

3. 3 Αρχές

1) Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής:

Έστω A ένα σύνολο φυσικών αριθμών ζήτησε ώστε:

i) $0 \in A$

ii) \forall φυσικός αριθμός n , αν $\{0, 1, \dots, n\} \subseteq A$ τότε $n+1 \in A$

τότε $A = \mathbb{N}$

2) Αρχή του Περιεπεριώτα

Αν A και B μη κενά πεπερασμένα σύνολα, και $|A| > |B|$ τότε δεν υπάρχει συνάρτηση 1-1 από το A στο B .

Απόδειξη: BB: Υποθέτουμε $|B| = 1$ κ' $|A| > 1$ [$B \neq \{b\}$]

Αν $f: A \rightarrow B$ τότε \exists τουλάχιστον δύο διαφορετικά στοιχεία $(a_1), (a_2) \in A$ με $f(a_1) = f(a_2) = b$.

Άρα f δεν είναι 1-1.

EY: f δεν είναι 1-1,

αν $f: A \rightarrow B$, $|A| > |B|$, $|B| \leq n$, οπότε $n \geq 1$.

EB: Έστω $f: A \rightarrow B$ κ' $|A| > |B| = n+1$. [$|B| \geq 2$]

Αγαπώντας ένα στοιχείο b από το B [$B - \{b\} \neq \emptyset$]

• Αν $|f^{-1}(b)| \geq 2$ τότε f δεν είναι 1-1

• Αν $|f^{-1}(b)| \leq 1$

δημιουργούμε $g: A - f^{-1}(b) \rightarrow B - \{b\}$ έτσι ώστε $g(a) = f(a)$,
 $\forall a \in A - f^{-1}(b)$.

τότε $|A - f^{-1}(b)| \geq |A| - 1$ κ' $|B - \{b\}| = n < |A| - 1$

έτσι από EY η g δεν είναι 1-1.

$\Rightarrow g(a_1) = g(a_2)$, $a \in A - f^{-1}(b)$

$\Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$ άρα f δεν είναι 1-1

3) Αρχή της Διακρίσεως:

Έστω R μια δυαδική σχέση σε ένα σύνολο A , και έστω D το διαγώνιο σύνολο για την R , $\{a: a \in A \text{ κ' } (a,a) \notin R\}$.
 Για κάθε $a \in A$ έστω $R_a = \{b: b \in A \text{ κ' } (a,b) \in R\}$.
 Τότε το D είναι διαφορετικό από όλα τα R_a .

4) (Θεώρημα Cantor)

Το σύνολο $2^{\mathbb{N}}$ είναι μη περμήσιμο.

Απόδειξη: Έστω $2^{\mathbb{N}}$ περμήσιμο $\Rightarrow \exists$ αμνημονόγραφη αντιστοιχία $f: \mathbb{N} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$.

Το $2^{\mathbb{N}}$ απεικονίζεται ως εξής

$$2^{\mathbb{N}} = \{S_0, S_1, S_2, \dots\}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad S_i = f(i)$$

Ορίζεται το σύνολο

$$D = \{n \in \mathbb{N} : n \notin S_n\}$$

D είναι σύνολο φυσικών αριθμών άρα δε πρέπει να είναι S_k για κάποιο $k \in \mathbb{N}$.

Α $k \in S_k$?

ΝΑΙ: $k \in S_k$, $D = S_k$ αλλά $D = \{n: n \notin S_n\}$
 $\Rightarrow k \notin D \Rightarrow k \notin S_k$ (Αξονο).

