

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

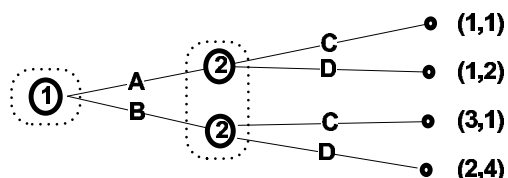
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ  
ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

ΠΑΤΡΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2007



**Άσκηση 1** Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά ένα παίγνιο σε εκτατική (extensive) μορφή. Τα πλαίσια με τις διακεκομμένες γραμμές καθορίζουν τις καταστάσεις πληροφόρησης.



- (α) Είναι το παιχνίδι αυτό τέλειας πληροφόρησης και γιατί;
- (β) Να αναπαραστήσετε το παίγνιο αυτό σε κανονική (στρατηγική) μορφή.

**Λύση.**

- (α) Το παίγνιο δεν είναι τέλειας πληροφόρησης επειδή οι δύο κόμβοι του παίκτη 2 ανήκουν στην ίδια κατάσταση πληροφόρησης.
- (β) Το παίγνιο σε στρατηγική μορφή είναι το  $\Gamma = \langle N, (C_1, C_2), (u_1, u_2) \rangle$  όπου το σύνολο των παικτών είναι το  $N = \{1, 2\}$ , το σύνολο αγνών στρατηγικών για τον παίκτη 1 είναι το  $C_1 = \{A, B\}$ , το σύνολο αγνών στρατηγικών για τον παίκτη 2 είναι το  $C_2 = \{C, D\}$ , και οι ωφέλειες  $u_1, u_2$  δίνονται από τον παρακάτω διπίνακα:

	C	D	
A	1,1	1,2	
B	3,1	2,4	

Για παράδειγμα, στο περίγραμμα αγνών στρατηγικών  $(B, C)$  η ωφέλεια για τον παίκτη 1 είναι  $u_1(B, C) = 3$  και η ωφέλεια για τον παίκτη 2 είναι  $u_2(B, C) = 1$ .

□

**Άσκηση 2** Έστω  $n$  παίκτες  $(1, \dots, n)$ , ο καθένας έχοντας μία εργασία προς εκτέλεση μεγέθους  $w_i$  bytes ( $i = 1 \dots n$ ). Έστω  $m$  πανομοιότυπες μηχανές  $(M_1, \dots, M_m)$ . Μία αγνή στρατηγική του κάθε παίκτη είναι η τοποθέτηση της εργασίας του σε κάποια μηχανή. Έστω  $\Pi = \{1, \dots, n\}$ ,  $M = \{M_1, \dots, M_m\}$ . Μία αγνή (pure) στρατηγική του συνόλου των παικτών είναι μία συνάρτηση

$$A : \Pi \rightarrow M$$

έτσι ώστε  $\forall i \in \Pi, A(i) = M_j \in M$  για κάποιο  $j$ .

Δοθήσης της  $A$ , το εγωιστικό κόστος του παίκτη  $i$  είναι το άθροισμα όλων των  $w_k$  που έχουν πάει στη μηχανή  $A(i)$ . Δηλαδή η ωφέλεια (payoff) του παίκτη  $i$  είναι το  $-\sum_{k:A(k)=A(i)} w_k$ .

(α) Για 3 παίκτες και 2 μηχανές αποδείξτε ότι το παίγνιο έχει τουλάχιστον μία αγνή (pure) ισορροπία Nash.

Υπόδειξη: Φανταστείτε ότι τοποθετείτε τις εργασίες μία μία.

(β) Για κάθε παίκτη  $i$ , μία μικτή στρατηγική είναι ένα διάνυσμα πιθανοτήτων

$$p_i^j = \Pr\{\text{o } i \text{ βάζει την εργασία του στη μηχανή } M_j\}.$$

Το Support του παίκτη  $i$  είναι το σύνολο  $S_i = \{j : p_i^j > 0\}$ .

Δηλαδή, στις μικτές ισορροπίες Nash ο κάθε παίκτης ελαχιστοποιεί το εγωιστικό κόστος του

$$\lambda_i^j = w_i + \sum_{k \neq i} w_k p_k^j$$

στις μηχανές  $M_j : j \in S_i$ .

(β1) Δείξτε ότι αν  $\forall i \quad S_i = \{1, 2, \dots, m\}$  τότε η στρατηγική

$$\forall i \forall j \quad p_i^j = \frac{1}{m}$$

είναι ισορροπία Nash.

(β2) Για 2 παίκτες και 2 μηχανές βρείτε όλες τις ισορροπίες Nash (αγνές και μικτές).

**Λύση.**

(α) Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι  $w_1 \geq w_2 \geq w_3$ . Έστω το περίγραμμα αγνών στρατηγικών  $A$  όπου  $A(1) = M_1$  και  $A(2) = A(3) = M_2$ . Θα δείξουμε ότι το  $A$  είναι αγνή ισορροπία Nash. Οι ωφέλειες των παικτών στο περίγραμμα  $A$  είναι:

$$\begin{aligned}u_1(A) &= -w_1 \\u_2(A) &= -w_2 - w_3 \\u_3(A) &= -w_2 - w_3 .\end{aligned}$$

Έστω ότι ο παίκτης 1 αλλάζει στρατηγική και επιλέγει τη μηχανή  $M_2$ . Έστω  $(M_2, A_{-1})$  το περίγραμμα αγνών στρατηγικών που προκύπτει. Στο νέο αυτό περίγραμμα και οι τρεις παίκτες επιλέγουν την ίδια μηχανή  $M_2$ , επομένως η ωφέλεια του παίκτη 1 γίνεται

$$u_1(M_2, A_{-1}) = -w_1 - w_2 - w_3 < -w_1 = u_1(A).$$

Έστω ότι ο παίκτης 2 αλλάζει στρατηγική και επιλέγει τη μηχανή  $M_1$ . Έστω  $(M_1, A_{-2})$  το περίγραμμα αγνών στρατηγικών που προκύπτει. Στο νέο αυτό περίγραμμα η ωφέλεια του παίκτη 2 γίνεται

$$u_2(M_1, A_{-2}) = -w_2 - w_1 \leq -w_2 - w_3 = u_2(A).$$

Έστω ότι ο παίκτης 3 αλλάζει στρατηγική και επιλέγει τη μηχανή  $M_1$ . Έστω  $(M_1, A_{-3})$  το περίγραμμα αγνών στρατηγικών που προκύπτει. Στο νέο αυτό περίγραμμα η ωφέλεια του παίκτη 3 γίνεται

$$u_3(M_1, A_{-3}) = -w_3 - w_1 \leq -w_3 - w_2 = u_3(A).$$

Επομένως δεν υπάρχει παίκτης που να έχει συμφέρον να αποκλίνει μονομερώς από το περίγραμμα  $A$ , άρα το  $A$  είναι αγνή ισορροπία Nash.

