ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΗ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ

(ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟ ΚΕΦ. 6 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ «ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ» ΤΩΝ ΒΛΑΧΑΒΑ, ΚΕΦΑΛΑ, ΒΑΣΙΛΕΙΑΔΗ, ΚΟΚΚΟΡΑ & ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ)

Ι. ΧΑΤΖΗΛΥΓΕΡΟΥΔΗΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ

- Είναι γνωστές μερικές ιδιότητες της τελικής κατάστασης
- Αναζητείται ένα στιγμιότυπο της τελικής κατάστασης
- Παραδείγματα προβλημάτων:
  - Χρονοπρογραμματισμός ενεργειών
  - Σχεδίαση ενεργειών παραγωγής
  - Διαχείριση πόρων

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών (constraint satisfaction problem) ορίζεται από:
  - Ένα <u>σύνολο *n* μεταβλητών</u> V_1, V_2,...,V_n ,
  - Ένα <u>σύνολο n πεδίων τιμών</u> D_1, ...D_n, που αντιστοιχούν σε κάθε μεταβλητή έτσι ώστε $V_i \in D_i$, και
  - Ένα <u>σύνολο σχέσεων (περιορισμών)</u> C_1, C_2,...C_m όπου $C_i(V_k,...,V_n)$ μια σχέση μεταξύ των μεταβλητών του προβλήματος.
- Ανάλογα με το πόσες μεταβλητές περιλαμβάνει ένας περιορισμός χαρακτηρίζεται ως <u>μοναδιαίος (unary),</u> <u>δυαδικός (binary)</u> ή <u>ανώτερης τάξης (higher order)</u>

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ

- Λύση αποτελεί μια ανάθεση τιμών στις μεταβλητές του προβλήματος:

  $V_1 = d_1$, $V_2 = d_2$, ... $V_n = d_n$ (όπου $d_1 \in D_1$, $d_2 \in D_2$,..., $d_i \in D_n$) τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί C_1, C_2, ..., C_m
- Τα προβλήματα με D_i διακριτών τιμών αναφέρονται ως *προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών*, ενώ αυτά με D_i συνεχών τιμών ως *προβλήματα επίλυσης περιορισμών*.
- Η αναζήτηση λύσης στα προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών οδηγεί στο φαινόμενο της συνδυαστικής έκρηξης (combinatorial explosion). Γι’ αυτό απαιτούνται ειδικοί αλγόριθμοι για τη μείωση του χώρου αναζήτησης.

Παράδειγμα Προβλήματος (1)

- Ζητούμενο: Με ποια σειρά πρέπει να εισαχθούν τα προϊόντα Α, Β, Γ, Δ μέσα σε ένα βιομηχανικό μύλο.
- Απαιτήσεις: Το προϊόν Α πρέπει να εισαχθεί στο μύλο μετά από το Δ, το Γ πριν από το Β, και το Β πριν από το Α.
- Αναπαράσταση:
  - Μεταβλητές: V_A, V_B, V_Γ, V_Δ
  - Πεδία τιμών: $D_A \equiv D_B \equiv D_\Gamma \equiv D_\Delta = \{1, 2, 3, 4\}$
  - Περιορισμοί: $V_A \neq V_B \neq V_\Gamma \neq V_\Delta$ (διαφορετική σειρά)

$$V_A > V_\Delta,\ V_\Gamma < V_B,\ V_B < V_A$$

Παράδειγμα Προβλήματος (2)

- Δυνατές λύσεις:
  - $V_A = 4, V_B = 2, V_\Gamma, = 1, V_\Delta = 3$ (Γ, Β, Δ, Α)
  - $V_A = 4, V_B = 3, V_\Gamma, = 1, V_\Delta = 2$ (Γ, Δ, Β, Α)
  - $V_A = 4, V_B = 3, V_\Gamma, = 2, V_\Delta = 1$ (Δ, Γ, Β, Α)

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΔΟΚΙΜΗ (1)

- Χρήση Γεννήτριας Λύσεων (Generator) και Ελεγκτή (Tester)
- **Αλγόριθμος**

1. Παράγαγε μια υποψήφια λύση (συνδυασμό τιμών μεταβλητών) (γεννήτρια)
2. Έλεγξε αν είναι λύση (δηλ. ικανοποιεί τους περιορισμούς) (ελεγκτής)
3. Αν είναι σταμάτα (επιτυχία), αλλιώς πήγαινε στο βήμα 1.

