Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

Διδάσκων: Ε. Στεφανόπουλος 12 ιουνιου 2017

Θ1. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y,z) = 1 + x^2 + 2y^2 - z$.

(α΄) Να βρεθεί η κλίση ∇f της f στο σημείο $P(1,1,4)$.

(β΄) Αν S είναι η επιφάνεια η οποία περιγράφεται με τη σχέση $f(x,y,z) = 0$, να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο σημείο $P(1,1,4)$.

Σχόλια και Λύση

(α΄) Η κλίση ∇f της f είναι το διάνυσμα

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle = \langle 2x, 4y, -1 \rangle$$

έτσι στο σημείο $P(1,1,4)$ η κλίση είναι

$$\nabla f(1,1,4) = \langle 2, 4, -1 \rangle.$$

.

(β΄) Αν S είναι η επιφάνεια η οποία περιγράφεται με τη σχέση $f(x,y,z) = 0$, τότε $z = 1+x^2+2y^2$, δηλαδή η S είναι ένα παραβολοειδές. Επιπλέον βλέπουμε ότι για $x = 1$ και $y = 1$, τότε $z = 4$, κατά συνέπεια το $(1,1,4)$ περιέχεται στην S. Ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια στο σημείο της (x,y,z) είναι το

$$\mathbf{n} = \nabla f = \langle 2x, 4y, -1 \rangle.$$

Έτσι στο $(1,1,4)$ ένα κάθετο διάνυσμα είναι το $\mathbf{n} = \langle 2, 4, -1 \rangle$, επομένως η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο σημείο $P(1,1,4)$ είναι η

$$\mathbf{n} \cdot \langle x-1, y-1, z-4 \rangle = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) + 4(y-1) - (z-4) = 0,$$

όπου (x,y,z) είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου.

Θ2. Στο $\mathbb{R}^3$ δίνονται τα σημεία $P(1,0,-1)$, $Q(2,-1,0)$, και $R(0,1,1)$.

(α') Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία περιέχει τα P και Q.

(β') Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου το οποίο περιέχει τα σημεία P, Q και R.

Σχόλια και Λύση

(α') Η ζητούμενη ευθεία είναι παράλληλη στο διάνυσμα με αναπαράσταση $\overrightarrow{PQ}$, δηλαδή στο

$$\langle 2,-1,0\rangle - \langle 1,0,-1\rangle = \langle 1,-1,1\rangle.$$

Η ευθεία με εξίσωση $\mathbf{r_1}(t) = \langle 1,-1,1\rangle t$, $t \in \mathbb{R}$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\langle 1,-1,1\rangle$, και η μεταφορά της κατά το διάνυσμα $\mathbf{r_0} = \langle 1,0,-1\rangle$, δηλαδή η

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r_0} + \mathbf{r_1}(t)$$

είναι η ζητούμενη. Έτσι αν $\mathbf{r}(t) = \langle x,y,z\rangle$, τότε ισοδύναμα έχουμε

$$\langle x,y,z\rangle = \langle 1,0,-1\rangle + \langle 1,-1,1\rangle t = \langle 1+t,-t,-1+t\rangle.$$

(β') Τα διανύσματα

$$\mathbf{q} = \langle 1,-1,1\rangle, \qquad \mathbf{r} = \langle -1,1,2\rangle$$

με αναπαραστάσεις αντίστοιχα τα $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$, ορίζουν (γεωμετρικά) τη θέση του ζητούμενου επιπέδου, κατά συνέπεια ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο είναι το $\mathbf{n} = \mathbf{q} \times \mathbf{r}$, έτσι

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \langle -3,-3,0\rangle.$$

Αν τώρα $S(x,y,z)$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου τότε το $\mathbf{n}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα με αναπαράσταση $\overrightarrow{PS}$, άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\mathbf{n} \cdot \langle x-1,y,2\rangle \Leftrightarrow -3(x-1) - 3y = 0 \Leftrightarrow x+y = 1$$

παράλληλο στον $z-$άξονα.