(β1) Αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε παίκτη  $i$ , το εγωιστικό κόστος  $\lambda_i^j$  είναι το ίδιο για κάθε μηχανή  $M_j \in M$ . Πράγματι, για κάθε για κάθε μηχανή  $M_j$ ,

$$\lambda_i^j = w_i + \sum_{k \neq i} w_k \frac{1}{m} = w_i + \frac{1}{m} \sum_{k \neq i} w_k.$$

(β2) Στην περίπτωση 2 παικτών και 2 μηχανών, η στρατηγική (κανονική) μορφή του παιγνίου δίνεται από τον παρακάτω διπίνακα:

	$M_1$	$M_2$
$M_1$	$-w_1 - w_2, -w_1 - w_2$	$-w_1, -w_2$
$M_2$	$-w_1, -w_2$	$-w_1 - w_2, -w_1 - w_2$

*Αγνές ισορροπίες.* Το περίγραμμα αγνών στρατηγικών  $(M_1, M_1)$  δεν είναι αγνή ισορροπία Nash, αφού συμφέρει π.χ. τον παίκτη 1 να προτιμήσει την αγνή στρατηγική  $M_2$  ώστε να έχει ωφέλεια  $-w_1 > -w_1 - w_2$ . Όμοια αποδεικνύεται ότι και το  $(M_2, M_2)$  δεν είναι αγνή ισορροπία Nash. Αντιθέτως, εύκολα παρατηρούμε ότι το περίγραμμα  $(M_1, M_2)$  είναι αγνή ισορροπία Nash, αφού

$$u_1(M_1, M_2) = -w_1 > -w_1 - w_2 = u_1(M_2, M_2)$$

και

$$u_2(M_1, M_2) = -w_2 > -w_1 - w_2 = u_2(M_1, M_1).$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι και το  $(M_2, M_1)$  είναι επίσης αγνή ισορροπία Nash.

*Μικτές ισορροπίες.* Σε μια μικτή ισορροπία, τουλάχιστον ένας παίκτης επιλέγει και τις 2 μηχανές με αυστηρά θετική πιθανότητα. Έστω  $\mathbf{p}$  η μικτή στρατηγική του παίκτη 1 στην οποία επιλέγει με πιθανότητα  $p$  τη μηχανή  $M_1$  (άρα με πιθανότητα  $1 - p$  επιλέγει την  $M_2$ ) και έστω ότι  $\mathbf{q}$  η μικτή στρατηγική του παίκτη 2 στην οποία επιλέγει με πιθανότητα  $q$  τη μηχανή  $M_1$  (άρα με πιθανότητα  $1 - q$  επιλέγει την  $M_2$ ).

Έστω ότι μόνο ένας παίκτης, π.χ. ο 1, επιλέγει και τις 2 μηχανές με αυστηρά θετική πιθανότητα. Τότε ο παίκτης 2 επιλέγει με πιθανότητα 1

τη μηχανή  $\hat{M} \in \{M_1, M_2\}$ . Για να έχουμε ισορροπία Nash πρέπει

$$u_1(M_1, \hat{M}) = u_1(M_2, \hat{M})$$

ή ισοδύναμα  $-w_1 = -w_1 - w_2$ , άτοπο. Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει μικτή ισορροπία όπου μόνο ο παίκτης 2 επιλέγει και τις 2 μηχανές με αυστηρά θετική πιθανότητα.

Επομένως μένει να εξετάσουμε την περίπτωση όπου  $0 < p < 1$  και  $0 < q < 1$  (οπότε κάθε παίκτης επιλέγει και τις δύο μηχανές με αυστηρά θετική πιθανότητα). Για να έχουμε ισορροπία Nash, πρέπει να ισχύει ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} u_1(M_1, \mathbf{q}) &= u_1(M_2, \mathbf{q}) \\ (-w_1 - w_2)q - w_1(1 - q) &= -w_1q + (-w_1 - w_2)(1 - q) \\ q &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} u_2(M_1, \mathbf{p}) &= u_2(M_2, \mathbf{p}) \\ (-w_1 - w_2)p - w_2(1 - p) &= -w_2p + (-w_1 - w_2)(1 - p) \\ p &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα η μοναδική μικτή ισορροπία είναι η  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  όπου  $p = q = \frac{1}{2}$ .

□

**Άσκηση 3** Ένα έγκλημα έχει  $n$  μάρτυρες (παίκτες). Κάθε παίκτης έχει κέρδος  $u$  αν η αστυνομία ειδοποιηθεί (μέσω τηλεφώνου) αλλά έχει κόστος  $c$  ( $u > c > 0$ ) αν ο ίδιος τηλεφωνήσει. Δηλαδή ο κάθε παίκτης έχει 2 αγνές στρατηγικές (τηλεφωνώ, όχι). Η συνάρτηση των payoffs για τον παίκτη  $i$  δίνει 0 στο profile όπου κανείς δεν καλεί, δίνει  $u - c$  σε κάθε profile στο οποίο ο  $i$  καλεί και δίνει  $u$  στο κάθε profile όπου τουλάχιστον κάποιος καλεί αλλά ο παίκτης  $i$  δεν καλεί. Επίσης, η συνάρτηση των payoffs είναι η ίδια για όλους.

Ορισμός: Μια ισορροπία Nash καλείται συμμετρική αν ο κάθε παίκτης στην ισορροπία έχει την ίδια (αγνή ή μικτή) στρατηγική.