ΟΧΙ: $k \notin S_k \Rightarrow k \in D$ αλλά $D = S_k$
 $\Rightarrow k \in S_k$ (Αξονο)

Άρα και οι δύο περιπτώσεις καταλήγουν σε Αξονο συνεπώς
 ότι η αρχική υπόθεση ήταν λάθος $\Rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ μη περμήσιμο.

$$5) \quad (wx)^R = x^R w^R$$

BB: $|x|=0 \Rightarrow x=e$

τότε $(wx)^R = (we)^R = w^R = ew^R = e^R w^R = x^R w^R$

EY: Αν $|x| \leq n$ τότε $(wx)^R = x^R w^R$

EB: Έστω $|x|=n+1$ τότε $x=ua$ με κάποιο $u \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$.
 τότε $|u|=n$

τότε $(wx)^R = (w(ua))^R = ((wu)a)^R = a(wu)^R =$
 $= a u^R w^R = (ua)^R w^R = \underline{\underline{x^R w^R}}$

6) DFA

Μια πεντάδα $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ όπου

K - είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από καταστάσεις.

Σ - αλφάβητο

$s \in K$ - αρχική κατάσταση

$F \subseteq K$ - σύνολο τελικών καταστάσεων

δ - συνάρτηση μεταβάσεως $f: K \times \Sigma \rightarrow K$

Ε. Σπυριδωνίδης
Ε. Σπυριδωνίδης

7) NFA

Μια πεντάδα $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ όπου

K - πεπερασμένο σύνολο από καταστάσεις

Σ - αλφάβητο

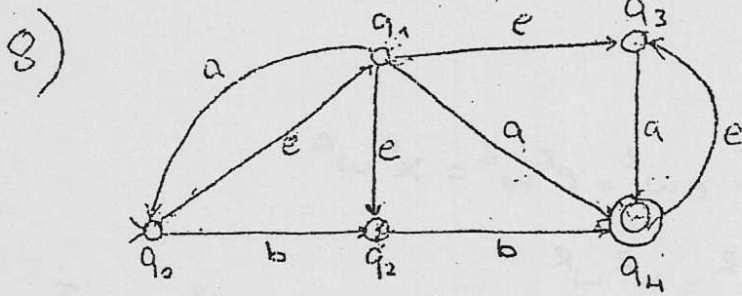
$s \in K$ - αρχική κατ.

$F \subseteq K$ - τελικές κατ.

Δ - σχέση μεταβάσεως, $\Delta \subseteq K \times \Sigma^* \times K$.

ΔΙΑΦΟΡΕΣ NFA - DFA

- με ίδια σύνολα των 6 περιεωρούμενων καταστάσεων.
- μπορεί να αλλάξει κατάσταση χωρίς τίποτα (η ε).
- βολίδια με string



NFA \rightarrow DFA

$$E(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_3\}$$

$$E(q_2) = \{q_2\}$$

$$E(q_3) = \{q_3\}$$

$$E(q_4) = \{q_4, q_3\}$$

~~$E(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$~~

$$\delta'(s, a) = E(q_0) \cup E(q_4) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

$$\delta'(s, b) = E(q_2) \cup E(q_4) = \{q_2, q_3, q_4\}$$

$$\delta'(\{q_0, \dots, q_4\}, a) = E(q_0) \cup E(q_4) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

