Θεωρία

1) Σύνολο

Είναι μια συλλογή αντικειμένων που καλούνται στοιχεία ή μέλη του συνόλου. Υποθέτουμε πάντα την ύπαρξη ενός υπερσυνόλου που καλείται σύμπαν και συμβολίζεται με U σε σχέση με το οποίο ορίζεται η πράξη της συμπλήρωσης. Ένα σύνολο αποτελείται από έναν αριθμό στοιχείων που μπορεί να είναι μηδέν, πεπερασμένος, μετρήσιμα άπειρος ή μη μετρήσιμα άπειρος και ορίζεται μ' έναν απ' τους παρακάτω τρόπους

i) καταγραφή των στοιχείων του με τη μορφή λίστας (αν είναι πεπερασμένο)

ii) περιγραφή ενός μηχανισμού παραγωγής ή αναγνώρισης των στοιχείων του.

iii) παρουσίαση μιας σχέσης ορισμού του

2) Πληθάριθμος (cardinality)

ενός συνόλου A, ονομάζεται ο αριθμός των στοιχείων του A και συμβολίζεται $|A|$

3) Δυναμοσύνολο (powerset)

ενός συνόλου A ονομάζεται το σύνολο των υποσυνόλων του A και συμβολίζεται $2^{|A|}$. Δηλαδή ένα σύνολο με n στοιχεία έχει ένα δυναμοσύνολο με 2^n στοιχεία

4) Αρχή του Περιστεριώνα.

Αν n αντικείμενα πρόκειται να τοποθετηθούν σε m υποδοχές, όπου $n > m$, τότε τουλάχιστο μια υποδοχή πρέπει να δεχτεί παραπάνω από ένα αντικείμενα

με βάση τη θεωρία συνόλων: Έστω $|A|$ ο αριθμός των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου A. Για δύο πεπερασμένα σύνολα A, B υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία $f: A \to B$ αν και μόνο αν $|A| = |B|$. Αν $|A| > |B|$ δεν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $A \to B$.

απόδειξη:

με επαγωγή: • Υποθέτουμε ότι $|B| = 1$ ότι δηλαδή το B είναι το μονομελές σύνολο $\{b\}$ και $|A| > 1$. Αν $f: A \to B$, τότε υπάρχουν τουλάχιστο δύο διαφορετικά στοιχεία $a_1, a_2 \in A$ με $f(a_1) = f(a_2) = b$. Άρα η f δεν είναι ένα-προς-ένα

• Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι "1-1" αν $f: A \to B$, $|A| > |B|$ και $|B| \le n$, όπου $n \ge 1$

• Έστω $f: A \to B$ και $|A| > |B| = n+1$. Επιλέγουμε ένα $b \in B$.

Αν $|f^{-1}(b)| \le 2$, η f δεν είναι "1-1" γιατί δύο στοιχεία του A έχουν την ίδια εικόνα ως προς f δηλαδή το b

Αν $|f^{-1}(b)| \le 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: A - f^{-1}(b) \to B - \{b\}$ ώστε $g(a) = f(a)$ για κάθε $a \in A - f^{-1}(b)$. Τότε

$\Rightarrow |A - f^{-1}(b)| \ge |A| - 1$

$|B - b| = n < |A| - 1$

Τότε η g δεν είναι "1-1". Άρα $g(a_1) = g(a_2)$ για κάποια a_1, a_2 που είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε όμως $f(a_1) = f(a_2)$ άρα η f δεν είναι "1-1"

5) Απόδειξη με επαγωγή

Έστω ένα σύνολο φυσικών αριθμών τέτοιο ώστε: 1. $0 \in A$
2. $\forall n \in N$, αν $\{0, 1, \dots, n\} \in A$ $\Rightarrow n+1 \in A$
τότε $A = N$.

Απλούστερα κάθε σύνολο φυσικών αριθμών που περιέχει το μηδέν και έχει την ιδιότητα να περιέχει το n+1 αν περιέχει τους άλλους αριθμούς έως το n συμπεριλαμβανομένου και του n, είναι στην πραγματικότητα το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών.

6) Απόδειξη με εις άτοπο απαγωγή.

Υποθέτουμε ότι κάποιο λέγους P είναι ψευδές. Δείχνουμε ότι η παραπάνω υπόθεση οδηγεί σε άτοπο. Συμπεραίνουμε, ως εκ τούτου, ότι το P είναι αληθές.

7) Αρχή της Διαγωνοποίησης

Έστω μια σχέση R ένα σύνολο A και έστω D το διαγώνιο σύνολο για την R $\{a : a \in A$ και $(a,a) \notin R\}$. Για κάθε $a \in A$, έστω $Ra = \{b : b \in A$ και $(a,b) \in R\}$. Τότε το D είναι διαφορετικό απ' όλα τα Ra.

ή το συμπλήρωμα της διαγωνίου διαφέρει από κάθε σειρά

8) Θεώρημα Cantor

Όταν έχω ένα σύνολο πάντα μπορώ να βρω ένα μεγαλύτερο. (για πεπερασμένο σύνολο είναι προφανές).

απόδειξη:

- Δυο απειροσύνολα είναι ίσα αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους.
- x = μέγιστο άπειρο σύνολο
  $x = \{a, b, c, d, e, \dots\}$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει μεγαλύτερο σύνολο

Έστω $P(x)$ = δυναμοσύνολο του $x = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c,d\}, \dots\}$

Δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο του x γιατί το x είναι μέγιστο.
" " " μικρότερο " " περιέχει τα στοιχεία του x με μορφή μονοσυνόλων $\Rightarrow P(x) \equiv x$ αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία.
Κάποια απ' τα στοιχεία του x αντιστοιχίζονται σε υποσύνολα του $P(x)$ που το περιέχουν π.χ $b \leftrightarrow \{a,b\}$ ή σε κάποια που το δεν το περιέχουν π.χ $a \leftrightarrow \{c,d\}$
Το F περιέχει στοιχεία του x που δεν περιέχονται στα υποσύνολα του $P(x)$ που αντιστοιχίζονται.
Αυτό το στοιχείο του x που αντιστοιχίζεται στο F, δεν ανήκει στο F γιατί πρέπει όμως να ανήκει λόγω ορισμού άτοπο.

$$\begin{array}{ll} x & P(x) \\ x & \longleftrightarrow \{c,d\} \\ e & \longleftrightarrow \{a,c,e\} \end{array}$$

ΑΡΑ $\left\{ \begin{array}{l} \text{δεν υπάρχει 1-1 αντιστοιχία στα } P(x), x \\ P(x) \text{ δεν γίνεται να είναι μικρότερο του } x \\ P(x) > x \end{array} \right.$

9) Αντίστροφη Συμβολοσειρά

Συμβολίζεται: w^R Ισχύουν $|w| = 0 \Rightarrow w = w^R = e$
$\forall w, x \Rightarrow (wx)^R = x^R w^R$

απόδειξη με επαγωγή
- Βασικό Βήμα $|x| = 0 \Rightarrow x = e$
- Επαγωγική Υπόθεση: $|x| \leq n \Leftrightarrow (wx)^R = x^R w^R$
- Επαγωγικό Βήμα: $|x| = n+1 \Rightarrow x = u a$. $u \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$, $|u| = n$

$$(wx)^R = \underbrace{(w(ua))^R}_{x = ua} = \underbrace{((wu)a)^R}_{\text{προσεταιριστική παράθεση}} = \underbrace{a^R (wu)^R}_{\text{ορισμός αντιστροφής}} = \underbrace{a u^R w^R}_{\text{επαγωγική υπόθεση}} = \underbrace{(ua)^R w^R}_{\text{ορισμός αντιστροφής}} = \underbrace{x^R w^R}_{x = ua}$$

10) Γλώσσα

Θεωρούμε ένα σύνολο συμβολοσειρών από συνδυασμούς μηδέν ή περισσότερων συμβόλων ενός πεπερασμένου αλφαβήτου.

- μια γλώσσα μπορεί είναι υπολογίσιμη, δηλαδή υπάρχει μηχανή που να μπορεί να την αναγνωρίσει (computable language)
- μια γλώσσα μπορεί να είναι υπολογίσιμη από μηχανή που πάντα τερματίζει τη λειτουργία μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων (decidability).
- μια γλώσσα μπορεί να είναι υπολογίσιμη από μια αποδοτική μηχανή, μια μηχανή που λειτουργεί σε πολυωνυμικό χρόνο (tractability).

11) Πεπερασμένα Αυτόματα

Ανήκουν στη γενικότερη τάξη των μηχανών πεπερασμένου αριθμού καταστάσεων, μπορεί σε κάθε χρονική στιγμή να βρίσκονται σε μια κατάσταση από ένα πεπερασμένο σύνολο. Όταν ένα αυτόματο βρίσκεται σε κάποια κατάσταση διαβάζοντας το επόμενο σύμβολο εισόδου μεταβαίνει σε μια νέα κατάσταση, δηλαδή κάθε φορά, η επόμενη κατάσταση είναι συνάρτηση της παρούσας και της εισόδου. Η συνάρτηση αυτή καλείται συνάρτηση μετάβασης

12) DFA ≠ NFA

α) στα DFAs για κάθε κατάσταση υπάρχει μόνο μια δυνατή μετάβαση για δεδομένη είσοδο, ενώ στα NFAs είναι δυνατό να υπάρχουν εναλλακτικές μεταβάσεις.

β) στα DFAs δεν επιτρέπονται μεταβάσεις χωρίς κατανάλωση εισόδου, ενώ στα NFAs επιτρέπεται.

γ) τα NFAs σχεδιάζονται ευκολότερα και είναι μικρότερα και απλούστερα.

13) DFA

Είναι μια πεντάδα $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ όπου

K: πεπερασμένο σύνολο από καταστάσεις

Σ: αλφάβητο

$s \in K$: η αρχική κατάσταση

$F \in K$: το σύνολο των τελικών καταστάσεων

δ: η συνάρτηση μετάβασης $\delta : K \times \Sigma \to K$

14) NFA

Είναι μια πεντάδα $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ όπου

K σύνολο πεπερασμένο από καταστάσεις

Σ αλφάβητο

$s \in K$: αρχική κατάσταση

$F \in K$: σύνολο τελικών καταστάσεων

Δ: σχέση μετάβασης που αποτελεί ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $K \times \Sigma^* \times K$

15) Ισοδυναμία Αυτομάτων

Δύο πεπερασμένα αυτόματα M_1 και M_2 είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν $L(M_1) = L(M_2)$. Δηλαδή αν δέχονται την ίδια γλώσσα ανεξάρτητα από τον τρόπο που προσπαθεί καθένα να το πετύχει.