- (α) Δείξτε ότι το παίγνιο δεν έχει αγνή συμμετρική ισορροπία Nash.
- (β) Δείξτε ότι το παίγνιο έχει μίαν και μόνο μικτή συμμετρική ισορροπία Nash,  $E$ .
- (γ) Βρείτε τις πιθανότητες της  $E$ .
- (δ) Δείξτε ότι, στην  $E$ , η πιθανότητα κανείς να μην τηλεφωνήσει αυξάνει όταν το  $n$  αυξάνει.

**Λύση.**

Συμβολίζουμε με  $T$  την αγνή στρατηγική “τηλεφωνώ” και με  $\Delta$  την αγνή στρατηγική “δεν τηλεφωνώ”.

- (α) Υπάρχουν δύο δυνατές αγνές συμμετρικές ισορροπίες Nash: το περίγραμμα  $(T, T, \dots, T)$  και το περίγραμμα  $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ .
  - Έστω ότι το περίγραμμα  $(T, T, \dots, T)$  είναι αγνή ισορροπία Nash. Έστω  $(\Delta, T_{-i})$  το περίγραμμα όπου ο παίκτης  $i$  δεν τηλεφωνεί και όλοι οι άλλοι τηλεφωνούν. Τότε

$$u_i(T, T, \dots, T) = u - c < u = u_i(\Delta, T_{-i}),$$

άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι το  $(T, T, \dots, T)$  είναι αγνή ισορροπία Nash.



- Έστω ότι το περίγραμμα  $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$  είναι αγνή ισορροπία Nash. Έστω  $(T, \Delta_{-i})$  το περίγραμμα όπου ο παίκτης  $i$  τηλεφωνεί και όλοι οι άλλοι δεν τηλεφωνούν. Τότε

$$u_i(\Delta, \Delta, \dots, \Delta) = 0 < u - c = u_i(T, \Delta_{-i}),$$

άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι το  $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$  είναι αγνή ισορροπία Nash.

Επομένως το παίγνιο δεν έχει αγνή συμμετρική ισορροπία Nash.

- (β)–(γ) Σε μια μικτή συμμετρική ισορροπία Nash  $\sigma$ , κάθε παίκτης δεν τηλεφωνεί με πιθανότητα  $p$  και τηλεφωνεί με πιθανότητα  $1 - p$ , δηλαδή  $\sigma_i(\Delta) = p$  και  $\sigma_i(T) = 1 - p$  για κάθε παίκτη  $i$ . Είναι

$$\begin{aligned} u_i(T, \sigma_{-i}) &= u - c \quad \text{και} \\ u_i(\Delta, \sigma_{-i}) &= 0 \cdot \Pr\{\text{όλοι οι υπόλοιποι παίκτες επιλέγουν } \Delta\} \\ &\quad + u \cdot (1 - \Pr\{\text{όλοι οι υπόλοιποι παίκτες επιλέγουν } \Delta\}) \\ &= u(1 - p^{n-1}). \end{aligned}$$

Για να είναι το  $\sigma$  συμμετρική μικτή ισορροπία Nash, αρκεί

$$u_i(T, \sigma_{-i}) = u_i(\Delta, \sigma_{-i}).$$

Για να είναι το  $\sigma$  η μοναδική συμμετρική ισορροπία Nash, αρκεί η παραπάνω εξίσωση να έχει μοναδική λύση στο  $(0, 1)$ . Πράγματι, ισχύει ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} u_i(T, \sigma_{-i}) &= u_i(\Delta, \sigma_{-i}) \\ u - c &= u(1 - p^{n-1}) \\ p^{n-1} &= \frac{c}{u} \\ p &= \left(\frac{c}{u}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Άρα το περίγραμμα  $\sigma$  όπου κάθε παίκτης τηλεφωνεί με πιθανότητα  $1 - p$  και δεν τηλεφωνεί με πιθανότητα  $p$  είναι η μοναδική μικτή συμμετρική ισορροπία Nash.

(δ) Η πιθανότητα όλοι οι παίκτες να μην τηλεφωνήσουν είναι

$$\Pr\{\text{όλοι οι παίκτες επιλέγουν } \Delta\} = p^n = \left(\frac{c}{u}\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι το  $\frac{n}{n-1}$  μειώνεται όταν το  $n$  αυξάνει, και επειδή  $\frac{c}{u} < 1$ , προκύπτει ότι η παραπάνω πιθανότητα αυξάνει όταν το  $n$  αυξάνει.

□

**Άσκηση 4** Να αποδείξετε ότι μία μικτή στρατηγική  $\sigma_i$  είναι βέλτιστη αντίδραση (*best response*) σε μία εκτίμηση  $\mu_i$  αν και μόνον αν κάθε αγνή (*pure*) στρατηγική στο στήριγμα (*support*) της  $\sigma_i$  (δηλαδή στο σύνολο των αγνών στρατηγικών του παίκτη  $i$  με μη μηδενική πιθανότητα στη  $\sigma_i$ ) είναι βέλτιστη αντίδραση στην ίδια εκτίμηση  $\mu_i$ .

**Λύση.**

Έστω ότι η μικτή στρατηγική  $\sigma_i \in \Delta(C_i)$  είναι βέλτιστη αντίδραση στην εκτίμηση  $\mu_{-i}$ . Τότε

$$u_i(\sigma_i, \mu_{-i}) \geq u_i(s_i, \mu_{-i}) \quad \forall s_i \in C_i \quad (1)$$

και επομένως

$$\begin{aligned} u_i(\sigma_i, \mu_{-i}) &\geq \max_{s_i^* \in C_i} u_i(s_i^*, \mu_{-i}) \\ \sum_{s_i \in C_i} \sigma_i(s_i) u_i(s_i, \mu_{-i}) &\geq \max_{s_i^* \in C_i} u_i(s_i^*, \mu_{-i}) . \end{aligned}$$

