

**Οικονομική Θεωρία και Αλγόριθμοι**  
**Εξεταστική Περίοδος Ιανουαρίου-Φεβρουαρίου 2012**

**Θέμα 1 (20%)** Θεωρήστε το παρακάτω παίγνιο διπίνακα.

	B	S	X
B	4, 2	0, 0	0, 1
S	0, 0	2, 4	1, 3

Να βρείτε όλες τις ισορροπίες Nash στις οποίες το στήριγμα κάθε παίκτη έχει μέγεθος τουλάχιστον 2.

**Θέμα 2 (20%)** Ένα προϊόν παράγεται από 2 βιομηχανίες  $B_1$  και  $B_2$ . Το κόστος για τη βιομηχανία  $B_i$  όταν παράγει  $q_i$  μονάδες προϊόντος είναι  $C_i(q_i) = q_i^2$ . Όλη η ποσότητα προϊόντος  $Q$  που παράγεται πωλείται στην τιμή  $P(Q) = a - Q$  ανά μονάδα προϊόντος, για κάποια σταθερά  $a$ . Να βρείτε τις ποσότητες  $q_1, q_2$  που πρέπει να παράζουν οι δύο βιομηχανίες ώστε να έχουμε ισορροπία.

**Θέμα 3 (60%)** Θεωρήστε  $m$  μηχανές με ταχύτητες επεξεργασίας  $s_1, s_2, \dots, s_m$  (σε Mbytes/sec) και  $n$  χρήστες με εργασίες μεγέθους  $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$  (σε Mbytes). Κάθε χρήστης καλείται να επιλέξει μια μηχανή στην οποία θα αναθέσει την εργασία του. Το κόστος για ένα χρήστη είναι η συνολική καθυστέρηση στη μηχανή που επιλέγει, δηλαδή ισούται με το συνολικό φορτίο που ανατίθεται στη μηχανή που επιλέγει διά την ταχύτητα επεξεργασίας της μηχανής αυτής.

- (α) Να αποδείξετε ότι η ανάθεση των εργασιών σύμφωνα με τον παρακάτω αλγόριθμο οδηγεί σε αγνή ισορροπία Nash: Εξετάζουμε τα φορτία από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο, και αναθέτουμε το επόμενο φορτίο  $w_i$  στη μηχανή που ελαχιστοποιεί το κόστος του χρήστη  $i$ . (Υπόδειξη: με επαγωγή στο  $i$ .)
- (β) Για την περίπτωση που  $w_1 = w_2 = \dots = w_n = 1$ ,  $m = 2$ ,  $s_1 = 1$ , και  $s_2 = 2$ , να εξετάσετε αν υπάρχει ισορροπία Nash όπου όλοι οι χρήστες επιλέγουν με την ίδια πιθανότητα  $p_1 > 0$  την πρώτη μηχανή και με την ίδια πιθανότητα  $p_2 = 1 - p_1 > 0$  τη δεύτερη μηχανή.
- (γ) Για την περίπτωση που  $n = m = 2$ ,  $w_1 = w_2 = 1$ ,  $s_1 = 1$ , και  $s_2 = 2$ , να υπολογίσετε το κόστος της αναρχίας του συστήματος. Ως Κοινωνικό Κόστος θεωρήστε τη μέγιστη καθυστέρηση σε μια μηχανή (makespan).

Καλή επιτυχία