16) Για κάθε NFA υπάρχει ένα ισοδύναμο DFA

Απόδειξη: Έστω $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ ένα NFA. Για να μετατραπεί σε DFA πρέπει να αφαιρέσειν:

- μεταβάσεις τύπου $(q, u, q') \in \Delta$ έτσι ώστε $|u| > 1$ ή $u = e$
- μεταβάσεις που λείπουν
- πολλαπλές μεταβάσεις που μπορούν να εφαρμοστούν σε μια συνολική κατάσταση

$NFA \rightarrow N = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$DFA \rightarrow M = (K', \Sigma, \delta', q_0', F')$

① Το σύνολο καταστάσεων του NFA είναι K. Το σύνολο K' θα είναι το πολύ $2^{|K|}$. Φτιάχνω σύνολο σύνθετων καταστάσεων για κάποιο συγκεκριμένο σύμβολο για το DFA.

π.χ. NFA: $q_1 \xrightarrow{a} q_2$, $q_1 \xrightarrow{a} q_3$ DFA: $q_1 \xrightarrow{a} \{q_2, q_3\}$ Συνεπώς $K \cdot K' = P(K)$.

② Για κάθε $R \in K'$ και για κάθε $a \in \Sigma$: $\delta'(R, a) = \{q \in K \mid q \in E(\delta(r, a)),\ q \in \delta'(r, a),\ \forall r \in R\}$

Δηλαδή από κάθε κατάσταση του NFA που έχω φτάσει για ένα σύμβολο, θα βγάλω πάλι μια σύνθετη κατάσταση.

③ $q_0 = \{q_0\}$ Οι αρχικές καταστάσεις των δύο αυτομάτων είναι ίδιες

④ $F' = \{$οι σύνθετες καταστάσεις των $P(K)$ που περιέχουν $q \in F\}$

$E(R) = \{n \in K$ μπορώ να φτάσω ξεκινώντας απ' την R και διαβάζοντας $\emptyset$ ή $e\}$.

17) Μη ντετερμινισμός

NFAs έχουν μερικά ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που τους προσδίδουν μεγαλύτερη ευελιξία και ικανότητα αλλαγής θέσης με τρόπο που:

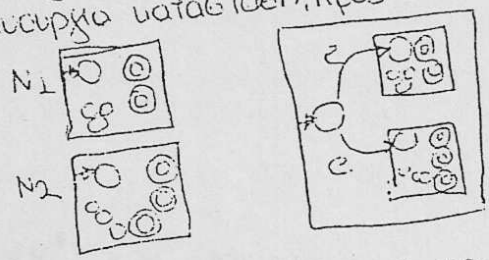
(i) μη ντετερμινισμός είναι συνεπάγεται η κατάσταση και το σύμβολο εισόδου αποφασίζεται μόνο εν μέρει από την παρούσα κατάσταση και το σύμβολο εισόδου

(ii) για κάποιους συνδυασμούς καταστάσεων και συμβόλων εισόδου μπορεί να μην υπάρχει καμία επόμενη κατάσταση

(iii) τα διαγράμματα καταστάσεων NFAs επιτρέπεται να έχουν τόξα με ονόματα είτε σύμβολα του αλφαβήτου, είτε e.

18) Κλειστότητα ως προς την ένωση

Δύο NFAs N_1 και N_2. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ακόμη NFA ώστε $L(N) = L(N_1) \cup L(N_2)$ από την κενή συμ/σειρά από την δημιουργώντας μια νέα κατάσταση και εισάγοντας μεταβάσεις με την κενή συμ/σειρά από την καινούργια κατάσταση, προς τις αρχικές κάθε αυτόματου



$N_1: (K_1, \Sigma, \Delta_1, S_1, F_1)$

$N_2: (K_2, \Sigma, \Delta_2, S_2, F_2)$

$N: K = K_1 \cup K_2 \cup \{s\}$

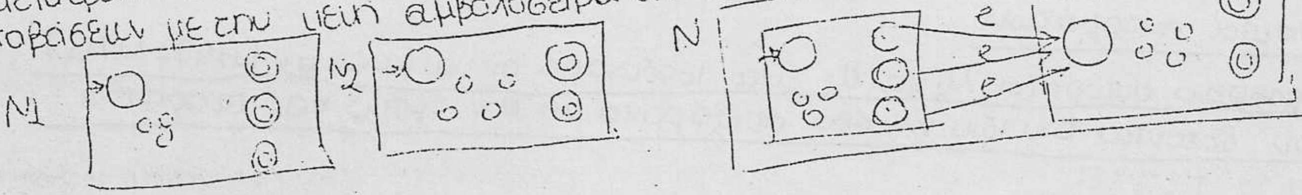
$\Sigma_N = \Sigma$

$F = F_1 \cup F_2$

$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{S, e \rightarrow S_1, s\}$

19) Κλειστότητα ως προς την παράθεση

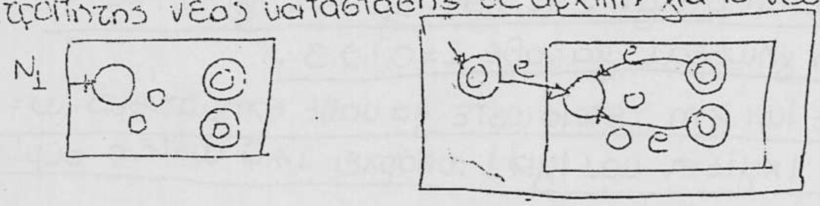
Μετατροπή όλων των τελικών καταστάσεων του N_1 σε μη τελικές και ... εισαγωγή μεταβάσεων με την κενή συμβολοσειρά από καθεμία απ' αυτές στην αρχική του N_2.



④

(20) Κλειστότητα ως προς άστρο Kleene

• $L(N) = L(N_1)^*$. Δημιουργώ μιας νέας κατάστασης. Εισαγωγή μεταβάσεων με την κενή συμβολοσειρά από αυτή τη νέα κατάσταση και από όλες τις τελικές προς την αρχική και μετατρέπητης νέας κατάστασης σε αρχική/τελική για το νέο αυτόματο



(21) Κλειστότητα ως προς την τομή

- κατασκευή του συμπληρωματικού DFA του N_1
- -"- -"- DFA του N_2
- -"- της ένωσης των δυο παραπάνω DFAs και μετατροπή του NFA → DFA
- -"- του συμπληρωματικού DFA που κατασκευάστηκε πριν

$$L_1 \cap L_2 = \Sigma^* - \left((\Sigma^* - L_1) \cup (\Sigma^* - L_2) \right)$$

(22) Κλειστότητα ως προς συμπλήρωμα

Μετατρέπω όλες τις τελικές καταστάσεις του N που δέχεται την L σε μη τελικές αντίστροφα. και προκύπτει ένα άλλο αυτόματο που διαβάζει το συμπλήρωμα της L.

(23) Κανονική Έκφραση / Γλώσσα

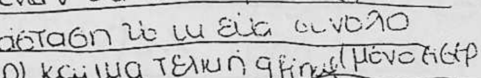
Οι γλώσσες που παράγονται με περιορισμένο αριθμό βημάτων με χρησιμοποίηση των πράξεων 1) ένωση 2) παράθεση και 3) Kleene*. Μια κανονική έκφραση είναι ένας συνοπτικός τρόπος συμβολισμού της διαδικασίας παραγωγής μιας γλώσσας.

R κανονική έκφραση όταν το R είναι:

i) a, όπου $a \in \Sigma$ (a στοιχείο κάποιου αλφαβήτου)
ii) e (κενή συμβολοσειρά)
iii) $\varnothing$
iv) $(R_1 \cup R_2)$ όπου R_1 και R_2 οι μικρότερες κανονικές εκφράσεις
v) $(R_1 \circ R_2)$.
vi) R_1^*

(24) GNFA $(V, E, R(\Sigma), s, t, \lambda, e_0, F)$.

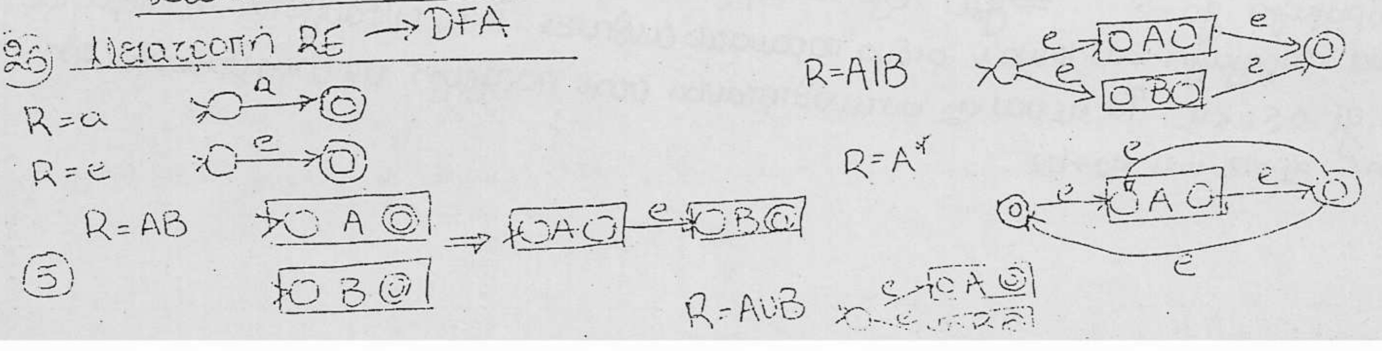
Είναι ένα NFA, ορισμένο σε ένα αλφάβητο Σ πρόκειται για έναν κατευθυνόμενο γράφο με επιγραφές από το σύνολο επιγραφών $R(\Sigma)$ με αρχική κατάσταση το s και ένα σύνολο τελικών καταστάσεων F. Βάζω μια αρχική q_{start} (μόνο εξερχ. βέλη) και μια τελική q_{final} (μόνο εισερχ.)



(25) Δίνεται μια γλώσσα. Αποδείξτε αν είναι κανονική.