Έστω ότι υπάρχει  $s'_i$  με  $\sigma_i(s'_i) > 0$  τέτοια ώστε

$$u_i(s'_i, \mu_{-i}) < \max_{s_i^* \in C_i} u_i(s_i^*, \mu_{-i}) .$$

Τότε

$$\sigma_i(s'_i) u_i(s'_i, \mu_{-i}) < \sigma_i(s'_i) \max_{s_i^* \in C_i} u_i(s_i^*, \mu_{-i})$$

και

$$\begin{aligned} \sum_{s_i \in C_i} \sigma_i(s_i) u_i(s_i, \mu_{-i}) &= \sum_{s_i \in C_i, s_i \neq s'_i} \sigma_i(s_i) u_i(s_i, \mu_{-i}) + \sigma_i(s'_i) u_i(s'_i, \mu_{-i}) \\ &\leq \sum_{s_i \in C_i, s_i \neq s'_i} \sigma_i(s_i) \max_{s_i^* \in C_i} u_i(s_i^*, \mu_{-i}) + \sigma_i(s'_i) u_i(s'_i, \mu_{-i}) \\ &= (1 - \sigma_i(s'_i)) \max_{s_i^* \in C_i} u_i(s_i^*, \mu_{-i}) + \sigma_i(s'_i) u_i(s'_i, \mu_{-i}) \\ &< (1 - \sigma_i(s'_i)) \max_{s_i^* \in C_i} u_i(s_i^*, \mu_{-i}) + \sigma_i(s'_i) \max_{s_i^* \in C_i} u_i(s_i^*, \mu_{-i}) \\ &= \max_{s_i^* \in C_i} u_i(s_i^*, \mu_{-i}) , \end{aligned}$$

άτοπο. Επομένως, για κάθε αγνή στρατηγική  $s'_i \in C_i$  τέτοια ώστε  $\sigma_i(s'_i) > 0$  ισχύει ισοδύναμα ότι

$$\begin{aligned} u_i(s'_i, \mu_{-i}) &= \max_{s_i^* \in C_i} u_i(s_i^*, \mu_{-i}) \\ u_i(s'_i, \mu_{-i}) &\geq u_i(s_i, \mu_{-i}) \quad \forall s_i \in C_i, \end{aligned}$$

άρα κάθε αγνή στρατηγική  $s'_i \in C_i$  τέτοια ώστε  $\sigma_i(s'_i) > 0$  είναι βέλτιστη αντίδραση στην εκτίμηση  $\mu_{-i}$ .

Έστω τώρα ότι για κάθε αγνή στρατηγική  $s_i^* \in C_i$  τέτοια ώστε  $\sigma_i(s_i^*) > 0$  ισχύει ότι η  $s_i^*$  είναι βέλτιστη αντίδραση στην εκτίμηση  $\mu_{-i}$ , δηλαδή

$$u_i(s_i^*, \mu_{-i}) \geq u_i(s_i, \mu_{-i}) \quad \forall s_i \in C_i.$$

Επομένως, για κάθε  $s_i^* \in C_i$  τέτοια ώστε  $\sigma_i(s_i^*) > 0$  ισχύει ότι

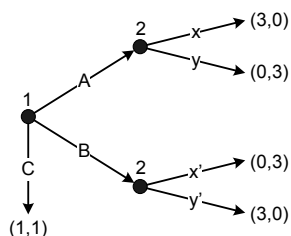
$$u_i(s_i^*, \mu_{-i})\sigma_i(s_i^*) \geq u_i(s_i, \mu_{-i})\sigma_i(s_i^*) \quad \forall s_i \in C_i.$$

Παρατηρήστε ότι η τελευταία σχέση ισχύει (με ισότητα) και για τις αγνές στρατηγικές  $s_i^*$  με  $\sigma_i(s_i^*) = 0$ . Επομένως αθροίζουμε την τελευταία σχέση για όλες τις στρατηγικές  $s_i^* \in C_i$  και έχουμε ισοδύναμα:

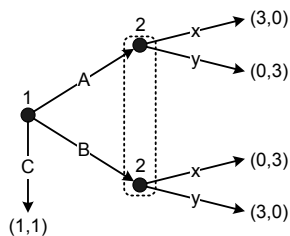
$$\begin{aligned} \sum_{s_i^* \in C_i} u_i(s_i^*, \mu_{-i})\sigma_i(s_i^*) &\geq \sum_{s_i^* \in C_i} u_i(s_i, \mu_{-i})\sigma_i(s_i^*) \quad \forall s_i \in C_i \\ u_i(s_i, \mu_{-i}) &\geq u_i(s_i, \mu_{-i}) \quad \forall s_i \in C_i \end{aligned}$$

επομένως η  $\sigma_i$  είναι βέλτιστη αντίδραση στην εκτίμηση  $\mu_{-i}$ . □

**Άσκηση 5** Θεωρήστε τα ακόλουθα δύο παίγνια σε εκτατική μορφή:



Παίγνιο Π1



Παίγνιο Π2

Σε ποιά (ποιά) από τα δύο παίγνια είναι η  $C$  κυριαρχούμενη στρατηγική για τον παίκτη 1; Δικαιολογήστε αυστηρά (και σύντομα) την απάντησή σας.

Υπενθύμηση: Ο συντομότερος τρόπος για να δείξουμε ότι μία στρατηγική δεν είναι κυριαρχούμενη είναι να αποδείξουμε ότι είναι βέλτιστη αντίδραση σε μία εκτίμηση. Απεναντίας, για να δείξουμε ότι είναι κυριαρχούμενη, αρκεί να βρούμε μικτή στρατηγική που κυριαρχεί επί αυτής.

**Λύση.**

Η στρατηγική (κανονική) μορφή του παιγνίου Π1 δίνεται από τον παρακάτω διπίνακα:

	xx'	xy'	yx'	yy'
C	1,1	1,1	1,1	1,1
A	3,0	3,0	0,3	0,3
B	0,3	3,0	0,3	3,0

Έστω η εκτίμηση  $\mu = (0, 0, 1, 0)$  του παίκτη 1, δηλαδή η εκτίμηση ότι ο παίκτης 2 θα επιλέξει την αγνή στρατηγική  $yx'$ . Τότε

$$u_1(C, \mu) = 1 > 0 = u_1(A, \mu) = u_1(B, \mu),$$

επομένως η  $C$  είναι βέλτιστη αντίδραση για τον παίκτη 1 στην εκτίμηση  $\mu$ , οπότε η  $C$  δεν είναι κυριαρχούμενη στο παίγνιο Π1.