$$\delta'(\dots, b) = E(q_2) \cup E(q_4) = \{q_2, q_3, q_4\}$$

$$\delta'(\{q_2, q_3, q_4\}, a) = E(q_4) = \{q_3, q_4\}$$

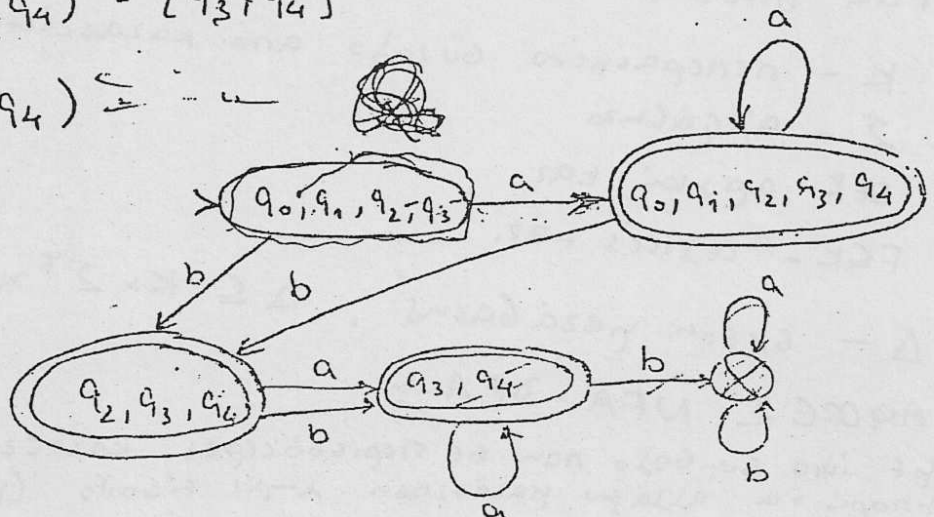
$$\delta'(\dots, b) = E(q_4) = \{q_3, q_4\}$$

$$\delta'(\{q_3, q_4\}, a) = E(q_4) = \dots$$

$$\delta'(\dots, b) = \emptyset$$

$$\delta(\emptyset, a) = \emptyset$$

$$\delta(\emptyset, b) = \emptyset$$



9) Η κλάση των γλωσσών (κανονικών) είναι κλειστή ως προς:

- α) Ένωση
- β) Παράθεση
- γ) Κλειστή star
- δ) Τομή
- ε) Συμπλήρωση.

Αποδείξεις:

δ) Συμπλήρωση: Έστω M ένα DFA. Ζήτη η συμπληρωματική γλώσσα $\Sigma^* - L(M)$ δίνεται από το DFA

$$\bar{M} = (K, \bar{Q}, \delta, s, K - F)$$

Ανλαδή το \bar{M} είναι το ίδιο το M με τη διαφορά ότι έχουν εναλλαχθεί οι τελικές και μη τελικές καταστάσεις.

ε) Τομή: Αν L_1, L_2 είναι κανονικές γλώσσες ~~και~~ δίνονται δέξιν από τα DFA M_1, M_2 τότε

$$L_1 \cap L_2 = \Sigma^* - ((\Sigma^* - L_1) \cup (\Sigma^* - L_2))$$

Η $L_1 \cap L_2$ δίνεται από DFA που κατασκευάζεται με βοήθεια της ένωσης και της συμπλήρωσης.

Για την τομή κατασκευάζουμε

1. συμπληρωματικό DFA του M_1 (\bar{M}_1)

2. " " " " M_2 (\bar{M}_2)

3. Ένωση (1)+(2) και ητζίση NFA \rightarrow DFA ($\bar{M}_1 \cup \bar{M}_2$)

4. Συμπλήρωση του (3) ($\overline{(\bar{M}_1 \cup \bar{M}_2)}$).

10) Pumping Lemma (κανονικές γλῶσσες).

Αν L μια άπειρη κανονική γλώσσα, τότε υπάρχει θετικός ακέραιος m (που εξαρτάται από την L), τέτοιος ώστε κάθε συμβολοσειρά $w \in L$ με μήκος n ή μεγαλύτερο ($|w| \geq m$), μπορεί να αποσπαστεί σε τρία μέρη xyz , όπου $|x| + |y| \leq m$ και $|y| \geq 1$, $\forall w_i = xyz^i \in L \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots$

11) Γραμματική χωρίς συμπράξεις G είναι για 4-άδα $G = (V, \Sigma, R, S)$ όπου

V - αλφάβητο

Σ - (σύνολο τερμινάλων) υποσύνολο του V

R - (σύνολο των κανόνων), υποσύνολο του $(V - \Sigma) \times V^*$

S - (αρχικό σύμβολο) στοιχείο του $V - \Sigma$.

