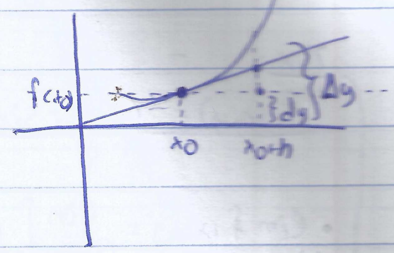
25-02-2016 Συναρτήσεις πολλαπλών μεταβλητών

→ Παράγωγος και διαφορικό

• $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ $\Rightarrow$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$, $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$

$\Rightarrow \boxed{\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \Delta x}$



→ Εύρεση Διαφορικού:

π.χ.:

$f(x) = \sqrt{x}$

$\sqrt{1{,}01} = ;$

$dy = f'(x) \cdot dx \Rightarrow$

$\boxed{dy = \frac{dy}{dx} dx}$

• $\Delta y \approx dy = f'(x) dx$

• $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x \Leftrightarrow$

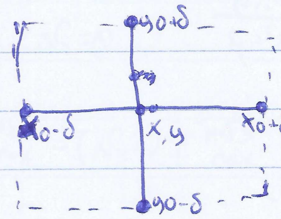
$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$

$x = 1$
$\Delta x = 0{,}04$ → $\boxed{\sqrt{1{,}04} = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot 0{,}04 = 1{,}02}$

→ Όρια με δύο μεταβλητές σε σχέση με μία:

• $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, $(\forall \varepsilon > 0), (\exists \delta > 0), (|x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)$

• $\lim_{x,y \to (x_0, y_0)} f(x) = L$, $(\forall \varepsilon > 0), (\exists \delta > 0)\ (|x - x_0| < \delta$ και $|y - y_0| < \delta \to |f(x,y) - L| < \varepsilon)$



π.χ.:

• $\lim_{(x,y) \to (1,2)} x^2 + 2y = 5$

σπάει το 5 σε 4 και 1

$|x-1| < \delta$ → $|f(x,y) - L| = |x^2 + 2y - 5| = |(x^2 - 1) + (2y - 4)| = |(x-1)(x+1) + 2(y-2)|$

$|y-2| < \delta$ $\qquad |x-1| + 2 < \delta + 2$ $\qquad \leq |x-1||x+1| + 2|y-2| < \delta(\delta+2) + 2\delta$

$< 5\delta < \varepsilon$

$\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{5}}$

→ Πότε δεν υπάρχει όριο:

α) $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, $f(x_n, y_n) \to L$

$(x_n', y_n') \to (x_0, y_0)$, $f(x_n', y_n') \to L'$ $\quad L \neq L'$

π.χ.:

$f(x,y) = (y^2+1)\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

• $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[(y^2+1)\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

• $(x_{n_1}, y_{n_1}) = \left(\frac{1}{2n\pi}, \frac{1}{2n\pi}\right)$, $\lim_{n\to 0} \left[\left(\frac{1}{2n\pi}\right)^2+1\right]\cdot \sin 2n\pi = 0$

• $(x_n', y_n') = \left(\frac{1}{2n\pi+\pi/2}, \frac{1}{2n\pi+\pi/2}\right) \to \sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 1$

β) $z = f(x,y)$, $x = r\cdot\cos\theta$, $y = r\cdot\sin\theta$ $\quad z = f(r,\theta)$, $\lim_{r\to 0} f(r,\theta) = \varphi(\theta)$

π.χ.:

• $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ;$, $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $x = r\cdot\cos\theta$, $y = r\cdot\sin\theta$

• $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r,\theta) = \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

π.χ.

γ) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $y = \lambda x$

• $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{x^2+\lambda^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda \cancel{x^2}}{(\lambda^2+1)\cancel{x^2}} = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}$

→ <u>Ασκήσεις</u>:

<u>A1</u>:

- $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$

- $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x+y-4)(\sqrt{x+y}+2)}{(\sqrt{x+y}-2)(\sqrt{x+y}+2)}$
$= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(\cancel{x+y-4})(\sqrt{x+y}+2)}{\cancel{x+y-4}}$
$= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \sqrt{x+y}+2$
$= 4$

<u>A2</u>: Συνέχεια

$M(0,0)$, $f(x,y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

- $|f(x,y)| = \left|\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \left|\sqrt{x^2+y^2}\right| \to 0$

- $|2xy| \le x^2+y^2$
$x^2+y^2-2|x||y| \ge 0$
$(|x|-|y|)^2 \ge 0$

→ <u>Παραγώγιση</u>:

- $f_x(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$, ως πρός x

- $f_y(x,y) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$, ως πρός y

<u>A3</u>: Εύρεση παραγώγου ως προς x

- $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$

- $f_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x$

$\boxed{f_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}}$

<u>A4</u>: Εύρεση παραγώγου ως προς y

- $f(x,y) = e^{x\cdot \ln y}$

- $f_y(x,y) = e^{x\cdot \ln y}(\cancel{\ln y} + x\cdot\frac{1}{y}\cdot 0)$

$\boxed{f_y(x,y) = e^{x\cdot \ln y}\cdot\frac{x}{y}}$

→ Παραγώγιση το μέσο

▶ $f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$; $f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right)$

• $f_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right)$

– – – – – – – – – – – –

▶ $f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$, • f_{yx} $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)$

• $f_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)$

26-02-16 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

→ Διαφορικό:

• Γραμμικοποίηση = διαφορικό όταν έχουμε 1 μεταβλητή

• Όταν έχουμε 2 μεταβλητές + έχουμε:

→ $z=f(x,y)$, $\Delta z= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$

– $\Delta z = f_x(x_0,y_0)\cdot \Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$ * $\Delta z \approx dz$

– $dz = f_x dx + f_y dy$, $dy = f'(x)dx$

→ Συνθήκες ύπαρξης ακροτάτων:

Με 2 μεταβλητές: • $d(x,y) = f_x dx + f_y dy = 0 \to f_x = f_y = 0$

• $\delta(x,y) = d(d(x,y)) = d(f_x dx + f_y dy) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x dx + f_y dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_x dx + f_y dy)dy =$

$$= (f_{xx}dx + f_{yx}dy)dx + (f_{yx}dx + f_{yy}dy)dy$$
$$= f_{xx}d^2x + f_{yx}dydx + f_{yx}dxdy + f_{yy}dy^2$$
$$= (dx \quad dy)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = X^T A X$$

~~Θέσεις~~

- $H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

- $f_{xx} > 0$, $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ελάχιστο
- $f_{xx} < 0$, $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ μέγιστο
- $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ Σαγματικό σημείο (σημείο καμπής με τομές)

~~Άσκηση~~

π.χ.: - - - - - - - - - - - - - - -

$\omega = f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\rightarrow f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Leftrightarrow \boxed{f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$

$\rightarrow \boxed{f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$

$\rightarrow \boxed{f_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$

$\rightarrow f_{zx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Άσκηση:

$f(x,y) = x^3+y^3-3xy$, εύρεση ακροτάτων

Λύση:

Πρέπει: $f_x = f_y = 0$ | $\left.\begin{aligned} f_x = 3x^2-3y=0 \\ f_y = 3y^2-3x=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^2=y \\ y^2=x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x^3-y=0} \rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)=0$

$\boxed{x=y}$

- $3x^3-3x=0$

$3x(x-1)=0$

$\boxed{x=0}$ ή $\boxed{x=1}$

$\rightarrow$ Σημεία ακροτάτων (πιθανά)

$A(0,0)$

$B(1,1)$

- $f_{xx} = 6x$
- $f_{xy} = -3$
- $f_{yy} = 6y$
- $f_{yx} = -3$

- $f_{xx}(0,0) = 0$
- $f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = -9 < 0$

• $f_{xx}(1,1)=6>0$

• $f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1)-f_{xy}^2(1,1)=$

→ <u>Ακρότατα σε περιορισμένη επιφάνεια:</u>

$L(x,y)=f(x,y)+\lambda(-g(x,y))$

★ $z=f(x,y)$

$g(x,y)=c$

1) $L_x=L_y=L_\lambda=0$ Πιθανά ακρότατα

2) $\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} \gtrless 0$ → Μέγιστο / → Ελάχιστο

<u>π.χ.</u>: - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$y=f(x,y)=x^2+y^2$

<u>$x+y=7$</u>

<u>Λύση</u>

• $L(x,y)=x^2+y^2+\lambda(7-x-y)$

• $L_\lambda = 7-x-y=0$
• $L_x = 2x-\lambda=0$
• $L_y = 2y-\lambda=0$

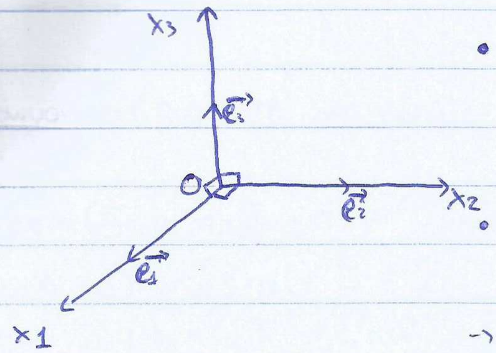
$\Bigg\}$ $y=x=7/2$

• $L_{xx}=2$
• $L_{xy}=0$
• $L_{yx}=0$
• $L_{yy}=2$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = -1(2)+1(-2)=-4<0$$

— — 11-03-2016 — — — Νέος καθηγητής — — — —

• Ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων



O, σύστημα σ.

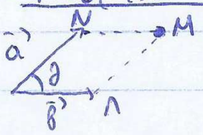
• $(O, x_1 x_2 x_3)$

• $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ μοναδιαία κάθετα μεταξύ τους διανύσματα

$$\left.\begin{array}{l} \vec{e_1} \perp \vec{e_2} \\ \to \vec{e_2} \perp \vec{e_3} \\ \vec{e_3} \perp \vec{e_1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\vec{e_i} \perp \vec{e_j}) \\ (i,j) = (2,3), (3,1), (1,2) \end{array}$$

→ $|\vec{e_i}| = 1$

• Γινόμενα Διανυσμάτων (βαθμωτό ή εσωτερικό)



• $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos\theta = ab \cdot \cos\theta$ • $ab \cdot \sin\theta = |E_{ΚΛΜΝ}|$

Inner Product (εσωτερικό γινόμενο)

→ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

→ $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$

→ $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$

→ $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = a^2$

• Διανυσματικό γινόμενο (εξωτερικό - Outer Product)

→ $\vec{a} \times \vec{b}$ → $|a \times b| = a \cdot b \cdot \sin\theta$

→ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

→ $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

• Σχέσεις για μοναδιαία διανύσματα και εσωτερικό γινόμενο:

→ $\vec{e_1} \cdot \vec{e_1} = \vec{e_2}\vec{e_2} = \vec{e_3} \cdot \vec{e_3} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \to \vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = 0,\ i \neq j \\ \to \vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = 1,\ i = j \end{array}\right\} \delta_{ij}$$ σύμβολο του Kronecker

• Σχέσεις για μοναδιαία διανύσματα και εξωτερικό γινόμενο:

$$\left.\begin{array}{l} \to \vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3} = -(\vec{e_2} \times \vec{e_1}) \\ \to \vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1} = -(\vec{e_3} \times \vec{e_2}) \\ \to \vec{e_3} \times \vec{e_1} = \vec{e_2} = -(\vec{e_1} \times \vec{e_3}) \end{array}\right\} \vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \vec{e_k}(\varepsilon_{ijk})\ k \neq i,j$$

ε_{ijk} = 1, i,j,k κυκλική; 0, i=j ή j=k ή k=i; -1, μη κυκλική σειρά

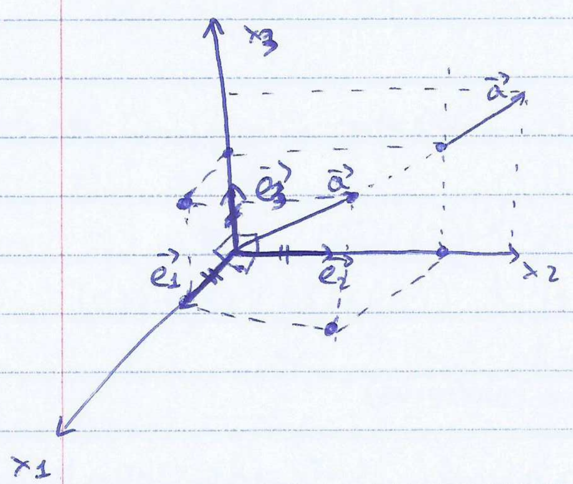
↳ κυκλική σειρά

σύμβολο Levi-Civita ή εναλλάξ

- $\vec{e_i} \times \vec{e_j} = \varepsilon_{ijk} \cdot \vec{e_k}$

$$= \sum_{k=i}^{j} \vec{e_k} \cdot \varepsilon_{ijk}$$

- Ανάλυση διανυσμάτων :



→ Διάνυσμα σε ορθοκανονικό σύστημα:

- $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2} + a_3 \cdot \vec{e_3}$

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{3} a_k \cdot \vec{e_k} = (a_1, a_2, a_3)$$

- $\vec{a}\,\vec{b} = (a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3}) \cdot (b_1 \cdot \vec{e_1} + b_2 \cdot \vec{e_2} + b_3 \cdot \vec{e_3})$

$$= \sum_{k=1}^{3} a_k \cdot b_k$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{3} a_k \cdot \sum_{k=1}^{3} b_k = \cancel{\prod_{\lambda=a}^{b} A_k} \right.$$ (βήμα)

$$\left. = \prod_{\lambda=a}^{b} \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \right)$$ και βήμα $b-a$

- $\vec{a}\,\vec{b} = \sum_{k} \vec{a_k} \cdot \vec{e_k} \sum_{\lambda} \vec{b_\lambda} \vec{e_\lambda}$

$$= \sum_{k} \sum_{\lambda} \vec{a_k} \cdot \vec{b_\lambda} \cdot \underbrace{\vec{e_k} \cdot \vec{e_\lambda}}$$

$$= \sum_{k} \sum_{\lambda} \vec{a_k} \cdot \vec{b_\lambda} \cdot \delta_{k\lambda} \quad \left(\sum_{k=1}^{3} a_k b_k \right)$$

- $\vec{a} \times \vec{b} = \left(\sum_{\lambda} \vec{a_\lambda} \vec{e_\lambda} \right) \times \left(\sum_{\mu} \vec{a_\mu} \cdot \vec{e_\mu} \right)$

$$= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \vec{a_\lambda} \vec{b_\mu} \vec{e_\lambda} \vec{e_\mu}$$

$$= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \vec{a_\lambda} \vec{b_\mu} \sum_{k} \varepsilon_{k\lambda\mu} \cdot \vec{e_k}$$

$$= \boxed{\sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{k} \varepsilon_{k\lambda\mu} \cdot \vec{e_k} \cdot \vec{a_\lambda} \cdot \vec{b_\mu}}$$

- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e_1} (a_2 b_3 - a_3 b_2)$

$$+ \vec{e_2} (a_3 b_1 - a_1 b_3)$$

$$+ \vec{e_3} (a_1 b_2 - b_2 a_1)$$

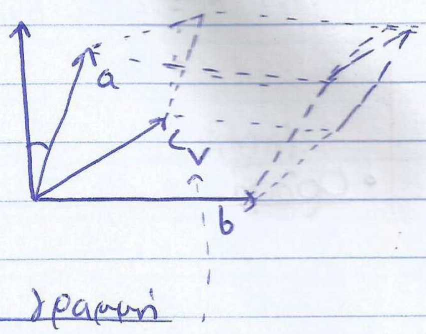
- $(a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3)$

$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3$
$+ a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3$

$$\sum_{k} \sum_{\lambda} a_k b_\lambda = \sum_{k} a_k \cdot \sum_{\lambda} b_\lambda$$

