Πιθανοτικές

Τεχνικές

Ανισότητα Boole $\qquad Pr\{\bigcup_i A_i\} \le \sum_i Pr\{A_i\}$

Η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα γεγονός είναι μικρότερη ή ίση από το άθροισμα των πιθανοτήτων των γεγονότων.

→ Η ισότητα ισχύει αν $\bigcap_i A_i = \emptyset$

Συνδυασμοί n στοιχείων ανά k

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{\text{όλες οι πιθανές διατάξεις των } n \text{ στοιχείων}}{\left(\text{όλες οι πιθανές διατάξεις των στοιχείων που δεν επιλέχθηκαν}\right)\left(\text{οι πιθανές διατάξεις των } k \text{ στοιχείων που διαλέξαμε}\right)}$$

Μας δίνει δηλαδή k-άδες από μη διατεταγμένα, διαφορετικά μεταξύ τους

Συνάρτηση Κατωφλίου Μία συνάρτηση $p_0 = p_0(n)$ αποτελεί συνάρτηση κατωφλίου για μία μονότονη αύξουσα ιδιότητα A, αν:

- $p \gg p_0 \Rightarrow Pr\{\text{η } A \text{ ικανοποιείται}\} \to 1$
- $p \ll p_0 \Rightarrow Pr\{\text{η } A \text{ ικανοποιείται}\} \to 0$

Η σχέση λαμβάνεται καθώς $n \to \infty$

1) Η μέθοδος της θετικής πιθανότητας

1) Κατασκευάζω με χρήση νοητών τυχαίων πειραμάτων έναν πιθανοτικό δειγματοχώρο, του οποίου κάθε σημείο είναι μία δομή.

2) Στο χώρο αυτό, αποδεικνύω πως η υπό εξέταση ιδιότητα ισχύει με θετική πιθανότητα.

3) Άρα υπάρχει τουλάχιστον μία δομή που πληροί την ιδιότητα

4) Άρα οδηγούμαι σε
- → Θεώρημα ύπαρξης, αν $Pr\{\text{ιδιότητα}\} > 0$
- → Θεώρημα μη-ύπαρξης, αν $Pr\{\text{ιδιότητα}\} = 0$

2) Η μέθοδος της Γραμμικότητας της Μέσης Τιμής

1) Κατασκευάζω με χρήση νοητών τυχαίων πειραμάτων έναν πιθανοτικό δειγματοχώρο του οποίου κάθε σημείο είναι μία δομή

2) Ορίζω Τ.Μ X που αντιστοιχεί σε ποσοτικά χαρακτηριστικά των δομών που πληρούν την επιθυμητή ιδιότητα (π.χ. # δομών, μέγεθος δομών)

3) Εκφράζω την X ως άθροισμα επιμέρους Τ.Μ ως $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, όπου X_i ονομάζονται δεικνύουσες Τ.Μ. και είναι της μορφής
$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η επιθυμητή ιδιότητα ισχύει} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

4) Υπολογίζω την μέση τιμή κάθε δεικνύουσας, $P\{X_i = 1\} * 1 + P\{X_i = 0\} * 0 = P\{X_i = 1\}$

5) Από την γραμμικότητα της μέσης τιμής, $E[X] = \sum_i E[X_i]$

6) Η απόδειξη ύπαρξης ολοκληρώνεται με την απλή παρατήρηση πως
- ∃ σημείο (δομή) X_1 με $X_1 \geq E[X]$
- ∃ " " X_2 με $X_2 \leq E[X]$

3) Απόδειξη μη-ύπαρξης με Ανισότητα Markov

1) Η ανισότητα Markov λέει πως για μη-αρνητική Τ.Μ. X και οποιοδήποτε $t > 0$ ισχύει: $Pr\{X \geq t\} \leq E[X]/t$

2) Άρα αν $E[X] \to 0$ τότε $Pr\{X = 0\} \to 1$. ? Για μη αρνητικές ?

για ακεραίες

(0.5)

Η μέθοδος της 2ης ροπής

• Διασπορά $Var(X) = E\left[(X-E[X])^2\right]$

• Ανισότητα Chebyshev $Pr\{ |X-\mu| \geq t \} \leq \frac{Var(X)}{t^2}$

• Little o notation $f(n) = o(g(n))$ αν $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Αν Τ.Μ. $X \geq 0$
- αν $E(X)\to 0$ τότε $Pr\{X=0\}\to 1$
- αν $E(X)\to\infty$ τότε όχι $Pr\{X=0\}\to 0$

π.χ. αν $X=\infty$, $X=0$ τότε $E(X)=\infty$, $Pr\{X=0\}\neq 0$

i)
- Αποδεικνύω πως $E(X)\to\infty$
- Αποδεικνύω πως $Var(X) = o(E^2[X])$
- Τότε ισχύει $Pr\{X=0\}\to 0$

• Συνδιασπορά $COV(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$ μέτρο εξάρτησης Τ.Μ.

• Σχέση Var-Cov Αν $X = X_1 + \dots + X_n$ τότε $Var(X) = \sum_{1\leq i,j\leq n} Cov(X_i, X_j)$

• Σχέση Var-Cov για δείκτριες X_i $Var(X) \leq E[X] + \sum_{1\leq i\neq j\leq n} Cov(X_i, X_j)$

• Μη τετριμμένη σχέση ~ $i \sim j$ αν $\begin{cases} i\neq j \\ A_i, A_j \end{cases}$ στοχαστικά εξαρτημένα (τα γεγονότα "πραγματοποιούν τις Τ.Μ. X_i, X_j")

• Νέα σχέση Var-Cov για δείκτριες $Var(X) \leq E[X] + \sum_{i\sim j} Pr\{A_i \wedge A_j\} = E[X] + \Delta$

ii)
- Αποδεικνύω $E[X]\to\infty$
- Αποδεικνύω $\Delta = o(E^2[X])$
- Τότε ισχύει $Pr\{X=0\}\to 0$

• Συμμετρικά γεγονότα A_i, A_j αν $Pr\{X_i \mid X_j = 1\} = Pr\{X_j \mid X_i = 1\}$

• Για συμμετρικά γεγονότα ισχύει $\Delta = \Delta^* E[X]$ όπου $\Delta^* = \sum_{j\sim i} Pr\{A_j \mid A_i\}$

iii)
- Αποδεικνύω $E[X]\to\infty$
- Αποδεικνύω $\Delta^* = o(E[X])$
- Τότε ισχύει $Pr\{X=0\}\to 0$

4,5) Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Αν οι Τ.Μ. ~~[illegible]~~ $X_1,\dots,X_n$ έχουν μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 και είναι στοχαστικά ανεξάρτητες τότε η $X = X_1 + \dots + X_n$ έχει μέση τιμή $n\mu$ και διασπορά $n\sigma^2$ και τείνει ασυμπτωτικά στην κανονική κατανομή καθώς το $n\to\infty$

5) <u>Το Τοπικό Θεώρημα</u> → σπάνιες εξαρτήσεις

i) $A_1, \ldots, A_n$ τα ανεπιθύμητα γεγονότα που συνεπάγονται την ~~μη~~ -ικανοποίηση της επιθυμητής ιδιότητας

ii) Κατασκευάζω τον γράφο στοχαστικών εξαρτήσεων G όπου:

→ αντιστοιχίζω σε κάθε $v_i \in V$ το A_i

→ $\exists$ ακμή $(v_i, v_j) \in E$ αν A_i, A_j στοχαστικά εξαρτημένα

iii) Ορίζω $d(i)$ τον βαθμό της κορυφής v_i, δηλαδή τον αριθμό των γεγονότων ~~ρε~~ από τα οποία είναι στοχαστικά εξαρτημένο το A_i

iv) Αν $\forall i : \begin{cases} Pr\{A_i\} \leq p \\ d(i) \leq d \end{cases}$ τότε αν $4dp < 1$ τότε $Pr\{\bigwedge \bar{A_i}\} > 0$

άρα αποδείξαμε όπαρξη

6) <u>Η ανισότητα Janson</u> → μικρές εξαρτήσεις

i) $A_1, \ldots, A_n$ τα ανεπιθύμητα γεγονότα. Αποδεικνύω πως $\forall i$, $Pr\{A_i\} < \epsilon$

ii) Αν τα $A_1, \ldots, A_n$ ήταν στοχαστικά ανεξάρτητα, τότε θα ίσχυε:

$$Pr\{\bigwedge_{\forall i} \bar{A_i}\} = \prod_{\forall i} Pr\{\bar{A_i}\} = M$$

$$\Delta = \sum_{S \sim T} Pr\{B_S \wedge B_T\}$$

iii) Η ανισότητα του Janson μας λέει πως: $M \leq Pr\{\bigwedge_{\forall i} \bar{A_i}\} \leq M^{\left(\frac{1}{1-\epsilon} \frac{\Delta}{2}\right)}$