Μια γλώσσα L αναφέρεται χωρίς συμπράξεις αν ισχύει ότι $L(G)$ για κάποια γραμματική χωρίς συμπράξεις G .

12) Αυτόματη βροίβας (PDA)

είναι για 6άδα $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ όπου

K - πεπερ. σύνολο από καταστάσεις

Σ - αλφάβητο (σύμβολα εισόδου)

Γ - αλφάβητο (σύμβολα βροίβας)

$s \in K$ - αρχική κατάσταση.

$F \subseteq K$ - σύνολο τελικών καταστάσεων.

Δ - σχέση μεταβάσεων, πεπερ. υποσύνολο του $(K \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (K \times \Gamma^*)$.

13) Pumping Lemma (χωρίς συγφρ.)

Για κάθε γλώσσα χωρίς συγφραζόμενα L υπάρχει μια θετική ακέραια σταθερά p ($p > 0$) με την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν συμβολοθετεί $w \in L$ και $|w| \geq p$, τότε w μπορεί να γραφτεί σαν $uvxyz$, με $uv^kxy^kz \in L, \forall k \geq 1$ επιπλέον, $|vxy| \leq p$ και $|vy| > 0$.

14) Οι ΓΧΣ δεν είναι κλειστές ως προς την ζοπή και την συμπλήρωση.

Είναι φανερό ότι οι $\{a^n b^n c^m : m, n \geq 0\}$ και $\{a^m b^n c^n : m, n \geq 0\}$ είναι ΓΧΣ. Η ζοπή των δύο αυτών είναι $\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$, η οποία αποδεικνύεται ότι δεν είναι ΓΧΣ.

Αν οι ΓΧΣ ήταν κλειστές ως προς την συμπλήρωση, τότε θα ήταν κλειστές και ως προς την ζοπή, εφόσον

$$L_1 \cap L_2 = \Sigma^* - ((\Sigma^* - L_1) \cup (\Sigma^* - L_2))$$

15) $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ όχι ΓΧΣ.

Έστω L ΓΧΣ. Αν $x \in L$ με $|x| > m$, συνεπώς $x = uvwxz$ με $|vwx| \leq m$. Επιλέγουμε $n > m$. Τότε όποτε εμφανίζεται το vwx στο συμβολοθετεί $a^n b^n c^n$, δε μπορεί να έχει περιπτώσεις από 2 διαφορετικές ζεύγες γραμμάτων - μπορεί να έχει ή τον a, b, c ή a, b ή b, c . Επομένως v δε μπορεί να περιέχει ή τον από 2 διαφρ. ζεύγες γραμμ. και επίσης του Pumping Lemma δεν μπορεί να είναι ούτε κενό. Άρα $|vx| \geq 1$. Αρα $uv^2wx^2z \in L \Rightarrow uv^2wx^2z \in L$. Αλλά αφού $|vx| \geq 1 \Rightarrow |uv^2wx^2z| > |uvwxz|$, επομένως υπάρχουν επιπλέον γράμματα. Η v δε περιέχει γράμ. και από τη

αλληλεγγύων από κεία γράμματα. Κάθε σύστημα
 $uv^2wx^2z \notin L$, που είναι άτομο. Άρα $u \in L$ δεν είναι, ΓΧ2

16) Μηχανή Turing (σελ 107)

4-άδα $M = (K, \Sigma, \delta, s)$ όπου

K - πεπερ. σύνολο καταστάσεων που δεν περιέχουν την κατάσταση τερματικού h .

Σ - αλφάβητος, περιέχει το κενό σύμβολο $\#$
δεν περιέχει τα L και R .

$s \in K$ - αρχική κατ.

$\delta - f: K \times \Sigma \rightarrow (K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\})$.

Αν $q \in K, a \in \Sigma$ κ' $\delta(q, a) = (p, b)$, τότε $u \in M$
όταν βρίσκεται στην κατ. q βγαίνει το σύμβολο a ,
περνάει στην κατ. p και

- αν $b \in \Sigma$ τότε γράφει όπου a το b .

