

Οικονομική Θεωρία και Αλγόριθμοι - Εξεταστική Περίοδος Ιανουαρίου 2013

~~Θέμα 1.~~ (25%) Έστω ότι  $n$  βιομηχανίες  $B_1, \dots, B_n$  παράγουν το ίδιο προϊόν σε ποσότητες  $q_1, \dots, q_n$ , αντίστοιχα. Έστω ότι η τιμή του προϊόντος ανά μονάδα διαμορφώνεται με βάση τον τύπο  $P = a - Q$ , όπου  $Q = q_1 + \dots + q_n$ , για κάποια αρκετά μεγάλη σταθερά  $a$ . Έστω επίσης ότι το κόστος της βιομηχανίας  $B_i$  για την παραγωγή  $q_i$  μονάδων προϊόντος είναι  $C_i(q_i) = cq_i$  για κάθε  $i \in \{1, \dots, n\}$ , όπου  $c$  μια θετική σταθερά. Δώστε τη συνάρτηση ωφέλειας κάθε βιομηχανίας και βρείτε τις ποσότητες προϊόντος που παράγουν οι βιομηχανίες σε μια ισορροπία.

~~Θέμα 2.~~ (20%) Δίνεται ένα παίγνιο 2 παικτών με σύνολα αγνών στρατηγικών  $S_1$  και  $S_2$ , και δύο περιγράμματα (μικτών) στρατηγικών  $(a, c)$  και  $(b, c)$ . Έστω  $d$  η μικτή στρατηγική του παίκτη 1 που ορίζεται ως εξής:

$$d(s_1) = \frac{a(s_1) + 2b(s_1)}{3} \quad \forall s_1 \in S_1 .$$

Να αποδειχθεί ότι αν τα  $(a, c)$  και  $(b, c)$  είναι ισορροπίες Nash τότε το περίγραμμα  $(d, c)$  είναι επίσης ισορροπία Nash.

~~Θέμα 3.~~ (25 %) Δίνεται το παρακάτω παίγνιο διπίνακα.

	L	M	R
T	$a, b$	1, 1	0, 0
B	0, 0	1, 1	$b, a$

Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι  $a, b$  ώστε να υπάρχει ισορροπία Nash στην οποία ο παίκτης γραμμών επιλέγει με πιθανότητα  $1/2$  την T και ο παίκτης στηλών επιλέγει με πιθανότητα  $1/2$  την L και με πιθανότητα  $1/2$  την R;

~~Θέμα 4.~~ (30%) Θεωρήστε  $n$  χρήστες με εργασίες μεγέθους 1 ο καθένας και 2 μηχανές  $M_1$  και  $M_2$ . Κάθε χρήστης καλείται να επιλέξει μια μηχανή όπου θα αναθέσει την εργασία του. Η καθυστέρηση στη μηχανή  $M_1$  δίνεται από τη σχέση  $d_1(x) = x^2$ , όπου  $x$  το συνολικό της φορτίο. Αντίστοιχα η καθυστέρηση στη  $M_2$  δίνεται από τη σχέση  $d_2(x) = 2x$ . Το κόστος κάθε χρήστη μοσύται με την καθυστέρηση στη μηχανή που επιλέγει.

- (α) Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί το  $n$  έτσι ώστε να υπάρχει αγνή ισορροπία Nash όπου ακριβώς 10 χρήστες επιλέγουν τη μηχανή  $M_1$  και οι υπόλοιποι τη  $M_2$ ;
- (β) Για ποια τιμή του  $n$  υπάρχει ισορροπία Nash όπου όλοι οι χρήστες επιλέγουν ισοπίθανα κάθε μία από τις δύο μηχανές;
- (γ) Για κάθε περίγραμμα αγνών στρατηγικών  $s = (s_1, \dots, s_n)$  όπου  $s_i \in \{M_1, M_2\}$  για κάθε  $i$ , συμβολίζουμε με  $n_1(s), n_2(s)$  το συνολικό πλήθος χρηστών που επιλέγουν τη  $M_1, M_2$  αντίστοιχα, δηλαδή

$$n_1(s) = |\{i : s_i = M_1\}| \quad \text{και} \quad n_2(s) = |\{i : s_i = M_2\}| .$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $\Phi(s) = \sum_{k=0}^{n_1(s)} k^2 + 2 \sum_{k=0}^{n_2(s)} k$  είναι συνάρτηση δυναμικού για το παίγνιο.