7) <u>Markov Chains</u>

• <u>Ορισμός</u> Μια M.C είναι μια Σ.Δ διακριτού χρόνου ορισμένη με βάση:

• <u>σύνολο καταστάσεων S</u>, σε μία από τις οποίες βρίσκεται η M.C κάθε στιγμή

• <u>πίνακα μετάβασης</u> P

Αν η M.C βρίσκεται στην i την στιγμή t τότε η πιθανότητα να μεταβεί στην κατάσταση j τη στιγμή $t+1$ δίνεται από το στοιχείο (i,j) του P, δηλαδή $P_{ij} = P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\}$

- <u>Ιδιότητα Αμνησίας</u> Η επόμενη κατάσταση εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα, δηλ.

$$Pr\{X_{t+1} = j \mid X_t = i_t, X_{t-1} = \ldots X_0 = i_0\} = Pr\{X_{t+1} = j \mid X_t = i_t\}$$

(1.00)

8) Martingale Sequences

Ορισμός: Μια ακολουθία $\{X_i\}$ είναι M.S αν $E[X_i | X_{i-1}, \ldots, X_0] = X_{i-1}$, $\forall i \geq 0$

Φίλτρο Δειγματοχώρου Ω: Η ακολουθία $\{F_i\}$ θα καλείται φίλτρο του Ω όταν οι διαδοχικές $\{F_i\}$ που ορίζει αποτελούν διαδοχικές συγκεκριμενοποιήσεις (refinements) του Ω

ΤΜ X είναι F_i-μετρήσιμη: τα απαραίτητα για τον προσδιορισμό της κατανομής γεγονότα $\{X=x\}$ περιέχονται στο F_i

αλλιώς: τα F_i είναι αρκετά λεπτομερή/συγκεκριμενοποιημένα ώστε να περιέχουν τα επιμέρους γεγονότα που είναι απαραίτητα στον προσδιορισμό της X_i

Γενικευμένος Ορισμός: Δειγματοχώρος Ω, $\{F_i\} = F_0, F_1, \ldots$ φίλτρο του Ω. Αν κάθε X_i από τις $X_0, X_1, \ldots$ είναι F_i-μετρήσιμη τότε η $\{X_i\}$ είναι M.S αν $E[X_{i+1} | F_i] = X_i$

Doob M.S: Αν Ω δ.χώρος και $\{F_i\}$ φίλτρο του τότε η $\{X_i\} = X_0, \ldots, X_n$ με $X_i = E[X | F_i]$ είναι M.S.

i) Edge Exposure M.S

- Τυχαίος γράφος G του $G_{n,p}$
- $\forall$ ακμή e_j, $1 \leq j \leq m = \binom{n}{2}$, η Τ.Μ $I_j = \begin{cases} 1, & \text{αν } e_j \in G \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
- f συνάρτηση ορισμένη στον $G \in G_{n,p}$
- Τότε η $\{X_i\}$ με $X_k = E[f(G) | I_k, \ldots, I_1\}$ είναι η E.E.D.M.S

Ανισότητα Azuma

- Έστω $\{X_i\} = X_0 = 0, X_1, \ldots$ M.S που ικανοποιεί την σχέση προσημασμένων διαφορών: $|X_{i+1} - X_i| \leq 1$ $\forall i$

Τότε για οποιοδήποτε $\lambda > 0$ ισχύει $Pr\{X_m > \lambda\sqrt{m}\} < e^{-\lambda^2/2}$

Συνθήκη Lipschitz

Μια γραφοθεωρητική συνάρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz αν για κάθε ζεύγος γράφων G, G' που διαφέρουν σε μία ακμή ισχύει $|f(G) - f(G')| \leq 1$

Θεώρημα

Αν η γραφ/θεωρητική f ικανοποιεί τη S.L τότε η αντίστοιχη E.E.D.M.S ικανοποιεί την σχέση προσημασμένων διαφορών.

Μέθοδος

i) Κατασκευάζω την edge ή vertex exposure M.S με κατάλληλο φίλτρο και γραφοθεωρητική συνάρτηση f

ii) Αποδεικνύω ότι η f ικανοποιεί την S.L.

iii) Άρα ικανοποιεί την σχέση προσημασμένων διαφορών

iv) Άρα εφαρμόζω την ανισότητα του Azuma

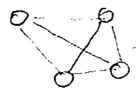
Η Μέθοδος της Θετικής Πιθανότητας

→ **Μέθοδος**

1) Κατασκευάζω με χρήση νοητών τυχαίων παραμέτρων έναν πιθανοτικό δειγματοχώρο, το κάθε σημείο του οποίου είναι μια δομή
2) Σε αυτόν τον χώρο αποδεικνύω πως η υπό εξέταση ιδιότητα ισχύει με μη μηδενική (θετική πιθανότητα), δηλαδή πως υπάρχει τουλάχιστον μία δομή που πληρεί

Άρα οδηγούμαι σε θεώρημα ύπαρξης (αν $Pr\{\text{ιδιότητας}\} > 0$) ή σε θεώρημα μη-ύπαρξης (αν προσδιορίσω τις συνθήκες όπου $Pr\{\text{ιδιότητας}\} = 0$)

→ **Παράδειγμα - Αριθμοί Ramsey**

K_n = κλίκα με n κορυφές πχ $K_4 \equiv$ 

$\overline{K_n}$ = n αποκομμένες κορυφές πχ $\overline{K_4}$ = 

Αριθμοί Ramsey

- $R(k,l)$ = ο ελάχιστος φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε οποιοδήποτε γράφημα με $R(k,l)$ κορυφές να περιέχει είτε ένα K_k ή ένα $\overline{K_l}$

- Από τον δοσμένο γράφο παράγουμε έναν καινούριο τέτοιον ώστε
  - Αν μεταξύ κορυφών u,v υπάρχει ακμή στον G, τότε G' υπάρχει κόκκινη ακμή
  - Αν μεταξύ κορυφών u,v δεν υπάρχει ακμή στον G, τότε στον G' υπάρχει μπλε ακμή

Τώρα μπορώ να ορίσω τους αριθμούς Ramsey λίγο διαφορετικά:

$R(k,l)$ = ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε σε οποιονδήποτε διχρωματισμό των ακμών ενός πλήρους γράφου n κορυφών (K_n) να υπάρχει είτε ένας κόκκινος K_k ή ένας μπλε K_l

(2)

<u>Θεώρημα</u> Αν $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ τότε $R(k,k) > n$

<u>Απ:</u> Εφαρμόζουμε λοιπόν την πιθανοτική μέθοδο. Έτσι:

- Δημιουργώ δειγματοχώρο με χρήση του ακόλουθου τυχαίου πειράματος:

  Χρωματίζω τις ακμές ενός K_n με δύο χρώματα (κόκκινο R, μπλε B) και επιλέγω χρώμα για κάθε ακμή ισοπίθανα και στοχαστικά ανεξάρτητα

Προκύπτει ένας πιθανοχώρος A στοιχεία του οποίου είναι όλοι οι πιθανοί διχρωματισμοί του K_n, με $|A| = 2^{\frac{(n-1)n}{2}} = 2^{\binom{n}{2}}$ *

Έστω S οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύνολο k κορυφών και R_S = "το S είναι κόκκινο", B_S = "το S είναι μπλε" και M_S = "το S είναι μονοχρωματικό"

Τότε $P_r\{R_S\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = P_r\{B_S\}$

τότε $P_r\{M_S\} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$ (1)

Έστω M = "υπάρχει τουλ. ένα μονοχρωματικό σύνολο με k κορυφές"

Είναι $M = \bigcup_S M_S$ ενώ υπάρχουν $\binom{n}{k}$ διαφορετικά M_S

Έχω: ανισότητα Boole

$$P_r\{M\} = P_r\{\bigcup_S M_S\} \le \sum_{\substack{S \\ |S|=k}} P_r\{M_S\} = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

Άρα αν $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ (2) τότε $P_r(M) < 1$ και άρα $P_r(\bar{M}) > 0$

Άρα για να βρούμε το καλύτερο δυνατό κάτω φράγμα πρέπει να προσδιορίσουμε το μέγιστο n ώστε να ισχύει η (2)

Η μέθοδος της Γραμμικότητας της Μέσης Τιμής

– Μέθοδος

1) Κατασκευάζω με χρήση νοητών τυχαίων πειραμάτων έναν πιθανοτικό δειγματοχώρο, του οποίου κάθε σημείο είναι μία δομή.