- αν $b \in \{L, R\}$ τότε μετακινεί την κεφαλή προς την
κατεύθυνση b .

Η M τερματίζει μόνον όταν εγείθεται στην h , ή
αν επιταχίσει να μετακινήσει αριστερά από το άκρο
της ταινίας.

17) Θεώρημα του Church

Μια συνάρτηση είναι υπολογίσιμη αν και μόνο αν
είναι υπολογίσιμη από μια υπερπρωτοτυπική μηχανή
Turing.

Ασκήσεις

1) Αρτο μήκος

$$((a \cup b)(a \cup b))^*$$

2) Παρτίο μήκος

$$(a \cup b) ((a \cup b)(a \cup b))^*$$

3) $|w| = 3$

$$(a \cup b)(a \cup b)(a \cup b)$$

4) περιέχουν aa

$$(a \cup b)^* aa (a \cup b)^*$$

~~aa~~

5) δεν περιέχουν aa

$$(a \cup e)(b \cup ba)^*$$

~~(a \cup e)(b \cup ba)~~

6) a πριν b πριν c και $|w| > 0$ $w \neq \epsilon$

$$(aa^*b^*c^*) \cup (a^*bb^*c^*) \cup (a^*b^*cc^*)$$

7) καταλήγουν σε 3 1 '

$$(0 \cup 1)^* 111$$

8) Το ποσό ένα 1 '

$$0^* (0 \cup 1) 0^*$$

9) $\Sigma = \{A, B, \dots, Z, a, b, \dots, z\}$ περιέχουν ελάχιστο "main"

$$L = AUBU \dots U Z$$

$$L^* \text{ main } L^*$$

10) περιέχει "000" είτε "010"

$$\left((100)^* 000 (100)^* \right) \cup \left((100)^* 010 (100)^* \right)$$

11) περιέχουν # "1" = $3k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$$0^* 1 (0^* 10^* 10^* 10^* 10^*)^* 0^*$$

12) περιέχουν άρτιο # "0" ή "1"

$$(0^* 10^* 10^*)^* \cup (1^* 01^* 01^*)^*$$

13) 2 "0"

$$1^* 01^* 01^*$$

συλλογή των 2 "0"

$$(100)^* 0 (100)^* 0 (100)^*$$

14) Δεν περιέχουν ++ "01"

$$(100)^* (00 \cup 10 \cup 11)$$

15) Ξεκινεί ή τελειώνει με "00" ή "11"

$$\left((00 \cup 11) (100)^* \right) \cup \left((100)^* (00 \cup 11) \right)$$

6) Κάθε "0" ακολουθείται από "11"

$$1^* (0111^*)^*$$

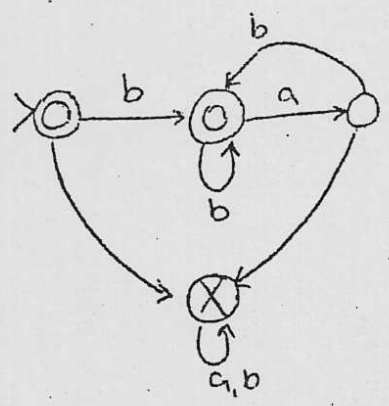
Συλλογή των $\{2, 10\}^*$
 $(11^*0)^* 0 (0 \cup 11)^*$

Διαφογή 3

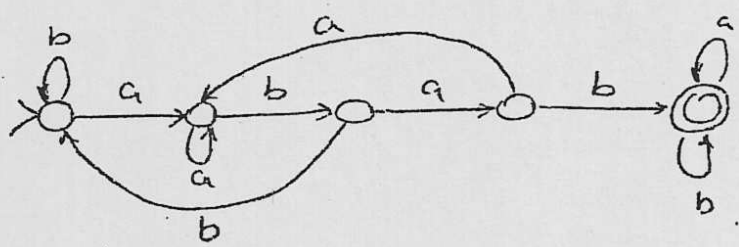
$\{0\}^* \{e, 11, 110, \dots\}$
 $(0 \cup 1(0 \cup 10)^* 1)^*$