→ αν μου δίνεται αυτόματο / RE λέω απ' ευθείας πως είναι κανονική
→ δείχνω ότι υπάρχει RE ώστε $L(RE) = L$
ή φτιάχνω αυτόματο (DFA/NFA)
ή δείχνω ότι υπάρχουν γλώσσες L_1, L_2 ώστε η L να είναι ένωση ή παράθεση ή Kleene star ή τομή ή συμπλήρωση αυτών

(26) Μετατροπή RE → DFA



(5)

PUMPING LEMMA

- Αν L είναι μια άπειρη κανονική γλώσσα, τότε υπάρχει θετικός ακέραιος m τέτοιος ώστε κάθε συμβολοσειρά $w \in L$ με μήκος m ή μεγαλύτερο, μπορεί να αποσυντεθεί σε 3 τμήματα xyz, όπου $|xy| \leq m$ και $|y| \neq 0$, $|y| \geq 1$, τότε $w_i = xy^iz$ ανήκει επίσης στη γλώσσα L για κάθε $i = 0,1,2,3 \ldots$
- Αν για κάθε m υπάρχει $w \in L$ με $|w| \geq m$, τέτοιο ώστε για κάθε σχηματισμό $w = xyz$ αν ικανοποιούνται οι συνθήκες $|xy| \leq m$ και $|y| \geq 1$, υπάρχει $i \geq 0$ ώστε η συμβολοσ/ρα $xy^iz \notin L$ τότε η L δεν είναι κανονική

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $M = (Q, \Sigma, \delta, s_1, F)$ ένα DFA που αναγνωρίζει τη γλώσσα L και έστω p ο αριθμός καταστάσεων του M. Έστω $s = s_1 s_2 s_3 \ldots s_n$ μια συμβολοσειρά της γλώσσας με μήκος = n $n \geq p$. Θεωρούμε $r_1, \ldots r_{n+1}$ την ακολουθία των καταστάσεων απ' την οποία διέρχεται το M κατά την επεξεργασία της s, οπότε $r_{i+1} = \delta(r_i, s_i)$. Αυτή η ακολουθία έχει μήκος n+1 που είναι τουλάχιστο p+1. Μεταξύ των πρώτων p+1 στοιχείων σε αυτή τη ακολουθία δύο πρέπει να είναι ίδιες με βάση την αρχή του περιστεριώνα. Καλούμε την πρώτη απ' αυτές r_j και την άλλη r_l. Αφού η r_l εμφανίζεται μεταξύ των πρώτων p+1 θέσεων εάν τέλος μιας ακολουθίας με πρώτο στοιχείο την r_1, είναι $l \leq p+1$.
Έστω $x = s_1 \ldots s_{j-1}$, $y = s_j, \ldots s_{l-1}$, $z = s_l, \ldots s_n$. Δεδομένου ότι η x προκαλεί στο M μετάβαση από την r_1 στην r_j: η y τη μετάβαση r_j στην r_l και η z από την r_l στην r_{n+1}, η οποία είναι κατάσταση αποδοχής, συμπεραίνουμε ότι το αυτόματο M δέχεται τη συμβολοσειρά xy^iz

28. Γραμματική Τύπου C

είναι μια τετράδα (N, Σ, P, S) όπου
N: πεπερασμένο σύνολο συμβόλων ή μεταβλητών (μη τερματικά σύμβολα)
Σ: αλφάβητο με τερματικά σύμβολα.
P: μια σχέση της οποίας τα στοιχεία λέγονται κανόνες παραγωγής.
S: αρχικό σύμβολο

29. Παραγωγή

$X \to Y$ όπου $X \in (V \cup T)^+$ που σημαίνει ότι η X ανήκει στο σύνολο των συμβολοσειρών που αποτελούνται από μεταβλητές και τερματικά σύμβολα όλα δεν είναι η κενή συμ/ρα και μπορεί να είναι η κενή συμ/ρα. και $Y \in (V \cup T)^*$ ανήκει στο παραπάνω σύνολο

$S \Rightarrow T$ η S παράγει την T σε ένα ακριβώς βήμα
$S \overset{*}{\Rightarrow} T$ η S -//- -//- σε 0 ή περισσότερα βήματα
$S \overset{+}{\Rightarrow} T$ η S -//- -//- σε 1 ή -//- -//-

30. Αριστερότερη παραγωγή

Μια παραγωγή $g_0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow g_n$ λέγεται αριστερότερη αν το a_1 αντικαθίσταται πριν το a_2 σε μια παραγωγή και ισχύουν οι δύο παρακάτω ευθείες Το a_1 εμφανίζεται αριστερά του a_2 στη g_i, $0 \leq i < n$. Το a_1 και a_2 αντικαθίστανται στην παραγωγή με βάση κανόνες της μορφής $a_1 \to b_1$ και $a_2 \to b_2$.

(31) Γραμματική τύπου 1

Είναι μια γραμματική τύπου 0 που ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο συνθήκες. Για κάθε κανόνα $a \to b$ στο P που δεν είναι της μορφής $S \to e$ ισχύει $|a| \le |b|$. Αν ο $S \to e$ ανήκει στο P τότε το S δεν εμφανίζεται στο δεξιότερο μέρος κάποιου κανόνα.

(32) Γραμματική τύπου 2

Είναι μια γραμματική τύπου 1 στην οποία για κάθε κανόνα $a \to b$ ισχύει $|a| = 1$. Επί. το a μη τερματικό σύμβολο

(33) Γραμματική τύπου 3

Είναι μια γραμματική τύπου 2 στην οποία για κάθε κανόνα $a \to b$ που δεν είναι της μορφής $S \to e$ ισχύει μια από τις ακόλουθες συνθήκες. Το b είναι τερματικό σύμβολο που ακολουθείται από ένα μη τερματικό

(34) Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα (CFL)

Είναι μια τετράδα (V, Σ, R, S) όπου

V: αλφάβητο

Σ: σύνολο τερματικών συμβόλων

R: σύνολο κανόνων, στοιχείο του $(V-\Sigma) \times V^*$

S: αρχικό σύμβολο, στοιχείο του $V-\Sigma$

τα στοιχεία του $V-\Sigma$ → μη τερματικά

για κάθε $A \in V-\Sigma$ και $u \in V^*$ γράφουμε $A \xrightarrow{G} u$ αν $(A,u) \in R$. Για κάθε u, v συμβολοσειρές γράφουμε $u \overset{G}{\Rightarrow} v$ αν και μόνο αν υπάρχουν συμ/σειρές $x, y, v' \in V^*$ και $A \in V-\Sigma$ ώστε $u = xAy$, $v = xv'y$ και $A \xrightarrow{G} v'$. Η γλώσσα που παράγεται από τη γραμματική G είναι η $L(G) = \{w \in \Sigma^* : S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$.

(35) Μια γλώσσα είναι κανονική αν και μόνο αν μπορεί να παραχθεί από κάποιον γραμματ...

(36) Αυτόματα Στοίβας (PDA)

Λειτουργούν όπως τα NFAs ω έχουν επιπλέον αποθηκευτικό χώρο. Αποδέχ~~ονται οποιαδήποτε γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα. Είναι μια ακολουθία 7 στοι~~χεία

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$.

Q: πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων

Σ: πεπερασμένο αλφάβητο εισόδου

Γ: -ıı- -ıı- με τα σύμβολα της στοίβας ($ σύμβολο ... στοίβας)

q_0: αρχική κατάσταση

Z_0: αρχικό σύμβολο

F: σύνολο τελικών καταστάσεων

δ: συνάρτηση μετάβασης $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to P_{fin}(Q \times \Gamma^*)$

(37) Κλειστότητα σε CFL

→ ως προς την ένωση: έστω S ένα νέο σύμβολο και $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}, S)$. Τότε $L(G_1) \cup L(G_2) = L(G)$. Επειδή οι μοναδικοί κανόνες που αφορούν το S είναι οι $S \to S_1$ και $S \to S_2$ ισχύει $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$, όπου $w \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$ αν και μόνο αν είτε $S_1 \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$ ή $S_2 \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$. Κι εφόσον οι G_1 και G_2 έχουν ξένα σύνολα μη τερματικών συμβόλων, $S_1 \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$ αν και μόνο αν $S_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Rightarrow}} w$.

→ παράθεση: η $L(G_1)L(G_2)$ παράγεται από τη γραμματική

$(V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}, S)$

→ Kleene *: η $L(G_1)^*$ παράγεται:

$(V_1, \Sigma_1, R_1 \cup \{S_1 \to \varepsilon, S_1 \to S_1 S_1\}, S_1)$.

(9)

38. Pumping Lemma για CFLs. ✓

Για καθε γλωσσα χωρις συμφραζομενα L υπαρχει μια θετικη ακεραια σταθερα m, ωστε αν η συμβολοσειρα ω ανηκει στην L και $|\omega| \geq m$, τοτε η ω μπορει να γραφει σαν $uvxyz$ με $uv^k x y^k z$ να ανηκει στην L, $\forall k > 0$. Επιπλεον $|vxy| \leq m$, $|vy| > 0$.

39. Θεση Church.

Μια συναρτηση ειναι υπολογισιμη, αν μπορει να υπολογιστει απο μηχανη Turing. (υντετερμινιστικη)

40. Περιγραφη μηχανων Turing

Διαθετουν ταινια που θεωρειται απειρου μηκους και προς τις δυο κατευθυνσεις. Ειναι χωρισμενη σε τετραγωνακια, καθενα απ'τα οποια περιεχει συμβολο του αλφαβητου. Διαθετει μια κεφαλη αναγνωσης/εγγραφης, η οποια σε καθε χρονικη στιγμη ειναι τοποθετημενη σε καποιο τετραγωνακι και μπορει μονο να διαβασει η να γραψει σ'αυτο. Αν βρεθει σε μια κατασταση για την οποια δεν υπαρχει αντιστοιχη εντολη τερματιζει.

41. Ορισμος μηχανων Turing

Ειναι μια ακολουθια 7 στοιχειων $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, F)$

Q : συνολο καταστασεων

Σ : πεπερασμενο συνολο συμβολων αλφαβητο εισοδου

Γ : -"- -"- -"- αλφαβητο ταινιας (περιεχει ⊔)

δ : συναρτηση μεταβασης, πεπερασμενο συνολο απο πενταδες $\delta \subseteq Q \times \Gamma \times \Gamma \times \{L, R\} \times Q$ ωστε για καθε $(p, a) \in Q \times \Gamma$ υπαρχει το πολυ μια τριαδα $(b, m, q) \in \Gamma \times \{L, R\} \times Q$ ωστε $(p, a, b, m, q) \in \delta$

(p, a, b, m, q) : εντολη (μεταβαση απο την κατασταση p στην q και εγγραφη του συμβολου b στη θεση του a και μετακινηση της κεφαλης δεξια ή αριστερα, αναλογα m)

q_0 : αρχικη κατασταση

⊔ : κενο

F : συνολο τελικων καταστασεων.

{ Αν περιεχει μονο τις καταστασεις q_{accept}, q_{reject} λεγεται TM decider }

42. Στιγμιοτυπα

Εστω μηχανη Turing $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \{L, R\}, F)$ οπου το Γ περιεχει εκτος απο τον κενο και τον ειδικο χαρακτηρα "ε". Τοτε

- αρχικο στιγμιοτυπο ειναι της μορφης $q_0 \omega_1 \omega_2, \ldots \omega_n$, οπου $\omega_1, \ldots \omega_m \in \Sigma^*$, $m \geq$ η $q_0 \omega$ με $\omega \in \Sigma^+$ ή $q_0 B$
- διακοπης λειτουργιας : $upa\omega$
- καταλληλο : στιγμιοτυπο διακοπης λειτουργιας της μορφης $B^k p \omega B^l$.