Σημείωση. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

όπου $\langle a,b,c\rangle$ είναι ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο και (x_0,y_0,z_0) είναι σημείο του επιπέδου. Έχοντας τρία διθέσιμα σημεία διαμορφώνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} a(x-1) + by + c(z+1) &= 0 \\ a(x-2) + b(y+1) + cz &= 0 \\ ax + b(y-1) + c(z-1) &= 0 \end{aligned}$$

με αγνώστους τα a,b,c. Επιλύοντας και χρησιμοποιώντας ένα από τα δοσμένα σημεία διαμορφώνουμε την εξίσωση του επιπέδου. Έχουμε έτσι ένα δεύτρο τρόπο λύσης του (β').

Θ3. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ στο **κλειστό** τετράγωνο $T = [0,1] \times [0,1]$.

Σχόλια και Λύση

Γράφοντας τη συνάρτηση στη μορφή

$$f(x,y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

βλέπουμε ότι η f έχει απόλυτο ελάχιστο στο $(1/2, 1/2)$, και

$$\min f(x,y) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Προσποιούμενοι ότι δεν έχουμε παρατηρήσει τα παραπάνω, χρησιμοποιούμε το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου. Διαμορφώνοντας και λύνοντας το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x - 1 = 0 \\ f_y(x,y) &= 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

βρίσκουμε μοναδικό κρίσιμο σημείο το $(1/2, 1/2)$. Επειδή

$$f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = 2, \qquad f_{xy}(x,y) = 0$$

και

$$f_{xx}(1/2,1/2) f_{yy}(1/2,1/2) - f_{xy}^2(1/2,1/2) = 4, \qquad f_{xx}(1/2,1/2) > 0$$

το κριτήριο εξασφαλίζει ότι στο σημείο $(1/2, 1/2)$ η συνάρτηση f παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο $\mathbb{R}^2$, άρα και στο T.

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο κλειστό τετράγωνο T, το οποίο περιέχει το $(1/2, 1/2)$, κατά συνέπεια υπάρχει σημείο $(x^*, y^*) \in T$ ώστε

$$\max_T f(x,y) = f(x^*, y^*).$$

Στη συνέχεια μελετάμε τη συμπεριφορά της f στο σύνορο του T. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} f(x,0) = f(x,1) &= x^2 - x + 1, \qquad 0 \le x \le 1 \\ f(0,y) = f(1,y) &= y^2 - y + 1, \qquad 0 \le y \le 1 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση

$$h(t) = t^2 - t + 1 = (t - 1/2)^2 + 3/4, \qquad 0 \le t \le 1$$

παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο $1/2$ και τη μέγιστη στα άκρα 0 και 1, έτσι

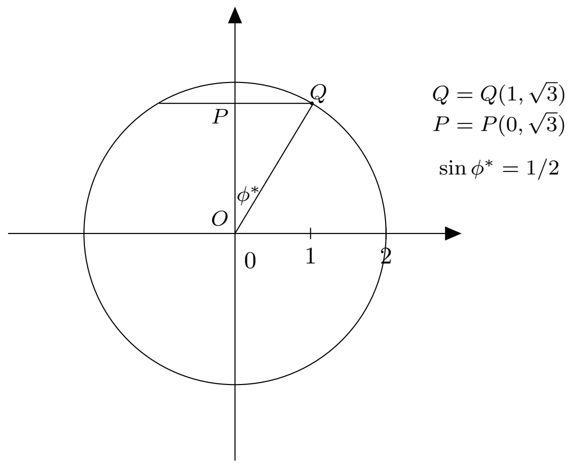
$$h(1/2) = 3/4, \qquad \text{και} \qquad h(0) = h(1) = 1.$$

Κατα συνέπεια έχουμε οτι

$$\max_T f(x,y) = f(0,0) = f(1,0) = f(1,1) = f(0,1) = 1.$$

Θ4. Αν Σ είναι το στερεό το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ και πάνω από το επίπεδο $z = \sqrt{3}$, να εκφραστεί ο όγκος $V(\Sigma)$ σαν ένα ολοκλήρωμα, **χωρίς υπολογισμό**, σε **καρτεσιανές** και σε **κυλινδρικές** ή **σφαιρικές** συντεταγμένες.

