1η **Να λυθεί η ΔΕ:** $y''+y'-2y=40\cosh(3x)$ **[1].**

Λύση: Αυτή είναι γραμμική ΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές.
Πρώτα σχηματίζουμε την αντίστοιχη ομογενή της και βρίσκουμε τη γενική της λύση:
Η ομογενής της είναι η: $y''+y'-2y=0$ [2] και η χαρακτηριστική εξίσωση αυτής είναι η: $\lambda^2+\lambda-2=0$ της οποίας οι ρίζες (με διακρίνουσα) είναι $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=-2$ οπότε η γενική λύση της ομογενούς [2] είναι η: $y_{\gamma.\lambda.o\mu.}=c_1e^x+c_2e^{-2x}$ [3].

Κατόπιν θα βρούμε μία μερική λύση της [1] ως εξής: είναι $\cosh 3x=\dfrac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}$ και επειδή κανένας από τους όρους $e^{\pm 3x}$ δεν βρίσκεται στους όρους της [3], μία μερική λύση αναμένεται να είναι της μορφής: $y_\mu=a\cosh 3x+b\sinh x$ [4] με $a,b\in R$.
Παραγωγίζουμε αυτή δύο (όσο είναι και η τάξη της αρχικής ΔΕ) φορές και αντικαθιστούμε ότι χρειάζεται στην [1]. Έχουμε: $y_\mu'=3a\sinh 3x+3b\cosh 3x$ και $y_\mu''=9a\cosh 3x+9b\sinh 3x$ οπότε η [1] γίνεται:
$(9a\cosh 3x+9b\sinh 3x)+(3a\sinh 3x+3b\cosh 3x)-2(a\cosh 3x+b\sinh 3x)=40\cosh 3x$
ή $(7a+3b)=40\cosh+(7b+3a)\sinh 3x=40\cosh 3x+0\sinh 3x$ από την οποία παίρνουμε ότι: $(7a+3b)=40\cosh$ και $(7b+3a)=0$. Λύνουμε το σύστημα αυτό και βρίσκουμε: $a=7,\quad b=-3$, οπότε η ζητούμενη μερική λύση είναι η
$y_{\gamma.\lambda.}=y_{\gamma.\lambda.o\mu.}+y_{\mu.}=c_1e^x+c_2e^{-2x}+7\cosh 3x-3\sinh x,\quad c_1,c_2\in R.$

2η **Δίνεται η ΔΕ:** $(y^2+2xy+1)dx+(x^2+2xy+1)dy=0$

Να βρεθούν όλες οι λύσεις της, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(-1,1)$.

Αν θέσουμε $P=(y^2+2xy+1)$, $Q=(x^2+2xy+1)$ τότε είναι
$\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x+2y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ οπότε η ΔΕ είναι πλήρης ή άμεσα ολοκληρώσιμη και η λύση της βρίσκεται με δύο τρόπους:

<u>1ος άμεσος:</u> (με τη βοήθεια του τύπου $\int_{t=a}^{x}P(t,y)dt+\int_{t=b}^{y}Q(a,t)dt=c$, για $a=b=0$)
$\Leftrightarrow\ \left[ty^2+t^2y+t\right]_0^x+\left[t\right]_0^y=c\ \Leftrightarrow\ (xy^2+x^2y+x)+y=c.$ επειδή θέλουμε να ικανοποιείται και η αρχική συνθήκη, η λύση αυτή δίνει:
$(-1)\cdot 1^2+(-1)^2\cdot 1+(-1)+1=c\Rightarrow c=0$ οπότε η ζητούμενη λύση είναι η:
$xy^2+x^2y+x+y=0\Leftrightarrow xy(x+y)+(x+y)=0\Leftrightarrow(x+y)xy+1)=0\Leftrightarrow y=-x\quad \eta\quad y=-\dfrac{1}{x}.$

Σχόλιο: μπορούμε να αποφύγουμε το τελευταίο βήμα υπολογισμού της c βάζοντας στον παραπάνω τύπο τα: $a=-1,b=1,c=0$.
<u>2ος με διαδοχικές ολοκληρώσεις:</u> Επειδή η ΔΕ είναι πλήρης σημαίνει ότι το 1ο μέλος της ΔΕ είναι ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης f, δηλαδή ότι είναι ίσο με:
$df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ οπότε από τη ΔΕ έχουμε ότι:

$\frac{\partial f}{\partial x} = P = y^2 + 2xy + 1(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q = x^2 + 2xy + 1(b)$. Ολοκληρώνουμε την (a) ως προς x και βρίσκουμε: $f = xy^2 + x^2 y + x + c(y) \quad (\gamma)$. Παραγωγίζουμε αυτή ως προς y και την βάζουμε στη (b) οπότε έχουμε:
$2xy + x^2 + c'(y) = x^2 + 2xy + 1 \Leftrightarrow c'(y) = 1 \Leftrightarrow c(y) = y + c_0$ και έτσι η (γ) γίνεται :
$f = xy^2 + x^2 y + x + y + c_0$ από την οποία λόγω της αρχικής συνθήκης για το A βρίσκουμε την προηγούμενη λύση.

3η Να βρείτε το a ώστε η $y = e^{ax}$ να είναι μία λύση της ΔΕ: $(x+1)y'' + xy' - y = 0$ και κατόπιν να βρείτε τη λύση της που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες:
$y(0) = y'(0) = 3$

Επειδή η $y = e^{ax}$ είναι λύση της ΔΕ την παραγωγίζουμε 2 φορές και αντικαθιστούμε:
$y' = ae^{ax}$ και $y'' = a^2 e^{ax}$ οπότε η ΔΕ γίνεται:
$(x+1)a^2 e^{ax} + xae^{ax} - e^{ax} = 0 \Leftrightarrow [(x+1)a^2 + xa - 1]e^{ax} = 0 \Leftrightarrow$
$[(a^2 + a)x + (a^2 - 1)] = 0 \Leftrightarrow a(a+1) = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$(a = 0, a = -1) \quad \kappa\alpha\iota \quad (a = 1, a = -1) \Leftrightarrow a = -1$.
Έτσι η δοσμένη λύση είναι η: $y = e^{-x} = y_1$ και επειδή γνωρίζουμε μία λύση, για να βρούμε μία ακόμα κάνουμε υποβιβασμό τάξης με την αντικατάσταση:
$y_2 = y_1 z = e^{-x} z, z = z(x)$ παραγωγίζουμε την y_2 δύο φορές και αντικαθιστούμε στην αρχική ΔΕ. Είναι: $y' = -e^{-x}z + e^{-x}z' = (-z + z')e^{-x}$ και
$y'' = e^{-x}z - e^{-x}z' - e^{-x}z' + e^{-x}z'' = (z - 2z' + z'')e^{-x}$ οπότε η ΔΕ γίνεται:
$[(x+1)(z - 2z' + z'') + x(-z + z') - z]e^{-x} = 0$ ή $-(x+2)z' + (x+1)z'' = 0$, θέτουμε
$z' = w(x)$ οπότε η τελευταία γίνεται: $-(x+2)w + (x+1)w' = 0$
$\Leftrightarrow -\frac{x+2}{x+1}dx + \frac{dw}{w} = 0 \Leftrightarrow -(1 + \frac{1}{x+1})dx + \frac{dw}{w} = 0 \Leftrightarrow$ (χωρίς τη σταθερά ολοκλήρωσης) $-x = \ln|x+1| - \ln|w| \Leftrightarrow$
$x = \ln|x+1| - \ln|w| \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{x+1}{w} \Leftrightarrow$
$z' = \frac{x+1}{e^{-x}} = xe^x + e^x \Leftrightarrow z' = \frac{x+1}{e^x} = xe^{-x} + e^{-x} \int (x+1)e^x dx = xe^x$ οπότε τώρα η y_2 βρίσκεται: $y_2 = e^{-x}z = e^{-x}xe^x = x$.
Εξετάζουμε τη γραμμική εξάρτηση των $y_{1,2}$:
$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & x \\ -e^{-x} & 1 \end{vmatrix} = (x+1)e^{-x} \neq 0$ οπότε είναι γραμμικά ανεξάρτητες και άρα η γενική λύση της αρχικής ΔΕ είναι η: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{-x} + c_2 x$. Επειδή στις αρχικές συνθήκες περιέχεται και η y' παραγωγίζουμε τη γενική λύση: $y = -c_1 e^{-x} + c_2$, οπότε οι αρχικές συνθήκες (που εφαρμόζονται στην γενική λύση και την παράγωγό

