ ενός τυχαίου σημείου $P(x,y)$ της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο $P_1(x_1,y_1)$. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\cdot\nabla f(\mathbf{r}_1)=0 \quad \Rightarrow \quad (x-x_1)[2Ax_1+2By_1+2\Delta]+(y-y_1)[2\Gamma y_1+2Bx_1+2E]=0$$

Μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε στην (11)

Εάν το σημείο $P_1(x_1,y_1)$ δεν βρίσκεται πάνω στην κωνική τομή, η εξίσωση της ευθείας, που διέρχεται από το σημείο $P_1(x_1,y_1)$ και εφάπτεται της κωνικής τομής, βρίσκεται ως εξής :

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $P(x,y)$ αυτής της εφαπτομένης. Οι συντεταγμένες του σημείου $P(x,y)$ και του σημείου $P_1(x_1,y_1)$ πρέπει να πληρούν την σχέση (10), δηλ. :

$$[Ax_1(x-x_1)+B(x-x_1)y_1+B(y-y_1)x_1+\Gamma(y-y_1)y_1+\Delta(x-x_1)+E(y_2-y_1)]^2-$$

$$-[A(x-x_1)^2+2B(x-x_1)(y-y_1)+\Gamma(y-y_1)^2]\cdot[Ax_1^2+2Bx_1y_1+\Gamma y_1^2+2\Delta x_1+2Ey_1+Z]=0 \quad (A)$$

Η σχέση (A) διαπιστώνεται εύκολα ότι πληροί τη σχέση (2). Άρα παριστάνει ένα σύστημα δυο ευθειών, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $P_1(x_1,y_1)$ και εφάπτεται της κωνικής τομής.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε χωριστά τις κωνικές τομές.

Έλλειψη

Θεωρούμε σ' ένα επίπεδο δυο σταθερά σημεία F_1 και F_2. Ορίζουμε σαν **έλλειψη** τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα δυο δοθέντα σημεία F_1, F_2 είναι σταθερό (Σχ. 2). Τα δυο αυτά σημεία ονομάζονται **εστίες της έλλειψης.**

Έστω ότι οι εστίες απέχουν απόσταση 2c και ότι το σταθερό άθροισμα των αποστάσεων είναι 2α με α>c. Για να βρούμε την εξίσωση της έλλειψης θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων OXY, στο οποίο οι συντεταγμένες των εστιών είναι $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ και ένα τυχαίο σημείο $P(x,y)$ της έλλειψης. Έχουμε :

$$|PF_1|+|PF_2|=2\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2\alpha \qquad (12)$$

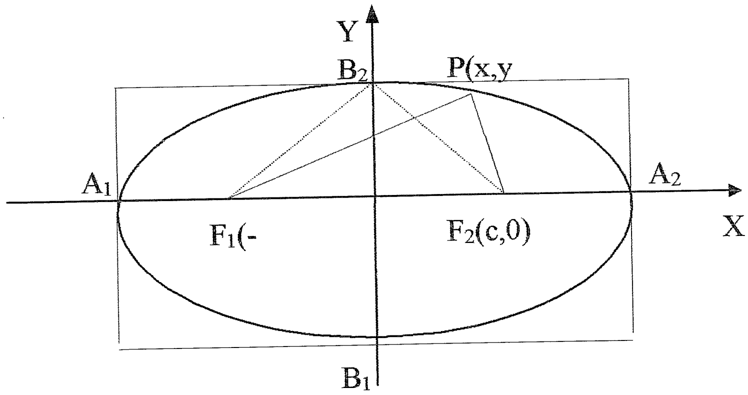
από την σχέση (12) μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε στην

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \quad (13)$$

Επειδή α>c η ποσότητα α^2-c^2 είναι πάντα θετική και μπορούμε να θέσουμε α^2-c^2=β^2. Τότε η σχέση (13) παίρνει τη μορφή :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad (14)$$

Γενική εξίσωση έλλειψης



Σχ. 2

Ας εξετάσουμε μερικές ιδιότητες της έλλειψης όπως προκύπτουν από την εξίσωση (14) :

α) Παρατηρούμε ότι η εξίσωση δεν μεταβάλλεται εαν αντικαταστήσουμε το x με το -x όπως και το y με το -y. Επομένως η έλλειψη είναι μια συμμετρική καμπύλη ως προς τους άξονες ΟΧ και ΟΥ και ως προς την αρχή των συντεταγμένων.