Σχόλια και Λύση



Η τομή του επιπέδου $z = \sqrt{3}$ με τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ είναι η περιφέρεια

$$C = \{(x, y, \sqrt{3}) : x^2 + y^2 = 1\},$$

κατά συνέπεια το Σ είναι το τμήμα της **μπάλας**

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\},$$

πάνω από τον **δίσκο**

$$D = \{(x, y, \sqrt{3}) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

• Σε **καρτεσιανές** συντεταγμένες: $(x, y, z) \in \Sigma$ αν και μόνο αν

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, \end{cases} \qquad \text{οπότε} \qquad V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx.$$

• Σε **κυλινδρικές** συντεταγμένες: $x^2 + y^2 = r^2$

$$\begin{cases} 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ \sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{4-r^2}, \end{cases} \qquad \text{οπότε} \qquad V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta.$$

• Σε **σφαιρικές** συντεταγμένες: Η απόσταση ρ ενός τυχαίου σημείου του Σ εξαρτάται από την ϕ. Για παράδειγμα για $\phi = 0$, δηλαδή κατά μήκος του z-άξονα είναι $\sqrt{3} \leq \rho \leq 2$, ενώ για $\phi = \pi/6$ είναι $\rho = 2$ (γιατί;). Έτσι από την $z = \rho\cos\phi = \sqrt{3}$ βρίσκουμε $\rho = \sqrt{3}\sec\phi$ κατά συνέπεια

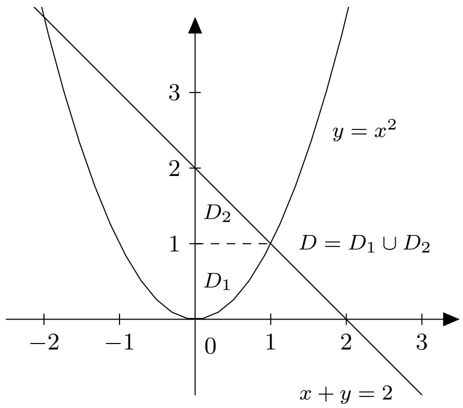
$$\begin{cases} 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi/6 \\ \sqrt{3}\sec\phi \leq \rho \leq 2, \end{cases} \qquad \text{οπότε} \qquad V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_{\sqrt{3}\sec\phi}^{2} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

Θ5. Σχεδιάστε το χωρίο D στο **πρώτο τεταρτημόριο** μεταξύ του y-άξονα, της ευθείας $x+y=2$ και της παραβολής $y=x^2$. Στη συνέχεια συμπληρώστε τα άκρα σε κάθε ένα από τα ολοκληρώματα

$$A(D)=\iint_D dA=\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} dy\,dx=\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} dx\,dy,$$

χωρίς να υπολογίσετε κάποιο από αυτά, ώστε να δίνουν το εμβαδόν $A(D)$ του D.

Σχόλια και Λύση



Η ευθεία $x+y=2$ και η παραβολή $y=x^2$ τέμνονται στο σημείο $(1,1)$, έτσι εκφράζοντας το D σαν χωρίο τύπου I και II θα έχουμε αντίστοιχα

$$\text{τύπου I}\quad (x,y):\begin{cases} 0\le x\le 1\\ x^2\le y\le 2-x,\end{cases}\qquad \text{και}\qquad \text{τύπου II}\quad (x,y):\begin{cases} 0\le y\le 2\\ 0\le x\le h(y),\end{cases}$$

όπου

$$h(y)=\begin{cases}\sqrt{y} & 0\le y\le 1\\ 2-y & 1\le y\le 2.\end{cases}$$

Έτσι

$$A(D)=\int_0^1\int_{x^2}^{2-x} dy\,dx=\int_0^2\int_0^{h(y)} dx\,dy.$$

Σημείωση. Στην περίπτωση που εκφράζουμε το D σαν χωρίο τύπου II βλέπουμε ότι $D=D_1\cup D_2$, όπου

$$D_1=\{(x,y):0\le y\le 1\ \text{ και }\ 0\le x\le\sqrt{y}\}$$
$$D_2=\{(x,y):1\le x\le 2\ \text{ και }\ 0\le y\le 2-y\}$$

κατά συνέπεια

$$A(D)=A(D_1)+A(D_2)=\int_0^1\int_1^{\sqrt{y}} dx\,dy+\int_1^2\int_0^{2-y} dx\,dy.$$

Θ6. Αφού δείξετε ότι η εξίσωση

$$(2e^{2x}\sin y + 2xy) + (e^{2x}\cos y + x^2)y' = 0$$

είναι ακριβής, στη συνέχεια να τη λύσετε.