Η στρατηγική (κανονική) μορφή του παιγνίου Π2 δίνεται από τον παρακάτω διπίνακα:

	x	y
C	1,1	1,1
A	3,0	0,3
B	0,3	3,0

Έστω η μικτή στρατηγική  $\sigma_1$  για τον παίκτη 1, όπου  $\sigma_1(A) = \sigma_1(B) = \frac{1}{2}$  και  $\sigma_1(C) = 0$ . Τότε, για κάθε  $s_2 \in \{x, y\}$ ,

$$u_1(C, s_2) = 1 < 1.5 = u_1(\sigma_1, s_2),$$

δηλαδή η  $\sigma_1$  κυριαρχεί επί της  $C$  και επομένως η  $C$  είναι κυριαρχούμενη στο παίγνιο Π2. □

**Άσκηση 6** Ποιά (ποιές) από τις δύο παρακάτω ανισότητες ισχύει (ισχύουν) για κάθε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με σύνολα αγνών στρατηγικών για τους παίκτες 1, 2 τα  $C_1, C_2$  και συναρτήσεις ωφέλειας  $u_1, u_2$  αντίστοιχα;

$$\max_{x \in C_1} \min_{y \in C_2} u_1(x, y) \leq \min_{y \in C_2} \max_{x \in C_1} u_1(x, y) \quad (2)$$

$$\min_{y \in C_2} \max_{x \in C_1} u_1(x, y) \leq \max_{x \in C_1} \min_{y \in C_2} u_1(x, y) \quad (3)$$

Να αποδείξετε αυστηρά (και σύντομα) όποια τυχόν ισχύει και να δώσετε αντιπαράδειγμα για όποια τυχόν δεν ισχύει.

**Λύση.**

Για κάθε  $x' \in C_1$  και για κάθε  $y' \in C_2$  προφανώς ισχύουν οι επόμενες δύο ανισότητες:

$$\begin{aligned} \min_{y \in C_2} u_1(x', y) &\leq u_1(x', y') \\ \max_{x \in C_1} u_1(x, y') &\geq u_1(x', y') \end{aligned}$$

και επομένως

$$\min_{y \in C_2} u_1(x', y) \leq \max_{x \in C_1} u_1(x, y') \quad \forall x' \in C_1, \quad \forall y' \in C_2$$

άρα και

$$\max_{x \in C_1} \min_{y \in C_2} u_1(x, y) \leq \min_{y \in C_2} \max_{x \in C_1} u_1(x, y) .$$

Επομένως η ανισότητα (2) ισχύει.

Αντιθέτως, η ανισότητα (3) δεν ισχύει. Θεωρήστε το παίγνιο “ταίριασμα νομισμάτων”:

	K	Γ
K	1,-1	-1,1
Γ	-1,1	1,-1

Για το παίγνιο αυτό,

$$\max_{x \in C_1} \min_{y \in C_2} u_1(x, y) = -1 < 1 = \min_{y \in C_2} \max_{x \in C_1} u_1(x, y).$$

□

**Άσκηση 7** Έστω  $\Gamma$  ένα πεπερασμένο παίγνιο με σύνολο παικτών  $\{1, \dots, n\}$ .

- (α) Να ορίσετε προσεκτικά την έννοια της κυριαρχούμενης αγνής στρατηγικής για τον παίκτη 1.
- (β) Αληθεύει ότι κάθε παίκτης έχει μία κυριαρχούμενη αγνή στρατηγική; Εάν ναι αποδείξτε το προσεκτικά, εάν όχι δώστε συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα.

**Λύση.**

- (α) Έστω το παίγνιο  $\Gamma = \langle N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$  όπου  $N = \{1, \dots, n\}$  είναι το σύνολο των παικτών,  $C_i$  είναι το σύνολο αγνών στρατηγικών του παίκτη  $i \in N$  και  $u_i : \times_{j=1}^n C_j \rightarrow \mathbf{R}$  είναι η συνάρτηση ωφέλειας του παίκτη  $i \in N$ . Μία αγνή στρατηγική  $s_i \in C_i$  καλείται κυριαρχούμενη (dominated) αν υπάρχει μικτή στρατηγική η οποία κυριαρχεί επί αυτής, δηλαδή αν

$$\exists s_i \in \Delta(C_i) \text{ τέτοια ώστε } u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \forall s_{-i} \in C_{-i}.$$

- (β) Δεν αληθεύει ότι κάθε παίκτης έχει μία κυριαρχούμενη αγνή στρατηγική. Θεωρήστε το παίγνιο “ταίριασμα νομισμάτων”  $\Gamma = \langle N, (C_1, C_2), (u_1, u_2) \rangle$  όπου  $N = \{1, 2\}$ ,  $C_1 = C_2 = \{K, \Gamma\}$  και οι συναρτήσεις ωφέλειας  $u_1, u_2$  δίνονται από τον παρακάτω διπίνακα:

	K	Γ
K	1,-1	-1,1
Γ	-1,1	1,-1

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει κυριαρχούμενη αγνή στρατηγική για τον παίκτη 1 (γραμμές). Έστω οποιαδήποτε στρατηγική  $s_1 \in \Delta(C_1)$  (αγνή ή μικτή). Υποθέστε ότι η  $s_1$  κυριαρχεί επί της αγνής στρατηγικής



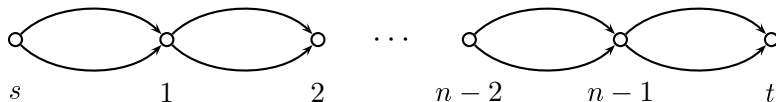
Γ. Τότε πρέπει (ισοδύναμα)

$$\begin{aligned}u_1(\sigma_1, \Gamma) &> u_1(\Gamma, \Gamma) \\-1 \cdot \sigma_1(K) + 1 \cdot \sigma_1(\Gamma) &> 1 \\-1 \cdot \sigma_1(K) + 1 \cdot (1 - \sigma_1(K)) &> 1 \\ \sigma_1(K) &< 0,\end{aligned}$$

άτοπο. Όμοια αποδεικνύουμε ότι ούτε η αγνή στρατηγική K είναι κυριαρχούμενη.

