*ΣΕΙΡΕΣ: Συγκλιση: ·Γενικό $\left\{\lim_{n\to\infty} S_n \begin{cases} \to = S, & \text{η σειρα συγκλίνει στο } S \\ \to & \text{δεν υπαρχει, η σειρα αποκλίνει} \end{cases}\right.$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$, βαθμος $P(n) = p$, βαθμος $Q(n) = q$. Συγκλιση $\iff p < q-1$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ: $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$. Συγκλιση $\iff |r| < 1$, Αθροισμα $\to \frac{r'}{1-r}$

ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ: Εστω $0 \le a_n \le b_n$ $\forall n$. Τοτε:

$\left\{\begin{array}{l} \text{Αν η } \sum^{\infty} b_n \text{ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η } \sum^{\infty} a_n. \\ \text{Αν η } \sum^{\infty} a_n \text{ αποκλίνει, θα αποκλίνει και η } \sum^{\infty} b_n. \end{array}\right\}$

ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΛΟΓΟΥ: Εστω $0 \le a_n$, $0 \le b_n$ $\forall n$. Τοτε αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =$

$\left\{\begin{array}{l} = A,\ A \neq 0 \Rightarrow \text{οι σειρες } \sum a_n, \sum b_n \text{ συγκλίνουν (αποκλίνουν και οι 2)} \\ = 0,\ \sum b_n \text{ συγκλίνει} \Rightarrow \text{η } \sum a_n \text{ συγκλίνει} \\ = +\infty,\ \sum b_n \text{ αποκλίνει} \Rightarrow \text{η } \sum a_n \text{ αποκλίνει} \end{array}\right\}$

ΟΡΙΣΜΑ: Εστω $L = \lim_{n\to\infty} n^p a_n$ τοτε αν $\begin{cases} p > 1 \text{ και } L \in \mathbb{R}, \text{ η } \sum a_n \text{ συγκλίνει} \\ p \le 1 \text{ και } L \neq 0, \text{ η } \sum a_n \text{ αποκλίνει} \end{cases}$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ: Εστω $0 \le a_n$, $a_n = f(n)$, $f(x) \ge 0$, $f(x) \searrow$, συνεχής.
Τοτε $\exists$ υπαρξη $\lim_{n\to\infty} \int_k^n f(x)\,dx \iff$ σύγκλιση $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$.

ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΗ: $\left\{\begin{array}{l} |a_{n+1}| \le |a_n| \ \forall n \\ \text{και} \\ \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \end{array}\right\} \iff$ Σύγκλιση.

σφαλμα $\left\{\begin{array}{l} \cdot \text{Για } 2M \text{ πρωτους ορους εχω } 0 < \overset{\text{σφαλμα}}{r} \le a_{2M+1} \\ \cdot \text{Για } 2M+1 \text{ -//- -//- -//- } 0 > r \ge a_{2M+2} \end{array}\right.$ (δεδομενου οτι οι μονοι $\to$ θετικα οροι)

ΑΠΟΛΥΤΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ: $\sum |a_n|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum a_n$ συγκλίνει
·Εαν η $\sum a_n$ συγκλίνει αλλα η $\sum |a_n|$ αποκλίνει $\Rightarrow$ σύγκλιση υπο συνθ.

ΜΗΚΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ S: $C: \{x = f(t), y = g(t)\}$, $t \in [a,b]$, τοτε $S = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt$

* Παραγωγίζω x, y, τετραγωνίζω, προσθετω, σχηματίζω τετράγωνο, διωχνω τη ρίζα.

ΛΟΓΟΥ (D'ALEMBERT): Έστω $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

ΡΙΖΑΣ (CAUCHY): -//- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$

RAABE: -//- $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = L^{-1}$

Τότε:
- $L<1 \Rightarrow$ σύγκλιση
- $L>1 \Rightarrow$ απόκλιση
- $L=1 \Rightarrow$ "Το κριτήριο δεν εφαρμόζεται"

(*Το L^{-1} αντιστρέφει τις ανισότητες* δηλαδή για Raabe όριο $>1 \Rightarrow$ σύγκλιση, $<1 \Rightarrow$ απόκλιση)

~~Μήκος καμπύλης $C=\{x=f(t),\ y=g(t)\}$ ... $= \int_a^b \sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}\,dt$~~

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ Σύγκλιση για $|x|<R$, απόκλιση για $|x|>R$.
Για $|x|=R$ προσδιορίζω ξεχωριστά για $x=R$, $x=-R$. Το $(-R, R)$ διάστημα σύγκλισης.
Αν $R=0$, απαιτείται $x=0$, Αν $R=\infty$, η σειρά συγκλίνει $\forall x$

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ TAYLOR: $f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)^1}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \dots$

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ MACLAURIN: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}\right) = f(0) + f'(0)\frac{x^1}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \dots$

Μέγιστο Σφάλμα
Για n πρώτους όρους: $|R_{nmax}| \leq |a_{n+1}| \Rightarrow |R_{nmax}| \leq \left| f^{(n+1)}(0)\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}\right|$

Για να βρω πόσους όρους θέλω (n) για ακρίβεια (κ) δεκαδικών ψηφίων, λύνω $\left| f^{(n+1)}(0)\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{1}{2}\cdot 10^{-\kappa}$. Δοκιμάζω διάφορα n, βρίσκω το ελάχιστο n για το οποίο ισχύει.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΡΙΖΕΣ: Έστω πολ/μα $F(x)=\alpha x^f+\dots$, $Q(x)=\beta x^q+\dots$, $P(x)=\gamma x^p+\dots$

Για τον υπολογισμό του $I = \int\frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ θέτω $\boxed{I = F(x)\sqrt{Q(x)} + \kappa\int\frac{1}{\sqrt{Q(x)}}}$ (1)

με $f = p - q + 1$. Διαφορίζω την (1), προκύπτει

$$\frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}} = F'(x)\sqrt{Q(x)} + \frac{1}{2}F(x)\frac{1}{\sqrt{Q(x)}}\cdot Q'(x) + \kappa\frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(x) = F'(x)Q(x) + \frac{1}{2}F(x)Q'(x) + \kappa.$$

Από ισότητα πολ/μων, βρίσκω το $F(x)$, κ, αντικαθιστώ στην (1). Βρίσκω το I (εύκολα αν $\kappa=0$, με τριγωνομετρικά ολοκληρώματα για $\kappa\neq 0$).