της) δίνουν: $\{3 = c_1e^0 + c_2 0, \quad 3 = -c_1e^0 + c_2\}$ απ' όπου βρίσκουμε $\{c_1 = 3, \quad c_2 = 6\}$ με αποτέλεσμα η ζητούμενη λύση να είναι: $y = 3e^{-x} + 6x$.

4^{η} Να μελετηθεί ως προς τα κρίσιμα σημεία της (ποιά και είδος τους) η συνάρτηση: $f = f(x, y) = (x-1)(x^2 + x - 2y^2)$. σελ. 149

Έχουμε: $f = x^3 - 2xy^2 - x + 2y^2$ οπότε οι πρώτες μερικές της παράγωγοι είναι: $f_x = 3x^2 - 2y^2 - 1[=0]$ και $f_y = 4y - 4xy = 4y(1-x)[=0]$. Λύνουμε το σύστημά τους για να βρούμε τα «κρίσιμα» σημεία. Η δεύτερη δίνει $y = 0$ ή $x = 1$ οπότε από την f_x βρίσκουμε: α) $y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ οπότε $S_{1,2}(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ και β) $x = 1 \Rightarrow 2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$ οπότε: $S_{3,4}(1, \pm 1)$. Κατόπιν υπολογίζουμε τις δεύτερες μερικές παραγώγους της f και την αντίστοιχη διακρίνουσα.

Είναι: $f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -4y, \quad f_{yy} = 4 - 4xx$ και $\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = -8(3x^2 + 2y^2 - 3x)$

$3\frac{1}{\sqrt{3}^2} \quad -3\frac{1}{\sqrt{3}}$

οπότε:

Κρίσιμο σημείο	Δ	f_{xx} (εδώ άχρηστη, διότι παντού είναι $\Delta < 0$)	**Συμπεράσματα**
$S_1(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$	$-8(\sqrt{3}+1) < 0$	$2\sqrt{3}$	Σαγματικό σημείο
$S_2(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$	$-8(\sqrt{3}-1) < 0$	$-2\sqrt{3}$	Σαγματικό σημείο
$S_3(1,1)$	$-16 < 0$	6	Σαγματικό σημείο
$S_4(1,-1)$	$-16 < 0$	6	Σαγματικό σημείο

$b^2 - 4a\gamma \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

5^{η} Δίνεται η επιφάνεια $C : f = 3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$ και το τυχαίο σημείο της $A(x_0, y_0, z_0), z_0 > 0$ <u>α)</u> Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο p στην C στο A και να δείξετε ότι αυτό διέρχεται από την αρχή των αξόνων $\forall A \in C$. <u>β)</u> Να βρεθούν οι ευθείες στις οποίες το επίπεδο p τέμνει τα επίπεδα συντεταγμένων. 212

<u>**α)**</u> Επειδή η συνάρτηση είναι ισοσταθμική ($f = 0$) το εφαπτόμενο επίπεδο p είναι κάθετο στο διάνυσμα $\nabla f|_A = (f_x, f_y, f_z)|_A = (6x, 6y, -2z)|_A = (6x_0, 6y_0, -2z_0)$, οπότε αν $M(x, y, z)$ είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου p θα είναι :

$\vec{AM} \bullet \nabla f|_A = 0 \Leftrightarrow (x-x_0)6x_0 + (y-y_0)6y_0 + (z-z_0)(-2z_0) = 0$ ή

$3x_0 x + 3y_0 y - z_0 z = 3x_0^2 + 3y_0^2 - z_0^2 = 0$ **(1)** διότι το σημείο $A \in C$ οπότε επαληθεύει την f.