άρτιο αρ άρτιο 0
 $(1^*01^*01^*)$

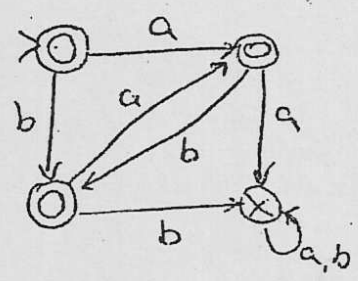
7) DFA με 3 αλφάβητος εφ. 2 "b"



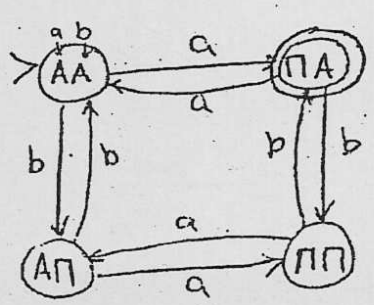
18) περιέχει την abab



19) δεν περιέχει ούτε "aa" ούτε "bb"



20) περιέχει περιζω # a ≠! άρζω # b



21) έχω άρτιο # 0 και άρτιος 2 1

Κατασκευή

Άρτιος # 0

A: 0 '1'

B: 1 '1'

C: 2 '1'

D: 3+ '1'

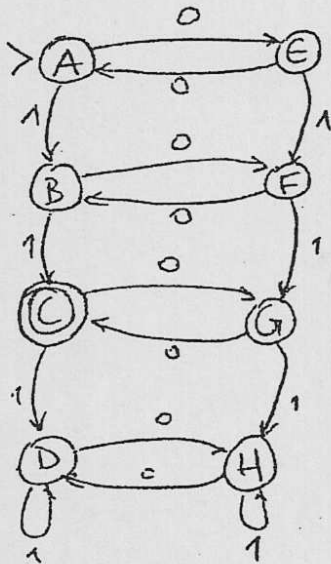
Περιζωίο # 0

E: 0 '1'

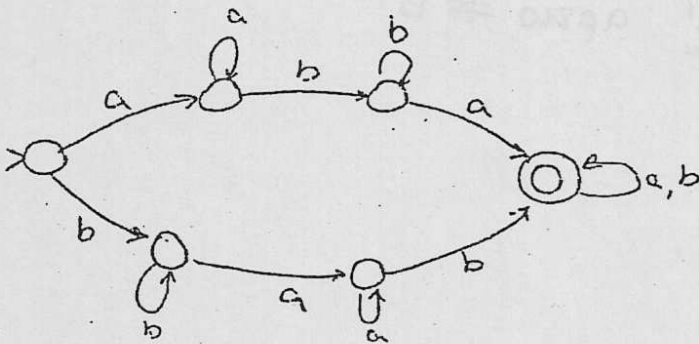
F: 1 '1'

G: 2 '1'

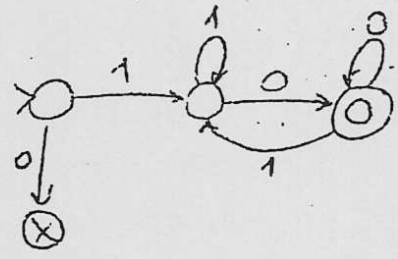
H: 3+ '1'



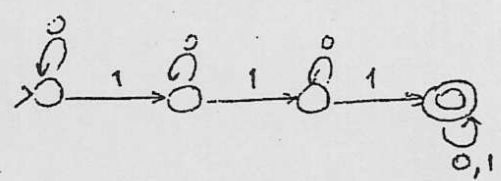
22) περιέχει ab και ba (επιβαρυντική)