Σχόλια και Λύση

Θυμίζουμε ότι η εξίσωση

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

είναι ακριβής αν και μόνο αν υπάρχει ομαλή συνάρτηση $\psi(x,y)$ τέτοια ώστε $\psi_x = M$ και $\psi_y = N$. Στη περίπτωση αυτή η εξίσωση ισοδυναμεί με την

$$\frac{d}{dx}\psi(x,y(x)) = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \psi_x + \psi_y y' = 0$$

από την οποία προκύπτει η λύση της διαφορικής εξίσωσης σε πεπλεγμένη μορφή. Η (φυσιολογική) ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η εξίσωση ακριβής είναι

$$M_y = N_x \Leftrightarrow \psi_{xy} = \psi_{yx}.$$

Για την δοσμένη εξίσωση έχουμε ότι η σχετική συνθήκη ικανοποιείται αφού

$$(2e^{2x}\sin y + 2xy)_y = 2e^{2x}\cos y + 2x = (e^{2x}\cos y + x^2)_x,$$

επομένως υπάρχει ομαλή συνάρτηση $\psi(x,y)$ με

$$\psi_x = 2e^{2x}\sin y + 2xy, \qquad \text{και} \qquad \psi_y = e^{2x}\cos y + x^2.$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς x βρίσκουμε

$$\psi = e^{2x}\sin y + x^2 y + h(y),$$

όπου $h(y)$ είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης (ως προς x). Παραγωγίζοντας την έκφραση που βρήκαμε θέλουμε

$$\psi_y = e^{2x}\cos y + x^2 + h'(y) = e^{2x}\cos y + x^2.$$

Από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε ότι $h'(y) = 0$, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε $h(y) = 0$, κατά συνέπεια $\psi(x,y) = e^{2x}\sin y + x^2 y$, και η λύση της διαφορικής εξίσωσης δίνεται, έμπλεκτα, από τη σχέση

$$\psi(x,y) = c \Leftrightarrow e^{2x}\sin y + x^2 y = c,$$

όπου c είναι μια σταθερά.

Θ7. Με χρήση του μετασχηματισμού Laplace να βρεθεί η λύση του ΠΑΤ

$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6.$$

Σχόλια και Λύση

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέλη της εξίσωσης, από γραμμικότητα έχουμε

$$\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} + 9\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\}.$$

Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού, θέτοντας $Y = \mathcal{L}\{y\}$, προκύπτει η εξίσωση

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) - 6(sY - y(0)) + 9Y = \mathcal{L}\{t^2\}(s-3).$$

Επειδή $\mathcal{L}\{t^2\} = 1/s$ αντικαθιστώντας τις αρχικές τιμές έχουμε

$$\begin{aligned}
(s^2 - 6s + 9)Y - 2s + 6 &= \frac{2}{(s-3)^3} \\
(s-3)^2 Y - 2(s-3) &= \frac{2}{(s-3)^3} \\
Y &= \frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5},
\end{aligned}$$

ή

$$Y = 2\mathcal{L}\{1\}(s-3) + \frac{1}{12}\mathcal{L}\{t^4\}(s-3),$$

κατά συνέπεια

$$y = 2e^{3t} + \frac{1}{12} t^4 e^{3t}.$$

Θ8. (α΄) Δείξτε ότι υπάρχει, υπολογίζοντάς το, $c \in \mathbb{R}$ ώστε $(1+i)^9 = c(1+i)$.

(β΄) Να βρεθούν οι ρίζες z_0, z_1, z_2 του $i^{1/3}$.

Σχόλια και Λύση

(α΄) Επειδή

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{4}\right),$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
(1+i)^9 &= (\sqrt{2})^9\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{4}\right)^9 \\
&= (\sqrt{2})^9\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) \\
&= (\sqrt{2})^9\left[\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= (\sqrt{2})^9\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= (\sqrt{2})^8(1+i)
\end{aligned}$$

κατά συνέπεια $c = 2^{8/2} = 16$.

(β΄) Επειδή

$$i = 0 + i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

οι τρίτες ρίζες του μιγαδικού αριθμού i είναι οι

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Έτσι οι ζητούμενοι μιγαδικοί αριθμοί είναι οι

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\
z_1 &= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\
z_2 &= \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.
\end{aligned}$$

Σαν επαλήθευση, για παράδειγμα

$$z_2^3 = (-i)^3 = (-1)^3 i^3 = (-1)i^2 i = (-1)(-1)i = i.$$