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΔΟΚΙΜΗ (2)

- Ιδιότητες/κριτήρια γεννήτριας λύσεων:
  - Να έχει <u>πληρότητα</u> (παράγονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί τιμών-λύσεις)
  - Να είναι <u>απέριττη</u> (κάθε δυνατός συνδυασμός-λύση παράγεται μια φορά)
  - Να έχει <u>ικανότητα ενημέρωσης</u> (χρησιμοποιεί πληροφορία σχετική με το πρόβλημα για μείωση των παραγόμενων συνδυασμών-λύσεων)

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΔΟΚΙΜΗ (3)

- Π.χ. στο πρόβλημα της σειράς εισαγωγής των προϊόντων στο βιομηχανικό μύλο, χρησιμοποιώντας ως πληροφορία σχετική με το πρόβλημα το ότι το προϊόν Α εισάγεται πάντα τελευταίο, παράγονται μόνο οι συνδυασμοί:

  $V_A = 4$, $V_B = 1$, $V_Γ$, $= 1$, $V_Δ = 1$

  $V_A = 4$, $V_B = 2$, $V_Γ$, $= 1$, $V_Δ = 1$

  …

  $V_A = 4$, $V_B = 4$, $V_Γ$, $= 4$, $V_Δ = 4$

  Δηλ. 4^3 = <u>64</u> αντί 4^4 = <u>256</u>.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΕΠΙΔΙΟΡΘΩΣΗΣ (1)

- Για μείωση του χώρου αναζήτησης που δημιουργείται.
- Αναρρίχηση λόφου (Hill-climbing)

1. Ανάθεσε στις μεταβλητές τυχαίες τιμές από τα πεδία τιμών τους.
2. Αν οι τιμές των μεταβλητών δεν παραβιάζουν τους περιορισμούς του προβλήματος τότε επέστρεψε τις τιμές αυτές ως λύση.
3. Εξέτασε για μια τυχαία μεταβλητή όλες τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει.
   i. Αν κάποια από τις τιμές που εξετάστηκαν ελαχιστοποιεί το πλήθος των περιορισμών που παραβιάζονται, ανάθεσε την τιμή της στην αντίστοιχη μεταβλητή και επέστρεψε στο βήμα 2.
   ii. Αν δεν υπάρχει τιμή που να ελαχιστοποιεί το πλήθος των περιορισμών, τότε επέστρεψε στο βήμα 1 (τοπικό ελάχιστο –ο αλγόριθμος ξεκινά από μια νέα τυχαία ανάθεση τιμών).

Μειονεκτήματα: (α) Εξέταση μεγάλου πλήθους γειτονικών καταστάσεων

(β) Μπορεί να «πέσει» σε τοπικό ελάχιστο

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΕΠΙΔΙΟΡΘΩΣΗΣ (2)

- Ευριστικός αλγόριθμος ελαχίστων συγκρούσεων

1. Ανέθεσε στις μεταβλητές τυχαίες τιμές από τα πεδία τιμών τους.
2. Αν οι τιμές των μεταβλητών δεν παραβιάζουν τους περιορισμούς του προβλήματος τότε επέστρεψε τις τιμές αυτές ως λύση.
3. Εξέτασε για μια τυχαία μεταβλητή όλες τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει.
   i. Αν κάποια από τις τιμές για τη μεταβλητή που εξετάστηκαν μειώνει το πλήθος των περιορισμών που παραβιάζονται, ανάθεσε την τιμή της στη μεταβλητή.
   ii. Αν δεν υπάρχει τιμή που να μειώνει το πλήθος των περιορισμών που παραβιάζονται, τότε επέλεξε μια τιμή που να διατηρεί τον ίδιο αριθμό περιορισμών.
   iii. Αν δεν υπάρχει ούτε τέτοια τιμή, τότε άφησε την τιμή της εξεταζόμενης μεταβλητής
4. Επέστρεψε στο βήμα 2.