β) Από την σχέση (14) προκύπτει $y^2/\beta^2=1-x^2/\alpha^2$ ⇒ $1-x^2/\alpha^2\geq 0$ δηλ $-\alpha\leq x\leq \alpha$. Όμοια βρίσκουμε ότι $-\beta\leq y\leq \beta$. Άρα η έλλειψη βρίσκεται μέσα σ' ένα ορθογώνιο με κορυφές τα σημεία (α,β) , (-α,β) , (-α,-β) , (α,-β) .

Η ευθεία, η οποία διέρχεται από τις εστίες F_1 , F_2 ονομάζεται **κύριος άξονας** της έλλειψης. Ο άξονας αυτός τέμνει την έλλειψη στα σημεία $A_1(-\alpha,0)$ και $A_2(\alpha,0)$. Το ευθύγραμμο τμήμα Α1Α2 ονομάζεται μεγάλος άξονας και το ήμισυ αυτού μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης. Όμοια ο άξων ΟΥ τέμνει την έλλειψη σε δυο σημεία Β1(0,-β) Β2(0,β) και το ευθύγραμμο τμήμα Β1Β2 ονομάζεται μικρός άξονας και το ήμισυ αυτού μικρός ημιά- ξονας της έλλειψης. Παρατηρούμε ότι |B2F1|+|B2F2|=2α και επομένως |B2F1|=|B2F2|=α. Τα σημεία Α1 , Α2 , Β1 , Β2 ονομάζονται κορυφές της έλλειψης.

Στην περίπτωση που c=0, τότε α=β και οι εστίες συμπίπτουν στο κέντρο. Τότε η έλλειψη εκφυλίζεται σε μια περιφέρεια με εξίσωση $x^2+y^2=\alpha^2$.

Στην περίπτωση που c=α, τότε β=0 , οι δυο εστίες συμπίπτουν με τις κορυφές A_1, A_2 της έλλειψης, η οποία εκφυλίζεται σε (διπλό) ευθύγραμμο τμήμα A_1A_2 . Δηλ. εάν δια-τηρήσουμε το α σταθερό και μεταβάλλουμε το c από μηδέν μέχρι την τιμή α, τότε η έλ-λειψη ξεκινάει από μια περιφέρεια επιμηκύνεται συνεχώς μέχρις ότου να συμπέσει με το ευθύγραμμο τμήμα A_1A_2 .

Η δεύτερη κωνική τομή, που θα εξετάσουμε στη συνέχεια, είναι η υπερβολή. Ας θεωρήσουμε και πάλι δυο σταθερά σημεία F_1 και F_2 του επιπέδου. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων η απόλυτη διαφορά των αποστάσεων από τα σταθερά σημεία F_1, F_2 είναι σταθερή, ονομάζεται **υπερβολή**. Τα σταθερά σημεία F_1 , F_2 ονομάζονται και εδώ **εστίες της υπερβολής**.

Χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό όπως και στην περίπτωση της έλλειψης, θέτουμε $|F_1F_2|=2c$ και $||F_1P|-|F_2P||=2\alpha$, όπου P τυχόν σημείο της υπερβολής. Εδώ έχουμε $c>\alpha$ λόγω της γνωστής ιδιότητας των τριγώνων.

Για να βρούμε την εξίσωση της υπερβολής, θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων OXY με αρχή το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος F_1F_2 έτσι ώστε οι εστίες να βρίσκονται πάνω στον άξονα OX (Σχ. 3). Οι εστίες F_1, F_2 έχουν συντεταγμένες (-c,0) και (c,0) αντίστοιχα. Έστω P(x,y) τυχαίο σημείο της υπερβολής., τότε :

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2\alpha \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2\alpha+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x-c)^2+y^2=4\alpha^2+(x-c)^2+y^2\pm 4\alpha\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow \pm\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{cx}{\alpha}-\alpha \Rightarrow$$