2) Ορίζω Τ.Μ. X, που αντιστοιχεί σε ποσοτικά χαρακτηριστικά των δομών που πληρούν την επιθυμητή ιδιότητα (π.χ αριθμός δομών, μέγεθος δομών)

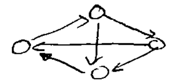
3) Εκφράζω την X ως άθροισμα επιμέρους Τ.Μ., $X = X_1 + \ldots + X_n$
random indicator variables
όπου οι X_i, $1 \leq i \leq n$, ονομάζονται δεικνύουσες Τ.Μ.
και είναι της μορφής $X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η επιθυμητή ιδιότητα ισχύει} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

4) Υπολογίζω την μέση τιμή (expected value) κάθε δεικνύουσας Τ.Μ.
Αυτή θα είναι $E(X_i) = P\{X_i=1\} * 1 + P\{X_i=0\} * 0 = P\{X_i=1\}$
Άρα ο υπολογισμός του $E(X_i)$ ισοδυναμεί με την πιθανότητα $P\{X_i=1\}$

5) Υπολογίζω την μέση τιμή της X με βάση την ιδιότητα της γραμμικότητας της μέσης τιμής.
$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

6) Η απόδειξη ύπαρξης ολοκληρώνεται με την προφανή παρατήρηση πως
- $\exists$ σημείο (δομή) X_1 με $X_1 \geq E(X)$
- $\exists$ σημείο (δομή) X_2 με $X_2 \leq E(X)$

→ Παράδειγμα - Τουρνουά με πολλούς κύκλους Hamilton

Τουρνουά T_n : Ένας directed graph με n κορυφές και ακριβώς μία από τις δύο δυνατές ακμές μεταξύ οποιονδήποτε 2 κορυφών π.χ T_4 

Hamiltonian Circle : κύκλος μεγέθους n που διέρχεται από όλες τις κορυφές

Θεώρημα : ∃ Τουρνουά με τουλάχιστον $n!\,2^{-(n-1)}$ κύκλους Hamilton

Απ: ① Δημιουργώ τον δειγματοχώρο, του οποίου τα σημεία (γράφοι) παράγονται επιλέγοντας την κατεύθυνση κάθε ακμής ισοπίθανα

②,③ Έστω σ μία μετάθεση των κορυφών ενός γράφου (από τις n! συνολικά)

Σε κάθε μετάθεση σ αντιστοιχίζουμε την δεικνύουσα Τ.Μ

$$X_\sigma = \begin{cases} 1, & \text{αν η σ είναι H.C.} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Για να είναι η σ H.C. πρέπει όλες οι ακμές να έχουν ίδια "φορά", "δεξιά" ή "αριστερά".

Άρα $Pr\{X_\sigma = 1\} = (\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n = 2^{-(n-1)}$

④ Είναι $E(X_\sigma) = 2^{-(n-1)}$

⑤ Άρα $E(X) = E(\sum_{i=1}^{n!} X_\sigma) \overset{\text{linearity}}{=} \sum_{\sigma} E(X_\sigma) = (\#\sigma) * 2^{-(n-1)} = n!\,2^{-(n-1)}$

⑥ ∃ σημείο → γράφος όπου $X \geq E(X)$ ⇒ ∃ τουρνουά με τουλάχιστον $n!\,2^{-(n-1)}$ H.C.

→ Παράδειγμα - Διμερής Υπογράφος

Θεώρημα : Οποιοσδήποτε γράφος $G=(V,E)$ έχει έναν διμερή υπογράφο με τουλάχιστον $|E|/2$ ακμές

Απ: Έστω γράφος $G=(V,E)$ με $|V| = n$ και $|E| = e$

① Δημιουργώ δειγματοχώρο τυχαίων διαμερίσεων των κορυφών του G σε δύο σύνολα A, B με τον εξής τρόπο $P\{e \in A\} = \frac{1}{2}$, $P\{e \in B\} = \frac{1}{2}$ $\forall e \in E$

②,③ $\forall e \in E$, έστω η δεικνύουσα Τ.Μ. $X_e = \begin{cases} 1, & \text{αν η ακμή είναι διασχίζουσα} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

④ Μία ακμή είναι διασχίζουσα αν τα άκρα της ανήκουν σε διαφορετικά μέρη. Άρα $P\{X_e = 1\} = \frac{1}{2}$ και επομένως $E(X_e) = \frac{1}{2}$

⑤ Έστω $X = \sum_{e \in E} X_e$ = # διασχίζουσων ακμών. Είναι $E(X) \overset{E(\sum X_e)\ \text{linearity}}{=} \sum_{e \in E} E(X_e) = e/2$

⑥ ∃ σημείο → γράφος όπου $X \geq E(X)$ ⇒ ∃ διμερής υπογράφος με τουλάχιστον $e/2$ ακμές

Αποδείξεις Μη-Ύπαρξης με Ανισότητα Markov

→ Ανισότητα Markov: Έστω μη-αρνητική Τ.Μ X. Για οποιοδήποτε $t>0$ ισχύει: $\Pr\{X \geq t\} \leq E(X)/t$

Απ: Αν $\Pr\{X \geq t\} > \frac{E(X)}{t}$ τότε θα είχαμε:

$$E(X) = \sum_x x \Pr\{X=x\} \geq \sum_{x \geq t} x \Pr\{X=x\} \overset{\text{αφού } x\geq t}{\geq} \sum_{x \geq t} t \Pr\{X=x\} = t \underbrace{\sum_{x \geq t} \Pr\{X=x\}}_{\Pr\{X\geq t\}}$$

$$= t \Pr\{X \geq t\} > t\frac{E(X)}{t} \Leftrightarrow E(X) > E(X) \text{ άτοπο}$$

Από το παραπάνω προκύπτει άμεσα το εξής Θεώρημα:

Θεώρημα Για μη αρνητική, ακέραια Τ.Μ. αν $E(X) \to 0$ τότε $\Pr\{X=0\} \to 1$

→ Παράδειγμα - Dominating Sets σε τυχαίους Γράφους

Τυχαίος Γράφος $G_{n,p}$ γράφος n κορυφών όπου $\forall u,v \in G$ $P\{(u,v)\in G\} = p$ και $P\{(u,v)\notin G\} = 1-p$

Dominating Set (Κυρίαρχο Κέντρο Γειτονίας)

Ένα σύνολο κορυφών $V' \subseteq V$ είναι dominating set αν $\forall u \notin V'$, $\exists v \in V'$ τέτοια ώστε $(u,v) \in G$

Θεώρημα Σε τυχαίους γράφους $G_{n,p}$ (με σταθερό p) δεν υπάρχουν D.S μεγέθους μικρότερο από $\ln n$ w.h.p.

Απ: (1) Έστω γράφοι $G_{n,1/2}$

(2) Έστω S ένα οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύνολο k κορυφών στο γράφο αυτό.

Η δείκτουσα Τ.Μ $X_S = \begin{cases} 1, & \text{αν } S \text{ είναι D.S.} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

(4) Είναι $E(X_S) = \Pr\{X_S \text{ είναι D.S.}\} = \Big(\underbrace{1 - \frac{1}{2^k}}_{\Pr\{\text{μία κορυφή } \notin S \text{ συνδέεται με κάποια κορυφή του } S\}}\Big)^{n-k}$

$\Pr\{\text{μία κορυφή } \notin S \text{ γειτονεύει με καμία κορυφή του } S\}$

(3) Έστω $X = \sum_{S:|S|=k} X_S$, μετρά τον # D.S. μεγέθους k

(5) Είναι $E(X) = E\left(\sum_{S,|S|=k} X_S\right) = \sum_{S,|S|=k} E(X_S) = \binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-k}$

Ισχύει όμως $\binom{n}{k} \le n^k$ και $1-\frac{1}{2^k} \le e^{-\frac{1}{2^k}}$

Άρα $E(X) \le e^{\frac{k}{2^k}}\left(e^{\overbrace{k\ln n - \frac{n}{2^k}}^{F}}\right)$