- $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$

$$= \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$



→ Με ανάπτυγμα ως προς την 2η, 3η γραμμή

- $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b}) = [a,b,c] = V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ Βαθμωτό τριπλό γινόμενο

- $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ Διανυσματικό τριπλό γινόμενο

- Σχέσεις που ισχύουν μεταξύ Kronecker και Levi-Civita

→ $\varepsilon_{ijk} \underset{\text{πολ}}{\cdot} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip} \underset{\text{πολ}}{\cdot} \delta_{jq} - \delta_{iq}\cdot\delta_{jp}$

→ $\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3} \varepsilon_{\lambda\mu p}\varepsilon_{\lambda\mu q} = 2\delta_{pq}$

→ $\sum_{k}\sum_{\lambda}\sum_{\mu} \varepsilon_{k\lambda\mu}\varepsilon_{k\lambda\mu} = 6$

- Σχέσεις που ισχύουν σε εσωτερικά και εξωτερικά γινόμενα:

→ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$

→ $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$

→ $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}$

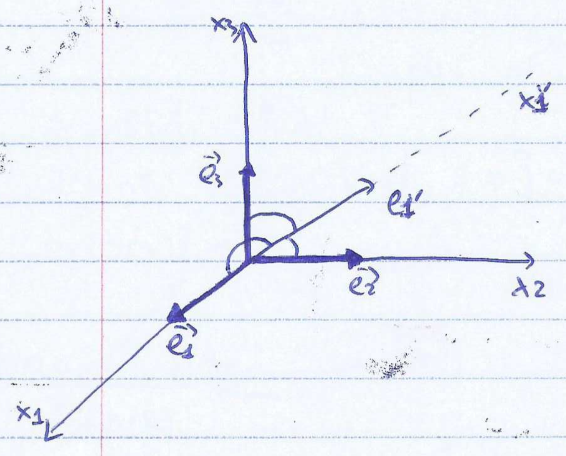
→ $(a\times b)^2 = a^2b^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$

→ $[\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}] = [a,b,c]$

$$\to \vec{a}\cdot\vec{e_i} = \sum_k a_k \cdot \vec{e_k}\cdot\vec{e_i} = \sum_k a_k \cdot \delta_{ki} = a_i$$

$$\to \vec{a} = \sum_k a_k \vec{e_k} = \sum_k (\vec{a}\vec{e_k})\vec{e_k}$$

• Ορθογώνιοι μετασχηματισμοί:



→ (x_1) με βάση $\vec{e_1}$

→ (x_1') με βάση $\vec{e_1}'$

→ (l_{ij}), $i,j = 1,2,3$ τα συνημίτονα κατεύθυνσης των $\vec{e_i}'$ ως προς (x_1)

→ $\vec{e_i}'\cdot\vec{e_j} = l_{ij} \to \vec{e_i}' = \sum_{k=1}^{3} l_{ik}\cdot\vec{e_k}$

→ $\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}' = l_{ji} \to \vec{e_i} = \sum_{k=1}^{3} \vec{e_k}'$

• $\vec{a} = \sum a_k \cdot \vec{e_k} = \sum a_k' \cdot \vec{e_k}'$

• $a_i' = \vec{a}\cdot\vec{e_i}' = \sum_k l_{ik} a_k = \sum_k l_{ki} a_k'$,

• $$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = R_{3\times3} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

με $$R_{3\times3} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} \iff R^{-1} = R^{T}$$

↓ ορθογώνιος πίνακας

$$\boxed{\begin{aligned} &\bullet \sum_{k=1}^{3} l_{ik}\cdot l_{jk} = \delta_{ij} \\ &\bullet \sum_{k=1}^{3} l_{ki}\, l_{kj} = \delta_{ij} \end{aligned}}$$

Συνθήκες ορθοκανονικότητας

$\rightarrow [\vec{e_i}, \vec{e_j}, \vec{e_k}] = \varepsilon_{ijk}$

$\rightarrow \det R = 1$

$\Big\} \Rightarrow [e_1', e_2', e_3'] = \det R = \varepsilon_{123} = 1$

- <u>Παραγώγιση διανυσμάτων ως προς μία μεταβλητή:</u>

$\rightarrow \vec{a} = \vec{a}(u) = (a_1(u), a_2(u), a_3(u))$

$\rightarrow \frac{d\vec{a}}{du} = \sum \vec{e_k} \frac{da_k}{du}$

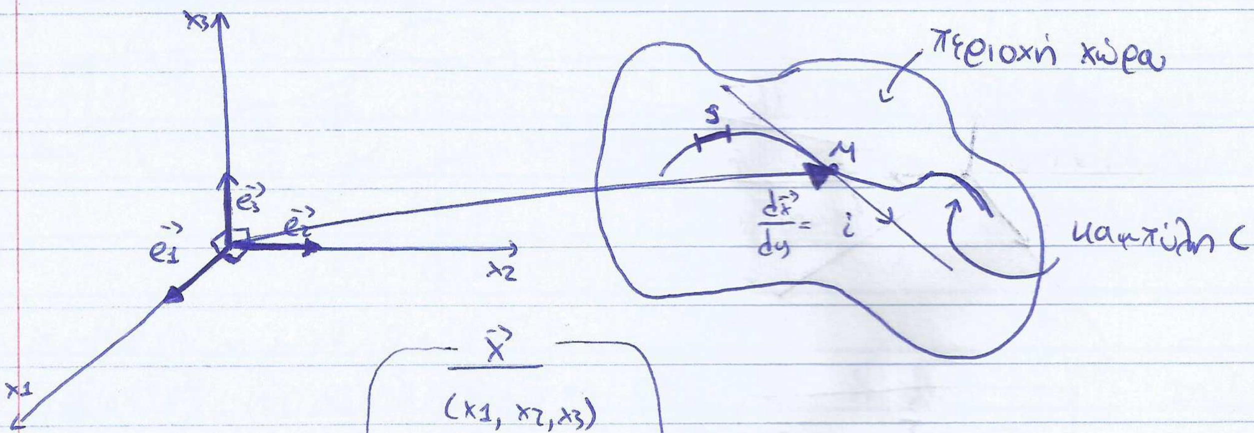
$\rightarrow \frac{d(\vec{a}+\vec{b})}{du} = \frac{d\vec{a}}{du} \pm \frac{d\vec{b}}{du}$

$\rightarrow \frac{d(m\vec{a})}{du} = m \frac{d\vec{a}}{du} + \frac{dm}{du}\vec{a}$

$\rightarrow \frac{d(\vec{a}\vec{b})}{du} = \vec{a}\frac{d\vec{b}}{du} + \vec{b}\frac{d\vec{a}}{du}$

$\rightarrow \frac{d(\vec{a}\times\vec{b})}{du} = \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{du} + \vec{b}\times\frac{d\vec{a}}{du}$

- <u>Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία - Τελεστές</u>



$\vec{x}$

(x_1, x_2, x_3)

$\sum_k x_k \cdot \vec{e_k}$

<u>Σ της V.</u>

- Βαθμωτό πεδίο (scale field)
- $f(x_1, x_2, x_3) = f(\vec{x})$
- $f: R^3 \rightarrow R < f\ R^n \rightarrow R$

$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$

• Διανυσματικό πεδίο:

$\rightarrow \vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \vec{F}(\vec{x})$

$= (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), F_3(\vec{x}))$

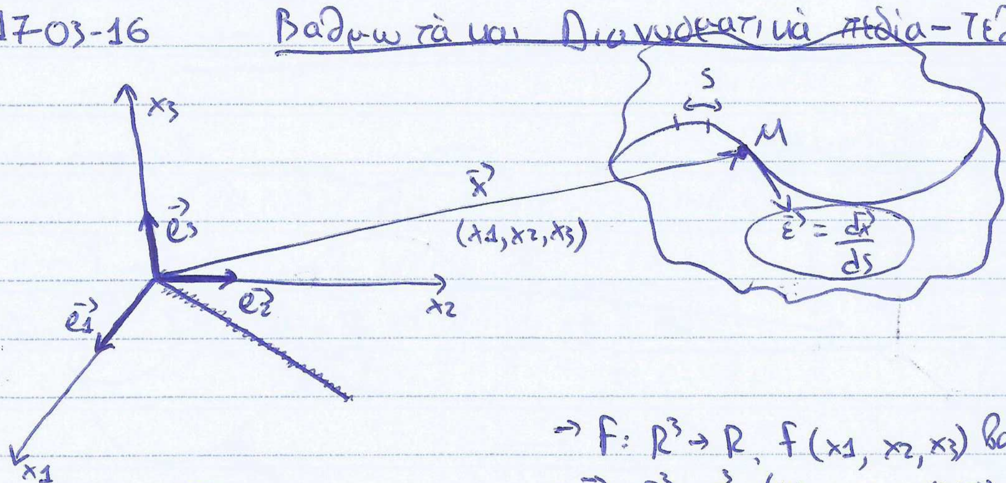
$= \sum_{k=1}^{3} F_k(\vec{x}) \cdot \vec{e_k}$

$\rightarrow \vec{F}: R^3 \rightarrow R^3, \quad F_i: R^3 \rightarrow R < \vec{F}: R^n \rightarrow R^m, \quad F_1: R^m \rightarrow R$

$\rightarrow \vec{F}(x_1, x_m) = \vec{F}(\vec{x})$

$= f_1(\vec{x}), \quad f_m(\vec{x})$

17-03-16 Βαθμωτά και Διανυσματικά πεδία - Τελεστές



$\bullet\ \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{x}}{ds} \Rightarrow$

$\boxed{\vec{\varepsilon} = \sum_k \varepsilon_k \frac{dx_k}{ds}}$

$\boxed{\vec{X} = \sum_{k=1}^{3} x_k \cdot \vec{e_k}}$

$\rightarrow f: R^3 \rightarrow R, \ f(x_1, x_2, x_3)$ βαθμωτό πεδίο

$\rightarrow \vec{a}: R^3 \rightarrow R^3, \ (a_1(\vec{x}), a_2(\vec{x}), a_3(\vec{x}))$ διανυσματικό πεδίο

$\rightarrow a_i\ R^3 \rightarrow R, \ a_i(x_1, x_2, x_3) \ i = 1, 2, 3$

• $f(\vec{x}(t), t)$

• $\vec{F}(\vec{x}(t), t) = [F_1(\vec{x}(t), t), F_2(\vec{x}(t), t), F_3(\vec{x}(t), t)]$

→ Κανόνας αλυσίδας:

$$\frac{df}{dt} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

→ "Ανάλυση" συνάρτησης:

• $f(\vec{x}(s))$

• Παράγωγος:

$$\frac{df}{dt} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\left(\frac{d\vec{x}}{ds}\right) \to \vec{\varepsilon}$$

• Ορίζουμε τον διανυσματικό τελεστή:

$$\to \vec{\nabla} = \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$\to \vec{\nabla} f = \sum_k \vec{e}_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ δράση σε βαθμωτό πεδίο

$= \text{grad } f =$ κλίση (ή βαθμωτό) του f

$\boxed{\frac{df}{ds} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{\varepsilon}}$ είναι η προβολή του grad$f$ (κλίσης της f ή βάθμωσης της f) πάνω στην διεύθυνση της εφαπτομένης στην M, η οποία είναι ίδια για όλες τις καμπύλες με την ίδια εφαπτομένη στην M.

• Κατευθυνόμενη παράγωγος της f: $\frac{\partial f}{\partial s}$ ή $D_{\vec{\varepsilon}} f = \vec{\nabla} \cdot f\vec{\varepsilon} = \text{grad} f$

• $\boxed{\vec{n} \to D_{\vec{n}} f = \vec{\nabla} f \, \vec{n} = \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}}$

• Συμπεράσματα - φυσική σημασία του: $\vec{\nabla} f = \frac{d\vec{x}}{ds} = \sum_k \varepsilon_k \frac{dx_k}{ds}$

$$\vec{\nabla} f(-\vec{n}) = -|\vec{\nabla} f| \leq D_{\vec{\varepsilon}} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{\varepsilon} = |\vec{\nabla} f| \cdot \cos\theta \leq |\vec{\nabla} f| = \vec{\nabla} f \vec{n}$$

1) Η κατευθυνόμενη παράγωγος του f έχει την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της πάνω στην κατεύθυνση της gradf με τιμή $\pm|\vec\nabla f|$ -> μέγιστη αύξηση -> μέγιστη ελάττωση, δηλαδή Το πεδίο μεταβάλλεται κατά τον πιο απότομο τρόπο πάνω στην κατεύθυνση της gradf

2) Το gradf (διανυσματικό πεδίο) είναι κάθετο στην επιφάνεια $\boxed{f(x_1,x_2,x_3)=C}$ ισοσταθμική επιφάνεια.

-> <u>Εφαπτόμενο επίπεδο</u>: Είναι το πεδίο το οποίο αποτελείται από όλα τα εφαπτόμενα μοναδιαία διανύσματα ~~τα περνάνε~~ σε όλες τις καμπύλες της επιφάνειας που διέρχονται από το σημείο Μ.

$$\frac{df}{ds}=0 \Rightarrow \vec\nabla f\,\vec\varepsilon \perp \vec\varepsilon \in \text{εφαπτόμενο επίπεδο} \Rightarrow \boxed{\vec\nabla f \perp f=s}$$

• <u>Ιδιότητες του $\vec\nabla$ (δράση σε βαθμωτό):</u>

-> $f(\vec x), g(\vec x)$ βαθμωτά πεδία $\Rightarrow$ ~~$\vec\nabla(f+g)=\vec\nabla f+\vec\nabla g$~~

- $\vec\nabla(f+g)=\vec\nabla f+\vec\nabla g$
- $\vec\nabla(fg)=f\vec\nabla g+g\vec\nabla f$
- $\vec\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{1}{g}\vec\nabla f-\frac{f}{g^2}\vec\nabla g$

-> <u>Αν $f=f[u(\vec x)]$</u> $\Rightarrow$

- $\vec\nabla f=\sum_k \vec\varepsilon_k \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_k}=\frac{df}{du}\vec\nabla u$

-> <u>Αν $f=f[u_1(\vec x), u_n(\vec x)]$</u> $\Rightarrow$

- $\vec\nabla f=\sum_k^3 \vec\varepsilon_k \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_\lambda}\cdot\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_k}$

$$=\sum_{k=1}^3\sum_{\lambda=1}^n \vec\varepsilon_k \frac{\partial f}{\partial u_\lambda}\cdot\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_k}$$

$$=\sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_\lambda}\sum_k \vec\varepsilon_k \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_k}$$

$$=\sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_\lambda}\vec\nabla u_\lambda$$

• Προβλήματα:

1) Οι επιφάνειες $x_1 x_2 - (x_3)^2 + 15 = 0$, $(x_2)^2 - 3x_1 + 5 = 0$ τέμνονται στην C. Στο σημείο A(3, -2, 3) πάνω στην C, βρείτε i) την γωνία που σχηματίζετε μεταξύ των καθέτων των δύο επιφανειών ii) το εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα της C.

2) Βρείτε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $x_2 x_3 - x_3 x_1 + x_1 x_2 - 1 = 0$ στο σημείο A(1, 2, -1).