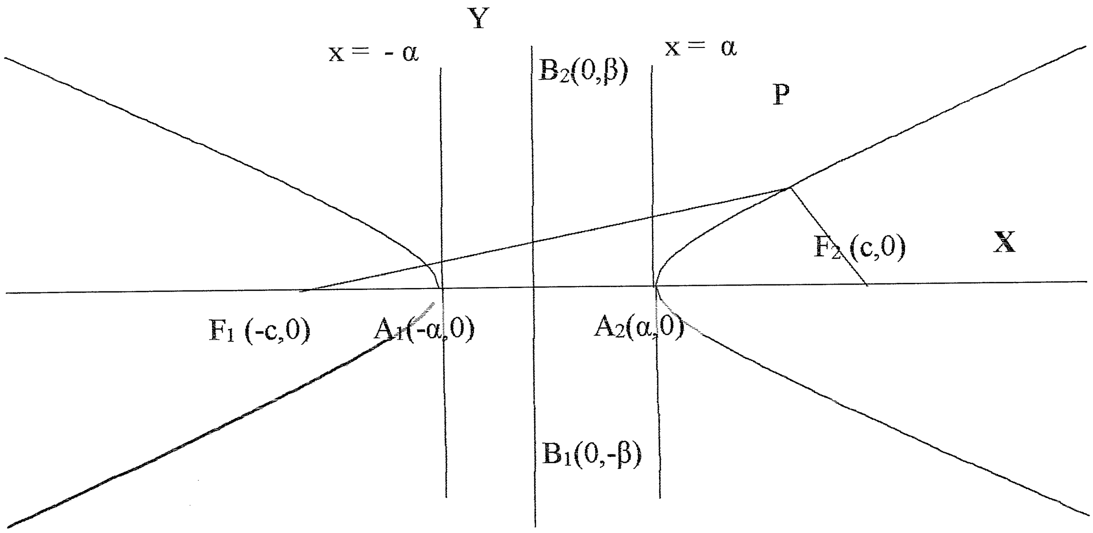
$$x^2-2cx+c^2+y^2=\frac{c^2x^2}{\alpha^2}-2cx+\alpha^2 \Rightarrow \frac{\alpha^2-c^2}{\alpha^2}x^2+y^2=\alpha^2-c^2 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2-c^2}=1$$

Επειδή $c>\alpha$ μπορούμε να θέσουμε $c^2-\alpha^2=\beta^2$ και τελικά έχουμε :

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad (15)$$

Η είναι η αναλυτική εξίσωση της υπερβολής. Η υπερβολή έχει παρόμοια χαρακτηρι-



Σχ. 3

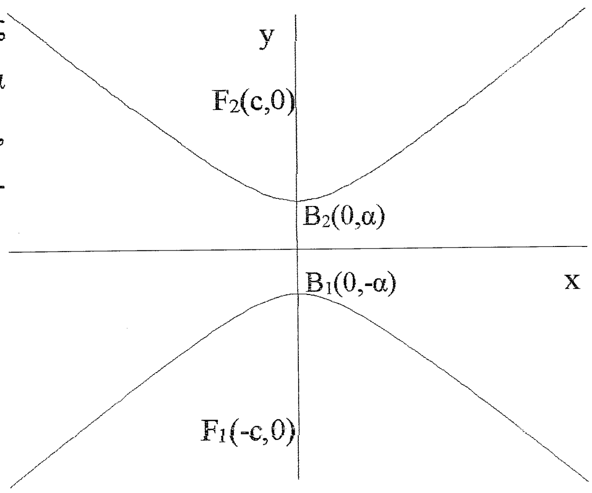
στικά, όπως και η έλλειψη. Είναι συμμετρική ως προς τους άξονες και ως προς την αρχή. Επίσης παρατηρούμε ότι επειδή $x^2/\alpha^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq \alpha$ δεν υπάρχουν σημεία της υπερβολής μεταξύ των ευθειών $x=-\alpha$ και $x=\alpha$. Ο άξονας ΟΥ δεν τέμνει την υπερβολή ενώ ο άξονας ΟΧ την τέμνει σε δυο σημεία $A_1(-\alpha,0)$ και $A_2(\alpha,0)$, τα οποία ονομάζονται **κορυφές της υπερβολής**. Το ευθύγραμμο τμήμα A_1A_2 ονομάζεται **άξονας της υπερβολής**