Ο εκθέτης όμως $F \to -\infty$ όταν $k<\ln n$

Άρα $E(X) \to 0$ ~~όταν~~ όταν $k<\ln n$

→ σχεδόν σίγουρα

Άρα, w.h.p., δεν υπάρχουν κέντρα γειτονιάς με μέγεθος $k<\ln n$

Η Μέθοδος της Δεύτερης Ροπής

Διασπορά (Variance ή 2η Ροπή)

$$Var(X) = E[(X-E[X])^2] = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 Pr\{X=x\}$$

- Ορίζουμε ως τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{Var(X)}$
- Linearity μόνο για στοχαστικά ανεξάρτητες Τ.Μ.
- Ισχύει $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

Απ: $Var(X) = E[(X-E[X])^2] = E[X^2 - 2\overbrace{E[X]}^{\text{σταθερά}}X + E^2[X]]$

$\overset{\text{linearity}}{=} E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$

Ανισότητα Chebyshev

Ισχύει $Pr\{|X-\mu| \geq t\} \leq \dfrac{Var(X)}{t^2}$

Απ: Είναι $Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_x \underbrace{(x-\mu)^2}_{\geq 0}\underbrace{Pr\{X=x\}}_{\geq 0}$

$$\geq \sum_{|x-\mu|\geq t} (x-\mu)^2 Pr\{X=x\} \geq \sum_{|x-\mu|\geq t} t^2 Pr\{X=x\}$$

$$\geq t^2 \sum_{|x-\mu|\geq t} Pr\{X=x\} = t^2 Pr\{|X-\mu| \geq t\}$$ QED ◆

Little o notation

$f(n) = o(g(n))$ αν $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$

π.χ. $n = o(n^3)$, αφού $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^3} = 0$

!!! Έστω X = # δομών με την επιθυμητή ιδιότητα (θετική ακέραια Τ.Μ.)

- Ισχύει πως αν $E(X) \to 0$ τότε $Pr\{X=0\} \to 1$

Όμως αν $E(X) \to \infty$ τότε αυτό δεν σημαίνει πως $Pr\{X=0\} \to 0$ αφού η διασπορά της Τ.Μ. μπορεί να είναι αρκετά μεγάλη ώστε να επιτρέπει υψηλή διακύμανση τιμών γύρω από την μέση $E(X)$ και να συμπεριλαμβάνει την ανεπιθύμητη για αποδείξεις ύπαρξης τιμή 0. Πρέπει να μελετήσουμε την $Var(X)$!

→ Μέθοδος (Pt. 1)

1) Αποδεικνύω πως $E(X) \to \infty$
2) Αποδεικνύω πως $Var(X) = o(E^2(X))$
3) Τότε ισχύει: $Pr\{X=0\} \to 0$

Απ: Είναι $\{X=0\} \subseteq \{|X-\mu| \geq \mu\}$ αφού $|X-\mu| \geq \mu \begin{cases} x \geq 2\mu \\ x \leq 0 \end{cases}$

$t=\mu$ στην Chebyshev

Άρα $Pr\{X=0\} \leq Pr\{|X-\mu| \geq \mu\} \leq \dfrac{Var(X)}{E^2(X)}$

Άρα αν $\dfrac{Var(X)}{E^2(X)} \to 0 \Leftrightarrow Var(X) = o(E^2(X))$ τότε $Pr\{X=0\} \to 0$

Συνδιασπορά (Covariance)

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Αν X, Y στοχαστικά ανεξάρτητες, τότε $Cov(X,Y) = 0$
- Η συνδιασπορά είναι μέτρο εξάρτησης τυχαίων μεταβλητών
- Προφανώς $Cov(X,X) = Var(X)$

→ Σχέση Διασποράς - Συνδιασποράς (Γενική)

Έστω $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Αν οι $Var(X_i)$, για $1 \leq i \leq n$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένες, τότε ισχύει: $Var(X) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} Cov(X_i, X_j)$

Απ: Για 2 μεταβλητές ισχύει: 2ο μέλος $= Cov(X_1,X_1) + Cov(X_1,X_2) + Cov(X_2,X_1) + Cov(X_2,X_2)$

$= E(X_1^2) - E^2(X_1) + 2E(XY) - 2E(X)E(Y) + E(X_2^2) - E^2(X_2)$

$= E[(X_1+X_2)^2] - E^2(X_1+X_2) = Var(X_1+X_2) = Var(X)$

Με επαγωγή προκύπτει για $n > 2$

→ Σχέση Διασποράς-Συνδιασποράς (για δεικτικές)

Μέσον οι X_i είναι δεικτικές, άρα $E(X_i) = p_i$

Άρα $Var(X_i) = E[(X-\mu)^2] = p_i(1-p_i)^2 + (1-p_i)(0-p_i)^2 = \dots = p_i(1-p_i)$

$\leq p_i = E(X_i)$

Άρα $Var(X_i) \leq E(X_i)$

Η προηγούμενη σχέση Διασποράς-Συνδιασποράς πλέον γίνεται:

$$Var(X) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} Cov(X_i, X_j)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} E(X_i) + \sum_{\dots} Cov(X_i, X_j)$$

$$\Leftrightarrow Var(X) \leq E(X) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} Cov(X_i, X_j)$$

Μη τετριμμένη σχέση $i \sim j$ αν $\begin{cases} i \neq j \\ A_i, A_j \text{ στοχαστικά εξαρτημένα, όπου } A_i, A_j \text{ τα γεγονότα πραγματοποίησης των Τ.Μ. } X_i, X_j \end{cases}$

Ισχύει $Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) \leq E(X_i X_j) = Pr\{A_i \cap A_j\}$

Άρα η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$Var(X) \leq E(X) + \sum_{i \sim j} Pr\{A_i \cap A_j\} \Leftrightarrow Var(X) \leq E(X) + \Delta$$

Άρα η μέθοδος της $2^{ης}$ ροπής διαμορφώνεται ως εξής

→ Μέθοδος (Pt. 2)

Αν $\left.\begin{array}{l} E(X) \to \infty \\ \text{και } \Delta = o(E^2(X)) \end{array}\right\}$ τότε $Pr\{X=0\} \to 0$

Απ: Όπως πριν, $Pr\{X=0\} \leq \dfrac{Var(X)}{E^2(X)} \leq \dfrac{E(X)+\Delta}{E^2(X)} = \dfrac{1}{E(X)} + \dfrac{\Delta}{E^2(X)} \to 0$

→ Παραλλαγή της Μεθόδου για Συμμετρικά Γεγονότα

<u>Συμμετρικά Γεγονότα</u>: Τα γεγονότα A_i, A_j που αντιστοιχούν στις Τ.Μ. X_i, X_j είναι συμμετρικά αν $Pr\{X_j \mid X_i = 1\} = Pr\{X_i \mid X_j = 1\}$

<u>π.χ.</u>

1 2 3

4 5 6

$A = \{1,3,4,5\}$

$B = \{2,3,5,6\}$

σε $G_{n,p}$,

$P\{A \text{ is connected} \mid B \text{ is connected}\} = P\{B \text{ is connected} \mid A \text{ is connected}\}$

Πλέον, για το Δ όπως το ορίσαμε πριν έχουμε:

$$\Delta = \sum_{i \sim j} Pr\{A_i \wedge A_j\} = \sum_{i \sim j} Pr\{A_j \mid A_i\} Pr\{A_i\} = \sum_i \sum_{j \sim i} Pr\{A_j \mid A_i\} Pr\{A_i\}$$

$$= \sum_i Pr\{A_i\} \sum_{j \sim i} Pr\{A_j \mid A_i\} = \Delta^* \sum_i Pr\{A_i\} = \Delta^* E(X)$$

Άρα $\Delta = \Delta^* E(X)$ και έτσι το θεώρημα της 2ης ροπής γίνεται:

→ <u>Μέθοδος</u> (Pt.3)

:

Αν $E(X) \to \infty$ και $\Delta^* = o(E(X))$ τότε $Pr\{X = 0\} \to 0$

→ **Παράδειγμα – K_4 σε $G_{n,p}$**

Θεώρημα: Η συνάρτηση $p_0(n) = n^{-2/3}$ αποτελεί συνάρτηση κατωφλίου για την ύπαρξη κλίκας μεγέθους 4 σε τυχαίους γράφους $G_{n,p}$.