18-03-2016 — 1ο Φροντιστήριο — Φροντιστήριο

Άσκηση 1η

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 - x_1 x_2 x_3$, • $D_u f = ;$ (κατευθυνόμενη παράγωγος) στο $A(1,-4,8)$, $\vec{a}$ του A

Λύση

a) • $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{81} = 9$

• $\vec{u} = \frac{1}{9} \cdot \vec{e_1} - \frac{4}{9} \cdot \vec{e_2} + \frac{8}{9} \cdot \vec{e_3}$

β) • $(\nabla f)|_A = (2x_1 x_2 - x_2 x_3)\vec{e_1} + (x_1^2 + 2x_2 x_3 - x_1 x_3)\vec{e_2} + (x_2^2 - x_1 x_2)\vec{e_3} |_A =$

• $D_u f|_A = \nabla f|_A \vec{u} = \ldots = 52$

Άσκηση 2η

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \sin(\pi x_2) + x_3 \tan(\pi x_2)$ • $D_u f = ;$ $A(1,0,-2)$ στη διεύθυνση $\vec{AB}$, με $B(3,-3,4)$

Λύση

a) • $\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$, • $\vec{AB} = (x_{1B} - x_{1A})\vec{e_1} + (x_{2B} - x_{2A})\vec{e_2} + (x_{3B} - x_{3A})\vec{e_3} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_1} + 6\vec{e_3}$

• $\|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$, $\vec{u} = \frac{2}{7}\vec{e_1} - \frac{3}{7}\vec{e_2} + \frac{6}{7}\vec{e_3}$

•

β) • $(\nabla f)|_A = \sin(\pi x_2)|_A \vec{e_1} + \left[\pi x_1 \cos(\pi x_2)|_A + \frac{\pi x_3}{\cos^2(\pi x_2)}\right] \cdot \vec{e_2} + \tan(\pi x_2)|_A \vec{e_3}$

$$= 0 \cdot \vec{e_1} + \pi \vec{e_1} + 0 \vec{e_3}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_A \vec{e_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_A \vec{e_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\Big|_A \vec{e_3} \right)$$

• $D_u f|_A = (\nabla f)|_A \cdot \vec{u} = \dots = \frac{3\pi}{7}$

Άσκηση 3η:

Να βρεθεί το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα επί της επιφάνειας $x_2 x_3 - x_1 x_3 + x_1 x_2 - 1 = 0$ στο σημείο $A = (1, 2, -1)$.

Λύση:

• $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3 - x_1 x_3 = c = 1$ ισοσταθμικό επίπεδο

• $\vec{u} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\Big|_A$, $\nabla f = \underset{(f_{x_1})}{\frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{e_1}} + \underset{(f_{x_2})}{\frac{\partial f}{\partial x_2}\vec{e_2}} + \underset{(f_{x_3})}{\frac{\partial f}{\partial x_3}\vec{e_3}}$

• $\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_A = f_{x_1}|_A = (x_2 - x_3)|_A = 3$

• $\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_A = f_{x_2}|_A = (x_1 + x_3)|_A = 0$

• $\frac{\partial f}{\partial x_3}\Big|_A = f_{x_3}|_A = (x_2 - x_1)|_A = 1$

$\Rightarrow \|\nabla f\|_A = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$\vec{u} = \frac{3\sqrt{10}}{10}\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + \frac{\sqrt{10}}{10}\vec{e_3}$

Άσκηση 4η:

• $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$, $\max[(D_u f)|_A]$, $A(1, -2, -4)$

Λύση

• $(D_u f)_{max} = \|\nabla f\|$

• $(\nabla f)|_A = (f_{x_1} \cdot \vec{e_1} + f_{x_2} \vec{e_2} + f_{x_3} \cdot \vec{e_3})|_A = (2x_1 \vec{e_1} + 4x_2 \vec{e_2} + 4x_3 \cdot \vec{e_3})|_A = 2\vec{e_1} - 8\vec{e_2} - 16\vec{e_3}$

• $\|\nabla f\|_A = \sqrt{2^2 + (-8)^2 + (-16)^2} = 18$

Άσκηση 5η

→ Παράγωγος της $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ στην κατεύθυνση του εφαπτόμενου διαν. της, της έλικας: $\vec{r}(t) = \cos t \cdot \vec{e_1} + \sin t \cdot \vec{e_2} + t\vec{e_3}$, $t = -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$

Λύση

- $\dfrac{df}{dt} = (\nabla f)\Big|_{t=-\frac{\pi}{4}} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt}\Big|_{t=-\frac{\pi}{4}}$

- $$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= -\sin(-\tfrac{\pi}{4})\cdot\vec{e_1} + \cos(-\tfrac{\pi}{4})\cdot\vec{e_2} + 1\cdot\vec{e_3} \\ &= \sin(\tfrac{\pi}{4})\cdot\vec{e_1} + \cos(\tfrac{\pi}{4})\vec{e_2} + 1\cdot\vec{e_3} \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\vec{e_1} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\vec{e_2} + 1\cdot\vec{e_3}\end{aligned}$$

- $(\nabla f)\Big|_{t=-\frac{\pi}{4}} = (2x\cdot\vec{e_1} + 2y\cdot\vec{e_2} + 2z\vec{e_3})\Big|_{t=-\frac{\pi}{4}}$, $\vec{r}(-\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_2} - \tfrac{\pi}{4}\vec{e_3}$

Άσκηση 6η

Έστω η συνάρτηση $T(x,y,z) = 2x^2 - xyz$, που δίνει την μεταβολή της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κελσίου, με $x = 2t^2$, $y = 3t$, $z = -t^2$ (x,y,z: m, t sec)

α) Πόσο απότομα (°C/m) μεταβάλλεται η θερμοκρασία στο σημείο $P(8,6,-4)$

β) Πόσο γρήγορα (°C/s) μεταβάλλεται η θερμοκρασία στο σημείο $P(8,6,-4)$

Λύση

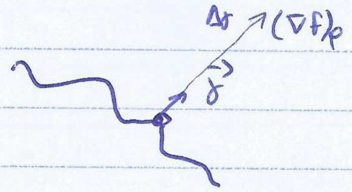
a) t_0: $x_0 = 2t_0^2 = 8$ και $y_0 = 3t_0 = 6$ και $z = -t_0^2 = -4$

$$(\nabla T)\big|_P = \left[(4x - yz)\vec{e_1} - xz\vec{e_2} - xy\vec{e_3}\right]\big|_P = \ldots = 56\vec{e_1} + 32\vec{e_2} - 48\vec{e_3}$$

$$\|\nabla T\|_P = \sqrt{56^2 + 32^2 + (-48)^2} = 80{,}399\ °C/m$$

β) $$\frac{dT}{dt} = (\nabla T)\big|_P \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_P = \left[(4x - yz)\cdot\vec{e_1} - xz\vec{e_2} - xy\vec{e_3}\right]\big|_P \left(4t\cdot\vec{e_1} + 3\vec{e_2} - 2t\vec{e_3}\right)\big|_P = \ldots = 198\ °C/s$$

→ **Πόρισμα:** Εάν έχουμε μια καμπύλη (λεία) $(\gamma) \perp f(x,y,z)=c$ στο σημείο τομής P,
τότε $\frac{d\vec{\gamma}}{dt} = c_1 \nabla f|_P$, $c_1 \neq 0$



Άσκηση 7η:

Να δείξετε ότι η $\vec{r}(t) = \sqrt{t}\cdot\vec{e_1} + \sqrt{t}\cdot\vec{e_2} - \frac{1}{4}(t+3)\cdot\vec{e_3} \perp x^2+y^2-z=3$ για $t=1$

Λύση

- $(\nabla f)|_P = [\, f_x \cdot \vec{e_1} + f_y \cdot \vec{e_2} + f_z \cdot \vec{e_3}]|_P$, $P: \vec{r}(1) = 1\cdot\vec{e_1} + 1\cdot\vec{e_2} - 1\vec{e_3}$
  $(\nabla f)_P = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - 1\vec{e_3}$
  $\nabla f = 2x\vec{e_1} + 2y\vec{e_2} - 1\vec{e_3}$

- $\frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_{t=1} = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\vec{e_1} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\vec{e_2} - \frac{1}{4}\vec{e_3}\right)\Big|_{t=1} = \frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\vec{e_2} - \frac{1}{4}\vec{e_3}$

Αρκεί νδο: $\frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{-\frac{1}{4}}$

Άσκηση 8η:

Η καμπύλη (γ)* εφάπτεται στην $f=c$ στο P τότε $\frac{d\vec{\gamma}}{dt} \perp (\nabla f)|_P$
Να δείξετε ότι η $r(t) = \sqrt{t}\cdot\vec{e_1} + \sqrt{t}\cdot\vec{e_2} + (2t-1)\vec{e_3}$, εφαπτ. της $x^2+y^2-z=1$
για $t=1$

- $(\nabla f)|_{t=1} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\Big|_{t=1} = 0$, πρέπει να το αποδείξουμε.

- $(\nabla f)|_P = (2x\vec{e_1} + 2y\vec{e_2} - 1\vec{e_3})_P = \ldots = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - 1\vec{e_3}$
  $P: \vec{r}(1) = 1\cdot\vec{e_1} + 1\vec{e_2} + 1\vec{e_3}$

- $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\Big|_{t=1} = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\vec{e_1} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\vec{e_2} + 2\vec{e_3}\right)\Big|_{t=1} = \frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$

$\rightarrow (\nabla f)|_{t=1} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)|_{t=1} = 0$

24-3-16 <u>Δράση του ∇ σε διανυσματικό πεδίο</u> - Παράδοση

$\bullet \nabla = \sum_{k=1}^{3} \vec{e_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$

1) $\nabla \cdot \vec{a} = \left(\sum_k \vec{e_k} \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \cdot \vec{a}$

$= \sum_k \vec{e_k} \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_k}$

$= \sum_k \frac{\partial \vec{a} \cdot \vec{e_k}}{\partial x_k}$

$\boxed{\nabla \vec{a} = \sum_k \frac{\partial a_k}{\partial x_k}}$ $\quad (\vec{a} \cdot \vec{e_k} = a_k)$

και

$\boxed{\nabla \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \text{απόκλιση του } \vec{a} = \text{div}\,\vec{a}}$

2) $\nabla \times \vec{a} = \left(\sum_k \vec{e_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \times \vec{a}$

$= \sum_k \vec{e_k} \times \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_k} \Big\} \rightarrow \sum_k \vec{e_k} \times \sum_\lambda \vec{e_\lambda} \cdot \frac{\partial a_\lambda}{\partial x_k}$

$= \sum_k \frac{\partial (\vec{e_k} \times \vec{a})}{\partial x_k}$

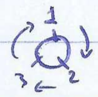
$= \frac{\partial}{\partial x_1}(\vec{e_1} \times \vec{a}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\vec{e_2} \times \vec{a}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\vec{e_3} \times \vec{a})$

$\boxed{\nabla \times \vec{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\vec{e_1} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\vec{e_2} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\vec{e_3}} =$

$\boxed{= \text{στροβιλισμός του } \vec{a} = \text{rot}\,\vec{a}}$

$= \sum_k \sum_\lambda \sum_\mu \varepsilon_{k\lambda\mu} \cdot \vec{e_k} \frac{\partial a_\mu}{\partial x_k}$

$\rightarrow \vec{e_1} \times \vec{a} = (1,0,0) \times (a_1, a_2, a_3)$



$\Rightarrow \vec{e_1} \times (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3})$

$= \boxed{a_2\vec{e_3} - a_3\vec{e_2}}$

$\rightarrow \vec{e_2} \times \vec{a} = (0,1,0) \times (a_1, a_2, a_3)$

$= \vec{e_2} \times (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3})$

$= \boxed{a_3\vec{e_1} - a_1\vec{e_3}}$

$\rightarrow \vec{e_3} \times \vec{a} = \boxed{a_1\vec{e_2} - a_2\vec{e_1}}$

- <u>Κατασκευή τελεστών με χρήση του ∇</u>

1) $\vec{a}\cdot\nabla = (a_1, a_2, a_3)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \boxed{\sum_{k=1}^{3} a_k \frac{\partial}{\partial x_k}}$ βαθμωτός τελεστής

2) $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})f = \sum_k a_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = a_1 \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}} + a_2 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}} + a_3 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_3}} = \vec{a}\cdot\nabla f$

grad της f
(εσωτερικό γινόμενο του a και του grad της f)

3) $(a\cdot\nabla)\vec{b} = \sum_k a_k \frac{\partial \vec{b}}{\partial x_k} = \sum_k \underbrace{a_k} \sum_\lambda \underbrace{\frac{\partial b_\lambda}{\partial x_k}} \cdot \vec{e_\lambda} = \sum_k \sum_\lambda a_k \frac{\partial b_\lambda}{\partial x_k} \cdot \vec{e_\lambda}$

του grad
(εσωτερικό γινόμενο του $\vec{a}$ και του $\vec{b_\lambda}$)

$$= \sum_\lambda \vec{e_\lambda} \cdot \sum_k a_k \cdot \frac{\partial b_\lambda}{\partial x_k} = \sum \vec{e_\lambda}\,(\vec{a}\,\nabla b_\lambda)$$

$$= (\vec{a}\cdot\nabla b_1, \vec{a}\cdot\nabla b_2, \vec{a}\cdot\nabla b_3)$$

<u>Κανόνας της αλυσίδας</u>

$\to f(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t)$

- $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\frac{dx_k}{dt}$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\cdot f \qquad \vec{u} \to \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\boxed{\frac{df}{dt} = (\vec{u}\cdot\nabla)f + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

- $\vec{F}(x(t), t) = (F_1(\vec{x}(t), t), F_2(\vec{x}(t), t), F_3(\vec{x}(t), t)) = \sum_k \vec{e_k} F_k$

- $\frac{dF}{dt} = \sum_k \vec{e_k}\cdot\frac{dF_k}{dt} = \sum_k \cdot\vec{e_k}\,(\vec{u}\cdot\nabla\cdot F_k) + \sum_k \vec{e_k}\,\frac{\partial F_k}{\partial t}$

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = (\vec{a}\cdot\nabla) + \sum_k \vec{e_k}\cdot\frac{\partial F_k}{\partial t}}$$

4) $\nabla\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \nabla\vec{a} + \nabla\vec{b}$, $\nabla\times(\vec{a}+\vec{b}) = \nabla\times\vec{a} + \nabla\times\vec{b}$

αντίστοιχα τα grad από άθροισμα (δράση σε βαθμωτό) (χωρίς τελεία δράση σε διανυσματικό πεδίο)

5) $\nabla(f\vec{a}) = f\cdot\vec{\nabla}\vec{a} + \nabla f\cdot\vec{a}$, $\nabla\times(f\vec{a}) = f(\nabla\times\vec{a}) + \nabla f\times\vec{a}$

(Κ1): grad (εσ. γιν) $= \nabla(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}\vec{\nabla})\vec{a} + \vec{a}\times(\nabla\times b) + \vec{b}\times(\nabla\times\vec{a})$

(Κ2): div (εξ. γιν) $= \nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\nabla\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\nabla\times\vec{b})$

(Κ3): rot (εξ. γιν) $= \nabla\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{b}\,\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\,\nabla)\vec{b} + (\nabla\vec{b})\vec{a} - (\nabla a)\vec{b}$

- rot(grad) $= \nabla\times\nabla f = \vec{0}$
- div(rot) $= \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = 0$

Εφαρμογή

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

- $\nabla x_i = \vec{e}_i$
- $\nabla\vec{x} = 3$
- $\nabla x_i\cdot\vec{x} = \vec{0}$

- div(grad) $= \nabla\cdot\nabla f = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}}_{\text{Λαπλασιανή: τελεστής Laplace}} = \nabla^2\cdot f$ $\xrightarrow[\text{διανύσματος}]{\text{Λαπλασιανή}}$ $\nabla^2\vec{a} = (\nabla^2\vec{a_1}, \nabla^2\vec{a_2}, \nabla^2\vec{a_3})$

- grad(div) $= \sum_k \vec{e_k}\cdot\sum_\lambda \frac{\partial^2 a_\lambda}{\partial x_k\,\partial a_\lambda}$

- rot(rot) $= \nabla\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$

Ασκήσεις:

1) Έχουμε το βαθμωτό πεδίο $f(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3)$ και τα διανυσματικά πεδία $\vec{a} = (x_1, -x_2, 0)$, $\vec{b} = (0, x_1 x_3, -x_1 x_2)$

i) $(\vec{a}\cdot\nabla)f$; ii) $(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}$ iii) $\nabla\cdot\vec{b}$ iv) $\nabla\times\vec{b}$