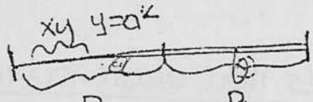
43. Παραλλαγες

1. Μη ντετερμινιστικη μηχανη Turing
2. TM stay option (ακινητη κεφαλη)
3. ημιαπειρη ταινια (μονο απ'τη μια πλευρα απειρη)
4. TM με πολλαπλες ταινιες
5. Ταινια πολλαπλων διαστασεων
6. Off line TM (η εισοδος δεν ειναι τοποθετημενη στην ταινια, αλλα αποθηκευμενη σ'ενα αρχειο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

① Αποδείξτε ότι η $L=\{a^n b^n, n\neq 0\}$ δεν είναι κανονική

Έστω ότι η L είναι κανονική. Θεωρώ τη σταθερά p του pumping lemma, $w\in L$, $|w|\geq p$, $w=a^p b^p \Rightarrow$ ισχύει PL $\Rightarrow \exists xyz : w=xyz$ με $y\neq 0$ και $|xy|\leq p$



xy^iz

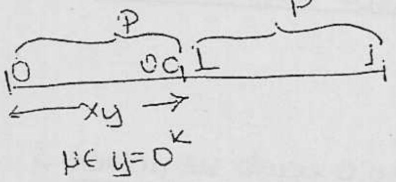
για $i=2$: $xyyz \rightarrow$ $\#a = p+k$, $\#b = p$ } → η συμβολοσειρά δεν ανήκει στη γλώσσα

Εφ' όσον υπάρχει i για το οποίο ΔΕΝ ισχύει το PL.
η L δεν είναι κανονική.

② Αποδείξτε ότι η $L=\{0^i 1^j, i>j\}$ δεν είναι κανονική

Έστω ότι η L είναι κανονική. Θεωρώ p σταθερά του PL, $w\in L$, $w=0^{p+1}1^p$

$w=xyz$, $y\neq 0$, $|xy|\leq p$



xy^iz

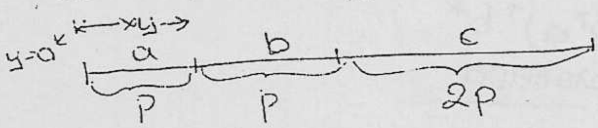
για $i=0$: xz, $\#0 : p+1-k$, $\#1 : p$

για $i=2$: $xyyz$, $\#0 : p+2$, $\#1 : p$

οι συμβολοσειρές δεν ανήκουν στη γλώσσα. Δεν ισχύει το PL. Δεν είναι κανονική

③ Αποδείξτε ότι η $L=\{a^n b^e c^{n+e} ; n, e\geq 0\}$ δεν είναι κανονική

Έστω η L κανονική. Θεωρώ p σταθερά του PL, $w=a^p b^p c^{2p}$, $w\in L$. Ισχύει το PL άρα $w=xyz$, $y\neq 0$, $|xy|\leq p$



xy^iz

για $i=2$: $xyyz$

$a \rightarrow p+k$
$b \rightarrow p$
$c \rightarrow 2p$

Δεν ισχύει το PL αφού η συμβ/ρα δεν ανήκει στη γλώσσα, δεν είναι κανονική

4. Αποδείξτε ότι η $L=\{ww^R, w\in\{a,b\}^*\}$ δεν είναι κανονική.

Έστω L κανονική. Θεωρώ p σταθερά του PL. $w=a^p b^p b^p a^p$

$s=xyz$, $y\neq 0$, $|xy|\leq p$

xy^iz

Για $i=2$: $xyyz$

Τα πρώτα a: $p+k$
Τα τελευταία a: p

} συνεπώς η w δεν αντικαθίσταται από την ανάστροφή της. Άρα $a^{k+p}b^p b^p a^p \notin L$

(5) [illegible]

Έστω L κανονική. Θεωρώ p σταθερά του PL. Επιλέγω $w = 0^p 1 0^p 1$. Αφού ισχύει PL

$w = xyz$, $y \neq e$, $|xy| \le p$

$xy'z$

$\overbrace{\quad 0 \quad}^{p} 1 \; \overbrace{\quad 0 \quad}^{p} 1$

xy

$y = 0^k$

$i = 2$: $xy^2z \notin L$

Τα πρώτα 0 διαφέρουν σε αριθμό απ' τα τελευταία

άρα η L μη κανονική

(6) Να γράψετε κανονική έκφραση για όλες τις συμβολοσειρές που αποτελούνται από 0 και 1

$(0 \cup 1)^*$ ή $(1 \cup 0)^*$

(7) RE για όλες τις συμβολοσειρές από a και b που έχουν άρτιο μήκος.

$((\underbrace{a \cup b}_{\text{παίρνω } a \text{ ή } b})(\underbrace{a \cup b}_{\text{παίρνω } a \text{ ή } b}))^*$

Άρα κάθε φορά παίρνω δύο γράμματα και με το * τα επαναλαμβάνω όσες φορές θέλω ⇒ δύναμη του 2

(8) RE για όλες τις συμβολοσειρές από a και b που έχουν περιττό μήκος

$(a \cup b)((a \cup b)(a \cup b))^*$

δεν περιέχεται το e

(9) RE για όλες τις συμβολοσειρές που αποτελούνται από a και b με μήκος 3

$(a \cup b)(a \cup b)(a \cup b)$

(10) RE για όλες τις συμβολοσειρές και περιέχουν την υποσυμ/ρα aa:

$(a \cup b)^* aa (a \cup b)^*$

(11) RE για όλες τις συμβολοσειρές που δεν περιέχουν την aa:

Μπορώ να έχω a, a και όσα b θέλω, a και όσα ba θέλω μετά: $a(b \cup ba)^*$

Απ: $e \cup a(b \cup ba)^* \cup b(ab \cup b)^*$ ή $(a \cup e)(bb^*a)^*b^*$

(12) $\Sigma = \{a, b, c\}$. RE για οποιαδήποτε μη κενή συμβολοσειρά

$(a \cup b \cup c)(a \cup b \cup c)^*$

(13) $\Sigma = \{a, b, c\}$. RE για οποιαδήποτε συμ/ρα περιέχει μια ακριβώς εμφάνιση του a.

$(b \cup c)^* a (b \cup c)^*$

(14) $\Sigma = \{a, b, c\}$. RE για οποιαδήποτε συμ/ρα που δεν περιέχει παραπάνω από τρία a.

Ψάχνω οποιαδήποτε συμ/ρα με κανένα 1, 2, ή 3 a δηλαδή $(a \cup e)(a \cup e)(a \cup e)$. Έχω όμως και τα b, c σε όσες επαναλήψεις θέλω. Άρα αν ονομάσω $X = (b \cup c)^*$ και $A = (a \cup e)$

Έχω τελικά την έκφραση: $XAXAXAX$ δηλ. $(b \cup c)^*(a \cup e)(b \cup c)^*(a \cup e)(b \cup c)^*(a \cup e)(b \cup c)$

(15) $\Sigma = \{a, b, c\}$. RE για οποιαδήποτε συμ/ρα περιέχει τουλάχιστον μια εμφάνιση κάθε συμβόλου του Σ.

$abc \cup acb \cup bac \cup bca \cup cab \cup cba$ παίρνω αρχικά όλους τους δυνατούς συνδυασμούς για κάθε ακολουθία που αρχίζει απ' το συγκεκριμένο σύμβολο.

όμως για κάθε ένα απ' τα στοιχεία της παραπάνω ένωσης μεταξύ των γραμμάτων να επαναλαμβάνονται οποιαδήποτε από τα άλλα σύμβολα και όσες φορές θέλω. Άρα αν $X = (a \cup b \cup c)^*$ έχω: $XaXbXcX \cup XaXcXbX \cup$ ...

(15) Σ={a,b,c}. RE για συμβολοσειρα που δεν περιεχει περ. συνεχομ. απο 2 συνεχομενες εμφανισεις του a

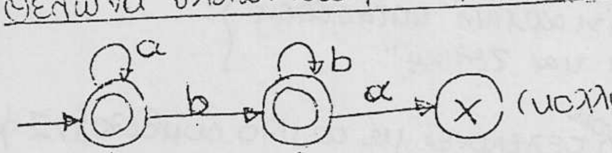
Θελω (e ∪ a ∪ aa)

$\rightarrow \cancel{*}\ ((b\cup c)\underbrace{(b\cup c)^*(e\cup a\cup aa)(b\cup c)^*}_{X})^*$

(17) Σ={a,b,c}. RE για καθε συμ/ρα που οι εμφανισεις του a έχουν μηκος πολ/σιο του 3

$(aaa\cup b\cup c)^*$

(18) Θέλω να υλοποιήσω με πεπερασμένο αυτόματο την έκφραση a^*b^*



(κολλαει σ'αυτο το σημειο, dead state)

Διαβάζει a, το δέχεται, διαβάζει b το δέχεται, αλλά αν ξαναδιαβάσει a, κολλάει

$K=\{1,2\}$

$\Sigma=\{a,b\}$

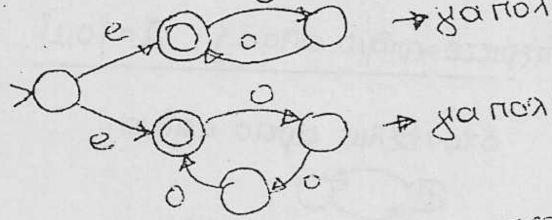
$S=1$

$F=\{1,2\}$

$\Delta=\{(1,a,1),(1,b,2),(2,b,2)\}$

(19) $L=\{w=0^k$. k: πολ/σιο του 2 ή του 3$\}$. Δώστε NFA που να την περιγράφει.

Θέλω να έχω : e, ~~0~~00, 0000 ή e, ~~0~~, 000, 000000 ..



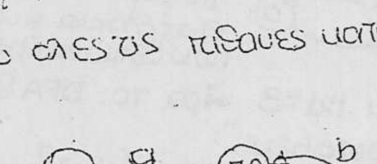
→ για πολ/σια του 2

→ για πολ/σια του 3 .