□

**Άσκηση 8** Θεωρήστε το παρακάτω δίκτυο.



Τρεις παίκτες με φορτία  $w_1$ ,  $w_2$  και  $w_3$  αντίστοιχα επιθυμούν να δρομολογήσουν τα φορτία τους από τον κόμβο-πηγή  $s$  προς τον κόμβο-προορισμό  $t$ . Η καθυστέρηση σε κάθε ακμή ισούται με το συνολικό φορτίο που εξυπηρετεί. Βρείτε

(α) μία αγνή ισορροπία Nash και

(β) μία πλήρως μικτή ισορροπία Nash

για το επαγόμενο παίγνιο συμφόρησης.

**Λύση.**

Παρατηρήστε ότι στο δίκτυο υπάρχουν  $2^n$  μονοπάτια από τον κόμβο-πηγή  $s$  προς τον κόμβο-προορισμό  $t$ . Έστω  $\Pi$  το σύνολο όλων των  $s-t$  μονοπατιών του δικτύου. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι  $w_1 \geq w_2 \geq w_3$ .

(α) Έστω  $h \in \Pi$  και  $\ell \in \Pi$  το επάνω και το κάτω μονοπάτι του δικτύου. Θα δείξουμε ότι το περίγραμμα αγνών στρατηγικών  $(h, \ell, \ell)$  (δηλαδή όταν ο παίκτης 1 επιλέγει το μονοπάτι  $h$  και οι παίκτες 2 και 3 το μονοπάτι  $\ell$ ) είναι αγνή ισορροπία Nash. Το κόστος για τους παίκτες 1, 2 και 3 στο περίγραμμα  $(h, \ell, \ell)$  είναι αντίστοιχα

$$\lambda_1(h, \ell, \ell) = nw_1$$

$$\lambda_2(h, \ell, \ell) = n(w_2 + w_3)$$

$$\lambda_3(h, \ell, \ell) = n(w_2 + w_3).$$

Παρατηρήστε τώρα ότι οποιοδήποτε μονοπάτι  $\pi \neq h$  έχει ακριβώς  $k$  κοινές ακμές με το μονοπάτι  $\ell$  και  $n - k$  κοινές ακμές με το μονοπάτι

$h$ , όπου  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Επομένως

$$\begin{aligned}\lambda_1(\pi, \ell, \ell) &= nw_1 + k(w_2 + w_3) \\ &\geq nw_1 + w_2 + w_3 \\ &> nw_1 \\ &= \lambda_1(h, \ell, \ell).\end{aligned}$$

Όμοια, οποιοδήποτε μονοπάτι  $\pi \neq \ell$  έχει ακριβώς  $k$  κοινές ακμές με το μονοπάτι  $h$  και  $n-k$  κοινές ακμές με το μονοπάτι  $\ell$ , όπου  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Επομένως

$$\begin{aligned}\lambda_2(h, \pi, \ell) &= nw_2 + kw_1 + (n-k)w_3 \\ &= nw_2 + nw_3 + k(w_1 - w_3) \\ &\geq n(w_2 + w_3) \\ &= \lambda_2(h, \ell, \ell).\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\lambda_3(h, \ell, \pi) &= nw_3 + kw_1 + (n-k)w_2 \\ &= nw_3 + nw_2 + k(w_1 - w_2) \\ &\geq n(w_2 + w_3) \\ &= \lambda_3(h, \ell, \ell).\end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}\lambda_1(h, \ell, \ell) &\leq \lambda_1(\pi, \ell, \ell) \quad \forall \pi \in \Pi \\ \lambda_2(h, \ell, \ell) &\leq \lambda_2(h, \pi, \ell) \quad \forall \pi \in \Pi \\ \lambda_3(h, \ell, \ell) &\leq \lambda_3(h, \ell, \pi) \quad \forall \pi \in \Pi\end{aligned}$$

επομένως το περίγραμμα  $(h, \ell, \ell)$  είναι αγνή ισορροπία Nash.

(β) Σε μια πλήρως μικτή ισορροπία Nash κάθε παίκτης επιλέγει κάθε μονοπάτι με αυστηρά θετική πιθανότητα. Έστω ότι κάθε παίκτης  $i \in \{1, 2, 3\}$  επιλέγει με πιθανότητα  $\frac{1}{2^n}$  το μονοπάτι  $\pi$ , για κάθε  $\pi \in \Pi$ . Συμβολίζουμε

με  $\sigma$  το περίγραμμα μικτών στρατηγικών που προκύπτει (δηλ.  $\sigma_i(\pi) = \frac{1}{2^n}$  για κάθε παίκτη  $i$  και για κάθε μονοπάτι  $\pi$ ). Έστω  $e$  μια οποιαδήποτε ακμή του δικτύου. Παρατηρήστε ότι η  $e$  ανήκει σε ακριβώς  $2^{n-1}$  μονοπάτια του δικτύου, επομένως στο περίγραμμα  $\sigma$  ο παίκτης  $i \in \{1, 2, 3\}$  χρησιμοποιεί την ακμή  $e$  με πιθανότητα

$$\sum_{\pi: e \in \pi} \sigma_i(\pi) = \sum_{\pi: e \in \pi} \frac{1}{2^n} = 2^{n-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως τα αναμενόμενα κόστη για τους παίκτες 1, 2 και 3 σε οποιοδήποτε μονοπάτι  $\pi$  είναι αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \lambda_1(\pi, \sigma_{-1}) &= \sum_{e \in \pi} w_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_3 = nw_1 + \frac{n(w_1 + w_2)}{2} \\ \lambda_2(\pi, \sigma_{-2}) &= \sum_{e \in \pi} w_2 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_3 = nw_2 + \frac{n(w_1 + w_3)}{2} \\ \lambda_3(\pi, \sigma_{-3}) &= \sum_{e \in \pi} w_3 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2 = nw_3 + \frac{n(w_1 + w_2)}{2}. \end{aligned}$$

Επειδή λοιπόν το αναμενόμενο κόστος για τον παίκτη  $i \in \{1, 2, 3\}$  είναι το ίδιο σε κάθε μονοπάτι και κάθε μονοπάτι ανήκει στο στήριγμα του παίκτη  $i$ , το περίγραμμα  $\sigma$  είναι μια πλήρως μικτή ισορροπία Nash.