Πλεονέκτημα: Εξέταση ΌΧΙ μεγάλου πλήθους γειτονικών καταστάσεων

Μειονέκτημα: Μπορεί να «πέσει» σε τοπικό ελάχιστο

ΚΛΑΣΣΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ (1)

- Οι κλασικοί αλγόριθμοι αναζήτησης (π.χ. DFS, BFS) είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν και για την επίλυση των προβλημάτων ικανοποίησης περιορισμών.
- Αναπαράσταση
  - Μια *κατάσταση* αποτελείται από τις μεταβλητές του προβλήματος (με τις τιμές τους).
  - Υπάρχει ένας μόνο *τύπος τελεστή*, ο οποίος αντιστοιχεί στην ανάθεση τιμής σε μια *μη-δεσμευμένη μεταβλητή* (δηλ. μεταβλητή στην οποία δεν έχει ανατεθεί τιμή).
  - *Αρχική κατάσταση*: όλες οι μεταβλητές είναι μη-δεσμευμένες.
  - *Τελική κατάσταση*: ελέγχεται αν έχει γίνει ανάθεση τιμών σε όλες τις μεταβλητές, καθώς επίσης και αν ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί του προβλήματος.

ΚΛΑΣΣΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ (2)

- Καλύτερα αποτελέσματα έχουν οι <u>ευριστικοί αλγόριθμοι</u> αναζήτησης (π.χ. ο BestFS).
- Η <u>ευριστική συνάρτηση</u> αφορά την επιλογή της μεταβλητής για ανάθεση τιμής στο επόμενο βήμα. Στηρίζεται,
  - στην <u>αρχή της συντομότερης αποτυχίας</u> (επιλογή μεταβλητής με το μικρότερο πεδίο τιμών) και
  - στην <u>αρχή της πιο περιορισμένης μεταβλητής</u> (επιλογή της μεταβλητής που συμμετέχει στους περισσότερους περιορισμούς σε περίπτωση ισοδύναμων πεδίων τιμών).
- Μειονεκτήματα
  - Μη ικανοποιητική απόδοση για προβλήματα μεγάλου μεγέθους.
  - Δεν γίνεται ικανοποιητική εκμετάλλευση των περιορισμών (a posteriori έλεγχος).
  - Εξακολουθεί να υπάρχει το φαινόμενο της συνδυαστικής έκρηξης.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΝΕΠΕΙΑΣ

- Βασική ιδέα: απαλοιφή τιμών, που δεν είναι συνεπείς ως προς κάποιο περιορισμό, από τα πεδία τιμών (:έλεγχος συνέπειας, που γίνεται a priori, δηλ. πριν την παραγωγή των πιθανών λύσεων, αντί για μετά-a posteriori).
- Γίνεται κατά κάποιο τρόπο διάδοση περιορισμών (constraint propagation), δηλ. οι μεταβολές σ’ ένα πεδίο τιμών «διαδίδονται» στα πεδία των υπόλοιπων μεταβλητών μέσω των περιορισμών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

<u>Πρόβλημα</u>: Σειρά εισαγωγής των προϊόντων Α, Β, Γ, Δ σ' ένα βιομηχανικό μύλο.