Απ: Έστω S ένα οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύνολο 4 κορυφών και η δεικνύουσα Τ.Μ. $X_S = \begin{cases} 1, & \text{αν } S \text{ is } K_4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Είναι $E(X_S) = Pr\{X_S = 1\} = p^6$

Άρα $E(X) = E(\sum_S X_S) = (\# X_S) * p^6 = \binom{n}{4} p^6 \sim n^4 p^6$

Παρατηρώ:

- Αν $p \ll n^{-2/3}$ τότε $E(X) \to 0$, άρα από την ανισότητα Markov προκύπτει πως $Pr\{X = 0\} \to 1$, δηλαδή το $G_{n,p}$ δεν περιέχει K_4 w.h.p
- Αν $p \gg n^{-2/3}$ τότε $E(X) \to \infty$. Όμως αυτό όπως είπαμε δεν αρκεί

θα δείξουμε ότι $\Delta^* = \sum_{j \sim i} Pr\{A_j | A_i\} = o(E(X))$

όπου $A_i = \{$το σύνολο S_i είναι κλίκα μεγέθους 4$\}$

Το γεγονός πως $A_j \sim A_i$ συμβαίνει
- $|S_i \cap S_j| \neq 4$, δηλαδή δεν ταυτίζονται
- $|S_i \cap S_j| \geq 2$, αφού αν είχαν μονο μια κοινή κορυφή, δεν θα ήταν στοχαστικά εξαρτημένα

Επίσης $Pr\{A_i | A_j\} = Pr\{A_j | A_i\}$ άρα συμμετρικά μπορώ να χρησιμοποιήσω το Δ^*

Είναι: $$\Delta^* = \sum_{2 \leq |S_i \cap S_j| \leq 3} Pr\{A_j | A_i\}$$
$$= \sum_{|S_i \cap S_j| = 2} Pr\{A_j | A_i\} + \sum_{|S_i \cap S_j| = 3} Pr\{A_j | A_i\}$$
$$= \binom{4}{2}\binom{n-4}{2} p^5 + \binom{4}{3}\binom{n-4}{1} p^3 = \dots = O(\tfrac{1}{n})$$

Άρα $\Delta^* = o(E(X))$ και συνεπώς w.h.p. $\exists\ K_4$ στο $G_{n,p}$

Η περιπτωση "σχεδον" στοχαστικά ανεξάρτητων γεγονοτων

· Πολλές απο τις μεθόδους που μάθαμε προϋποθέτουν στοχαστική ανεξαρτησία.

· Σε πολλές όμως περιπτώσεις, παρόλο που δεν υπάρχει "πλήρης" στοχαστική ανεξαρτησία, η Στοχ. εξάρτηση μπορεί να είναι μικρή ή να εμφανίζεται σπάνια.

· Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες τεχνικές.

⟹ **Το Τοπικο Θεώρημα** (Locality Theorem) ↗ σπανιες στοχαστικές εξαρτήσεις

Γράφημα Στοχαστικών Εξαρτήσεων

Εστω $A_1,\dots,A_n$ τα επιμέρους γεγονοτα που συνεπάγονται την μη-ικανοποίηση της επιθυμητής ιδιότητας, τα οποία καλούμε ανεπιθύμητα γεγονοτα.

Αντιστοιχίζουμε σε κάθε κορυφή $v_i \in V$ το ανεπιθύμητο γεγονος A_i

$\exists$ ακμή (v_i, v_j) ανν A_i, A_j είναι στοχαστικά εξαρτημένα

Αρα ο βαθμος $d(v_i) = \#$ στοχαστικών εξαρτήσεων του A_i
αποτελεί δηλαδή ένα μετρο των στοχαστικών του εξαρτήσεων.

Θεώρημα

Εστω τα ανεπιθύμητα γεγονοτα $A_1,\dots,A_n$, G ο γράφος στοχαστικων εξαρτήσεων και $d(i)$ ο βαθμος της κορυφής i (που αντιστοιχίζεται στο A_i) στον γράφο G. Τοτε:

→ Αν $\forall i$: $Pr\{A_i\} \leq p$ και $d(i) \leq d$

τοτε αν $4dp < 1$ τοτε $Pr\{\wedge \bar{A_i}\} > 0$

(14)

→ Παράδειγμα – Φράγμα για διαγώνιους Αριθμούς Ramsey ($R(k,k)$)

<u>Θεώρημα</u> $$R(k,k) \geq \frac{\sqrt{2}}{e} k\, 2^{k/2}$$

<u>Απ.</u> → Δημιουργώ τυχαίο δειγματοχώρο με τυχαίους διχρωματισμούς των ακμών ενός πλήρους γράφου n κορυφών

→ Έστω S ένα οποιοδήποτε σύνολο k κορυφών του γράφου αυτού

Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τέτοια σύνολα

Ονομάζω A_S το γεγονός "το S είναι μονοχρωματικό"

Είναι $$\Pr\{A_S\} = \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}}_{\text{χρώμα A}} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}}_{\text{ή χρώμα B}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$$

όλες οι ακμές του S

Αφού όμως θέλουμε να υπολογίσουμε έναν όσο δυνατόν μεγαλύτερο αριθμό για τον οποίο να μην έχουμε A_S, τα A_S είναι τα αντιπαθή μας γεγονότα

Άρα $p = 2^{1-\binom{k}{2}}$ για το τοπικό θεώρημα, αφού $\Pr(A_S) \leq p$, $\forall S$

→ Στη συνέχεια όμως πρέπει να υπολογίσουμε και ένα φράγμα για το $d(i)$

Για να εξαρτάται στοχαστικά γεγονός A_S από A_T πρέπει τα σύνολα ~~ακμών~~ κορυφών S, T να έχουν τουλάχιστον μία κοινή ακμή, δηλ 2 κοινές κορυφές.

Άρα $$d_S = |\{T : |S \cap T| \geq 2\}| = \binom{k}{2}\binom{n-2}{k-2}$$

Όμως $\forall S$ το d_S είναι προφανώς ίδιο λόγω συμμετρίας του γράφου οπότε και εφαρμόζεται

→ Άρα τώρα από το τοπικό θεώρημα για να ισχύει $\Pr\{\bigwedge_{\forall S} \overline{A_S}\} > 0$

πρέπει $4\binom{k}{2}\binom{n-2}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1 \iff \ldots$ ασυμπτωτική ανάλυση $\ldots \iff$ Ο.Ε.Δ.

⇒ Η Ανισότητα Janson

Θεώρημα

- Έστω τα ανεπιθύμητα γεγονότα $A_1, \dots, A_n$ για τα οποία ισχύει:

$$\forall i, \quad Pr\{A_i\} < \epsilon$$

- Στην περίπτωση που τα A_i ήταν στοχαστικά ανεξάρτητα, τότε θα ίσχυε $Pr\{\bigwedge_{\forall i} \bar{A_i}\} = \prod_{\forall i} Pr\{A_i\} = M$

$\Delta = \sum_{S \sim T} Pr\{B_S \wedge B_T\}$

Η ανισότητα του Janson μας λέει πως

$$M \leq Pr\{\bigwedge_{\forall i} \bar{A_i}\} \leq M^{\left(\frac{1}{1-\epsilon} \frac{\Delta}{2}\right)}$$

→ Παράδειγμα – Αραιοί Τυχαίοι Γράφοι χωρίς Τρίγωνα

Θεώρημα Σε $G_{n,p}$ με $p = c/n$, c σταθερά, η πιθανότητα ύπαρξης πλήρων υπογράφων μεγέθους 3 περιγράφεται από: $\lim_{n\to\infty} Pr\{\bigwedge_{\forall S} \bar{B_S}\} \to e^{-c^3/6}$
(όπου B_S = "το σύνολο S' που αποτελείται από 3 κορυφές είναι τρίγωνο (K_3)")
το S δεν είναι τρίγωνο

Απ: Αν τα B_S ήταν ανεξάρτητα, τότε:

ο αριθμός των πιθανών τριγώνων

$$M = Pr\{\bigwedge_{\forall |S|=3} \bar{B_S}\} = \prod_{\forall |S|=3} Pr\{\bar{B_{S'}}\} = (1-p^3)^{\binom{n}{3}} \sim e^{-\binom{n}{3}p^3} \to e^{-c^3/6}$$

Επίσης είναι προφανές πως

$$\forall S \text{ τ.ω. } |S|=3, \quad Pr\{B_S\} = p^3 = \left(\frac{c}{n}\right)^3 = o(1). \text{ Άρα } \epsilon = o(1)$$

Τέλος, πρέπει να υπολογίσω το Δ:

Παρατηρώ πως $S \sim T \Leftrightarrow |S \cap T| = 2$

\# διαφορετικών T τ.ω. $|S \cap T| = 2$ για κάποιο S \# S

$$\text{Άρα } \Delta = \sum_{|S \cap T|=2} Pr\{B_S \wedge B_T\} = \sum_{|S\cap T|=2} p^5 = \binom{3}{2}\binom{n-3}{1}\binom{n}{3} p^5$$

$$= O(n^4)\, p^5 = O(n^4)\left(\frac{c}{n}\right)^5 = o(1)$$

$$\text{Άρα } \lim_{n\to\infty} Pr\{\bigwedge_{S} \bar{B_S}\} = \lim_{n\to\infty} M = e^{-c^3/6}$$

16

Markov Chains

→ Τυχαία / Στοχαστική Διαδικασία

Μία στοχαστική διαδικασία (Σ.Δ). X είναι μία συλλογή $\{X_t : t \in T\}$ και $X_t \in D$. Ειδικότερα:

- X_t είναι τυχαίες μεταβλητές
- T είναι το σύνολο δεικτών που δεικτοδοτούν τις Τ.Μ, συνήθως ο χρόνος, οπότε και X_{t_i} είναι η τιμή της Τ.Μ X την στιγμή t_i
- D είναι το σύνολο τιμών των Τ.Μ
  - ↳ Αν D διακριτό, τότε διακριτή Σ.Δ.
  - Αν D συνεχές, τότε συνεχής Σ.Δ.

