

Πιθανότητες

17 Σεπτεμβρίου 2010

1. (2.0) Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Ποια είναι η τιμή του c ; (β) Βρείτε την $\mathbb{P}\{X > 1\}$. (γ) Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής της X ; (δ) Βρείτε τη μέση τιμή της X .

2. (1.5) Ένα ιατρικό διαγνωστικό τεστ μπορεί να διαγνώσει τη ύπαρξη μιας ασθένειας όταν αυτή όντως υπάρχει με ποσοστό επιτυχίας 95%. Επιπλέον, το τεστ κάνει λανθασμένη θετική διάγνωση για την ύπαρξη της ασθένειας στο 1% των ανθρώπων που είναι υγιείς (δηλαδή αν ένα υγιές άτομο κάνει το τεστ, τότε η διάγνωση για την ύπαρξη της ασθένειας θα είναι θετική με πιθανότητα .01). Αν το ποσοστό των πραγματικά άρρωστων ατόμων είναι 0.5%, να βρεθεί η πιθανότητα να έχει την ασθένεια ένα άτομο δεδομένου ότι το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό.

3. (1.5) Έστω ότι τα γεγονότα A , B και C είναι στοχαστικώς ανεξάρτητα. Να δείξετε ότι τα γεγονότα A και $B \cup C$ είναι επίσης στοχαστικώς ανεξάρτητα.

4. (α) (0.7) Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά της διωνυμικής κατανομής.

(β) (1.3) Ρίχνουμε ένα ζάρι 120 φορές. Υπολογίστε, ακριβώς και προσεγγιστικά (με χρήση της κανονικής κατανομής), την πιθανότητα να πάρουμε αποτέλεσμα 4 το πολύ 18 φορές.

5. (2.0) Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με $E[X] = Var(X) = 20$. Είναι δυνατό να έχουμε $P(0 < X < 40) = \frac{7}{8}$; Αιτιολογήστε.

6. (2.0) Θεωρήστε ένα τυχαίο πείραμα κατά το οποίο ρίχνουμε διαδοχικά δυο ζάρια μέχρι να φέρουμε για πρώτη φορά άθροισμα 10. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που μετράει τον αριθμό των επαναλήψεων μέχρι το τέλος του πειράματος. Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια της X .

Καλή επιτυχία !