2) $(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{x} = \vec{a}$, Αν $\vec{a}$ = σταθερό διάνυσμα $\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial x_k}\right)$

i) $\nabla(\vec{a}\cdot\vec{x}) = \vec{a}$ ii) $\nabla\times(\vec{a}\times\vec{x}) = 2\vec{a}$

31-03-2016 2ο Φροντιστήριο - Φροντιστήριο

Άσκηση:

• $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$, $\vec{a} = x_1\cdot\vec{e_1} - x_2\cdot\vec{e_2}$, $\vec{b} = x_3\cdot x_1\vec{e_2} - x_1x_2\vec{e_3}$

▸ i) $(\vec{a}\cdot\nabla)f$, ii) $(\vec{a}\,\nabla)b$, vi) $\nabla\cdot\vec{b}$

Λύση

i) • $\vec{a}\cdot\nabla = (a_1, a_2, a_3)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \Rightarrow$

$\boxed{\vec{a}\cdot\nabla = \sum_k a_k\frac{\partial}{\partial x_k}}$ βαθμωτός τελεστής

$$\begin{aligned}
\bullet\ \vec{a}\cdot\nabla\cdot f &= \sum_k a_k\frac{\partial f}{\partial x_k}\\
&= \vec{a_1}\cdot\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}} + a_2\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}} + a_3\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_3}}\\
&= \vec{a_1}\cdot x_2x_3 + a_2\cdot x_1x_3 + a_3 x_1x_2\\
&= x_1x_2x_3 + (-x_2)x_1x_3 + 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\vec{a}\cdot\nabla f = 0}$

$$\begin{aligned}
ii)\ \bullet(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} &= \sum_k a_k\cdot\frac{\partial b}{\partial x_k} = \sum_k a_k\cdot\sum_\lambda\frac{\partial b_\lambda}{\partial x_k}\cdot\vec{e_\lambda}\\
&= \sum_k\sum_\lambda a_k\frac{\partial b_\lambda}{\partial x_k}\cdot\vec{e_\lambda} = \sum_\lambda\vec{e_\lambda}\cdot\sum_k a_k\frac{\partial b_\lambda}{\partial x_k}\\
&= \sum_\lambda\vec{e_\lambda}(\vec{a}\cdot\nabla b_\lambda)\\
&= (\vec{a}\cdot\nabla b_1, \vec{a}\cdot\nabla b_2, \vec{a}\nabla b_3)
\end{aligned}$$

➔ $\nabla b_1 = \vec{0}$, $\nabla b_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_3x_1)\vec{e_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1x_3)e_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1x_3)\vec{e_3} = x_3\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + x_1\cdot\vec{e_3}$

➔ $\nabla b_3 = \frac{\partial}{\partial x_1}(-x_3x_2)\vec{e_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}(-x_1x_2)\vec{e_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}(-x_1x_2)\vec{e_3} = -x_2\vec{e_1} - x_1\vec{e_2} + 0\vec{e_3}$

➔ $\vec{a}\cdot\nabla b_1 = 0$, $\vec{a}\cdot\nabla b_2 = (x_1\vec{e_1} - x_2\vec{e_2})(x_3\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + x_1\vec{e_3}) = x_1x_3 - \overset{0}{\cancel{0x_1}} + \overset{0}{\cancel{0x_1}} = x_1x_3$

➔ $(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} = (0, x_1x_3, \ldots)$

➡ $\vec{a}\cdot\nabla b_3 = (x_1\vec{e}_1 - x_2\vec{e}_2)(-x_2\vec{e}_1 - x_1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3) = -x_1x_2 + x_1x_2 + 0 = 0$

$\cancel{\vec{a}}$

vi) $\cdot\nabla\vec{b} = \left(\sum_k \vec{e}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)(x_3x_1\vec{e}_2 - x_1x_2\vec{e}_3) = \left(\vec{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + e_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)(\quad) = 0+0+0 = 0$

Άσκηση:

• Αν $\vec{x}$ το διάνυσμα θέσης, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = \sum_k x_k\cdot\vec{e}_k$

▸ i) $(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{x} = \vec{a}$

Λύση:

i) $(\vec{a}\nabla)\vec{x} = \cancel{a}\sum_k \vec{e}_k(\vec{a}\,\nabla x_k) = \sum_k \vec{e}_k(\vec{a}\cdot\vec{e}_k) = \sum_k a_k e_k = \vec{a}$

• Αν $\vec{a}$ σταθερό διάνυσμα:

▸ ii) $\nabla(\vec{a}\cdot\vec{x}) = \vec{a}$

Λύση:

ii) $\nabla(\vec{a}\cdot\vec{x}) = \vec{a} = \sum_k \cdot\vec{e}_k\cdot\frac{\partial\,\vec{a}\cdot\vec{x}}{\partial x_k} = \sum_k \vec{e}_k\vec{a}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial x_k}$, $\frac{\partial\vec{x}}{\partial x_k} = \sum_\lambda \vec{e}_\lambda\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_k} = \sum_\lambda \vec{e}_\lambda\cdot\delta_{k\lambda} = \vec{e}_k$

$\nabla(\vec{a}\vec{x}) = \sum_k \vec{e}_k\,\vec{a}\,\vec{e}_k = \sum \vec{e}_k a_k = \vec{a}$

Άσκηση:

• A1: $x_1x_2 - x_3^2 + 15 = 0$, B1: $x_2^2 - 3x_3 + 5 = 0$, Σημείο τομής $A(3,-2,3)$

▸ i) Γωνία $\theta =$; μεταξύ των καθέτων των δύο επιφανειών

ii) Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της C (η επιφάνεια τομής των δύο)

Λύση:

i) Το grad είναι κάθετο στην ισοσταθμική επιφάνεια στο σημείο επαφής, άρα:

A1: $f = x_1x_2 - x_3^2 = -15 = C_1$, B1: $g = x_2^2 - 3x_3 = -5 = C_2$

• $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \Rightarrow$

$\cos\varphi = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$\boxed{\cos\varphi = \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2}$

• $(\nabla f)|_A = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_A\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_A\vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\Big|_A\vec{e}_3$

$= x_2|_A\vec{e}_1 + x_1|_A\vec{e}_2 + (-2x_3)|_A\vec{e}_3$

$= -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3$

2) $(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{x} = \vec{a}$, Αν $\vec{a}$ = σταθερό διάνυσμα $\left(\frac{\partial x}{\partial x_k}\right)$

i) $\nabla(\vec{a}\cdot\vec{x}) = \vec{a}$ ii) $\nabla\times(\vec{a}\times\vec{x}) = 2\vec{a}$

31-03-2016 2ο Φροντιστήριο -Φροντιστήριο

Άσκηση:

• $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$, $\vec{a} = x_1\cdot\vec{e_1} - x_2\cdot\vec{e_2}$, $\vec{b} = x_3\cdot x_1\vec{e_2} - x_1x_2\vec{e_3}$

▸ i) $(\vec{a}\cdot\nabla)f$, ii) $(\vec{a}\nabla)b$, vi) $\nabla\cdot\vec{b}$

Λύση

i) • $\vec{a}\cdot\nabla = (a_1,a_2,a_3)\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \Rightarrow$

$\boxed{\vec{a}\cdot\nabla = \sum_k a_k\frac{\partial}{\partial x_k}}$ βαθμωτός τελεστής

• $\vec{a}\cdot\nabla\cdot f = \sum_k a_k\frac{\partial f}{\partial x_k}$

$= a_1\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial f}{\partial x_3}$

$= a_1\cdot x_2x_3 + a_2\cdot x_1x_3 + a_3x_1x_2$

$= x_1x_2x_3 + (-x_2)x_1x_3 + 0$

$\boxed{\vec{a}\cdot\nabla f = 0}$

ii) • $(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} = \sum_k a_k\cdot\frac{\partial b}{\partial x_k} = \sum_k a_k\cdot\sum_\lambda\frac{\partial b_\lambda}{\partial x_k}\cdot\vec{e_\lambda}$

$= \sum_k\sum_\lambda a_k\frac{\partial b_\lambda}{\partial x_k}\cdot\vec{e_\lambda} = \sum_\lambda\vec{e_\lambda}\cdot\sum_k a_k\frac{\partial b_\lambda}{\partial x_k}$

$= \sum_\lambda\vec{e_\lambda}(\vec{a}\cdot\nabla b_\lambda)$

$= (\vec{a}\cdot\nabla b_1, \vec{a}\cdot\nabla b_2, \vec{a}\nabla b_3)$

→ $\nabla b_1 = \vec{0}$, $\nabla b_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_3x_1)\vec{e_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1x_3)e_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1x_3)\vec{e_3} = x_3\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + x_1\cdot\vec{e_3}$

→ $\nabla b_3 = \frac{\partial}{\partial x_1}(-x_3x_2)\vec{e_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}(-x_1x_2)\vec{e_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}(-x_1x_2)\vec{e_3} = -x_2\vec{e_1} - x_1\vec{e_2} + 0\vec{e_3}$

→ $\vec{a}\cdot\nabla b_1 = 0$, $\vec{a}\cdot\nabla b_2 = (x_1\vec{e_1} - x_2\vec{e_2})(x_3\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + x_1\vec{e_3}) = x_1x_3 - \cancel{0x_1} + \cancel{0x_1} = x_1x_3$

→ $(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} = (0, x_1x_3, \dots)$

➡ $\vec{a}\cdot\nabla b_3 = (x_1\vec{e_1} - x_2\vec{e_2})(-x_2\vec{e_1} - x_1\vec{e_2} + 0\vec{e_3}) = -x_1x_2 + x_1x_2 + 0 = 0$

vi) $\nabla\vec{b} = \left(\sum_k e_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)(x_3x_1\vec{e_2} - x_1x_2\vec{e_3}) = \left(\vec{e_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + e_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)(\quad) = 0+0+0=0$

__Άσκηση:__

• Αν $\vec{x}$ το διάνυσμα θέσης, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)=\sum_k x_k\cdot\vec{e_k}$

▸ i) $(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{x}=\vec{a}$

__Λύση:__

i) $(\vec{a}\nabla)\vec{x} = \sum_k \vec{e_k}(\vec{a}\nabla_k) = \sum_k \vec{e_k}(\vec{a}\cdot\vec{e_k}) = \sum_k a_k e_k = \vec{a}$

• Αν $\vec{a}$ σταθερό διάνυσμα:

▸ ii) $\nabla(\vec{a}\cdot\vec{x})=\vec{a}$

__Λύση:__

ii) $\nabla(\vec{a}\cdot\vec{x})=\vec{a} = \sum_k \cdot\vec{e_k}\cdot\frac{\partial \vec{a}\cdot\vec{x}}{\partial x_k} = \sum_k \vec{e_k}\,\vec{a}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial x_k}$, $\frac{\partial\vec{x}}{\partial x_k} = \sum_\lambda \vec{e_\lambda}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_k} = \sum_\lambda \vec{e_\lambda}\,\delta_{k\lambda} = \vec{e_k}$

$\nabla(\vec{a}\vec{x}) = \sum_k \vec{e_k}\,\vec{a}\,\vec{e_k} = \sum \vec{e_k}a_k = \vec{a}$

__Άσκηση:__

• A1: $x_1x_2 - x_3^2 + 15 = 0$, B1: $x_2^2 - 3x_3 + 5 = 0$, Σημείο τομής $A(3,-2,3)$

▸ i) Γωνία $\theta=;$ μεταξύ των καθέτων των δύο επιφανειών

ii) Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της C (η επιφάνεια τομής των δύο)

__Λύση:__

i) Το grad είναι κάθετο στην ισοσταθμική επιφάνεια στο σημείο επαφής, άρα:

A1: $f = x_1x_2 - x_3^2 = -15 = C_1$, B1: $g = x_2^2 - 3x_3 = -5 = C_2$

• $\vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||\cdot||\vec{b}||\cdot\cos\varphi$

$\cos\varphi = \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||}\cdot\frac{\vec{b}}{||\vec{b}||}$

$\boxed{\cos\varphi = \vec{u_1}\cdot\vec{u_2}}$

• $(\nabla f)|_A = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_A\cdot\vec{e_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_A\vec{e_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\Big|_A\vec{e_3}$

$= x_2|_A\cdot\vec{e_1} + x_1|_A\vec{e_2} + (-2x_3)|_A\vec{e_3}$

$= -2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} - 6\vec{e_3}$

• $\|\nabla f\|\big|_A = \sqrt{(-2)^2+3^2+(-6)^2} = \sqrt{4+9+36} = 7$

↳ <u>Ομοίως για την B_1:</u>

• $(\nabla g)\big|_A = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)\Big|_A \cdot \vec{e_1} + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)\Big|_A \cdot \vec{e_2} + \left(\frac{\partial g}{\partial x_3}\right)\Big|_A \cdot \vec{e_3}$

$= 0\cdot\vec{e_1} + (2x_1)\big|_A \cdot \vec{e_2} + (-3)\vec{e_3}$

$= 0\cdot\vec{e_1} - 4\vec{e_2} - 3\vec{e_3}$

• $\|\nabla g\|\big|_A = \sqrt{0^2+(-4)^2+(-3)^2} = 5$, $\cos\theta = \dfrac{(\nabla f)\big|_A \cdot (\nabla g)\big|_A}{\|\nabla f\|\big|_A \cdot \|\nabla g\|\big|_A}$

$= \ldots = \dfrac{-2\cdot 0 + 3(-4) + (-6)(-3)}{7\cdot 5}$

$= \dfrac{6}{35} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{6}{35}\right) \simeq 80{,}195°$ ή $1{,}3985$ rad

ii) $\vec{w}\,(\alpha, \beta, \gamma)$

1) $(\nabla f)\big|_A \cdot \vec{w} = 0 \overset{\text{άρα}}{\Longrightarrow} (-2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} - 6\vec{e_3})(\alpha\cdot\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\cdot\vec{e_3}) = 0$

$\xrightarrow{\text{άρα}} \boxed{-2\alpha + 3\beta - 6\gamma = 0}$ (1α)

2) $(\nabla g)\big|_A \cdot \vec{w} = 0$ άρα $(0\vec{e_1} - 4\vec{e_2} - 3\vec{e_3})(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3}) = 0$

$\xrightarrow{\text{άρα}} \boxed{-4\beta + 3\gamma = 0}$ (2α) $\Rightarrow \boxed{\gamma = -\frac{4}{3}\beta}$ (2β)

3) $\boxed{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1}$ (3α)

↳ μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα

• Από (1α) $\xrightarrow{(2\beta)} \boxed{\alpha = \frac{11}{2}\beta}$ (1β)

• Από (3α) $\xrightarrow{(1\beta)(2\beta)} \ldots \longrightarrow \boxed{\beta = \pm\dfrac{6\sqrt{1189}}{1189}}$

7-4-16 3ο Φροντιστήριο: Διανύσματα Ιδιοτιμών Φροντιστήριο

Παράδειγμα

- $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $A\vec{\delta} = \lambda\vec{\delta}$

  $\hookrightarrow (A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

Λύση

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow (A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow |A-\lambda I| = \vec{0}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (1-\lambda)^2 - 2^2 = 0$

$\Rightarrow (-1-\lambda)(3-\lambda) = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_1 = -1}$

$\hookrightarrow \boxed{\lambda_2 = 3}$

α) Για $\lambda_1 = -1$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$(A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \boxed{x_1 = -x_2}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= x_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$

β) Για $\lambda_2 = 3$

$(A - \lambda_2 I)\vec{\delta_2} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\vec{u_1} = (-1,1)^T$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -2x_1^* + 2x_2^* = 0 \\ 2x_1^* - 2x_2^* = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{x_1^* = x_2^*}$, $\vec{\delta_2} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = x_2^*\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{x_2^* = 1}$

$\vec{u_2} = (1,1)^T$

ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow |A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \cancel{(-1)^{1+1}\cdot(2-\lambda)^{3-\lambda}(2-\lambda)}$

$\Rightarrow (-1)^{1+1}(2-\lambda)^{3-\lambda}(2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \ldots$

$\ldots + (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \Rightarrow -(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+5) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1$ (διπλή)

$\lambda_2 = 5$ (απλή)

α) Για $\lambda_1 = 1$: $m_a = 2$, $m_g = n - \text{rank}(A-\lambda I) = 3-1 = 2$ Γενικά ($m_a \geq m_g$)

• $(A-\lambda_1 I)\vec{x_a} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x_a} = \vec{0} \Rightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 - x_3$

$\vec{x_a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

↳ Άρα ο ιδιοχώρος είναι $(x_1, x_2, x_3)^T =$

$\to (-2x_2 - x_3, x_2, x_3)^T =$

$x_2(-2,1,0)^T + x_3(-1,0,1)^T$

• $(-2x_2 - x_3, x_2, x_3)^T = (-2x_2, x_2, 0)^T + (-x_3, 0, x_3)^T$

$= x_2(-2,1,0)^T + x_3(-1,0,1)^T$

$\Rightarrow \vec{x_{a_1}} = (-2,1,0)^T$, $\vec{x_{a_2}} = (-1,0,1)^T$

β) Για $\lambda_2 = 5$.