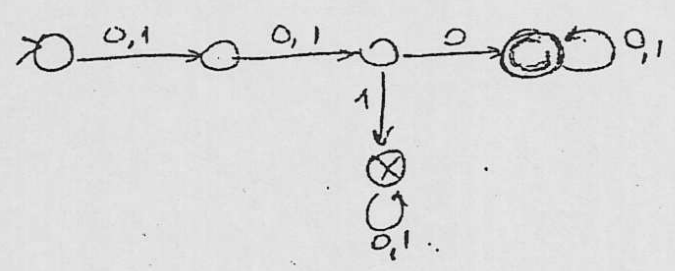
23) Ξεκινάει με 1 κ' αληθεύει με 0



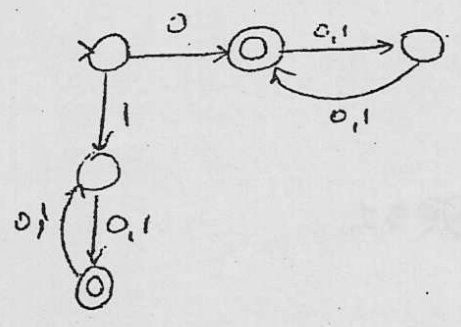
24) περιέχει ακολουθία 3 '1'



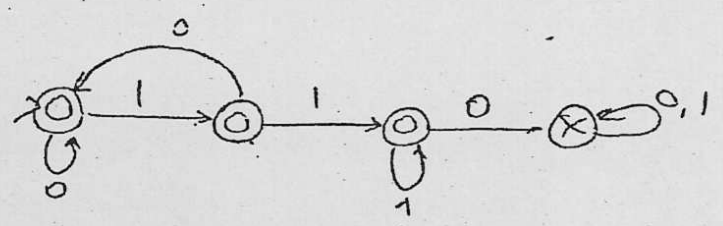
25) $|w| \geq 3$ κ' $w(3) = '0'$



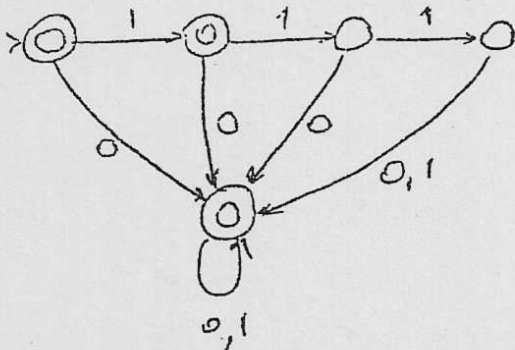
26) Ξεκινάει με 0 ή έχει περίοδο μήκος είσε
 - - - 1 - - - άρτιο μήκος.



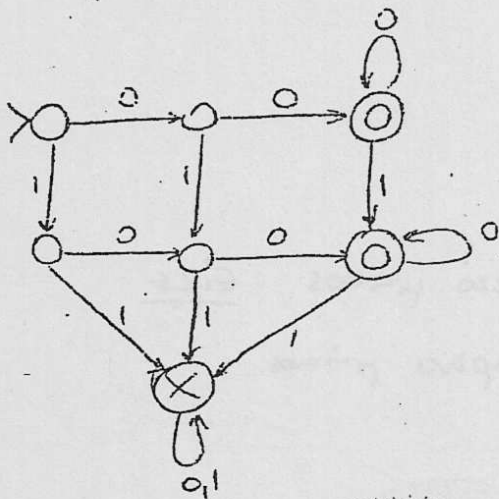
27) Δεν περιέχει 110



28) Κατά τον επόμενο II και III



29) περιέχει τονλάχιστων 2 "0" και τονπολύ 1 "1"



30) γήκος W τονπολύ 5



31) Κατά τον επόμενο τονπολύ W δρα 1