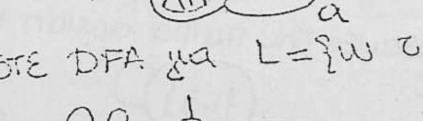
(20) L={άρτιο αριθμό από a και περιττό από b}. Σ={a,b}

Γράφω όλες τις πιθανές καταστάσεις :

Αριθμός a	Αριθμός b	
αρτιος	αρτιος	ΑΑ
αρτιος	περιττος	ΑΠ
περιττος	αρτιος	ΠΑ
περιττος	περιττος	ΠΠ



(21) Δώστε DFA για L={w τελειώνει σε 1}



$K=\{q_0, q_1\}$

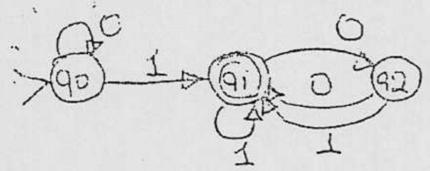
$\Sigma=\{0,1\}$

$S=q_0\in K$

$F=\{q_1\}$

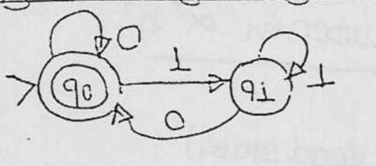
$\Delta=\{(q_0,0,q_0),(q_0,1,q_1),(q_1,0,q_0),(q_1,1,q_1)\}$

(22) Κατασκευάστε αυτόματο ... — όχι να περιέχει τουλάχιστον ένα άσσο και άρτιο αριθμό από "0" να ακολουθούν τον τελευταίο άσσο}.



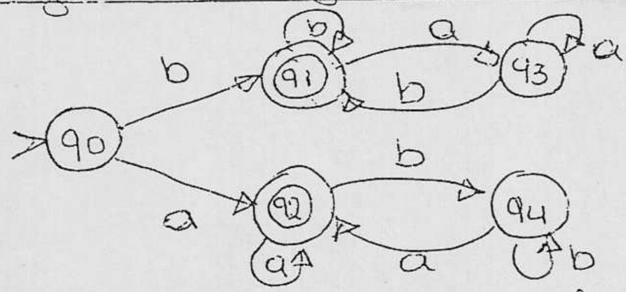
$K = \{q_0, q_1, q_2\}$
$\Sigma = \{0,1\}$
$S = q_0 \in K$
$F = \{q_1\}$
$\Delta = \{(q_0,0,q_0), (q_0,1,q_1), (q_1,0,q_2), (q_1,1,q_1), (q_2,0,q_1), (q_2,1,q_1)\}$.

(23) Φτιάξτε DFA για τη γλώσσα $L = \{w$: η κενή ή να τελειώνει σε $0\}$

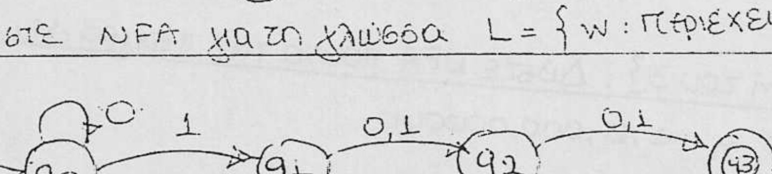


{ "Αφού μπορεί να είναι η κενή συμβολοσειρά, η αρχική κατάσταση πρέπει να είναι και τελική". }

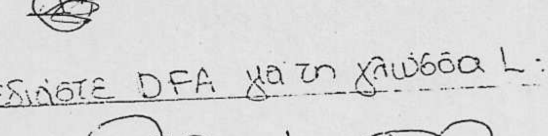
(24) Φτιάξτε αυτόματο για: $L = \{w$: ξεκινάει και τελειώνει με το ίδιο σύμβολο$\}$, $\Sigma = \{a,b\}$



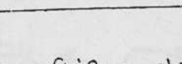
(25) Δώστε NFA για τη γλώσσα $L = \{w$: περιέχει "1" στην τρίτη θέση απ' το τέλος$\}$



(26) Σχεδιάστε DFA για τη γλώσσα L : $\{w$: έχει περιττό αριθμό από $1\}$, $\Sigma = \{0,1\}$.



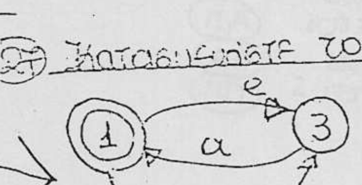
όταν θέλω άρτιο αριθμό:



όταν θέλω περιττό:

με σημείο πάνω στα βελάκια αυτό που θέλω να εμφανίζ.

(27) Κατασκευάστε το ισοδύναμο DFA.



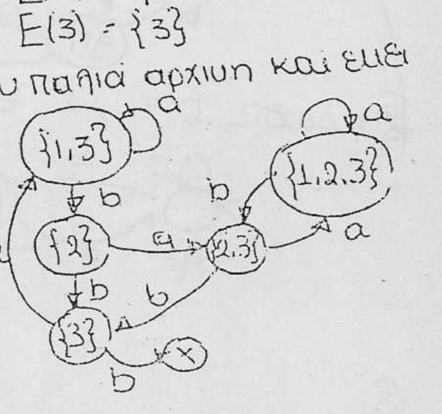
- Θέλω να διώξω το e. Είναι $|K| = 3$. Άρα το DFA θα έχει το πολύ $2^{|K|} = 2^3 = 8$ καταστάσεις.
- Υπολογίζω όλα τα $E(q_i)$ δηλαδή (ξεκινάω από την q_i κ, διαβάζοντας e σε πόσες μπορώ να φτάσω)

$E(1) = \{1,3\}$
$E(2) = \{2\}$
$E(3) = \{3\}$

- $q_0 = E(1) = \{1,3\}$. → η καινούργια αρχική συμπεριλαμβάνει την παλιά αρχική και εκεί στις οποίες φτάνω, διαβάζοντας e.

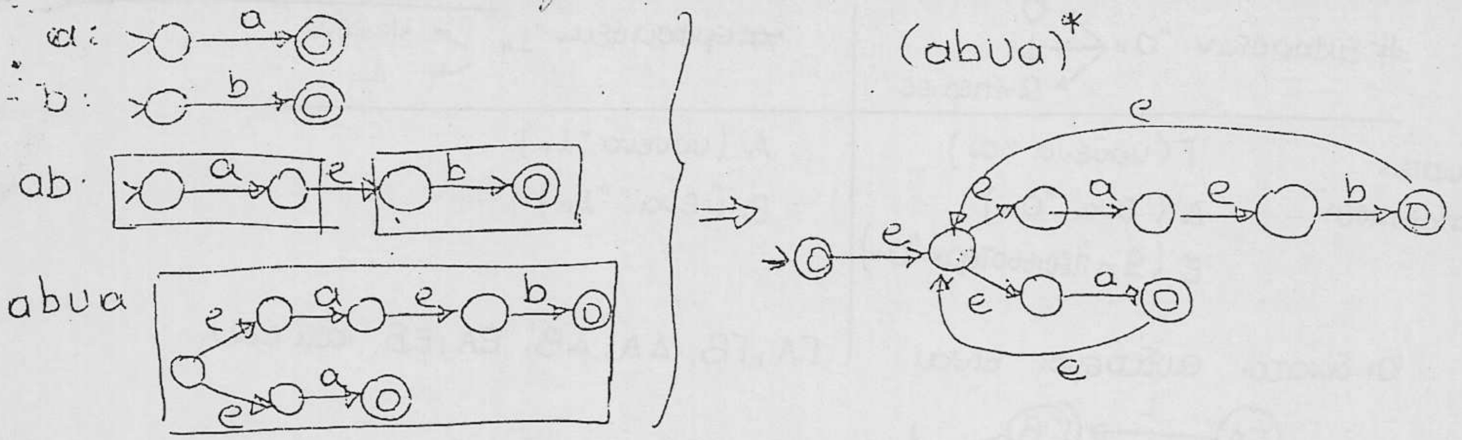
- $\delta(\{1,3\}, a) = E(1) = \{1,3\}$
  $\delta(\{1,3\}, b) = E(2) = \{2\}$
  $\delta(\{2\}, a) = E(2) \cup E(3) = \{2,3\}$
  $\delta(\{2\}, b) = E(3) = \{3\}$
  $\delta(\{3\}, a) = E(1) = \{1,3\}$

$\delta(\{3\}, b) = \emptyset$
$\delta(\{2,3\}, a) = E(1) \cup E(2) \cup E(3) = \{1,2,3\}$
$\delta(\{2,3\}, b) = E(3) = \{3\}$
$\delta(\{1,2,3\}, a) = \{1,2,3\}$
$\delta(\{1,2,3\}, b) = \{2,3\}$.

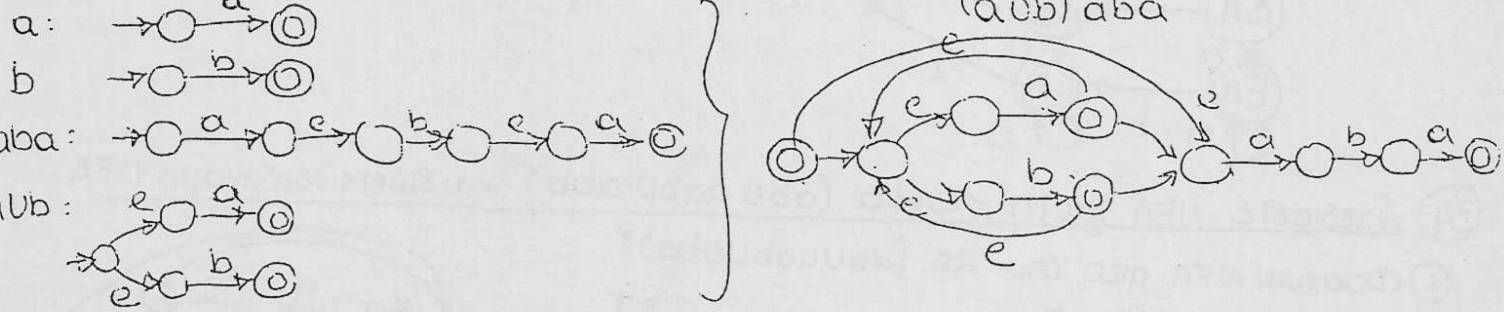


(4)

(28) Δίνεται ... NFA για την (abua)*



(29) NFA για την (aub)*aba



(30) Για κάθε πεπερασμένο σύνολο A το πλήθος των δυναμοσυνόλων του ισούται με $|2^A| = 2^{|A|}$.

Μαθηματική Επαγωγή: 1) Βασικό Βήμα: A είναι το $\emptyset \Rightarrow |A|=0$

$A = \{\emptyset\}$: $2^{|\emptyset|} = 2^0 = 1$ πληθικός αριθμός

2) Υπόθεση: $|A|=n$ τότε $|2^A| = 2^{|A|}$ ισχύει για $n \geq 0$

3) Επαγ Βήμα: $|A|=n+1$, $n \geq 0 \Rightarrow$ τότε το A έχει οπωσδήποτε ένα στοιχείο, έστω a και $B = A - \{a\}$

$|B|=n \Rightarrow |2^B| = 2^{|B|} = 2^n$

όλα τα υποσύνολα του A χωρίς a

Επομένως 2^A → υποσύνολα του A χωρίς το a έπ. $|2^B| = 2^{|B|} = 2^n$

⇕ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ

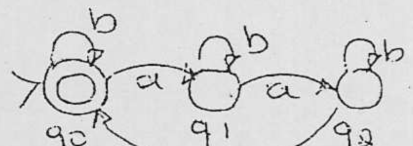
→ υποσύνολα του A με a: 2^n

άρα $2^A = 2^B \cup \{C \cup \{a\},\ C \in 2^B\}$ Συνεπώς $|2^A| = 2^n + 2^n = 2^{n+1} = 2^{|A|}$.