• $(A-\lambda_2 I)\vec{x_\beta} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \vec{x_\beta} = \vec{0}$

↳ • $(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, x_{\beta_3})^T = x_\beta(1,1,1)^T \xrightarrow{x_\beta = 1} \vec{x_\beta} = (1,1,1)^T$

- <u>Διαφορικές Εξισώσεις:</u>

$$y' = f(x)\cdot y + g(x) \quad \boxed{L.ODE1}, \quad y = y(x)$$

1) $\dfrac{dy}{dx} = y' = f(x)\cdot y \Rightarrow y_0 = c\cdot e^{\int f(x)dx}$

[redacted]

2) <u>Αναζητώ $y_p = \vec{c}(x)\cdot e^{\int f(x)dx}$</u> $\xrightarrow{(A)} \vec{c}' e^{\int f(x)dx} + \bar{c}\cancel{f(x)}\cdot e^{\int f(x)dx} =$

$f\bar{c}\, e^{\int f(x)dx} + g(x) \Rightarrow$

$\bar{G}(x) = \int g(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}dx \Rightarrow$

$$\boxed{y_p = e^{\int f(x)dx}\int g(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}dx}$$

$\rightarrow$ <u>Γενική λύση</u>: $y = y_0 + y_p = e^{\int f(x)dx}\left(c + \int e^{-\int f(x)dx}\cdot g(x)dx\right)$

<u>Εφαρμογή</u>:

a) $y' = \dfrac{y}{x-1} + x^2 - 1$, ισχύει, i) $e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{dx}{x-1}} = x-1$ (1)

ii) $\int e^{-\int f(x)dx}\cdot g(x)\,dx \longrightarrow \int \dfrac{x^2-1}{x-1}dx = \int (x+1)dx = \dfrac{x^2}{2} + x$ (2)

$(1),(2) \Rightarrow y = y_0 + y_p = (x-1)\left[c + \dfrac{x^2}{2} + x\right]$

β) $y' = 2xy + 1$ ισχύει, i) $e^{\int f(x)dx} = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$

ii) $\int g e^{-\int f(x)dx}dx = \int 1\cdot e^{-x^3}dx$

$\left(= \int_0^x e^{-t^2}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!}\right.$

$\left.= e^{-x^2}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!!}\right) \rightarrow$ Βιβλίο GR τύπος 3.3.2.11

- $erf(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{t^2}dt$, $\quad y = e^{x^3}\left[c + \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} erf(x)\right]$

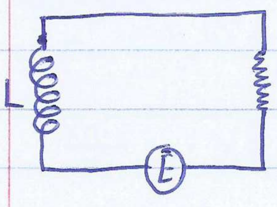
γ) $y' = \frac{y}{x} + x\cdot\cos x$ ισχύει, i) $e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = x$

ii) $\int g\, e^{-\int f dx} dx = \int x\cos x \frac{1}{x} dx = \sin x$

$\to \int \frac{\cos x}{x}dx = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt$

$\to \int \frac{\sin x}{x}dx = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}dt$

Άσκηση:



1) $i(t) = ;$

2) Αν $E = E_0 \sin(\omega t)$, $i(0)=0$

$\boxed{y' = f(x)\cdot y + g(x)}$

Ελατήριο με τριβές: $m x'' = -kx - c(x')^2$, $x = x(t)$

• $x' = \frac{dx}{dt} = p(x)$

• $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = p'_x \cdot x'_t = p p'_x \to \frac{dp}{dx} = \boxed{p'_x = -\frac{c}{m}p - \frac{kx}{m}p^{-1}}$

$\boxed{y' = f(x)y + g(x)y^a, \quad a \neq 0,1 \quad \text{Bernoulli (1695)}}$

Θέτω: $y(x) = z^\beta(x)$, $\beta = \frac{1}{1-a}$

$y'(x) = \beta z^{\beta-1}\cdot z'$

$z' = \frac{f(x)}{\beta}z + \frac{g(x)}{\beta}z^{\beta(a-1)+1}$ ⇒⇒ $\boxed{z' = (1-a)f(x) + (1-a)g(x)}$

Παράδειγμα

$y' = -xy + xy^2$ (B)

$y(x) = z^\beta(x) = z^{-1}(x) \xrightarrow{B} \boxed{z' = xz - x} \Rightarrow$ ~~$e^{\int f(x)dx} = e^{\int x dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$~~

~~$\int g e$~~

8-1-16 Διαφορικές Εξισώσεις

- $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow y = cx - \frac{1}{2x}$, $x=0$ $\nexists$ λύση

- $y' = -\frac{y}{x} + 4x^2 \rightarrow y = \frac{c}{x} + x^3$, $x=0, c=0$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ $y=x^3$

- $y' = -\frac{y}{x} + \frac{\sin x}{x} \rightarrow y = \frac{c - \cos x}{x}$, $x=0$, $c=1$ $\left(\frac{0}{0}\right)$, $y = \frac{1-\cos x}{x}$ ... $\lim_{x \to 0} = 0$

- $y' = -\frac{y}{x} + \frac{\cos x}{x} \rightarrow y = \frac{c + \sin x}{x}$, $x=0$, $c=0$ $\left(\frac{0}{0}\right)$, $y = \frac{\sin x}{x}$, ... $\lim_{x \to 0} 1$

- Εξίσωση Riccati: $y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)$, $f_0 f_2 \neq 0$

① $f_2 = a_2 f(x)$, $f_1 = a_1 f(x)$, $f_0 = a_0 f(x)$*

- $\frac{dy}{dx} = f(x)\left(a_2 y^2 + a_1 y^1 + a_0 (y^0)\right) \rightarrow$

- $\int \frac{dy}{a_2 y^2 + a_1 y_1 + a_0} = \int f(x)\, dy + c$

$\not* \Rightarrow$ ② $y_1(x)$ λύση: $y = y_0 + \frac{1}{z(x)}$

$\rightarrow z' = -(2f_2 y_0 + f_1)z - f_2$ (l.ODE1)

$\rightarrow y' = y^2 + ax^n y + ax^{n-1}$ $\xrightarrow{a=1, n=1}$ $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x(c - \ln|x|)}$

$\xrightarrow{a=2, n=0}$ $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{cx^2 \cdot e^{-2x} + 1 - 2x^2 \cdot e^{-2x} \cdot E_1(2x)}$

- $\forall x \neq a$

$c=$ πόλοι , $x_0 = \pm e^c$

- $Ei = \int \frac{e^x}{x}\, dx = \cancel{\infty} + \ln|x| + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^5}{n \cdot \mu!} = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n \right]$

- $Ci = \int \frac{\cos x}{x}\, dx$

- $Si = \int \frac{\sin x}{x}\, dx$

→ <u>Ρητή παράσταση ομογενών συναρτήσεων 1ου βαθμού:</u>

- Διπλό κύκλωμα $R_1 R_2 L C$

$$\left.\begin{aligned} V' &= -\frac{1}{R_2 C} V + \frac{1}{C} i \\ i' &= -\frac{1}{L} V - \frac{R_1}{L} i \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} R_1 = R_2 &= 4 \text{ Ohm} \\ C &= \frac{1}{2} \text{ Farad} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} V' &= -\frac{1}{2} V + 2i \\ i' &= -\frac{1}{8} V - \frac{1}{2} i \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} V &= V(t) \\ i &= i(t) \end{aligned}\right\} \overset{*}{\Rightarrow}$$

* $\xrightarrow[t]{\text{Απόδειξη}} V = V(i)$

$$\left.\frac{dV}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{di}{dt}} = \frac{\alpha V + \beta i}{\gamma V + \delta i}\right\} \quad \begin{aligned} &L = \text{general} \\ &y = y(x) \end{aligned} \Rightarrow \quad y' = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}, \; \begin{aligned} x &\to \lambda x \\ y &\to \lambda x \end{aligned}, \; \frac{\lambda(\alpha x + \beta y)}{\lambda(\gamma x + \delta y)}$$

~~$f(x,y), f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y)$~~

- $f(x,y)$, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y)$ <u>f ομογενής βαθμού k</u>

<u>π.χ.</u>: $f(x,y) = x y \xrightarrow[x = \lambda y]{x = \lambda x} \lambda^2 x y$

$f(x,y) = x^2 + y^2 \xrightarrow[y = \lambda y]{x = \lambda x} \lambda^2 (x^2 + y^2)$

$f(x,y) = x^2 + xy \longrightarrow \lambda^2 (x^2 + xy$

$f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 y + 2xy^2$

- f, g ομογενείς ίδιου βαθμού k

- $\frac{y}{x} = w(x) \Rightarrow \boxed{y = xw(x)}$

- $y' = xw' + w$

$$\left. \begin{aligned} & y' = xw'+w \\ & y' = \frac{f(x, xw)}{g(x, xw)} = \frac{f(x\cdot 1, xw)}{g(x \cdot 1, xw)} = \frac{x^k f(1,w)}{x^k g(1,w)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{xw' + w = \underbrace{\frac{f(1,w)}{g(1,w)} - w}_{\varphi(w)}}$$

$$y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \xrightarrow{XM} \frac{dw}{\varphi(w)} = \frac{dx}{x} \to \boxed{\int \frac{dw}{\varphi(w)} = \ln|x| + c}$$

XM → χωριζομένων μεταβλητών

Παράδειγμα 1ο

- $y' = \frac{mx + y}{x - my} \xrightarrow{y = xw} xw + w = \frac{m+w}{1-mw} - w =$

- $xw' = m\frac{1+w^2}{1-mw} \xrightarrow{XM} \frac{1}{m}\int \frac{1-mw}{1+w^2}dw = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

- $\frac{1}{m}\arctan\frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2+y^2} + \cancel{\ln|x|} = \cancel{\ln|x|} + c$

Πολικές: $\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \frac{\theta}{m} - \ln r = c \Rightarrow r = k e^{\theta/m}$ σπείρα

Παράδειγμα 2ο

1ου βαθμού: $y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \to \dots \quad xw' = \frac{1}{w} \to \dots\ y = \pm x\sqrt{\ln x^2 + c}$ → $|x| \geq e^{-c/2}$

» » : $y' = \frac{x^2+y^2}{2xy} \to \dots \quad xw' = \frac{1-w^2}{2w} \to \dots\ y = \pm\sqrt{x^2 - cx},\ c > 0$

$\forall c > 0$

$x > 0,\ x \geq c$

>> >> : $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right) \xrightarrow{y = xw}$ $\quad x, y > 0$

$$xw' = w(\ln w + \cancel{1}) - w = w\ln w \xrightarrow{x\mu}$$

$$\frac{dw}{w\ln w} = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\int} \int \frac{dw}{w\ln w} = \ln x + c$$

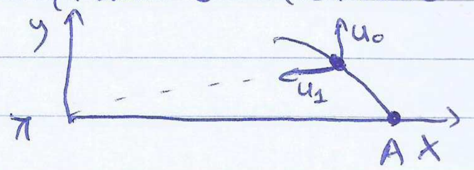
$$\underline{\ln|\ln w|} = \ln x + \bar{c}$$

$$\ln w = cx \rightarrow w = e^{cx}$$

$$\boxed{y = xe^{cx}}$$

-Ασκήσεις για το σπίτι:

Άσκηση: Ένα αεροπλάνο ξεκινάει από το μέρος A με προορισμό την πόλη Π. Κατά την διάρκεια της πτήσης φυσάει ένας αέρας σταθερής ταχύτητας u_0 (κάθετης διεύθυνσης στον αναχώρηση-προορισμό), το αεροπλάνο κινείται με σταθερή ταχύτητα u_1. Διερευνήστε αν θα φτάσει το αεροπλάνο στον προορισμό. Η απόσταση AΠ είναι a.



• Πλήρεις (τέλειες) εξισώσεις:

$$y' = \frac{x^2+y}{xy+y^3}, \quad dy = y'dx = \frac{x^2+y}{xy+y^2}dx$$

$$= (x^2+y)dx - (xy+y^2)dy = 0$$

• $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, P, Q συνεχής $T \subseteq \mathbb{R}^2$

− Αν $\exists$ $f(x,y)$ συνεχής μερικές παράγωγος: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ στην T

$: f_x = P, \ f_y = Q$

$\rightarrow df = f_x dx + f_y dy = 0$

$\rightarrow f = 0 \rightarrow f(x,y) = c$

(1) τέλεια ή πλήρης

• Αν (1) τέλεια, $\exists\, f(x,y)$ $f_x = P$, $f_y = Q$, ~~…~~ $f_y = Q$

→ $P_y = F_{\cancel{xy}} = f_{yx} = Q_x$, αναγκαία.

→ $P_y = Q_x$ <u>αναγκαία</u> κ αποδεικνύεται ότι είναι και <u>ικανή</u> για την τελειότητα της (1)

→ <u>Πως βρίσκουμε τότε την $f(x,y)$?</u>

• $f_x = P \xrightarrow{\int dx} F = \int P(x,y)\,dx + c(y) \xrightarrow{\partial/\partial y}$

$f_y = Q = \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx + c'(y) \to$

$\Rightarrow c'(y) = \underbrace{Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx}_{\text{συνάρτηση μόνο του } y} \to c(y)$

• $f_y = Q \xrightarrow{\int dy} F = \int Q\,dy + c(x) \xrightarrow{\partial/\partial x}$

$f_x = P = \frac{\partial}{\partial x}\int Q\,dx + c(x) \to$

$c'(x) = \underbrace{P - \frac{\partial}{\partial x}\int Q\,dx}_{\text{συνάρτηση μόνο του } x.} \to c(x)$

• Λύση της F (τέλεια συνάρτηση $= c$) $\boxed{F(x,y) = c}$.