β) το επίπεδο p τέμνει

το επίπεδο $x-O-z$ όταν είναι $y=0$ οπότε: $3x_0 x - z_0 z = 0$,

το επίπεδο $y-O-z$ όταν είναι $x=0$ οπότε: $3y_0 y - z_0 z = 0$ και

το επίπεδο $x-O-y$ όταν είναι $z=0$ οπότε: $3x_0 x + 3y_0 y = 0$.

6^{η} Να αποδείξετε ότι είναι συντηρητικό το διανυσματικό πεδίο 226

$\vec{F} = (2x + y^2 x^{-2},\ z^3 - 2yx^{-1},\ 3yz^2)$ και να βρείτε τη συνάρτηση δυναμικού του $V = V(x,y,z)$.

Για να είναι συντηρητικό-αστρόβιλο πρέπει ο στροβιλισμός του να είναι μηδενικός.

Πράγματι θέτοντας $\vec{F} = (F_1,\ F_2,\ F_3)$ είναι:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k} = \ldots.. = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k}\,.$$

Η συνάρτηση του δυναμικού του πεδίου επαληθεύει την $\vec{F} = \nabla V$ και βρίσκεται όπως στην παραπάνω άσκηση (**2^{η}**) κι εδώ ακολουθώ (συμφέρει) τον πρώτο τρόπο με τον τύπο:

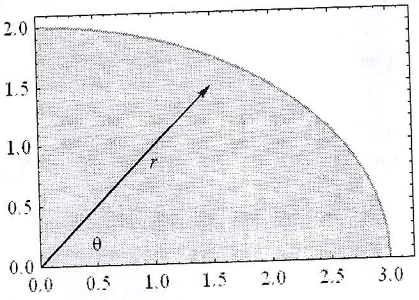
$$\vec{F} = (2x + y^2 x^{-2},\ z^3 - 2yx^{-1},\ 3yz^2)$$

$$V = \boxed{\int_{t=a}^{x} F_1(t,y,z)dt + \int_{t=b}^{y} F_1(a,t,z)dt + \int_{t=\gamma}^{z} F_1(a,b,t)dt} =$$

$$\int_{t=1}^{x} (2t + y^2 \frac{1}{t^2})dt + \int_{t=0}^{y} (z^3 - 2t \cdot 1^{-1})dt + \int_{t=\gamma}^{z} (3 \cdot 0 \cdot z^2)dt =$$

$$\left[t^2 - \frac{y^2}{t}\right]_{t=1}^{x} + \left[tz^3 - t^2\right]_{t=0}^{y} + c = (x^2 - \frac{y^2}{x}) - (1 - y^2) + (ty^3 - y^2) + c = \ldots.$$

7^{η} Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $I = \iint_R (x-3y)\,dxdy$ όπου R είναι το δεύτερο $[x \le 0,\ y \ge 0]$ τεταρτημόριο της έλλειψης: $x^2/9 + y^2/4 = 1$.



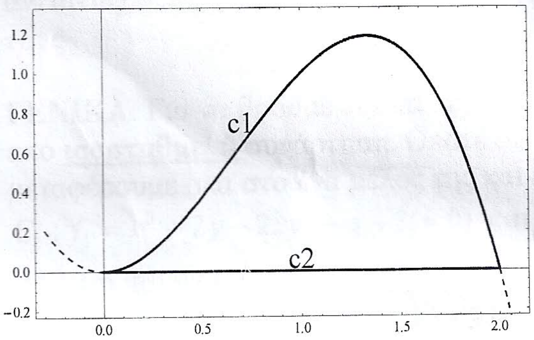
Κάνουμε αντικατάσταση με πολικές συντεταγμένες $\boxed{x = 3r\cos\theta, \quad y = 2r\sin\theta}$ **οπότε η Ιακωβιανή είναι:** $J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cos\theta & -3r\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta \end{vmatrix} = 6r > 0$

και για τα νέα όρια έχουμε: α) $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ **διότι η περιοχή βρίσκεται ολόκληρη στο 1^o τεταρτημόριο, και β) η εξίσωση της καμπύλης δίνει:** $r^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le r \le 1$. **Μετά από αυτά το ολοκλήρωμα γράφεται:**

$$I = \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\pi/2} (3r\cos\theta - 3\cdot 2r\sin\theta)\, 6r dr d\theta = 18\int_{r=0}^{1} r^2 dr \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/2} (3\cos\theta - 2\sin\theta)\, d\theta =$$

$$18\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{1} \left[3\sin\theta + 2\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\pi/2} = 18\frac{1}{3}[(3)-(2)] = 6$$