Τα σημεία $B_1(0,-\beta)$, $B_2(0,\beta)$ ορίζουν στον άξονα ΟΥ το ευθύγραμμο τμήμα B_1B_2 , το οποίο ονομάζεται **συζυγής άξονας** της υπερβολής (15) , Σχ. 3

Εάν θεωρήσουμε ότι οι εστίες F_1, F_2 βρίσκονται πάνω στον άξονα ΟΥ, τότε εργαζόμενοι όπως και πριν, βρίσκουμε ότι η εξίσωση της υπερβολής είναι

$$\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1 \qquad (16)$$

όπου τα α και β έχουν την ίδια σημασία όπως και στην (15), (Σχ.4)



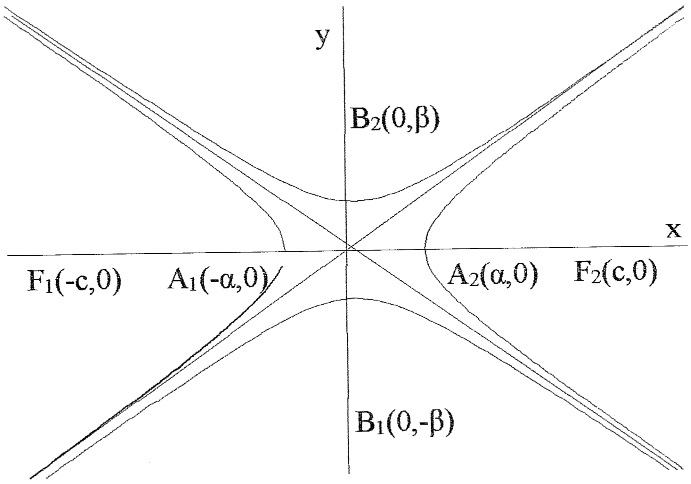
Σχ. 4

Θεωρούμε τώρα την υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=-1$

Δηλαδή $$\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=1 \qquad (17)$$

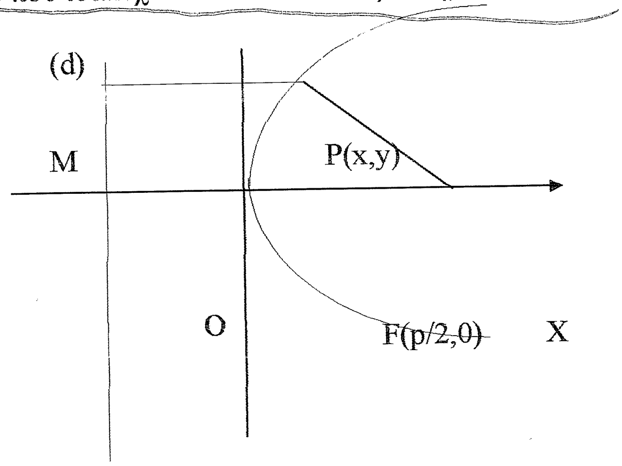
Παρατηρούμε ότι ο συζυγής άξονας της υπερβολής (16) είναι ο άξονας της (17) και ο συζυγής άξονας της (16) είναι ο άξονας της (17). Δυο τέτοιες υπερβολές ονομάζονται **συζυγείς υπερβολές** Σχ.5.

Επίσης παρατηρούμε ότι στις συζυγείς υπερβολές και οι τέσσερις εστίες ισαπέχουν από το κοινό κέντρο Ο(0,0).



Σχ. 5

Η τρίτη και τελευταία κωνική τομή είναι η **παραβολή**, η οποία ορίζεται σαν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο F και μια σταθερά ευθεία (d).