Περιορισμοί:

$V_A \neq V_B$ **(C1)**	$V_B \neq V_\Gamma$ **(C4)**	$V_A > V_\Delta$ **(C7)**
$V_A \neq V_\Gamma$ **(C2)**	$V_B \neq V_\Delta$ **(C5)**	$V_\Gamma < V_B$ **(C8)**
$V_A \neq V_\Delta$ **(C3)**	$V_\Gamma \neq V_\Delta$ **(C6)**	$V_B < V_A$ **(C9)**

Τα πεδία τιμών των μεταβλητών:

$V_A \in \{1,2,3,4\}$

$V_B \in \{1,2,3,4\}$

$V_\Gamma \in \{1,2,3,4\}$

$V_\Delta \in \{1,2,3,4\}$

ΕΠΑΝΕΞΕΤΑΣΗ

Λόγω C9 ($V_B < V_A$):

$V_A \in \{\cancel{1},2,3,4\}$

$V_B \in \{1,2,3,\cancel{4}\}$

$V_\Gamma \in \{1,2,3,4\}$

$V_\Delta \in \{1,2,3,4\}$

Λόγω C8 ($V_\Gamma < V_B$):

$V_A \in \{2,3,4\}$

$V_B \in \{\cancel{1},2,3\}$

$V_\Gamma \in \{1,2,\cancel{3},\cancel{4}\}$

$V_\Delta \in \{1,2,3,4\}$

Λόγω C7 ($V_A > V_\Delta$):

$V_A \in \{2,3,4\}$

$V_B \in \{2,3\}$

$V_\Gamma \in \{1,2\}$

$V_\Delta \in \{1,2,3,\cancel{4}\}$

Λόγω C9 ($V_B < V_A$):

$V_A \in \{\cancel{2},3,4\}$

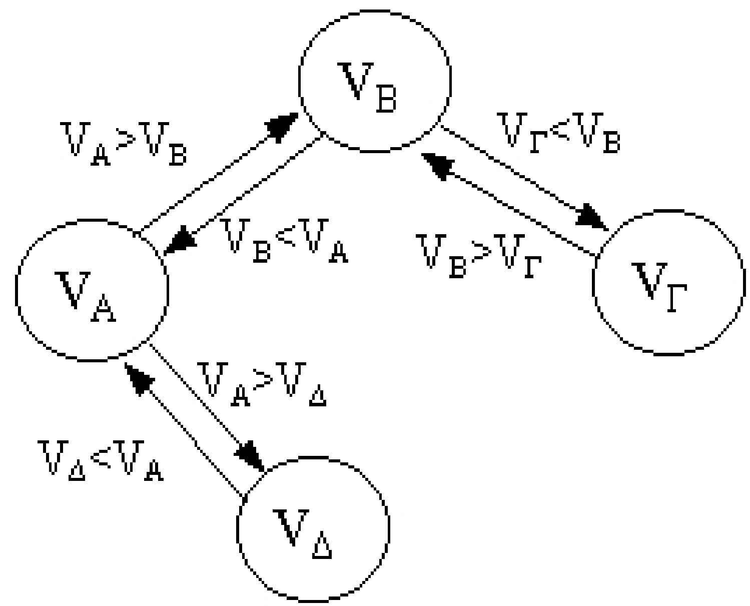
$V_B \in \{2,3\}$

$V_\Gamma \in \{1,2\}$

$V_\Delta \in \{1,2,3\}$

ΓΡΑΦΟΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ

- Ένα πρόβλημα μπορεί να αναπαρασταθεί ως γράφος (*γράφος περιορισμών* - *constraint graph*), όπου
  – τα *τόξα* (*arcs*) αναπαριστούν περιορισμούς
  – οι *κόμβοι* (*nodes*) αναπαριστούν τις μεταβλητές.