(31) Δίνεται γλώσσα που περιγράφεται ως: $\{w \in \Sigma^* :$ # εμφανίσεων του a στην w είναι πολλαπλάσιο του 3$\}$. $\Sigma = \{a,b\}$. Φτιάξτε DFA.

Σύνολο δυνατών καταστάσεων: q_0 #a είναι πολλαπλάσιο του 3 ⇒ η διαίρεση με το 3 υπόλοιπο

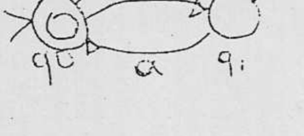
ή #a δεν είναι -"- -"- < υπόλοιπο=1 : q_1 / υπόλοιπο=2 : q_2



(32) $L = \{w \in \Sigma^* :$ # εμφανίσεων a είναι άρτιος$\}$. $\Sigma = \{a,b\}$. Δώστε αυτόματο.

q_0: $a = 2n$ (υπόλοιπο=0)

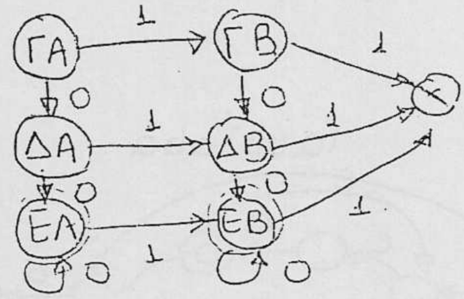
q_1: $a = 2n+1$ (υπόλοιπο=1)



"0" και το πολύ έναν "1"

# εμφανίσεων "0" → 0, 1, 2 ή περισσ.	# εμφανίσεων "1" → κανένα, 1.
Δυνατές καταστάσεις: Γ (κανένα "0")	Α (κανένα "1")
Δ (ένα "0")	Β (ένα "1")
Ε (2 ή περισσότερα "0")	

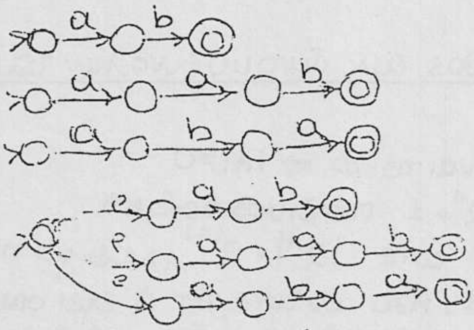
Οι δυνατοί συνδυασμοί είναι: ΓΑ, ΓΒ, ΔΑ, ΔΒ, ΕΑ, ΕΒ. Και έχω:



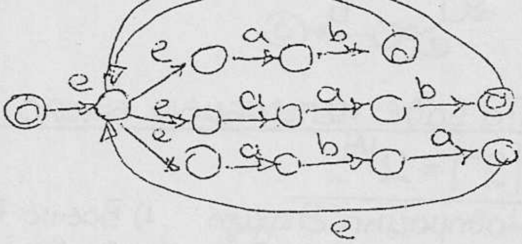
(34) Σχεδιάστε NFA για τη γλώσσα $(ab \cup aab \cup aba)^*$ και δώστε ισοδύναμο DFA.

① Φτιάχνω NFA από την RE $(ab \cup aab \cup aba)^*$

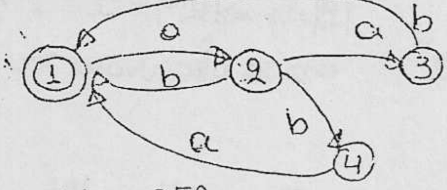
- ab
- aab
- aba
- ένωση



- *



Απλοποίηση NFA (βγάζω τα e)

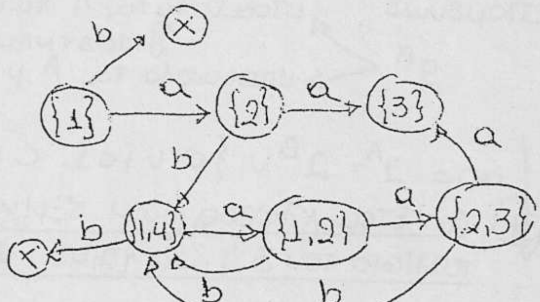


Μετατροπή σε DFA

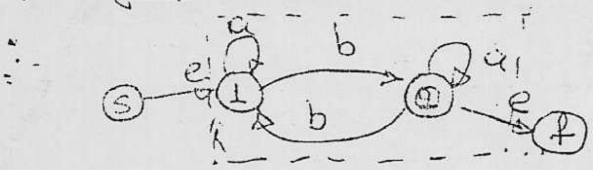
$E(1) = \{1\}$
$E(2) = \{2\}$
$E(3) = \{3\}$
$E(4) = \{4\}$

$q_0 = E(1) = \{1\}$
$\delta = (\{1\}, a) = \{2\}$
$\delta = (\{1\}, b) = \emptyset$
$\delta = (\{2\}, a) = \{3\}$
$\delta = (\{2\}, b) = E(1) \cup E(4) = \{1,4\}$
$\delta = (\{1,4\}, a) = E(1) \cup E(2) = \{1,2\}$
$\delta = (\{1,4\}, b) = \emptyset$
$\delta = (\{1,2\}, a) = E(2) \cup E(3) = \{2,3\}$
$\delta = (\{1,2\}, b) = E(1) \cup E(4) = \{1,4\}$
$\delta = (\{2,3\}, a) = E(3) = \{3\}$
$\delta = (\{2,3\}, b) = \{1,4\}$

$\delta = (\{3\}, a) = \emptyset$
$\delta = (\{3\}, b) = E(1) = \{1\}$
$\delta = (\{4\}, a) = E(1) = \{1\}$
$\delta = (\{4\}, b) = \emptyset$



αναγνωρίζει (χρησιμοποιείται αλγόριθμος GNFA)



1) Προσθέτω νέα αρχική κατάσταση s, χωρίς εισερχόμενα βέλη με μια e μετάβαση στην αρχική του DFA.

2) Από κάθε τελική του DFA προσθέτω μια e μετάβαση προς μια νέα τελική f από την οποία δεν εξέρχονται βέλη.

(i) → καταστάσεις από τις οποίες μπορώ να ξεκινήσω (όλες εκτός της f)

(j) → -//- για να αφαιρέσω

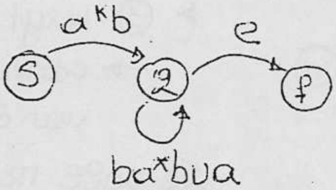
(k) → -//- στις οποίες μπορώ να φτάσω (όλες εκτός από s)

S 1 2 → $e a^* b \cup \phi = a^* b$

2 1 2 → $b a^* b \cup a = b a^* b \cup a$

S 1 f → $e a^* \phi \cup \phi = \phi$

2 1 f → $b a^* \phi \cup e = e$



Για να διώξω τη 2 : $a^* b (b a^* b \cup a)^*$

(36) Δίνεται : $\{0^{2n} / n \geq 1\}$. Είναι κανονική;

RE : $00(00)^*$ Είναι κανονική

(37) Σύνολο συμβολοσειρών του $\Sigma = \{0,1\}$ που δεν περιέχουν 3 συνεχόμενα „0", είναι κανον

√ Παίρνω όλες τις δυνατές συμ/ρές που περιέχουν 000

$(0 \cup 1)^* 000 (0 \cup 1)^*$ και παίρνω το συμπλήρωμα, εφ' όσον ισχύει η κλειστότητα.

$\overline{(0 \cup 1)^* 000 (0 \cup 1)^*} = L$.

(38) Δώστε RE για συμ/ρές που ανήκουν στο $\{0,1\}$ και τελειώνουν σε 3 διαδοχ. άσσους

√ $(0 \cup 1)^* 111$

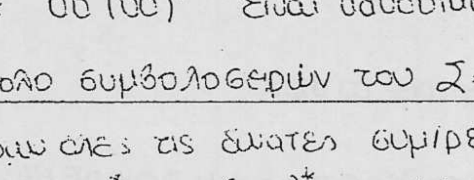
(39) Δώστε RE για $\{w \in \{0,1\} \mid$ περιέχει τουλάχιστον έναν άσσο $\}$

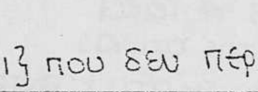
√ $(0 \cup 1)^* 1 (0 \cup 1)^*$

(40) Δώστε RE για $\{w \in \{0,1\} \mid$ περιέχει το πολύ έναν άσσο$\}$

√ $0^* 1 0^* \cup 0^* = 0^* (1 \cup e) 0^*$

(41) Να κατασκευαστεί PDA που να καταλαβαίνει τη γλώσσα $L = \{0^n 1^n , n \geq 0\}$.

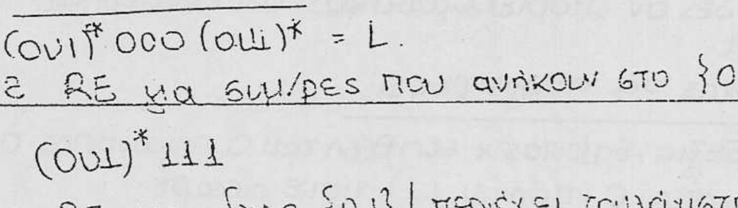


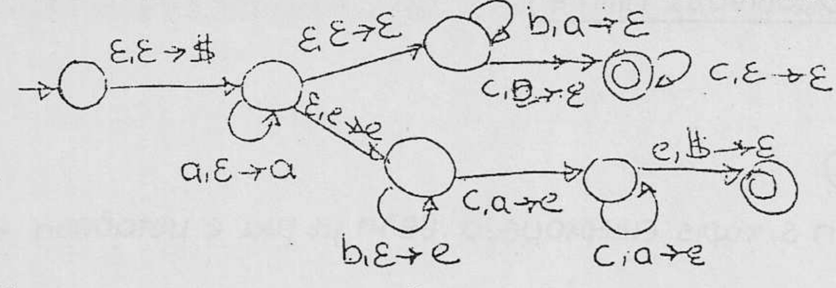


είμαι στην p, διαβάζω a, αντικαθιστώ στη στοίβα το b με c και πάω στην q.