$8^η$ Δίνεται η καμπύλη $p: y = -x^3 + 2x^2$. **Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** $I = \oint_C (x^3 + y)\,dx + (4x + 2y + 5)\,dy$ **όπου η κλειστή γραμμή** $C = OAO$ **αποτελείται, κατά σειρά, από το τόξο** OA **της καμπύλης** p **και το ευθύγραμμο τμήμα** AO**, όπου είναι:** $O(0,0)$ **και** $A(2,0)$.



Η καμπύλη C και ο άξονας x τέμνονται στα σημεία:

$\{y = -x^3 + 2x^2, y = 0\} \Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0, 2:$ $A(0,0)$ και $B(2,0)$.

Το ολοκλήρωμα διασπάται ως εξής:

$I = \oint_{C1} \ldots + \oint_{C2} \ldots = I_1 + I_2$ **όπου**

(στο I_1 αντικαθιστούμε $y = -x^3 + 2x^2$ **και** $dy = y' \cdot dx$**)**

$$I_1 = \oint_{C1} [x^3 + (-x^3 + 2x^2)]dx + [4x + 2(-x^3 + 2x^2) + 5]\cdot[-3x^2 + 4x]dx =$$

$$\int_0^2 (6x^5 - 20x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 20x)dx =$$

$$(x^6 - 4x^5 + x^4 + x^3 + 10x^2)\Big|_0^2 = 0$$

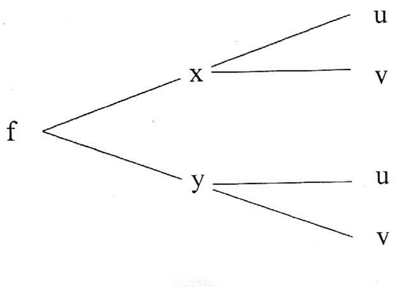
και **(στο I_2 αντικαθιστούμε** $y = 0$ **και** $dy = y' \cdot dx = 0$**)**

$I_2 = \oint_{c2} (x^3 + 0)dx + (4x + 2\cdot 0 + 5)\cdot 0 = \int_2^0 x^3 dx = \dfrac{x^4}{4}\Big|_2^0 = -4$ οπότε το αρχικό ολοκλήρωμα ισούται με **(-4)**.

$9^η$ Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y) = (x+y)e^{x-y}$ όπου $x = u + 2v$, $\quad y = 3u - v$.

Να δείξετε ότι: $3\dfrac{\partial f}{\partial u} + 2\dfrac{\partial f}{\partial v} = 14\, e^{x-y}$.

Σχηματίζουμε το δενδροδιάγραμμα του σχήματος από το οποίο βρίσκουμε ότι:



$f_u = f_x x_u + f_y y_u =$
$(e^{x-y} + (x+y)e^{x-y})\cdot 1 + (e^{x-y} - (x+y)e^{x-y})\cdot 3 =$ και
$2(2-x-y)e^{x-y}$
$f_v = f_x x_v + f_y y_v =$
$(e^{x-y} + (x+y)e^{x-y})\cdot 2 + (e^{x-y} - (x+y)e^{x-y})\cdot(-1) =$
$(1+3x+3y)e^{x-y}$
Μετά αντικαθιστούμε στο 1^o μέλος της αποδεικτέας.