<u>Παράδειγμα 10</u>

• $\underbrace{\left(1 + x - \frac{2}{y}\right)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{\left(1 + \frac{2y}{y^2}\right)}_{Q(x,y)}dy = 0$

<u>Λύση</u>

. <u>—Εξέταση της συνθήκης $P_y = Q_x$</u>

• $P_y = \frac{2}{y^2}$

• $Q_x = \frac{2}{y^2}$

$\Rightarrow \boxed{P_y = Q_x} \Leftrightarrow$ τέλεια

• $f_x = P = 1 + x - \frac{2}{y} \xrightarrow{\int dx} F = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x}{y} + c(y) \xrightarrow{\frac{d}{dy}}$

• $f_y = 1 + \frac{2x}{y^2} = \frac{2x}{y^2} + c'(y) \to \boxed{c(y) = y}$

↳ <u>Άρα</u> $F = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x}{y} + y \Rightarrow$ Η λύση της (1) είναι:

$f = c: \ x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x}{y} + y = c$

<u>Παράδειγμα 2ο</u>

$\underbrace{(4x^3y^3 + 3x^2)}_{P}dx + \underbrace{(3x^3y^2 + 6y^2)}_{Q}dy = 0$

$P_y = 12x^3y^2 = Q_x \to$ τέλεια $\to f(x,y) \to y = \left(\frac{c - x^3}{2 + x^4}\right)^{1/3}$

14-4-16 <u>Διαφορικές Εξισώσεις</u>

<u>Ricatti:</u> $y' = f_2(x)y^3 + f_1 xy + f_0(x)$

① $y' = y^2 + 2y + \frac{2}{x}$, $y_A = -\frac{1}{x}$, θέτω $\boxed{\begin{array}{c} y = y_A + \frac{1}{z(x)} \\ y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z(x)} \end{array}}$ (i)

(i) $\Rightarrow y' = \frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$, άρα: $\xrightarrow{①} \frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x} \Rightarrow$

$\cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{z'}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{2}{xz} + \frac{2}{z} - \cancel{\frac{2}{x}} + \cancel{\frac{2}{x}} \Rightarrow \frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{z^2} + \frac{2}{xz} - \frac{2}{z} \Rightarrow z = -1 + \frac{2}{x}z - 2z$

$\Rightarrow \boxed{z' = \left(\frac{2}{x} - 2\right)z - 1}$ (I)

$(z' = f(x)z + g(x))$

(I) α) <u>Ομογενής:</u> $z' = \left(\frac{2}{x} - 2\right)z \Rightarrow z_0(x) = ce^{\int f(x)dx}$

$z_0(x) = ce^{\int\left(\frac{2}{x} - 2\right)dx}$

$z_0(x) = ce^{2\ln|x| - 2x}$

$\boxed{z_0(x) = cx^2 \cdot e^{-2x}}$

β) <u>Μη ομογενής:</u> $z_{\mu}(x) = e^{\int f dx} \cdot \int g e^{-\int f dx} dx$

$= x^2 \cdot e^{-2x} \int (-1) \cdot e^{2x - 2\ln x}$

$= -x^2 e^{-2x} \int \frac{e^{2x}}{x^2} dx$ *

* <u>Όμως:</u> $\int \frac{e^{2x}}{x^2}dx = -\frac{e^{2x}}{x} + 2\int \frac{e^{2x}}{2x}dx = -\frac{e^{2x}}{x} + 2Ei(2x)$

↳ Οπότε: $z = z_0 + z_1 = cx^2 \cdot e^{-2x} - x^2 \cdot e^{-2x}\left[-\frac{e^{2x}}{x} + 2Ei(2x)\right] = \dots$

$$(i) \Rightarrow y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{cx^2 \cdot e^{-2x} + x - 2x^2 \cdot e^{-2x} \cdot Ei(2x)}$$

• Ομογενής: $y' = -\frac{2x^2+y^2}{xy}$ (2) $\xrightarrow{\text{Θέτω } y = x w(x)}$ $w + xw' = -\frac{2x^2 + x^2w^2}{x^2 w} \Rightarrow$

$$xw' = -\frac{2+w^2}{w} - w = -\frac{2}{w} - 2w \Rightarrow$$

$$xw' = -2\frac{1+w^2}{w} \Rightarrow x\frac{dw}{dx} = -2\frac{1+w^2}{w} \Rightarrow \frac{w}{1+w^2}dw = -\frac{2}{x}dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2w}{1+w^2} = -\frac{2}{x}dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+w^2) = -2\ln|x| + c \Rightarrow$$

$$\ln(1+w^2) = -4\ln|x| + 2c \xrightarrow{c_1 = 2c} 1 + w^2 = e^{\ln|x|^{-4}} \cdot e^{c_1} \Rightarrow$$

$\xrightarrow{c = e^{c_1} > 0}$ $1 + w^2 = \frac{c}{x^4} \Rightarrow w^2 = \frac{c - x^4}{x^4} \rightarrow w = \pm\frac{\sqrt{c-x^4}}{x^2}$

$\xrightarrow{w = \frac{y}{x}}$ $\frac{y}{x} = \pm\frac{\sqrt{c-x^4}}{x^2} \Rightarrow \boxed{y = \pm\frac{\sqrt{c-x^4}}{x}}$, $c > 0$, με $c - x^4 \geq 0 \Rightarrow$

$|x| \leq c^{1/4}$, $x_0 = 0$ πόλος, $\forall c > 0$

→ $f(x, y, y', y'') = 0$, ομογενής ως προς y, y', y'' βαθμού k

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^k F(x, y, y', y'')$$

→ Μεθοδολογία επίλυσης:

Θέτω: $y = e^{\int z(x)dx}$ (A) $\longrightarrow y' = z \cdot e^{\int z dx}$, $y'' = (z' + z^2)\cdot e^{\int z dx}$ → υποβιβασμός τάξης σε ODE 1

π.χ: $x^2 y y'' = (y - xy')^2 \xrightarrow{(A)} x^2 \cdot e^{\int z dx}(z' + z^2)e^{\int z dx} = (e^{\int z dx} - xze^{\int z dx})^2 \Rightarrow$

$$x^2 e^{2\int z dx}(z' + z^2) = e^{2\int z dx}(1 - xz)^2 \Rightarrow x^2 z' + \cancel{x^2 z^2} = 1 + \cancel{x^2 z^2} - 2xz \Rightarrow$$

$\boxed{z' = -\frac{2}{x}z + \frac{1}{x^2}} \longrightarrow$ α) Ομογενής: $z' = -\frac{2}{x}z \Rightarrow z_0 = ce^{\int f dx} = ce^{\int(-\frac{2}{x})dx} = ce^{-2\ln|x|} = \frac{c}{x^2}$

β) Μη ομογενής: $z_\mu = e^{\int f dx}\int g e^{-\int f dx}dx = \frac{1}{x^2}\int\frac{1}{x^2}e^{2\ln|x|}$

$$= \frac{1}{x^2}\int 1 dx = \frac{1}{x}$$

$$z = z_0 + z_\mu = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x}, \quad \int z dx = -\frac{c}{x} + \ln|x| + c_2$$

• $y = e^{\int z(x)dx} = e^{-\frac{c_1}{x} + \ln|x| + c_2}$

$$y = e^{c_2}|x| \cdot e^{-\frac{c}{x}} = \underbrace{c_2|x|}_{\text{σταθερά}} \cdot e^{-\frac{c}{x}} = \lambda_2 x e^{-\frac{c}{x}}, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

ODEs 2 (I) $y''=f(x) \xrightarrow{\int} y'=\int f\,dx + c_1 \xrightarrow{\int} y=\int\left(\int f\,dx\right)dx + c_1x + c_2$

(II) $y''=f(x,y') \xrightarrow[y''=z'(x)]{\text{θέτω } y'=z(x)} z'=f(x,z)$ ODE 1

π.χ.: $y''=\frac{y'}{x}\left[1-\frac{(y')^2}{2x}\right] \longrightarrow z'=\frac{1}{x}z-\frac{1}{2x^2}z^3$ Ⓐ Bernulli $z=u^{\frac{1}{1-a}}=u^{-\frac{1}{2}}$ Ⓐ

$\xrightarrow{Ⓐ} \boxed{u'=-\frac{2}{x}u+\frac{1}{x^2}}$

α) Ομογενής: $v_0 = ce^{\int -\frac{2}{x}dx}=ce^{-2\ln|x|}=\frac{c}{x^2}$

β) Μη Ομογενής: $u_p = e^{\int f dx}\int g\, e^{-\int f dx}dx$
$= e^{-2\ln|x|}\int \frac{1}{x^2}e^{2\ln|x|}dx$
$= \frac{1}{x^2}\int 1\, dx$

• $u=u_0+u_p=\frac{c+x}{x^2} \xrightarrow{Ⓑ} z=\pm\frac{x}{\sqrt{x+c}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm\frac{x}{\sqrt{x+c}} \xrightarrow{(χ.μ.)}$

$dy=\frac{x\,dx}{\sqrt{x+c}} \xrightarrow[1/0]{\int} y=\pm\frac{2}{3}(x+c)^{3/2}+2c\sqrt{x+c}+c_2 \quad (x\geq -c)$

(III) $y''=f(y,y')$ λείπει το x — αυτόνομη

θέτω: $y'=p(y) \Rightarrow y''= \quad = pp'_y \rightarrow pp'_y=f(y,p),\ p=y'=\underbrace{\varphi(y,c_1)}_{\text{first integral}} \xrightarrow{χ.μ.}$

$\frac{dy}{\varphi(y,c_1)}=dx \xrightarrow{\int} \int\frac{dy}{\varphi(y,c_1)}=x+c_2$

∃ το ∫ → $F(x,y,c_1,c_2)=0$

closed-form solution

π.χ. $y''=-y(y')^3 \xrightarrow{y'=p(y)} \cancel{p}p'_y=-yp^{\cancel{3}2} \xrightarrow{χ.μ.}$

$\longrightarrow \frac{dp}{p^2}=-yp^2 \Rightarrow \frac{dp}{p^2}=-y\,dy \xrightarrow{\int}$

$-\frac{1}{p}=-\frac{y^2}{2}+c_1=\frac{-y^2+2c_1}{2} \xrightarrow{c_1\to 2c_1}$

$p=\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y^2-c_1} \xrightarrow{χ.μ.} (y^2-c_1)dy=2dx \rightarrow$

$\boxed{y^3-c_1y-x=c_2}$

π.χ 2

$y''=(y+y')y' \xrightarrow{y'=p(y)} \cancel{p}p'=(y+p)\cancel{p} \xrightarrow{\text{LODE 1}} p=\frac{dy}{dx}=ce^y-y-1$

$\int\frac{dy}{ce^y-y-1}=x+c_2 \longrightarrow \nexists$ για $c\neq 0$

15-4-16 Εξισώσεις ανώτερης τάξης

• Γραμμική ODE 2 με συναρτησιακούς συντελεστές

↳ $\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=0}$ ομογενής περίπτωση

• $y_1(x) \longrightarrow 2^{η}\ y_2(x)$, $y = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ — Γ.Λ. * γενική λύση $+c_3y_3(x)$

Θεμελιώδεις λύσεις

$\downarrow$

ΠΑΤ: $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$, $y''(x_0)=y_2$

• $\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \neq 0$, $x\in(a,b)$

↳ $W[y_1, y_2]$

• $\det\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} \neq 0$

↳ $W[y_1, y_2, y_3]$

$y_2 = s(x)\cdot y_1(x) \xrightarrow{(1)}$

y_2', y_2''

$s''y_1 + s'(2y_1'+py_1)=0$

$s'' + s'\left(2\frac{y_1'}{y_1}+p\right)=0 \xrightarrow{\int}$

$s' \xrightarrow{\int} s$

• $s(x) = c_1\int \frac{1}{y_1^2}\cdot e^{-\int p(x)dx}dx$

$s(x) = \int \frac{1}{y_1^2}\cdot e^{-\int p(x)dx}dx$

$\boxed{y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p dx}dx}$ (1)

$W[y_1, y_2] = \det\begin{pmatrix} y_1, & y_1\int\ldots \\ y_1', & y_1'\int + \frac{1}{y_1}e^{-\int p dx} \end{pmatrix} = e^{-\int p dx} \neq 0$

Εφαρμογή:

1: $y''=y \to y''-y=0$ Λύσεις: e^x, e^{-x}

• $y_1 = e^x$, $y_2 = e^x\int \frac{1}{e^{2x}}\cdot e^{-\int 0 dx}$
$= e^x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)$
$= -\frac{1}{2}e^{-x}$

2: $xy''-(x+1)y'+y=0$

• $y_1 = e^x$, $xy''-(x+1)y'+y=0 \overset{διά\ x}{\iff}$

$y'' - \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{p(x)}y' + \frac{1}{x}y = 0 \overset{(1)}{\iff}$

$\int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int (1+\frac{1}{x})dx} dx = \int e^{-2x} \cdot xe^{x} dx = \int x \cdot e^{-x} dx =$ $\qquad \int x e^{x} dx = e^{x}(x-1)$

$-e^{-x}(x+1) \longrightarrow y_2 = -e^{x} \cdot e^{-x}(x+1) = -(x+1)$ $\qquad \int x \cdot e^{-x} dx = -e^{x}(x+1)$

↳ Αντίστροφη διαδικασία από την λύση $-(x+1)$ στην e^{x}.

3: $(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ $\qquad$ Λύση: x

$y_1 = e^{ky}(ax^2+\beta x+\gamma)$, $y_1 = x$

• $y_2 = x \int \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\int \frac{-2x}{(1+x^2)}dx} dx$ $\qquad$ • $\int \frac{1+x^2}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + x \to y_2 = x(x-\frac{1}{x}) = x^2-1$

$\boxed{y = c_1 x + c_2(x^2-1)}$

~~Γραμμική ομογενής~~

• Γραμμική ΣΟDE 2 με συναρτησιακούς συντελεστές μη ομογενής

→ $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$ $\qquad$ ↳ $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ (1)

→ $xy' - (x+2)y' + 2y = 0$ $\qquad$ (no homogen)

• Ομογενής ⟶ $y_1, y_2 =$ ~~δφ~~ ιδιαίτερης

$\boxed{y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2}$

→ Αν υπολογίσουμε μία μερική λύση y_μ της (1) ΓΛ(1) = ⇒

$y = y_0 + y_\mu = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_\mu$

→ Υποθέτω $y_\mu = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$ $\qquad$ Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων (Lagrange)

• $y_\mu' = c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_1 y_1' + c_2 y_2'$

Θέτω $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$ $\qquad \overset{(2)}{\Rightarrow}$ $c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2)$

• $y_\mu'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2'$ $\qquad$ $+ c_1' y_1' + c_2' y_2' = r(x)$

• $y_1(x) \longrightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 c_1' + y_2 c_2' = 0 \\ y_1' c_1' + y_2' c_2' = r(x) \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{W(y_1, y_2) \neq 0} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$ μοναδική λύση

• $c_1' = \frac{W_1}{W}$

$c_1' = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ r & y_2' \end{pmatrix}}{W}$

• $c_2' = \frac{W_2}{W}$

$c_2' = \frac{\det\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r \end{pmatrix}}{W}$

Εφαρμογή

1: • $y^{(4)} + p_3(x) y^{(3)} + p_2(x) y^{(2)} + p_1(x) y' + p_0(x) y = r(x)$

Λύση

-> Έστω y_1, y_2, y_3, y_4 λύσεις της ομογενούς

• Υποθέτουμε y_p: $c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + c_3(x) y_3 + c_4(x) \cdot y_4$ (?) της μη ομογενούς

-> και καταλήγοντας έχουμε 3 εξισώσεις:

$$\begin{pmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ y_1', & y_2', & y_3', & y_4' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'', & y_4'' \\ y_1''', & y_2''', & y_3''', & y_4''' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \\ c_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$

• $W \neq 0$

• $c_1 = \int \frac{W_1}{W} dx$

2: • $(1-x) y'' + x y' - y = 2(x-1)^2 e^{-x}$

Λύση: $y_1 = x$

Γ.Λ.: $y = y_h + y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$

y_1, y_2 θεμελιώδεις της ομογενούς

-> $y'' + \frac{x}{1-x} y' - \frac{1}{1-x} y = -2(x-1) \cdot e^{-x}$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\,dx} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x}{x-1} dx} dx$$
$$= \pm x \int \frac{e^x}{x^2} (x-1) dx =$$
$$= \pm x \left(\int \frac{e^x}{x} dx - \int \frac{e^x}{x^2} dx \right)$$

$= \pm x\left(\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2}dx - \int \frac{e^x}{x^2}dx\right)$