(42) Να δοθεί PDA που να καταλαβαίνει τη γλώσσα $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$

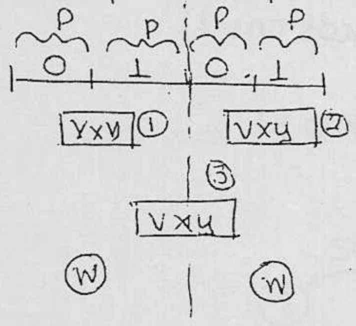
(διαβάζω μια συμ/ρά και μετά την αντίστροφη).





(14) Δίνεται η γλώσσα $D = \{ww / w \in \{0,1\}^*\}$. Να δείξετε ότι δεν είναι context free

Έστω p η σταθερά του pumping lemma και επιλέγω $w = 0^p 1^p 0^p 1^p$, $|vxy| \le p$



▶ ①,② |vxy| βρίσκεται εξ ολοκλήρου είτε στη πρώτη είτε στη δεύτερη εμφάνιση της w → είτε προσθέτω, είτε αφαιρώ επαναλήψεις των vxy

▶ ③ |vxy| βρίσκεται κάπου ανάμεσα στις δύο συμβολοσειρές → αφήνω άθικτα τα 0 της πρώτης w και τους 1 της δεύτερης w και διαφοροποιώ τα ενδιάμεσα ($w = 0^p 1^i 0^j 1^p$)

Σε κάθε περίπτωση δεν μπορώ να εξηγήσω ότι η συμβολοσειρά που προκύπτει ανήκει στη γλώσσα → D δεν είναι context free

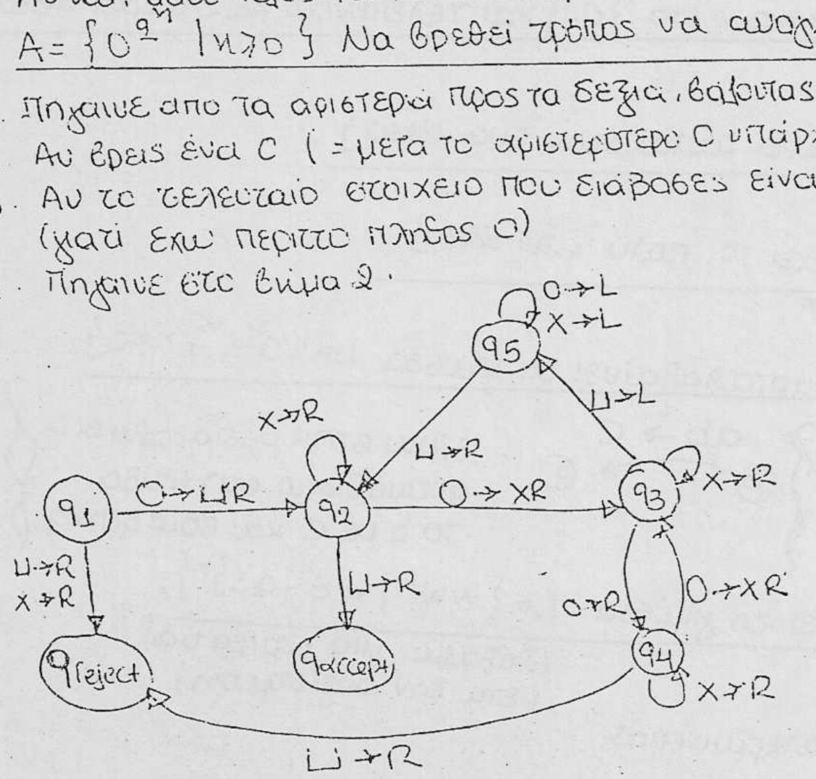
(15) Να βρεθεί τρόπος να αναγνωρίζω τη γλώσσα $L = \{w\#w,\ w \in \{0,1\}^*\}$.

Δίνεται αρχικά η ταινία 011000#011000

1 Διάβασε την είσοδο και αν δεν βρεις # reject
2 Ξεκίνα απ' την αριστερότερη θέση της ταινίας
3 Διάβασε το αριστερότερο σύμβολο εισόδου κ' αντικατέστησέ το με x.
4. Προχώρα μέχρι να βρεις # και μια ακόμα θέση.
5. Αν βρεις το ίδιο σύμβολο μ' αυτό που διάβασες, βάλε στη θέση του x και πήγαινε στο 2.
6 Προχώρα μετά το δεξιότερο x και δες αν υπάρχει χαρακτήρας του αλφαβήτου
Αν ναι, κάνε reject, αλλιώς accept

(16) $A = \{0^{2^n} \mid n \ge 0\}$ Να βρεθεί τρόπος να αναγνωριστεί

1. Πήγαινε από τα αριστερά προς τα δεξιά, βάζοντας x στη θέση του 0, πηγαίνοντας 0 παρά 0.
2. Αν βρεις ένα 0 (= μετά το αριστερότερο 0 υπάρχει ⊔) κάνε accept.
3. Αν το τελευταίο στοιχείο που διάβασες είναι 0 (μετά το πρώτο πέρασμα) κάνε reject (γιατί έχω περιττό πλήθος 0)
4. Πήγαινε στο βήμα 2.



47) Όμοιως για $B=\{a^i b^j c^k \mid ij=k,\ i,j,k\geq 1\}$

1. Διάβασε την w και αν έχεις κάποιο σύμβολο ≠ από a,b,c κάνε reject.
2. Για το αριστερότερο a που διαβάζεις, βάλε στη θέση του x
3. Προχώρα μέχρι να βρεις το πρώτο b, βάλε στη θέση του x.
4. Προχώρα μέχρι να βρεις το πρώτο c, βάλε στη θέση του x και πήγαινε στο βήμα 3.
5. Αν δε βρεις άλλο b, επαναφέρεις τα b στην ταινία και ψάξε για το αριστερότερο a. ⇒ 2
6. Αν δε βρεις άλλα a, ούτε c αριστερότερα του τελευταίου x, κάνε accept.

48) $\{R=L+M,\ R,L,M$ δυαδικές αναπαραστάσεις αριθμών$\}$. Να δείξετε ότι η γλώσσα δεν είναι κανονική.

Θεωρώ σταθερά p του PL. Επιλέγω $1^p = 1^p + 0^p$ και xyz με $|xy|\leq p$, $y\neq e$ $\}$ $y=1^k$.

Για $i=0$ $xz = 1^{p-k}\, 1^e\, 0^p \notin L$. Εξετάζουμε το $p-k+e=p$

$(p-k+e)\neq 0$ δεν ισχύει για $\forall k,e$ γιατί $k\neq 0$

49) Είναι κανονική η $L=\{0^n1^n \mid 0\leq n\leq 100\}$

Στη γενική περίπτωση όχι. Αλλά τώρα έχω συγκεκριμένο n. Όμως γράφω την L $L=\{e\}\cup\{01\}\ldots\cup\{0^{100}1^{100}\}$. Ισχύει η κλειστότητα ως προς την ένωση, άρα η L κανονική.

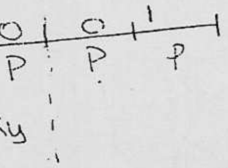
50) $L=\{0^n1^m \mid n=2m,\ m>0\}$. Να δείξετε δεν είναι κανονική.

Θεωρώ L κανονική και p σταθερά του PL. Ορίζω $w=0^{2p}1^p$

$w=xyz$

$|xy|\leq p \Rightarrow y=0^k$

$y\neq e$.

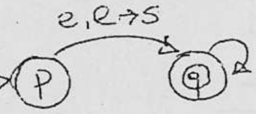


Για $i=2$: $xyyz = 0^{2p+k}1^p \notin L$

γιατί δεν ισχύει $2p+k=2p$.

άρα η L μη κανονική

51) Δίνεται γραμματική $S\to ASA \mid aB$, $A\to B \mid S$, $B\to b \mid \varepsilon$. Δώστε ισοδύναμο αυτόματο στοίβας.



στόχος → να βγάλω μόνο τερματικά

Περνάω στη στοίβα τις μεταβλητές βρίσκω και όταν αυτή σε μετασχηματίζεται σε κάποιο στοιχείο, την πετάω απ' τη στοίβα.

$\varepsilon, S\to ASA$
$\varepsilon, S\to aB$
$\varepsilon, A\to B$
$\varepsilon, A\to S$
$\varepsilon, B\to b$
$\varepsilon, B\to \varepsilon$

$a,a\to\varepsilon$ $(q,a,a)(q,\varepsilon)$
$b,b\to\varepsilon$ $(q,bb)(q,\varepsilon)$

52) Δίνεται γλώσσα $\{\{0^n1^n \mid n\geq 0\}\cup\{1^n0^n \mid n\geq 0\}\}$. Να βρεθεί γραμματική

$S_1\to 0S_11 \mid \varepsilon$ $S_2\to 1S_20 \mid \varepsilon$

$S\to S_1 \mid S_2$

Η καινούργια γραμματική θα είναι: $G=(V,\Sigma,R,S)$ με

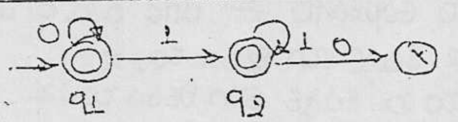
$V=\{S,S_1,S_2\}$

$\Sigma=\{0,1\}$

$R=\{S\to S_1 \mid S_2,\ S_1\to 0S_11 \mid \varepsilon,\ S_2\to 1S_20 \mid \varepsilon\}$

(53) Δίνεται γλώσσα 0^*1^*. Φτιάξτε γραμματική που να την αναπαράγει.