□

**Άσκηση 9** Έστω  $G$  ένα παίγνιο σε στρατηγική (κανονική) μορφή με παίκτες  $\{1, 2, \dots, n\}$  και σύνολα αγνών (pure) στρατηγικών  $S_i$ . Έστω επίσης ότι  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $D_i$  είναι το σύνολο των κυριαρχούμενων στρατηγικών του παίκτη  $i$ . Αληθεύει πάντα ότι το παίγνιο όπου το σύνολο των δυνατών στρατηγικών για τους παίκτες  $i = 1, \dots, n$  είναι η συνολοθεωρητική διαφορά  $S_i \setminus D_i$  δεν περιέχει κυριαρχούμενες στρατηγικές; Δικαιολογήστε την απάντησή σας με σύντομη απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

**Λύση.**

Δεν αληθεύει. Θεωρήστε το παρακάτω παίγνιο διπίνακα:

	$L$	$C$	$R$
$T$	0, 8	5, 6	8, 9
$M$	2, 9	6, 5	5, 1
$B$	-1, 5	4, 6	7, 9

Θα εξετάσουμε εάν υπάρχουν κυριαρχούμενες στρατηγικές για κάποιον παίκτη. Η αγνή στρατηγική  $T$  είναι κυριαρχούμενη στρατηγική για τον παίκτη 1 αν και μόνο αν υπάρχει κάποια μικτή στρατηγική για τον παίκτη 1 η οποία να του εξασφαλίζει μεγαλύτερη ωφέλεια από την  $T$ , ανεξάρτητα από το τι θα επιλέξει ο δεύτερος παίκτης. Δηλαδή η  $T$  είναι κυριαρχούμενη αν και μόνο αν υπάρχει  $p \in [0, 1]$  έτσι ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα

$$2 \cdot p - 1 \cdot (1 - p) > 0$$

$$6 \cdot p + 4 \cdot p > 5$$

$$5 \cdot p + 7 \cdot (1 - p) > 8 .$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι το παραπάνω σύστημα δεν έχει λύση, επομένως η  $T$  δεν είναι κυριαρχούμενη.

Η στρατηγική  $M$  είναι κυριαρχούμενη στρατηγική για τον παίκτη 1 αν και μόνο αν υπάρχει  $p \in [0, 1]$  έτσι ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα

$$0 \cdot p - 1 \cdot (1 - p) > 2$$

$$5 \cdot p + 4 \cdot p > 6$$

$$8 \cdot p + 7 \cdot (1 - p) > 5 .$$

Και αυτό το σύστημα δεν έχει λύση στο  $[0, 1]$ , οπότε ούτε η στρατηγική  $M$  είναι κυριαρχούμενη.

Αντιθέτως, εύκολα παρατηρούμε ότι η αγνή στρατηγική  $B$  κυριαρχείται από την αγνή στρατηγική  $T$ . Επομένως (ακολουθώντας το συμβολισμό της εκφώνησης)  $D_1 = \{B\}$ .

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο παίκτης 2 δεν έχει κυριαρχούμενες στρατηγικές, δηλαδή  $D_2 = \emptyset$ . Επομένως το παίγνιο όπου το σύνολο των δυνατών στρατηγικών για τον παίκτη 1 είναι το  $\{T, M\}$  και για τον παίκτη 2 το  $\{L, C, R\}$  περιγράφεται από τον παρακάτω διπίνακα:

	$L$	$C$	$R$	
$T$	0 , 8	5 , 6	8 , 9	
$M$	2 , 9	6 , 5	5 , 1	

Στο παίγνιο αυτό όμως υπάρχει και πάλι κυριαρχούμενη στρατηγική: παρατηρήστε ότι η αγνή στρατηγική  $C$  για τον παίκτη 2 κυριαρχείται από την αγνή στρατηγική  $L$ . □

**Άσκηση 10** Δίνεται το παρακάτω παίγνιο διπίνακα.

	$L$	$C$	$R$
$T$	0 , 8	5 , 6	8 , 9
$M$	2 , 9	6 , 5	5 , 1
$B$	-1 , 5	4 , 6	7 , 9

- (1) Βρείτε, αν υπάρχουν, όλες τις αγνές ισορροπίες Nash. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- (2) Βρείτε, αν υπάρχει, μία μικτή ισορροπία Nash. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

**Λύση.**

Κατρχήν παρατηρήστε ότι, σύμφωνα με τη λύση της Άσκησης 9, μπορούμε να διαγράψουμε τις στρατηγικές  $B$  και  $C$  των παικτών 1 και 2 αντίστοιχα και αρκεί να μελετήσουμε τις ισορροπίες Nash στο παίγνιο που προκύπτει:

	$L$	$R$
$T$	0 , 8	8 , 9
$M$	2 , 9	5 , 1

- (α) Το περίγραμμα αγνών στρατηγικών  $(T, L)$  δεν είναι αγνή ισορροπία Nash, καθώς  $u_1(T, L) = 0 < 8 = u_1(T, R)$ .

Το περίγραμμα αγνών στρατηγικών  $(T, R)$  είναι αγνή ισορροπία Nash, καθώς  $u_1(T, R) = 8 > 5 = u_1(M, R)$  και  $u_2(T, R) = 9 > 8 = u_2(T, L)$ .

Το περίγραμμα αγνών στρατηγικών  $(M, L)$  είναι αγνή ισορροπία Nash, καθώς  $u_1(M, L) = 2 > 0 = u_1(T, L)$  και  $u_2(M, L) = 9 > 1 = u_2(M, R)$ .