$= \pm e^x \longrightarrow y_2 = e^x,\ y_3 = c_1 \cdot x + c_2 e^x$

• Γραμμική ODE 2 με συναρτησιακούς συντελεστές

$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0} \xrightarrow{\text{ομογενής}}$

y_p: Σύμφωνα με την μεθοδολογία Lagrange (μ.μ.στ)
υποθέτουμε $y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$
και (1) κατασκευάζουμε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} c_1 = \int \frac{W_1}{W}dx \\ c_2 = \int \frac{W_2}{W}dx \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ W = xe^x - e^x = (x-1)e^x \\ \bullet\ W_1 = -e^x r = 2(x-1) \\ \bullet\ W_2 = xr = -2x(x-1)e^{-x} \end{array}\right\} = \begin{array}{l} \bullet\ c_1 = \int \frac{2(x-1)}{(x-1)e^x}dx = -2e^{-x} \\ \bullet\ c_2 = -2\int \frac{x(x-1)e^{-x}}{(x-1)e^x} = -2\int xe^{-2x}dx \\ \quad = \frac{2x+1}{2}\cdot e^{2x} \end{array}$$

Για το σπίτι:

1) $(1-x)y'' + xy' + y = x^2 - 1 \longrightarrow y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cancel{x^2} + 2x\ln|x-1|$
$+ x + 3 - 2e^{x-1}Ei(1-x)$

$\left(\int \frac{e^{ax}}{x}dx\ Ei(ax),\ \int \frac{e^{ax}}{x}dx = -\frac{e^{ax}}{x} + a\,Ei(ax)\right)$

2) $xy'' - (x+1)y' + y = xe^{2x} \longrightarrow y = \underline{c_1y_1 + c_2y_2} + \frac{x-1}{2}\cdot e^{2x}$

$x^2y'' - 2xy' + 2y = \cancel{x} \rightarrow y = \underline{c_1y_1 + c_2y_2} - x\ln|x| - x$

• ΓΟΔΕ 2 με σταθερούς συντελεστές (ομογενής)

→ $y'' + ay' + by = 0$
→ ψάχνουμε λύση $y = e^{\lambda x}$ $\Big\}$ $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
$\Delta = a^2 - 4b$

① $\Delta > 0$ → $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ → $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$, $\det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0$

• $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

$y'' - ky = 0$, $k > 0$,
$\lambda^2 = k \to \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{k}$
$e^{\sqrt{k}x}$, $e^{-\sqrt{k}x}$
→ χαρακτηριστική λύση $\lambda^2 - k = 0$

$y'' = \lambda^2$
$y' = \lambda$
$y = 1$

② $\Delta = 0$ → $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{-a}{2}$ → $y_1 \cdot e^{-\frac{a}{2}x}$, • $y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\,dx} dx$

• $y_2 = e^{-\frac{a}{2}x} \int e^{ax} \cdot e^{-ax} dx = x e^{-\frac{a}{2}x} = x e^{\lambda x}$ → $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$

③ $\Delta < 0$ → $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} = r \pm i\omega$, $r = -\frac{a}{2}$, $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$

• $e^{(r+i\omega)x}$, $e^{(r-i\omega)x}$, $e^{rx} \cdot e^{i\omega x} = e^{rx}(\cos\omega x + i\sin\omega x)$

$\boxed{e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta}$

• $c_1 e^{(r+i\omega)x} + c_2 e^{(r-i\omega)x} = e^{rx}\left[c_1(\cos\omega x + i\sin\omega x) + c_2(\cos\omega x - i\sin\omega x)\right]$

$= e^{rx}\left[(c_1 + c_2)\cos\omega x + i(c_1 - c_2)\sin\omega x\right]$

$c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ $\quad \xrightarrow{c_1 = \frac{A - iB}{2},\ c_2 = \frac{A + iB}{2}}$ $= e^{rx}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$

$= A e^{rx}\cos\omega x + B e^{rx}\sin\omega x$

$\Delta < 0$ → $r \pm i\omega$ ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$r = -\frac{a}{2}$, $\omega = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$

ρίζες

$\boxed{y_1 = e^{rx}\cos\omega x}$, $\boxed{y_2 = e^{rx}\sin\omega x}$ $\Big\}$ $\xrightarrow{(1)}$ λύση

y_1', y_1'', y_2', y_2''

↳ $W = \det\begin{pmatrix} e^{rx}\cos\omega x & e^{rx}\sin\omega x \\ e^{rx}(r\cos\omega x - \omega\sin\omega x) & e^{rx}(r\sin\omega x + \omega\cos\omega x) \end{pmatrix} = \omega e^{2rx} \neq 0$

- $y'' + ky = 0 \quad , \quad k>0$
- $\lambda^2 + k = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k}$

21-04-16 <u>Διαφορικές Εξισώσεις</u>

- <u>Μέθοδος Lagrange</u>: (Γενική λύση) $y_m = y_0 + y_p$

$\left(\begin{array}{l} \underline{\text{Π.χ.}}: \text{ για } y'' + p_1(t)y' + q_1(t)y = r(t) \\ y_{rn} = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p \text{ με } y_p = c_1(t)y_1 + c_2(t)y_2 \end{array} \right)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix} \Rightarrow [W] \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}}{|W|} = \frac{|W_1|}{|W|} \quad , \rightarrow c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{|W|} = \frac{|W_2|}{|W|}$$

<u>Άσκηση I</u> : !! SOS Εξετάσεις !!

$xy'' - (x+1)y' + y = xe^{2x}$

$\rightarrow y_{1_0} = x+1 \quad , \quad y_{2_0} = e^x$

$\left(\bullet\ y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx \right)$

<u>Λύση</u>

$$\begin{pmatrix} y_{1_0} & y_{2_0} \\ y_{1_0}' & y_{2_0}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{c_1(x) = -\frac{e^{2x}}{2}} \quad \boxed{c_2(x) = x \cdot e^x}$$

<u>Άσκηση II</u> :

$$\underbrace{x^2y'' - 2xy' + 2y}_{(x = e^t \rightarrow t = \ln x} = \begin{cases} \rightarrow x \\ \rightarrow x^3 \end{cases} \rightarrow \left(y_{tt}'' - 3y_t' + 2y = 0 \right)$$

Ομογενής

<u>Λύση</u>

$$\underline{\text{Lagrange}}: \begin{pmatrix} y_{1_0} & y_{2_0} \\ y_{1_0}' & y_{2_0}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ \frac{1}{x} & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \frac{-x}{x^2} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{c_1(x) = -\ln|x|}$$

$$\rightarrow c_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \quad c_2 = \int \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \boxed{c_2(x) = -\frac{1}{x}}$$

Άσκηση II β:

$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \rightarrow y_{1o} = x, \; y_{2o} = x^2$

Λύση

$$\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\rightarrow c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ x & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \frac{-x^3}{x^2} = -x \Rightarrow \boxed{c_1(x) = -\frac{x^2}{2}}$$

$$\rightarrow c_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow \boxed{c_2(x) = x}$$

Θεωρία:

ροταδρεά

$$y'' + py' + qy = e^{\mu x} F(x) \Rightarrow y_{\Gamma\Lambda} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x)$$

1) $F(x) = B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots B_1 x + B_0$

α) Αν το $\emptyset$ όχι ρίζα της Χ.Εξ. $\Rightarrow y_p = A_n x^n + \dots A_1 x + A_0$

β) Αν το $\emptyset$ ρίζα της Χ.Εξ. $\Rightarrow y_p = x(A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0)$

2) $F(x) = e^{\mu x}(B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_1 x + B_0)$

α) Το μ όχι ρίζα της Χ.Εξ $\Rightarrow y_p = e^{\mu x}(A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0)$

β) Το μ (απλή) ρίζα της Χ.Εξ $\Rightarrow y_p = x e^{\mu x}(A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0)$

γ) Το μ (διπλή) ρίζα της Χ.Εξ $\Rightarrow y_p = x^2 \cdot e^{\mu x}(A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0)$

3) $F(x)$ $\Rightarrow$ i) $(B_n x^n + \dots + B_0) \cdot e^{ax} \cdot \cos(\beta x)$

ii) $(B_\pi x^\pi + \dots + B_0)\, e^{ax} \cdot \sin(\beta x)$

iii) $(B_\pi x^\pi + \dots + B_0) e^{ax} \cdot \cos(\beta x) + (\Gamma_\delta x^m + \dots + \Gamma_0) \cdot e^{ax} \sin(\beta x)$

i, ii) $\rightarrow$ α) Αν $a+\beta i$ όχι ρίζα της Χ.Εξ $\Rightarrow y_p = (A_\pi x^\pi + \dots + A_0) e^{ax} \cos(\beta x)$
$+ (\Delta_\pi x^\pi + \dots + \Delta_0) \cdot e^{ax} \cdot \sin(\beta x)$

β) Αν $a+\beta i$ ρίζα της Χ.Εξ $\Rightarrow y_p = x(A_\sigma x^\pi + \dots + A_0) \cdot e^{ax} \cdot \cos(\beta x)$
$+ x(\quad) e^{ax} \sin(\beta x)$

iii) $\rightarrow$ α) Αν $a+\beta i$ όχι ρίζα της Χ.Εξ $\Rightarrow y_p = (A_\delta x^\delta + \dots + A_0) e^{ax} \cdot \cos(\beta x)$
$+ (Q_\delta x^\delta + \dots + Q_0) e^{ax} \cdot \sin(\beta x)$

$\boxed{\delta = \max(\pi, m)}$

β) Αν $a+\beta i$ ρίζα της Χ.Εξ $\Rightarrow y_p = x(\quad) \dots + x(\quad) \dots$

Ασκηση:

1) $y''+y'-2y=x^2$

2) $y''-y=xe^x$

3) $y''-4y=2x\cos x$

!! σουτά εξετάσω!!

4) $y''+2y'+2y=x^2e^{-x}\sin x$

5) $y''-2y'-3y=2e^x-10\sin x$

---

1) $y''+y'-2y=x^2$

α) Ομογενής: $y''+y'-2y=0$

→ Χ.Εξισ: $k^2+k-2=0 \Rightarrow k_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1(-2)}}{2} \Rightarrow \boxed{k_1=-2}, \boxed{k_2=1}$

$\begin{pmatrix} y_{10}=e^{k_1x} \\ y_{20}=e^{k_2x}\end{pmatrix}$ → $y_{10}(x)=e^{-2x}$, $y_{20}(x)=e^x$

β) Το 0 όχι ρίζα της Χ.Εξισ. άρα $y_p=Ax^2+Bx+\Gamma$ (i)

(i) → $y_p'=2Ax+B$, $y_p''=2A$

$(1)\xrightarrow{(i)} -2Ax^2+2(A-B)x+2A+B-2\Gamma=x^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A=-\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}, \Gamma=-\frac{3}{4}$

↳ Άρα γενική λύση: $y_{\gamma\eta}(x)=\underbrace{c_1\cdot e^{-2x}+c_2\cdot e^x}_{(y_0)}\underbrace{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}}_{(y_p)}$

2) $y''-y'=xe^x$

α) Ομογενής: $y''-y=0$

→ Χ.Εξισ: $k^2-1=0 \Rightarrow \boxed{k_1=1}, \boxed{k_2=-1}$

→ $y_{10}(x)=e^{k_1x}=e^x$, $y_{20}(x)=e^{k_2x}=e^{-x^2}$

β). Το $\mu=1$ ρίζα της Χ.Εξισ. άρα $y_p=x(Ax+B)e^x$ (ii)

$(2)\xrightarrow{(ii)} 4Ax+2(A+B)=x \Rightarrow \dots \Rightarrow A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}$

↳ Άρα γενική λύση: $y_{\gamma\eta}(x)=c_1\cdot e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{4}x(x-1)e^x$

4) $y'' + 2y' + 2y = x^2 \cdot e^x \sin x$

α) Ομογενής: $y'' + 2y' + 2y = 0$

$\rightarrow$ Χ.Εξισ: $k^2 + 2k + 2 = 0 = 0 \rightarrow \boxed{k_1 = -1+i}$, $\boxed{k_2 = -1-i}$

β) Το $-1+i$ ρίζα της Χ.Εξισ. άρα $y_p = x(Ax^2 + Bx + \Gamma)e^{-x}\cos x + x$
$+ (\bar{A}x^2 + \bar{B}x + \bar{\Gamma})e^{-x}\sin x$ (iv)

$(4) \xrightarrow{(iv)} \pi_1(x)\cos x + \pi_2(x)\sin x = x^2 \sin x \Rightarrow \ldots \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$, $B = 0$, $\Gamma = \frac{1}{4}$
$\bar{A} = 0$, $\bar{B} = \frac{1}{4}$, $\bar{\Gamma} = 0$

↳ Άρα γενική λύση: $y_{\Gamma n}(x) = C_1 \cdot e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x$
$- \frac{1}{2}x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x}\cos x$
$+ \frac{1}{4}x^2 \cdot e^{-x}\sin x$

5) $y'' - 2y' - 3y = 2e^x - 10\sin x$

$y_{p1}(x)$ μια μερική λύση της $y'' + py' + qy = F_1(x)$
$y_{p2}(x)$ μια μερική λύση της $y'' + py' + qy = F_2(x)$
$\Big\}$ η $y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$ είναι μια μερική λύση της $y'' + py' + qy = F_1(x) + F_2(x)$

α) Ομογενής: $y'' - 2y' - 3y = 0$

$\rightarrow$ Χ.Εξισ: $k^2 - 2k - 3 = 0 \rightarrow \boxed{k_1 = 3}$, $\boxed{k_2 = -1}$

β) Διάσπαση σε: $y'' - 2y' - 3y = 2e^x$ ⋮ $y'' - 2y' - 3y = -10\sin x$

$\rightarrow y_{10}(x) = e^{k_1 x}$, $y_{20}(x) = e^{k_2 x} = e^{-x}$

22-4-16

Διαφορικές Εξισώσεις

• Εξίσωση Euler:

$$\boxed{x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0}$$

Για n=2:

(n=2) $x^2 y'' + a x y' + b y = 0$, $y = y(x)$, $x>0$

$\to x = e^t \to t = \ln x$, $y(x) = y(t(x))$

$\to y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} y'_t \to x y'_x = y'_t$

$\to y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} y'_t + \frac{1}{x^2} y''_t$ $\cancel{x^2 y''_{xx}} = -y'_t + y''_{tt}$

• $y''_{tt} + (a-1) y'_t + by = 0$] χ. Εξίσ.

$\to \lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$

$\hookrightarrow \Delta = (a-1)^2 - 4b$

• Αν $\Delta > 0 \to \lambda_1, \lambda_2 = \frac{1 - a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$

• Αν $\Delta = 0 \to \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{1-a}{2}$

$y = c_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} = (c_1 + c_2 \ln x) x^{\lambda}$

• Αν $\Delta < 0 \to \lambda_{1,2} = r \pm i\omega \to e^{rt}\cos(\omega t)$, $e^{rt}\sin(\omega t)$

$y = c_1 e^{rt}\cos\omega t + c_2 e^{rt}\sin\omega t = x^r [c_1 \cos(\omega \ln x) + c_2 \sin(\omega \ln x)]$

~~Εφαρμογ.~~

▸ $x^3 y''' + a x^2 y'' + b x y + c y = 0$

$x = e^t$, $y'_x =$, $y''_{xx} =$, $y'''_{xxx} = \frac{1}{x^3}(\cancel{y'''_{ttt}} - 3y''_{tt} + 2y'_t)$

?