Η L είναι κανονική



Για κάθε κατάσταση q_i φτιάχνω κατάσταση της γραμματικής δηλ:

- $\forall q_i \in K \to R_i \in V$ Συνεπώς $q_1 \to R_1$ και $q_2 \to R_2$

Άρα $\delta(q_i, a) = q_j \to R_i \to aR_j$ · $R_1 \to 0R_1$

τερματικό · επόμενη κατάσταση · κατάσταση

$R_1 \to 1R_2$

$R_2 \to 0$

$R_2 \to 1R_2$

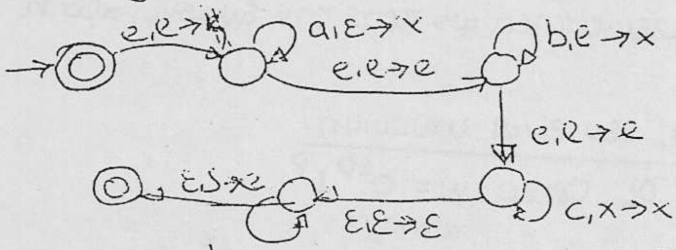
- $\forall q_i \in F \to R_i \to \epsilon$: $R_1 \to \epsilon$, $R_2 \to \epsilon$

Σύνολο κανόνων γραμματικής:

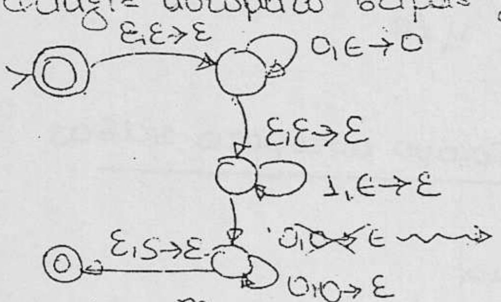
$R_1 \to 0R_1 \mid 1R_2 \mid e$

$R_2 \to 1R_2 \mid \epsilon$

(54) Δίνεται γλώσσα $L = \{a^i b^j c^k d^l \;.\; i,j,k,l \geq 0$ και $i+j = k+l\}$. Ζητείται PDA



(55) Φτιάξτε αυτόματο στοίβας για: $L = \{0^n 1^m 0^n,\; m,n \geq 0\}$



~~0,0→ε~~ → πρόβλημα αν βάλω αυτή τη μετάβαση κ δε χρησιμοποιήσω ε,ε→ε

(56) $L = \{a^n b^m a^n,\; n \geq m \geq 0\}$ Να δείξετε ότι δεν είναι context free

Έστω ότι είναι CF και p σταθερά του PL.

$S = a^{p+1} b^p a^{p+1}$, $|s| > p$

$|vxy| \leq p$

$|vy| > 0$

$\underbrace{a}_{p+1}$ $\underbrace{b}_{p}$ $\underbrace{a}_{p+1}$

(A) $\boxed{vxy}$

(B) $\boxed{vxy}$ v μόνο a, y κάποια β

(Γ) $\boxed{vxy}$ v μόνο a, y μόνο b

(Δ) $\boxed{vxy}$ v a και b, y μόνο b

(E) $\boxed{vxy}$ v,y μόνο b

(F) $\boxed{vxy}$ v μόνο b, y κάποια a,b

(G) $\boxed{vxy}$ v μόνο b, y μόνο a

(H) $\boxed{vxy}$ v κάποια a,b, y μόνο a

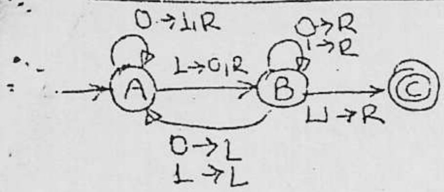
(I) $\boxed{vxy}$ v,y μόνο a

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

- (A), (I) $i=0$, $uv^0xy^0z \notin L$, παραβιάζω τα πρώτα a κι όχι τα δεύτερα
- (E) $i=2$, $uv^2xy^2z \notin L$. προσθέτω β
- (B), (Δ), (F), (H) . κάποιο από v,y περιέχει και α και β. Προκύπτουν ανάμικτες με αναμιγμένα σύμβολα
- (Γ), (G) . με περισσότερες από 1 επαναλήψεις μπορώ να βρω τμήμα με $\alpha < b$

στ: Δίνεται η μηχανή [illegible]

0001 (αν είναι αποδεκτή)



• 0001 A
1001 A
1101 A
1111 A
1110⊔ B
⊔⊔ C

αφού καταλήγω στην κατάσταση C που είναι τελική η συμ/ρα είναι αποδεκτή

• 010 A
110 A
100 B

100⊔ B, 10⊔⊔⊔ C → αποδ.

100 A, 110 A, 1⊔⊔⊔ A

εδώ κολλάει

άρα δεν έχω ορίσει μετάβαση απο την A με ⊔

• 0110 A
1110 A
1010 B

1010 B → 1010⊔ B → 1010⊔⊔ C αποδ.

1010 A → 1110 A.

11

DFA $(K, \Sigma, \delta, s, F)$

- K: καταστάσεις
- Σ: αλφάβητο
- δ: συνάρτηση μετάβασης $K \times \Sigma \to K$
- s: αρχική κατάσταση
- F: σύνολο τελικών καταστάσεων

NFA $(K, \Sigma, \delta, s, F)$

- K: καταστάσεις
- Σ: αλφάβητο
- δ: $K \times \Sigma^{r} \to K$ σχέση μετάβαση
- s: αρχική κατάσταση
- F: σύνολο τελικών

PDA $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

- Q: καταστάσεις
- Σ: πεπερασμ. αλφάβητο εισόδου
- Γ: πεπερασμ. αλφάβητο στοίβας ($)
- δ: συνάρτηση μετάβασης $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to P_{fin}(Q \times \Gamma^{*})$
- q_0: αρχική
- Z_0: αρχικό σύμβολο
- F: σύνολο τελικών

CFG (V, Σ, R, S)

- V: αλφάβητο
- Σ: σύνολο τερματικών συμβόλων
- R: σύνολο κανόνων $\in (V-\Sigma) \times V^{*}$
- S: αρχικό σύμβολο $\in (V-\Sigma)$

Turing $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, F)$

- Q: καταστάσεις
- Σ: πεπερασμ. αλφάβητο εισόδου
- Γ: πεπερ. αλφάβητο στοίβας ($\sqcup$)
- δ: συνάρτηση μετάβαση
- q_0: αρχική
- $\sqcup$: κενό
- F: σύνολο τελικών

$\delta \subseteq Q \times \Gamma \times \Gamma \times \{L, R\} \times Q$ ώστε για κάθε $(p, a) \in Q \times \Gamma$ υπάρχει το πολύ 1 τριάδα $(b, m, q) \in \Gamma \times \{L, R\} \times Q$ ώστε $(p, a, b, m, q) \in \delta$.

Τα στοιχεία του $V-\Sigma$ είναι μη τερματικά και για κάθε $A \in V-\Sigma$ και $u \in V^{*}$ γράφουμε $A \overset{G}{\Rightarrow} u$ αν $(A, u) \in R$. Για κάθε u, v συμβολοσειρές λέμε $u \overset{G}{\Rightarrow} v$ αν και μόνο αν υπάρχουν συμ/ρές $x, y, u' \in V^{*}$ και $A \in V-\Sigma$ ώστε $u = xAy$, $v = xu'y$ και $A \overset{G}{\Rightarrow} u'$. Η γλώσσα που παράγεται είναι $L(G) = \{w \in \Sigma^{*} : S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w\}$

$\boxed{\sqrt{2} \text{ άρρητος}}$

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, αν m, n διαιρετά από τον ίδιο ακέραιο >1, διαιρούμε και τους δύο μ' αυτόν τον αριθμό. Η διαίρεση δεν αλλάζει την τιμή του κλάσματος, αλλά πλέον οι m, n δεν μπορεί να είναι άρτιοι. Πολ/ζουμε και τα 2 μέλη επί n και έχουμε $n\sqrt{2} = m$. Υψώνουμε στο τετράγωνο $2n^2 = m^2$. Ο m^2 είναι άρτιος $\Rightarrow m$ άρτιος $\Rightarrow m = 2k$ για κάποιο k.

$(2n^2) = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$ άρα ο n^2 είναι άρτιος $\to n$ άρτιος

Άρα m, n άρτιοι. Αυτό είναι άτοπο γιατί η αρχική υπόθεση είναι ότι δεν είναι άρτιοι. Άρα $\sqrt{2}$ άρρητο

Η τομή μιας γλώσσας ...

Αν L είναι CF και R ένα κανονικό σύνολο, τότε $L=L(M_1)$ για κάποιο αυτόματο στοίβας $M_1=(K_1,\Sigma_1,\Gamma_1,\Delta_1,s_1,F_1)$ και $R=L(M_2)$ για κάποιο πεπερασμένο ντετερμινιστικό αυτόματο $M_2=(K_2,\Sigma_2,\delta_2,s_2,F_2)$. Η ιδέα είναι να συνδυάσουμε αυτές τις δύο μηχανές σ' ένα νέο αυτόματο στοίβας M που να εκτελεί παράλληλα τους υπολογισμούς των M_1 και M_2 και να δέχεται τη συμβολοσειρά αν κ μόνο αν και τα δύο θα τη δέχονταν.

Έστω $M=(K,\Sigma,\Gamma,\Delta,s,F)$

$K=K_1\times K_2$

$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$

$\Gamma=\Gamma_1$

$s=(s_1,s_2)$

$F=F_1\times F_2$

και Δ: $(((q_1,q_2),u,\beta),((p_1,p_2),\gamma))\in\Delta$

αν και μόνο αν

$((q_1,u,\beta),(p_1,\gamma))\in\Delta_1$

και $(q_2,u)\vdash^*_M(p_2,e)$.

Δηλαδή το M περνά πρώτα απ' την κατάσταση (q_1,q_2) στην (p_1,p_2) με τον ίδιο τρόπο που το M_1 περνά από την $q_1\to p_1$ κι επιπλέον το M σημειώνει τις αλλαγές καταστάσεων του M_2 αφού αυτό διαβάζει την ίδια είσοδο. Η συνθήκη $(q_2,u)\vdash^*_M(p_2,e)$ είναι εύκολο να ελεγχθεί αφού ένα ντετερμινιστικό πεπερ. αυτόματο διαβάζει ένα μόνο σύμβολο σε κάθε κίνηση. Έτσι στην πράξη θα κατασκευάζαμε το M διαλέγοντας κάθε φορά μια μετάβαση $(q_1,u,\beta)(p_1,\gamma)$ του M_1 κ μια q_2 του M_2 προσομοιώνοντας το M_2 για |u| βήματα με είσοδο u για να αποφασίσουμε σε ποια κατάσταση p_2 θα φτάσει αφού διαβάσει την είσοδο αυτή.

Το 2^N είναι μη μετρήσιμο.

Υποθέτουμε ότι το 2^N είναι μετρήσιμο άπειρο, δηλαδή υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $f:N\to 2^N$. Τότε το 2^N μπορεί να αριθμηθεί ως

$2^N=\{S_0,S_1,S_2\ldots\}$, όπου $S_i=f(i)$ για κάθε $i\in N$. Θεωρούμε το σύνολο $D=\{n\in N\}$. Το D είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών και θα πρέπει να είναι S_k για κάποιο φυσικό αριθμό K. Εξετάζουμε αν ισχύει $K\in S_K$.

1) Έστω $K\in S_K$. Αφού $D=\{n: n\notin S_n\}$, έχουμε ότι $K\in D$, όμως $D=S_K$ τότε $K\notin S_K$ άτοπο

2) Έστω $K\notin S_K$. Τότε $K\in D$. Όμως $D=S_K$, οπότε $K\in S_K$, άτοπο

Αφού και τα δύο είναι αδύνατα, η υπόθεση $d=S_K$ είναι λάθος άρα

2^N μη μετρήσιμο