Ορισμοί

1) Αν $D \subseteq R$, θα λέμε πως η Σ.Δ. έχει στοχαστικά ανεξάρτητες μεταβολές αν $\forall t,\ t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ ισχύει πως οι

$$X_{t_2} - X_{t_1} \ , \ X_{t_4} - X_{t_3} \text{ είναι ανεξάρτητες}$$

2) Θα λέμε πως η Σ.Δ είναι σταθερών μεταβολών αν η $X_{t+s} - X_t$ δεν εξαρτάται από το t

→ Ορισμός Μαρκοβιανής Αλυσίδας

Μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα (Μ.Α). είναι μία Σ.Δ. διακριτού χρόνου ορισμένη με βάση:

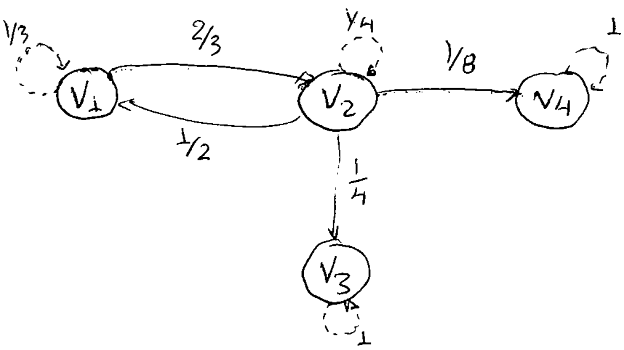
- σύνολο καταστάσεων S. Η Μ.Α. βρίσκεται σε μία κατάσταση κάθε στιγμή
- πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης P διαστάσεων $|S| \times |S|$
  - Αν η Μ.Β βρίσκεται στην κατάσταση i την στιγμή t, τότε η πιθανότητα να μεταβεί στην κατάσταση j την στιγμή $t+1$ δίνεται από το (i,j) στοιχείο του P, δηλαδή $P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\} = P_{ij}$
  - Προφανώς ισχύει πως $P_{ij} \leq 1$ και $\sum_{j \in S} P_{ij} = 1$ (άθροισμα γραμμής)

→ Ιδιότητα Markov / Αμνησίας

Κάθε επόμενη κατάσταση εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα και είναι ανεξάρτητη από όλες τις καταστάσεις στις οποίες βρέθηκε προηγουμένως, δηλαδή:

$$Pr\{X_{t+1}=j \mid X_t=i, X_{t-1}=i_{t-1},\dots,X_0=i_0\} = Pr\{X_{t+1}=j \mid X_t=i\} = P_{ij}$$

→ Γράφημα Μετάβασης



Άρα ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Π.χ. $Pr\{X_3=V_1, X_2=V_2, X_1=V_2 \mid X_0=V_1\}$

Bayes $= Pr\{X_3=V_1, X_2=V_2 \mid X_1=V_2, X_0=V_1\}\, Pr\{X_1=V_2 \mid X_0=V_1\}$

$= Pr\{X_3=V_1 \mid X_2=V_2, X_1=V_1, X_0=V_1\}\, Pr\{X_2=V_2 \mid X_1=V_2, X_0=V_2\}\, Pr\{X_1=V_2 \mid X_0=V_1\}$

Markov Property $= Pr\{X_3=V_1 \mid X_2=V_2\}\, Pr\{X_2=V_2 \mid X_1=V_2\} = Pr\{X_1=V_2 \mid X_0=V_1\}$

$= P_{2,3}\, P_{2,2}\, P_{2,1} = 1/24$

→ Και άλλοι ορισμοί

- $P^{(t)}_{ij} = Pr\{X_t=j \mid X_0=i\}$ η πιθανότητα μετάβασης σε t βήματα στην κατάσταση j ξεκινώντας από την κατάσταση i
  - Αποδεικνύεται πως $P^{(t)}_{i,j} = (P^t)_{i,j}$ το i,j στοιχείο του πίνακα P υψωμένου στην t-οστή δύναμη
- $r^{(t)}_{ij} = Pr\{X_t=j$ και $X_s \neq j$ για $1 \le s \le t-1 \mid X_0=i\}$ η πιθανότητα η πρώτη μετάβαση στην κατάσταση j ξεκινώντας από την i να γίνει την χρονική στιγμή t.
- $f_{ij} = \sum_{t>0} r^{(t)}_{ij}$ η πιθανότητα ξεκινώντας από την i κάποτε να μεταβαίνει στην j

- $h_{ij} = \sum_{t>0} t\, r_{ij}^{(t)}$ ο μεσος αριθμος βηματων για να φτασει η Μ.Α στην κατασταση j για πρωτη φορα, ξεκινωντας στην κατασταση i

  - Ισχυει πως αν $f_{ij} < 1$ τοτε $h_{ij} = \infty$ } σελ. 153 βιβλιο
  αλλα δεν ισχυει πως αν $h_{ij} = \infty$ τοτε $f_{ij} < 1$

→ Κατηγοριοποιησεις (Καταστασεων των) Μαρκοβιανων Αλυσιδων

- Παροδικη Κατασταση i αν $f_{ii} < 1$ (και συνεπως $h_{ii} = \infty$)
- Επαναληπτικη Κατασταση i αν $f_{ii} = 1$

  Μηδενικα Επαναληπτικη αν $h_{ii} = \infty$

  Μη Μηδενικα Επαναληπτικη αν $h_{ii} < \infty$

ισχυρα συνεκτικη συνιστωσα

- Αδιαχωριστη Μ.Α. ανν ο υποκειμενος γραφος ειναι Ι.Σ.Σ., αρα αποτελειται απο μια μοναδικη Ι.Σ.Σ. η οποια (προφανως) ειναι και τελικη
  - Προφανως όλες οι καταστασεις μιας πεπερασμενης και αδιαχωριστης Μ.Α. ειναι επαναληπτικες

→ Διανυσμα Πιθανοτητων Καταστασης

- $q^{(t)} = (q_1^{(t)}, \dots, q_n^{(t)})$, $q_i^{(t)} = \Pr\{$η Μ.Α βρισκεται στην κατασταση i την χρονικη στιγμη $t\}$

- Μας δινει δηλαδη για fixed time, την κατανομη των καταστασεων της αλυσιδας

- Ισχυουν προφανως → $q^{(t+1)} = q^{(t)} P$

  → $q^{(t)} = q^{(0)} P$

(20)

- <u>Ευσταθής κατανομή μ.α.σ Μ.Α</u>
  - Αν q το διάνυσμα πιθανοτήτων κατάστασης και $q^{(t)} = q^{(t)} P$
    - Αυτό σημαίνει πως $q^{(t+1)} = q^{(t)} \Leftrightarrow q_i^{(t+1)} = q_i^{(t)} \quad \forall i \in S$
    - Αυτό είναι ένα equilibrium/steady state, καθώς όταν βρεθεί εκεί η Μ.Α θα παρουσιάζει μία σταθερή, χρονικά αμετάβλητη συμπεριφορά

- <u>Περιοδική κατάσταση i</u>
  - αν ο μέγιστος ακέραιος T που ικανοποιεί την $q_i^{(t)} > 0 \Rightarrow t \in \{\alpha + kT \mid k \geq 0\}$ είναι μεγαλύτερος του 1. Το T καλείται περίοδος
  - Στην αντίθετη περίπτωση καλείται <u>μη-περιοδική</u>
  - Έτσι σε μία περιοδική κατάσταση ενδέχεται να μεταβούμε μόνο κάθε T γύρους