$10^η$ Δίνονται οι επιφάνειες $C_1 : z = x^3 + 2y - 2xy^2 + 3$ **και** $C_2 : z = x^2 + xy + 2y^2 - 11$, **και το κοινό τους σημείο** $A(1,2,0)$.
α) Να βρείτε τα κάθετα διανύσματα v_1 **και** v_2 **στο** A **στις δυο επιφάνειες αντιστοίχως. β) Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη ευθεία στην καμπύλη τομής τους**

ΓΕΝΙΚΑ: Για να βρούμε κάθετο διάνυσμα σε επιφάνεια θα πρέπει αυτή να ορίζεται από **ισοσταθμική** συνάρτηση. Οπότε σε κάθε μία από τις δοσμένες εξισώσεις μεταφέρουμε όλα στο ένα μέλος της και έχουμε:
$C_1 : f_1 = x^3 + 2y - 2xy^2 - z + 3(=0)$ **και** $C_2 : f_2 = x^2 + xy + 2y^2 - z - 11(=0)$

α) Έτσι παίρνουμε:
$v_1 = \nabla f|_A = (f_{1,x}, f_{1,y}, f_{1,z})|_A = (3x^2 - 2y^2, 2 - 4xy, -1)|_A = (-5,-6,-1)$ και
$v_2 = \nabla f|_A = (f_{2,x}, f_{2,y}, f_{2,z})|_A = (2x+y, x+4y, -1)|_A = (4,9,-1)$

β) Η κοινή εφαπτομένη ευθεία ε βρίσκεται στο εφαπτόμενο επίπεδο Π της επιφάνειας C, το οποίο επίπεδο Π είναι κάθετο στο κάθετο διάνυσμα v της επιφάνειας C. Άρα η ε είναι κάθετη στο v. Θεωρώντας τα παραπάνω και για τις δύο επιφάνειες (αφού θέλω «**κοινή**») η ε είναι κάθετη και στο v_1 και στο v_2 και, επειδή το $u = v_1 \times v_2$ είναι κι αυτό κάθετο στα v_1, v_2 σημαίνει ότι είναι παράλληλο στην ε.

Οπότε αν $M(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο της ζητούμενης ευθείας τότε: $\vec{OM} = \lambda u$ **(1)**.
Υπολογίζουμε το

$$u = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -6 & -1 \\ 4 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 9\vec{j} - 21\vec{k} = (15,9,-21) = 3(5,3,-7) = 3v$$ οπότε η **(1)**

γράφεται:
$(x-1, y-2, z-0) = \lambda(5,3,-7) \Leftrightarrow \{x = 5\lambda + 1, \quad y = 3\lambda + 2, \quad z = -7\lambda\}, \lambda \in R.$
Η τελευταία είναι η εξίσωση της ευθείας ε.

11^{η} Νδό το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$\int_{(1,1,1)}^{(4,3,2)} (x^2+x-yz)dx+(y^2+y-zx)dy+(z^2+z-xy)dz$ **είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης και κατόπιν να το υπολογίσετε**

Είναι η ίδια άσκηση με την 6^{η} με
$\vec{F}=(x^2+x-yz, y^2+y-zx, z^2+z-xy)=(F_1,F_2,F_3)$

και βρίσκουμε $V=V(x,y,z)=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}+\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}-xyz+c$ οπότε

$I=V(4,3,2)-V(1,1,1)=22$.

12^{η} Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y)=xe^{y^2-z^2}$ στο σημείο P(1,2,–3) κατά την κατεύθυνση του $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{k}$.

Γνωρίζουμε ότι αν η f έχει συνεχείς όλες τις μερικές παραγώγους της και το διάνυσμα v είναι μοναδιαίο τότε **η παράγωγος της συνάρτησης** f **στο σημείο** A **κατά την κατεύθυνση του** v είναι ίση με: $\dfrac{df}{dv}=\nabla f|_A \bullet v$.

Μετατρέπουμε το u σε μοναδιαίο διαιρώντας το με το μέτρο του

$u_0=\dfrac{u}{|u|}=\dfrac{(1,-2,0)}{\sqrt{1+4+0}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)$ και βρίσκουμε τη βάθμωση της f στο P.

Είναι $\nabla f|_P=(f_x,f_y,f_z)|_P=(e^{y^2-z^2}, 2xye^{y^2-z^2}, -2xze^{y^2-z^2})|_P=(1,4,6)e^{-5}$, οπότε:

$$\frac{df}{du}=\nabla f|_A \bullet u_0=(1,4,6)e^{-5}\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)=\frac{e^{-5}}{\sqrt{5}}(1-8+0)=-\frac{7e^{-5}}{\sqrt{5}}$$