Το περίγραμμα αγνών στρατηγικών  $(M, R)$  δεν είναι αγνή ισορροπία Nash, καθώς  $u_1(M, R) = 5 < 8 = u_1(T, R)$ .

- (β) Έστω το περίγραμμα μικτών στρατηγικών  $\sigma$  όπου ο παίκτης 1 επιλέγει την  $T$  με πιθανότητα  $\sigma_1(T) = p > 0$  και την  $M$  με πιθανότητα  $\sigma_1(M) = 1 - p > 0$ , και ο παίκτης 2 επιλέγει την  $L$  με πιθανότητα  $\sigma_2(L) = q > 0$

και την  $R$  με πιθανότητα  $\sigma_2(R) = 1 - q > 0$ . Το  $\sigma$  είναι μικτή ισορροπία Nash αν και μόνο αν ισχύουν ταυτόχρονα

$$\begin{aligned}u_1(T, \sigma_2) &= u_1(M, \sigma_2) \\u_2(L, \sigma_1) &= u_2(R, \sigma_2)\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

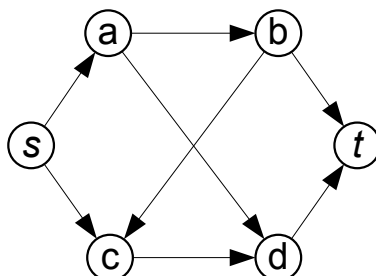
$$\begin{aligned}0 \cdot q + 8 \cdot (1 - q) &= 2 \cdot q + 5 \cdot (1 - q) \\8 \cdot p + 9 \cdot (1 - p) &= 9 \cdot p + 1 \cdot (1 - p) .\end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων έχει μοναδική λύση την  $q = 3/5$ ,  $p = 8/9$ . Άρα (για αυτές τις τιμές των  $p$  και  $q$ ) το περίγραμμα μικτών στρατηγικών  $\sigma$  είναι μια μικτή ισορροπία Nash του παιγνίου.

□



**Άσκηση 11** Δίδεται το παρακάτω  $s - t$  δίκτυο με κορυφές  $s, a, b, c, d, t$  και κατευθυνόμενα μονοπάτια  $sab t, scd t, sad t$  και  $sabcd t$ .



Τρεις χρήστες 1, 2 και 3 επιθυμούν να δρομολογήσουν τα φορτία τους, μεγέθους  $w_1 = 10$ ,  $w_2 = 5$  και  $w_3 = 1$  αντίστοιχα, από την πηγή  $s$  προς τον προορισμό  $t$ . Το κόστος για κάθε χρήστη ισούται με το συνολικό φορτίο στο μονοπάτι που επιλέγει. Βρείτε μια αγνή ισορροπία Nash για το σύστημα και δικαιολογήστε γιατί είναι αγνή ισορροπία Nash.

**Λύση.**

Στο δίκτυο υπάρχουν συνολικά 4 μονοπάτια από την πηγή  $s$  προς τον προορισμό  $t$  και συγκεκριμένα τα

$$\pi_1 = s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow t$$

$$\pi_2 = s \rightarrow a \rightarrow d \rightarrow t$$

$$\pi_3 = s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow t$$

$$\pi_4 = s \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow t .$$

Συμβολίζουμε με  $\lambda_i(p_1, p_2, p_3)$  το κόστος για το χρήστη  $i \in \{1, 2, 3\}$  στο περίγραμμα αγνών στρατηγικών  $(p_1, p_2, p_3)$ .

Θα αποδείξουμε ότι το περίγραμμα αγνών στρατηγικών  $(\pi_1, \pi_4, \pi_4)$ , όπου ο χρήστης 1 επιλέγει το μονοπάτι  $\pi_1$  ενώ οι χρήστες 2 και 3 επιλέγουν το  $\pi_4$  είναι αγνή ισορροπία Nash. Τα κόστη των χρηστών στο περίγραμμα αυτό

είναι

$$\begin{aligned}\lambda_1(\pi_1, \pi_4, \pi_4) &= 3w_1 = 30 \\ \lambda_2(\pi_1, \pi_4, \pi_4) &= 3(w_2 + w_3) = 18 \\ \lambda_3(\pi_1, \pi_4, \pi_4) &= 3(w_2 + w_3) = 18 .\end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει παίκτης που να μπορεί να μειώσει το κόστος του αν αλλάξει μονοπάτι. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\lambda_1(\pi_2, \pi_4, \pi_4) &= 3w_1 + w_2 + w_3 = 36 > \lambda_1(\pi_1, \pi_4, \pi_4) \\ \lambda_1(\pi_3, \pi_4, \pi_4) &= 5w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 62 > \lambda_1(\pi_1, \pi_4, \pi_4) \\ \lambda_1(\pi_4, \pi_4, \pi_4) &= 3w_1 + 3w_2 + 3w_3 = 48 > \lambda_1(\pi_1, \pi_4, \pi_4) \\ \lambda_2(\pi_1, \pi_1, \pi_4) &= 3w_1 + 3w_2 = 45 > \lambda_2(\pi_1, \pi_4, \pi_4) \\ \lambda_2(\pi_1, \pi_2, \pi_4) &= w_1 + 3w_2 + w_3 = 26 > \lambda_2(\pi_1, \pi_4, \pi_4) \\ \lambda_2(\pi_1, \pi_3, \pi_4) &= 5w_2 + 2w_1 + 2w_3 = 47 > \lambda_2(\pi_1, \pi_4, \pi_4) \\ \lambda_3(\pi_1, \pi_4, \pi_1) &= 3w_1 + 3w_3 = 33 > \lambda_3(\pi_1, \pi_4, \pi_4) \\ \lambda_3(\pi_1, \pi_4, \pi_2) &= w_1 + 3w_3 + w_2 = 18 = \lambda_3(\pi_1, \pi_4, \pi_4) \\ \lambda_3(\pi_1, \pi_4, \pi_3) &= 5w_3 + 2w_1 + 2w_2 = 35 > \lambda_3(\pi_1, \pi_4, \pi_4) ,\end{aligned}$$

άρα το  $(\pi_1, \pi_4, \pi_4)$  είναι αγνή ισορροπία Nash. □