- <u>Απεριοδική Μ.Α</u> αν $\nexists i \in S$ τ.ω. i περιοδική

- <u>Εργοδική κατάσταση i</u> αν είναι μη περιοδική και μη μηδενικά επαναληπτική
- <u>Εργοδική Μ.Α</u> αν κάθε κατάστασή της είναι εργοδική
- <u>Συμμετρική Μ.Α</u> αν είναι εργοδική και $\forall i, j$ ισχύει $P_{ij} = P_{ji}$

→ <u>Θεμελιώδες Θεώρημα Μ.Α.</u>

Μία αδιαχώριστη, απεριοδική, πεπερασμένη Μ.Α. ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1) Όλες οι καταστάσεις της είναι εργοδικές
2) $\exists$ μοναδική ευσταθής κατανομή q κατά την οποία $q_i > 0 \quad \forall i \in S$
3) Ο μέσος χρόνος επιστροφής σε οποιαδήποτε κατάσταση i είναι $h_{ii} = \frac{1}{q_i}$
4) Ο αριθμός επισκέψεων ($N(i,t)$) της Μ.Α στην κατάσταση i σε χρονικό διάστημα μεγέθους t τηρεί την σχέση: $\lim_{t \to \infty} \frac{N(i,t)}{t} = q_i$

<u>Θεώρημα</u> Η ευσταθής κατανομή μιας εργοδικής, συμμετρικής Μ.Α με πεπερασμένο S είναι η ομοιόμορφη κατανομή, δηλαδή $\forall i \in S$, $q_i = \frac{1}{N}$, $N = |S|$

Martingale Sequences (Ακολουθίες Διατήρησης)

→ **Joint PDF** (Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας)

Έστω Τ.Μ X και Y. Τότε η joint PDF είναι

$$p(x,y) = Pr\{X=x \wedge Y=y\}$$

Η δεσμευμένη από την Y pdf της X δίνεται τότε από την σχέση:

$$Pr\{X=x \mid Y=y\} = \frac{p(x,y)}{Pr\{Y=y\}} = \frac{p(x,y)}{\sum_x p(x,y)}$$

αφού το άθροισμα περιλαμβάνει κάθε x, άρα υπολογίζουμε σωστά με βάση την joint pdf την ζητούμενη πιθανότητα

Η αντίστοιχη δεσμευμένη μέση τιμή είναι επομένως

$$E[X \mid Y=y] = \sum_x x\, Pr\{X=x \mid Y=y\}$$

→ **Δεσμευμένη Μέση Τιμή**

Με βάση τον προηγούμενο ορισμό, μπορώ να εκφράσω την $E[X \mid Y]$ σαν Τ.Μ. $f(Y)$ αφού είναι συνάρτηση της Τ.Μ. Y

$$f(Y) = E[X \mid Y=y] = \frac{\sum_x x\, p(x,y)}{\sum_x p(x,y)}$$

→ **Θεώρημα 1** $\quad E[E[X \mid Y]] = E[X]$

Απ: $E[E[X \mid Y]] = E[f(Y)] = \sum_y f(y)\, Pr\{Y=y\}$

$$= \sum_y Pr\{Y=y\} \frac{\sum_x x\, p(x,y)}{\underbrace{\sum_x p(x,y)}_{Pr\{Y=y\}}} = \sum_y \sum_x x\, p(x,y)$$

$$\overset{\text{αλλάζω σειρά αθροισης}}{=} \sum_x \sum_y x\, p(x,y) = \sum_x x \sum_y p(x,y) = \sum x\, Pr\{X=x\} = E[X]$$

→ Martingale Sequences

- Μια ακολουθία $\{X_i\}$ τυχαίων μεταβλητών $X_0, X_1, \ldots$ καλείται ακολουθία διατήρησης (M.S.) ανν ισχύει:

$$E[X_i \mid X_{i-1}, \ldots, X_0] = X_{i-1} \quad \forall i \geq 0$$

- Intuition Αν σε τίμιο παιχνίδι (π.χ roulette 36 αριθμών που πληρώνει x36) αντιστοιχίζουμε με X_i = το ποσό που παίζει στον γύρο i τότε ισχύει:

$$E[X_i \mid X_{i-1}, \ldots, X_0] = P_r\{\text{win στον γύρο } i\} * 36X_{i-1} + P_r\{\text{lose στον γύρο } i\} * 0$$

$$= \frac{1}{36} 36 \, X_{i-1} = X_i$$

Άρα ισχύει η ιδιότητα των M.S η οποία υπονοείται την κατα μέση τιμή διατήρηση του κεφαλαίου του παίκτη, ανεξαρτήτως στρατηγικής του

- Παράδειγμα Έστω δοχείο με b μαύρες και w άσπρες σφαίρες. Επαναληπτικά, διαλέγω τυχαία μία σφαίρα και την αντικαθιστώ με c ίδιου χρώματος. Ορίζω την Τ.Μ.

$X_i = \dfrac{\#\text{ μαύρων σφαιρών στην } i\text{-οστή επανάληψη}}{\#\text{ σφαιρών στην } i\text{-οστή επαναλ.}}$. Ν.Δ.Ο. η $\{X_i\}$ είναι M.S.

Απ: Έστω πως στην $i-1$ οστή επανάληψη b_{i-1}, w_{i-1} σφαίρες

Άρα $X_{i-1} = \dfrac{b_{i-1}}{b_{i-1}+w_{i-1}}$.

Στην i-οστή επανάληψη, έχω:

- Αν βγάλω μαύρη σφαίρα, το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα $\dfrac{b_{i-1}}{b_{i-1}+w_{i-1}} = X_{i-1}$,

 τότε θα έχω τελικά $\dfrac{b_{i-1}+c-1}{b_{i-1}+w_{i-1}+c-1}$ στον i γύρο

- Αν βγάλω άσπρη, το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα $1 - X_{i-1}$,

 τότε θα έχω $\dfrac{b_{i-1}}{b_{i-1}+w_{i-1}+c-1}$ στον i γύρο

Άρα $E[X_i \mid X_{i-1}, \ldots] = X_{i-1} * \dfrac{b_{i-1}+c-1}{b_{i-1}+w_{i-1}+c-1} + (1-X_{i-1}) * \dfrac{b_{i-1}}{\ldots}$

$$= \ldots = X_{i-1}$$

Άρα η $\{X_i\}$ είναι M.S.

→ **Θεώρημα 2** Έστω $\{X_i\} = X_0, \ldots$ M.S. Τότε, $\forall i > 0$ ισχύει $E[X_i] = E[X_{i-1}]$ και συνεπώς $E[X_i] = E[X_0]$

Απ: Αφού $\{X_i\}$ M.S τότε $E[X_i | X_{i-1}, \ldots] = X_{i-1}$. Παίρνοντας μέσες τιμές και στα δύο μέλη, $E[E[X_i|X_{i-1},\ldots]] = E[X_{i-1}] \overset{Θ1,\ εξ.2.1}{\Leftrightarrow} E[X_i] = E[X_{i-1}]$

Γενικευμένος Ορισμός M.S

→ Φίλτρο Δειγματοχώρου

Έστω πιθανοτικός δειγματοχώρος Ω και ακολουθία $\{F_i\} = F_0, F_1, \ldots$ συνόλων από γεγονότα του δειγματοχώρου Ω.

Η $\{F_i\}$ θα καλείται φίλτρο του Ω όταν τα διαδοχικά F_i αποτελούν διαδοχικές συγκεκριμενοποιήσεις (refinements) του χώρου αυτού, δηλαδή

$F_0 = \Omega$
⋮
F_n = ο λεπτομερέστερος δυνατός διαμερισμός του Ω, δηλαδή ένα sample point

Π.χ. Έστω ότι τραβάμε 5 φύλλα από μια τράπουλα και F_i = βλέπω i από τα 5 φύλλα. Ο δειγματοχώρος Ω αποτελείται από τα $\binom{52}{5}$ συνδυασμούς φύλλων που μπορεί να τραβήξαμε. Το F_i είναι φίλτρο γιατί:

$\Omega = F_0$ = έχω δει 0 φύλλα = μπορώ να κρατώ οποιονδήποτε από τους $\binom{52}{5}$ συνδυασμούς

F_1 = έχω δει 1 φύλλο = " " " $\binom{51}{4}$ συνδυασμούς

⋮

F_4 = έχω δει 4 φύλλα = " " " $\binom{48}{1}$ συνδυασμούς

sample point = F_5 = έχω δει 5 φύλλα = ξέρω τον συνδυασμό άρα έχω καταλήξει σε ένα σημείο του δειγματοχώρου Ω

→ F_i-μετρησιμότητα

(Διακριτή Περίπτωση) Μια Τ.Μ. X_i είναι F_i-μετρήσιμη αν τα απαραίτητα για τον προσδιορισμό της κατανομής της γεγονότα $\{X = x\}$ περιέχονται στο σύνολο γεγονότων F_i.

