

Πιθανότητες
Σεπτέμβριος 2006

1. (2.0) Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Αν $E[X] = 0.6$, να βρείτε (α) την $P\{X > 0.5\}$ και (β) τη $\text{Var}(X)$.

2. (α) (0.5) Αν $P(A|B) = 1$, να δείξετε ότι $P(B^c|A^c) = 1$, όπου A^c, B^c τα συμπληρωματικά γεγονότα των A, B αντίστοιχα.

(β) (0.5) Να δείξετε ότι $P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E^c FG) - P(EF^c G) - P(EFG^c) - 2P(EFG)$.

3. (1.5) Ρίχνουμε δύο ζάρια. Με χρήση πιθανογεννητριών συναρτήσεων να υπολογιστεί η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεών τους να είναι 5.

4. (2.0) Ρίχνουμε ένα ζάρι 120 φορές. Υπολογίστε, ακριβώς και προσεγγιστικά (με χρήση της κανονικής κατανομής), την πιθανότητα να πάρουμε αποτέλεσμα 4 το πολύ 18 φορές.

5. (1.0) Ποια κατανομή ακολουθεί το άθροισμα δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Poisson; Πώς σχετίζεται η μέση τιμή του αθροίσματος με τις επιμέρους μέσες τιμές;

6. (1.5) Έστω μια τυχαία ανακατεμένη τράπουλα. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(α) Τα τέσσερα πάνω χαρτιά να είναι διαφορετικό φύλλο.

(β) Τα τέσσερα πάνω χαρτιά να είναι διαφορετικό χρώμα.

7. (1.0) Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με $E[X] = \text{Var}(X) = 20$. Είναι δυνατό να έχουμε $P(0 < X < 40) = \frac{7}{8}$; Αιτιολογήστε.

Καλή επιτυχία !