: $y'''_{ttt} + (a-3) y''_{tt} - (a-b-2) y'_t + cy = 0$

: λ (m:3) x^λ, $\ln x\, x^\lambda$, $\ln^2 x\, x^\lambda$

$e^{\lambda t}$, $t e^{\lambda t}$, $t^2 e^{\lambda t}$

(η) $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ $\quad \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ μεταβλητές φάσης

μ παράγωγο ως προς τον χρόνο

χώρος φάσεων

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1, \dots x_n) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(t, x_1, \dots x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(t, x, \dots x_n) \end{aligned}\right\} (S)$$

$\to \bar{f}: \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$ με συνιστώσες $f_1: \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $i=1$

$\to \boxed{\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x})}$ (S) $\xrightarrow[(S)+(A\Sigma)]{\text{ΠΑΤ}}$ ~~$t=t_0$~~

$\to t = t_0$, $\boxed{\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0}$ $\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}$

Θεώρημα ύπαρξης & μοναδικότητας της λύσης:

ΠΑΤ $\quad (S)+(A\Sigma)$ Αν $f_i, f_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,j = 1, \dots, n$

$\exists$ μοναδική $\quad$ συνεχής σε περιοχή $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$

$(t_0 - a, t_0 + a)$ $\quad : (t_0, \bar{x}_0) \in D \Rightarrow \exists a > 0$

$\to \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \longrightarrow$ αυτόνομο $\quad \frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = 0$

$F(x_1, \dots, x_n; \Gamma) = 0$

μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών στο $\mathbb{R}^n$

↳ που επαληθεύει το $(S) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} f_i}_{} = 0$

(πρώτο ολοκλήρωμα / first integral)

Παράδειγμα συστήματος

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \dots + p_{1n}(t)x_n + r_1(t) \\ \dot{x}_2 &= p_{21}(t)x_1 + \dots \dots \dots + p_{2n}(t)x_n + r_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= p_{n1}(t)x_1 + \dots \dots \dots + p_{nn}(t)x_n + r_n(t) \end{aligned}$$

$\dot{\bar{x}} = P\bar{x} + \bar{r}(t)$, $P = (p_{ij}(t))_{n \times n}$ $\quad i,j = 1$

γραμμικό σύστημα(τος) μη ομογενής

↓

γραμμικό σύστημα (ας) μη ομογενής

αυτόνομο (ας) $\bar{r} = 0$ ομογενής

$P_{ij}(t)$ = σταθερή, $r(t)$ = σταθερή

• Εφαρμογή:

• $y'' + ty + 5y = e^t$, $y = y(t)$

$\{ y = x_1, \quad y' = x_2 \}$

• $x_1' = x_2$

• $x_2' = -5x_1 - t x_2 + e^t$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

$y''' + (t-1)y'' + t^2 y' + (t+3)y = te^t$

$\{ y = z_1, \ y' = z_2, \ y'' = z_3 \}$

$z_1' = z_2$

$z_2' = z_3$

$z_3' = (t+3)z_1 - t^2 z_2 + (1-t)z_3 + te^t$

$$\bar{z}' = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(t+3) & -t^2 & 1-t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ te^t \end{pmatrix}$$

• Γενική έκφραση:

$y^{(n)} + f_{n-1}(t) y^{n-1} + \dots + f_1(t) y' + f_0(t) y = r(t)$

$\{ x_1 = y, \ x_2 = y', \ \dots, \ x_n = y^{(n+1)} \}$

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0\,1 \\ -f_0 & -f_1 & \dots & \dots & -f_{n-1} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$

• παράδειγμα

$y'' - \varepsilon(1-y^2)y' + y^3 = 0$

$\{ z_1 = y,\ z_2 = y',\ z_1' = z_2,\ z_2' = \varepsilon(1-z_1^2) - z_1^3 \}$

12-5-16 Διπλό σύστημα διαφορικών εξισώσεων

1) $\vec{x}' = P\vec{x}$, $P = \begin{pmatrix} -0{,}1 & 0{,}075 \\ 0{,}1 & -0{,}2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \vec{x}(t)$

• Βήμα 1: $|P - \lambda I| = 0$ (ιδιοτιμές)

$\begin{vmatrix} -0{,}1-\lambda & 0{,}075 \\ 0{,}1 & -0{,}2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda^2 + 0{,}3\lambda + 0{,}0125 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = -0{,}25 \\ \lambda_2 = -0{,}05 \end{cases}$

• Βήμα 2: Ιδιοδιάνυσμα $\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

a) Για $\lambda_1 = 0{,}25$: $P\vec{\xi}_1 = \lambda\vec{\xi}_1 \Rightarrow (P - \lambda_1 I)\vec{\xi}_1 = \vec{0} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} -0{,}1-(-0{,}25) & 0{,}075 \\ 0{,}1 & -0{,}2-(-0{,}25) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}075 \\ 0{,}1 & 0{,}05 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$2x_1 = -y_1 \xrightarrow{\text{για } y_1 = 1} x_1 = -0{,}5 \longrightarrow \boxed{\vec{\xi}_1 = (-0{,}5,\ 1)^T}$

→ Για $\lambda_2 = -0{,}05$: $P\vec{\xi}_1 = \lambda\vec{\xi}_1 \Rightarrow (P - \lambda_2 I)\vec{\xi}_2 = \vec{0} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{pmatrix} -0{,}05 & 0{,}075 \\ 0{,}1 & -0{,}15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

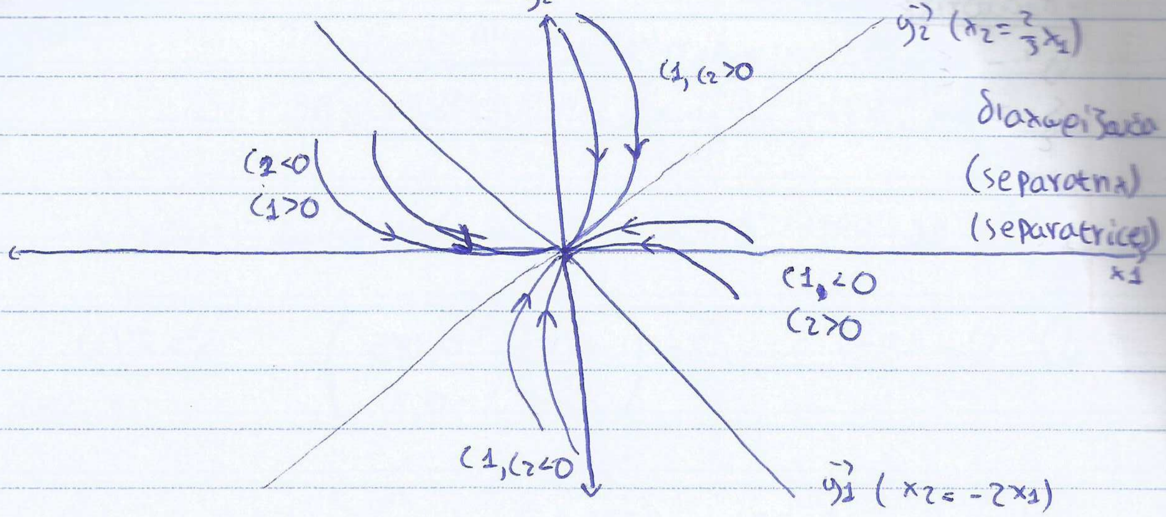
$0{,}1x_2 = 0{,}15y_2 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}y_2 \xrightarrow{\text{για } y_2 = 1} x_2 = 15 \rightarrow \boxed{\vec{\xi}_2 = (15,\ 1)^T}$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{\xi}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{\xi}_2 = c_1 e^{-0{,}25t}\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-0{,}05t}\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}5e^{-0{,}25t}c_1 + 15e^{-0{,}05t}c_2 \\ e^{-0{,}25t}c_1 + e^{-0{,}05t}c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}5e^{-0{,}25t} & 15e^{-0{,}05t} \\ e^{-0{,}25t} & e^{-0{,}05t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$= \Phi(t)$ (θεμελιώδες μητρώο)



→ Το Σ.Ι. $O(0,0)$ ασυμπτωτικώς ευσταθής κόμβος (node)

2) $\dot{\vec{x}} = \underset{\sim}{P}\vec{x}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

• Βήμα 1: Ιδιοτιμές $|P - \lambda I| = 0$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \ldots\ldots \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$

• Βήμα 2: Ιδιοδιανύσματα

α) Για $\lambda_1 = -1$: $P\vec{\xi_1} = \lambda_1 \vec{\xi_1}$, $\vec{\xi_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 4 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$$

$2x_1 + y_1 = 0 \xrightarrow{y_1 = 1} x_1 = -\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\vec{\xi_1} = (-0,5, 1)^T}$

β) Για $\lambda_2 = 3$:

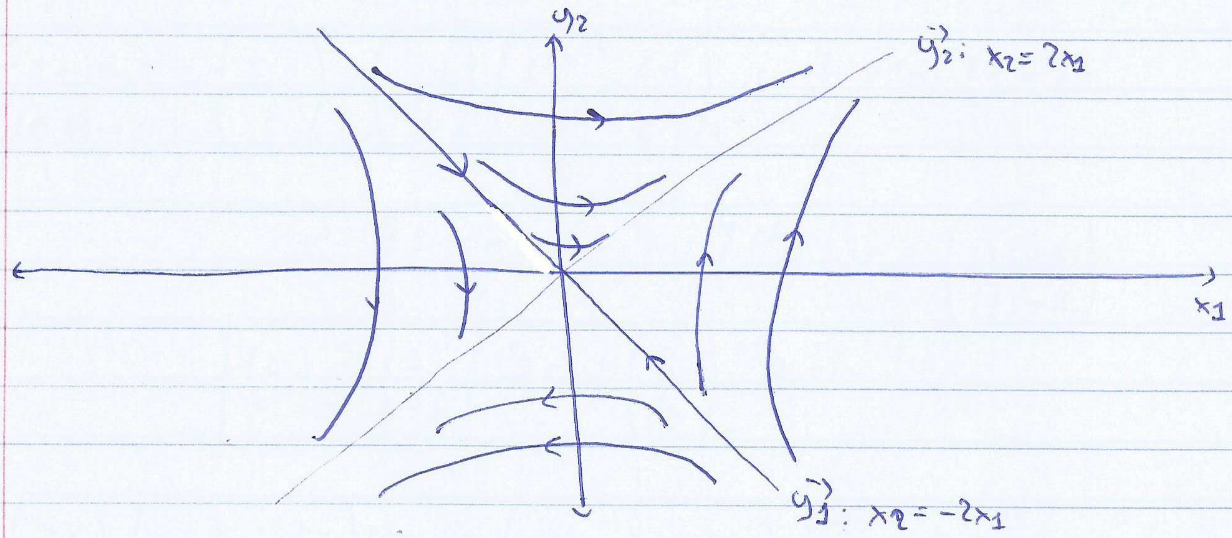
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$-2x_2 + y_2 = 0 \xrightarrow{y_2=1} x_2 = \frac{1}{2} :\to \boxed{\vec{\xi}_2 = (0{,}5,\ 1)^T}$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2} c_i e^{\lambda_i t} \vec{\xi}_i = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \ \Phi(t) = \begin{pmatrix} -0{,}5e^{-t} & \vdots & 0{,}5e^{3t} \\ e^{-t} & \vdots & e^{3t} \end{pmatrix}$$

$\to$ Το Σ.Ι. $O(0,0)$ καλείται σαγματικό σημείο (saddle point)



<u>Παράδειγμα για εξάσκηση</u>: $P = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -1$

$\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{\xi}_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \vec{\xi}_2$

2) $\dot{\vec{x}} = \underset{\sim}{P} \vec{x} \to \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\left(m_a = 2,\ m_g = n - \text{rank}(P - \lambda I) = 1 \text{ (εδώ)} \quad n_r = m_a - m_g \right)$

$\quad \downarrow e^{\lambda t}$

$e^{\lambda t}(\vec{n} + t\vec{\xi})$

3) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow (\lambda-2)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 2$ (διπλή)

<u>Για $\lambda = 2$</u>: $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \vec{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$x_1 = -y_1 \xrightarrow{y_1=1} \boxed{\vec{\xi} = (-1,1)^T}$

$\rightarrow \text{rank}(P-\lambda I) = 1 \Rightarrow m_g = n - \text{rank}(P-\lambda I)$

$= 2-1 = 1$

$\Rightarrow n_r = m_a - m_g = 2-1 = 1$ γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα

• Έστω $\vec{n}$ το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$

$$(P-\lambda I)\vec{n} = \vec{\xi} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow n_1 + n_2 = 1 \xrightarrow{n_2=0} \vec{n}_1 = 1$$

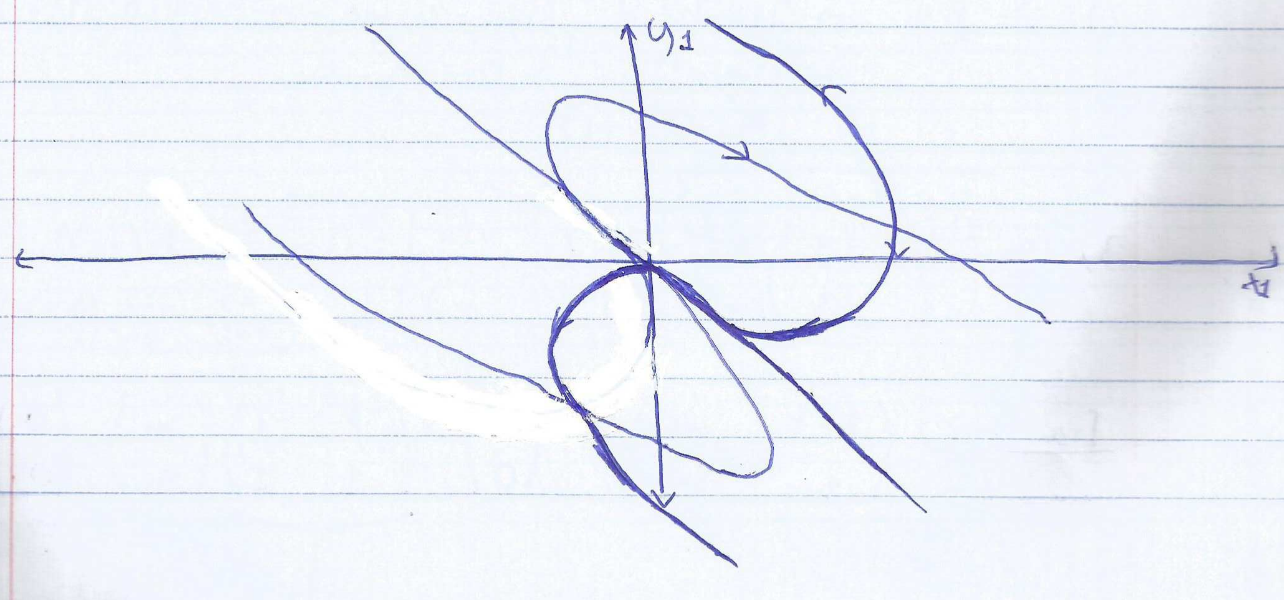
$$\Rightarrow \vec{n} = (1,0)^T$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda t}\vec{\xi} + c_2 e^{\lambda t}(\vec{n} + t\vec{\xi})$$

$$= c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix} -c_1 + c_2 - c_2 t \\ c_1 + c_2 t \end{pmatrix} = \underbrace{e^{2t}\begin{pmatrix} -1 & 1-t \\ 1 & t \end{pmatrix}}_{\varphi(t)}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

→ <u>Το Σ.Ι.</u>: εκφυλισμένος κόμβος



3) $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (-1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1 \text{ διπλή}}$

$(P - \lambda I)\vec{\xi} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = 0 \\ x_2 \text{ αυθαίρετο} \end{matrix}\right\} \vec{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(P - \lambda I)\vec{n} = \vec{\xi} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} n_2 = 1 \\ n_1 \text{ αυθαίρετο} \end{matrix}\right\} \vec{n} = (0,1)^T$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda t}\vec{\xi} + c_2 e^{\lambda t}(\vec{n} + t\vec{\xi})$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{-t}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\varphi(t)}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$