Σχ.6

Το σταθερό σημείο F ονομάζεται **εστία της παραβολής** και η ευθεία (d) **διευθετούσα της παραβολής**. Για να βρούμε την αναλυτική εξίσωση της παραβολής θεωρούμε σαν άξονα ΟΧ την κάθετο που φέρεται από την εστία F προς την διευθετούσα (d) και σαν άξονα ΟΥ την ευθεία την κάθετο προς τον ΟΧ και στο μέσο της απόστασης της εστίας F από την διευθετούσα (Σχ. 6). Έστω p η απόσταση της εστίας από την διευθετούσα, τότε οι συντεταγμένες της εστίας είναι F(p/2,0) και η εξίσωση της διευθετούσας x+p/2=0

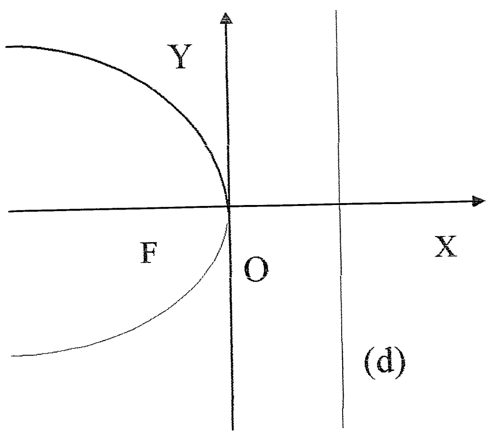
Εάν P(x,y) τυχόν σημείο της παραβολής, τότε από τον ορισμό της έχουμε :

$$|PF=PM = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2} \Rightarrow$$

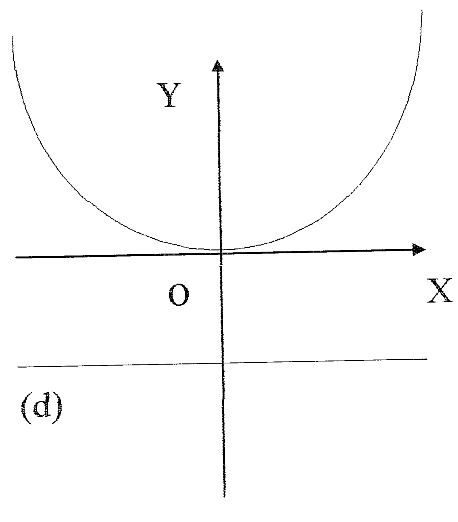
$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4} \Rightarrow y^2=2px$$

Η (18) είναι η ζητούμενη εξίσωση της παραβολής και το p ονομάζεται **παράμετρος της παραβολής**.

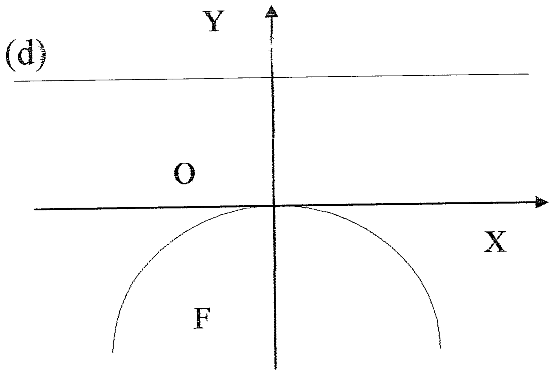
Από την μορφή της εξίσωσης, προκύπτει ότι η παραβολή δεν έχει κέντρο συμμετρίας, έχει όμως άξονα συμμετρίας, που είναι ο άξονας OX. O άξονας αυτός τέμνει την παραβολή στην αρχή των αξόνων O(0,0), που ονομάζεται **κορυφή της παραβολής**. Επίσης προκύπτει ότι για κάθε σημείο της παραβολής έχουμε x>0 και επομένως ολόκληρη η παραβολή βρίσκεται στα δεξιά του άξονα OY. Εάν πάρουμε την εστία F στον αρνητικό ημιάξονα OX′, τότε η εξίσωση της γίνεται $y^2=-2px$ και η παραβολή βρίσκεται στα αριστερά του άξονα OY, Σχ. 7. Επίσης εάν πάρουμε την διευθετούσα παράλληλη προς τον άξονα OX θα έχουμε σαν εξίσωση της παραβολής την έκφραση : $x^2=2py$ (Σχ. 8) ή την $x^2=-2py$ (Σχ. 9).



Σχ. 7



Σχ. 8



Σχ. 9