Αυτό σημαίνει πως το F_i είναι αρκετά λεπτομερές, δηλαδή έχει συγκεκριμενοποιήσει αρκετά τον δειγματοχώρο ώστε να περιέχει τα επιμέρους γεγονότα που είναι απαραίτητα στον προσδιορισμό της X_i

→ Γενικευμένος Ορισμός M.S

- Θα θέλαμε να ορίσουμε την μέση τιμή της T.M σε σχέση όχι με τις τιμές της σε προηγούμενους χώρους αλλά σε σχέση με άλλες, πιο γενικές ποσότητες.
  π.χ στο παράδειγμα της ρουλέτας να ορίσουμε το ποσό του παίκτη στον 2-οστό γύρο όχι με βάση τα ποσά του σε προηγούμενους αλλά με βάση τα αποτελέσματα της ρουλέτας.

- Έστω πιθανοτικός δειγματοχώρος Ω και $\{F_i\} = F_0, F_1, \ldots$ ένα φίλτρο του
  Αν κάθε X_i από τις T.M $X_0, X_1, \ldots$ είναι F_i-μετρήσιμη τότε η ακολουθία $\{X_i\}$ είναι M.S. αν $\forall i > 0$ $E[X_{i+1} | F_i] = X_i$

Με βάση τον γενικευμένο ορισμό, θα δούμε τρόπο κατασκευής M.S's

Doob Martingale Sequences

Ορισμός Έστω Ω δειγματοχώρος και $\{F_i\} = F_0, F_1$ φίλτρο του.
Έστω T.M X ορισμένη στον Ω

Η ακολουθία $\{X_i\} = X_0, X_1, \ldots, X_n$ με $X_i = E[X | F_i]$ είναι μία (doob) M.S

Intuition
- Μπορούμε με τον τρόπο αυτό να κατασκευάσουμε μία M.S. από οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή
- Άρα αν πάρουμε στην θέση της T.M. μία συνάρτηση ορισμένη σε τυχαίο γράφο, όπως π.χ μία ιδιότητα του (π.χ. χρωματικός αριθμός) και αξιοποιώντας την παραπάνω ιδιότητα να κατασκευάσουμε μία M.S.
- Έχοντας κάνει το παραπάνω, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ισχυρά πιθανοθεωρητικά εργαλεία

Έχουμε δύο συγκεκριμένες (Doob) M.S που χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε συναρτήσεις τυχαίων γράφων. Αυτές είναι οι:

- Edge Exposure M.S (Ακολουθία Αναμένουσα για Έκθεση Ακμών)
- Vertex Exposure M.S ('' '' '' '' Κορυφών)

→ Edge Exposure M.S.

- Έστω τυχαίος γράφος G του μοντέλου $G_{n,p}$ που προκύπτει αν επιλέξουμε κάθε μία από τις $|U| = m = \binom{n}{2}$ δυνατές ακμές στοχ. ανεξάρτητα με πιθανότητα p
- Έστω $\forall$ ακμή e_j, $1 \leq j \leq m$ η Τ.Μ $I_j = \begin{cases} 1, & \text{αν } e_j \in G \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
- Έστω f συνάρτηση ορισμένη στον G του δειγματοχώρου $G_{n,p}$

Τότε, η ακολουθία $\{X_i\} = X_0, X_1, \ldots, X_m$ με $X_k = E[f(G) \mid I_k, \ldots, I_1]$ καλείται (Doob) edge exposure M.S. ενός τυχαιογράφου.

→ Είναι φανερό πως η $\{I_j\} = I_1, \ldots, I_m$ αποτελεί φίλτρο του δειγματοχώρου αφού για κάθε I_j που βλέπουμε ξέρουμε αν η ακμή e_j υπάρχει ή όχι και οδηγούμαστε σε λεπτομερέστερο διαμερισμό του δειγματοχώρου αφού παρέχονται περισσότερες πληροφορίες για αυτόν

→ Έτσι προφανώς ισχύουν:

- $X_0 = E[f(G)]$, δηλαδή η μέση τιμή της εξεταζόμενης συνάρτησης αφού δεν ξέραμε τίποτα για τον G
- $X_m = f(G)$, δηλαδή η πραγματική τιμή της συνάρτησης για τον συγκεκριμένο γράφο G, αφού $X_m = E[f(G) \mid I_m, \ldots, I_1]$ και άρα ξέρουμε ποιο συγκεκριμένο στοιχείο του δειγματοχώρου εξετάζουμε

Ανισότητα Azuma (Το βασικό Εργαλείο)

Έστω $\{X_i\} \equiv X_0 = 0, X_1, \ldots, X_m$ μία M.S. που ικανοποιεί την σχέση προσημασμένων διαφορών:

$$|X_{i+1} - X_i| \leq 1, \quad \forall i \text{ με } 0 \leq i \leq m$$

Τότε για οποιοδήποτε $\lambda > 0$ ισχύει: $\Pr\{X_m > \lambda\sqrt{m}\} < e^{-\lambda^2/2}$

→ Σημασία για Graphs

Αν $f(G)$ γραφοθεωρητική συνάρτηση, $\{X_i\}$ η doob exposure function και ισχύει η σχέση προσημασμένων διαφορών, τότε από την ανισότητα Azuma

$$\Pr\{\underbrace{|f(G)}_{X_m} - \underbrace{E[f(G)]}_{X_0}| > \lambda\sqrt{m}\} < e^{-\lambda^2/2}$$

Αυτό σημαίνει πως η πιθανότητα μεγάλης απόκλισης των τιμών των Τ.Μ, δηλαδή των sample points από την μέση τους τιμή, είναι πολύ μικρή (και μάλιστα τείνει ασυμπτωτικά στο 0)

→ Συνθήκη Lipschitz

~~Η~~ f γραφοθεωρητική συνάρτηση ικανοποιεί την Σ.L. ~~για~~ για ακμές (αντίστοιχα για κορυφές) αν για γράφους G, G′ που διαφέρουν σε ακριβώς μία ακμή (αντίστοιχα κορυφή) ισχύει $|f(G) - f(G')| \leq 1$

→ Θεώρημα

Αν η γραφοθεωρητική συνάρτηση f ικανοποιεί την Σ.L. για ακμές (αντ. κορυφές) τότε η αντίστοιχη ακολουθία διατήρηση για edge exposure (αντίστοιχα vertex). Ικανοποιεί την σχέση προφραγμένων διαφορών.

Απο όλα τα προηγούμενα προκύπτει η μέθοδός μας.

Παράδειγμα Έστω G γράφος του $G_{n,p}$ (για οποιοδήποτε n, p), και ο χρωματικός του αριθμός $\chi(G)$ = # χρωμάτων ώστε γειτονικές ακμές να έχουν διαφορετικό χρώμα

Ν.Δ.Ο. $\Pr\{ |\chi(G) - E[\chi(G)]| > \lambda\sqrt{n} \} < 2 e^{-\lambda^2/2}$ } για οποιοδήποτε $\lambda > 0$

Απ.:

1) Κατασκευάζω την vertex exposure M.S. $\{X_i\} = X_0, X_1, \dots$ τέτοια ώστε
$X_i = E[f(G) \mid I_k, I_{k-1}, \dots, I_1]$ με
- I_k = έχει ελεγχθεί η ύπαρξη ακμών μεταξύ όλων των κορυφών $1, \dots, k$
- $f(G) = \chi(G)$ = χρωματικός αριθμός

2) Η γραφοθεωρητική συνάρτηση $f(G) = \chi(G)$ ικανοποιεί προφανώς την συνθήκη του Lipschitz, αφού η ένθεση μιας επιπλέον κορυφής αυξάνει τον υπολογιζόμενο χρωματικό αριθμό το πολύ κατά 1

3) Άρα από το Θ. σελ. 26 ικανοποιεί την σχέση προφραγμένων διαφορών

4) Άρα ισχύει η ανισότητα Azuma, QED ◆