Περιορισμοί:

$V_A > V_\Delta$

$V_\Gamma < V_B$

$V_B < V_A$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΣΥΝΕΠΕΙΑΣ

- *Βαθμός συνέπειας* (*degree of consistency*)
  - Πόσες ασυνεπείς τιμές αφαιρούνται από τα πεδία.
  - Βαθμός συνέπειας είναι αντιστρόφως ανάλογος με τον απαιτούμενο χρόνο εκτέλεσης.
- *Αλγόριθμος συνέπειας κόμβου* (*Node Consistency*)
  - Μοναδιαίοι περιορισμοί (αφαιρεί τιμές πεδίων βασισμένος σε αυτούς).
- *Αλγόριθμοι συνέπειας τόξου* (*Arc Consistency*-AC)
  - Δυαδικοί περιορισμοί
  - Διάφοροι αλγόριθμοι συνέπειας τόξου, όπως οι AC-3, AC-4, AC-5, AC-6, κλπ.
  - Η δυσκολία που παρουσιάζουν οι αλγόριθμοι της κατηγορίας:
    - Διαγραφή μιας τιμής οδηγεί σε αλλαγές στα πεδία άλλων μεταβλητών.
    - Μετά από κάθε διαγραφή ασυνεπούς τιμής πρέπει να επανεξεταστούν τα πεδία των "άμεσα" συνδεδεμένων μεταβλητών.
- *Αλγόριθμοι συνέπειας μονοπατιού (path consistency algorithms)*
  - Υψηλό υπολογιστικό κόστος.

Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ AC-3

- Ο απλούστερος αλγόριθμος συνέπειας τόξου.
- Έστω οι μεταβλητές V_1, V_2,..V_n με τιμές d_1, d_2,…,d_n από τα πεδία τιμών των μεταβλητών D_1, D_2,…,D_n και ένα σύνολο περιορισμών $C(V_i, V_j)$ για τις μεταβλητές αυτές, οι οποίοι αναπαριστώνται ως τόξα (V_i,V_j). Για συντομία, κάθε τόξο (V_i,V_j) αναφέρεται ως (i,j).
- Το Q περιλαμβάνει αρχικά όλα τα τόξα του γράφου περιορισμών.

Επανέλαβε τα ακόλουθα βήματα μέχρι το Q να γίνει κενό:

1. **Επέλεξε ένα τόξο (i,j) και διέγραψε το από το Q**
2. **Για κάθε τιμή d_i του πεδίου της μεταβλητής V_i έλεγξε αν υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή d_j του πεδίου της μεταβλητής V_j τέτοια ώστε να ικανοποιεί το περιορισμό $C(V_i,V_j)$ που αντιστοιχεί στο τοξο (i, j).**
3. **Αν δεν υπάρχει τέτοια τιμή d_j τότε αφαίρεσε την τιμή d_i από το πεδίο τιμών της V_i. Αν το πεδίο τιμών της V_i είναι κενό τότε τερμάτισε με αποτυχία.**
4. **Αν έχει μεταβληθεί το πεδίο τιμών της Vi τότε πρόσθεσε στο σύνολο Q όλα τα τόξα (k,i), που αντιστοιχούν στους περιορισμούς $C(V_k,V_i)$, για $k \neq i$.**

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ AC-3

- Προϋποθέτει δυαδικούς περιορισμούς.
  - Απαιτείται μετασχηματισμός περιορισμών ανώτερης τάξεως σε πρόβλημα δυαδικών περιορισμών (*binarization*).
- Μη-πληρότητα (υπάρχουν τιμές στα πεδία που δεν εμφανίζονται στη λύση)
  - Στο προηγούμενο παράδειγμα στο πεδίο τιμών της μεταβλητής V_A παρέμεινε η τιμή 3 (που δεν είναι δυνατόν να συμμετέχει στη λύση):

    $\mathbf{V_A \in \{3,4\}}$

    $\mathbf{V_B \in \{2,3\}}$

    $\mathbf{V_\Gamma \in \{1,2\}}$

    $\mathbf{V_\Delta \in \{1,2,3\}}$
  - Οι αλγόριθμοι συνέπειας τόξου δεν απαλείφουν *όλες* τις ασυνεπείς τιμές.

Οπότε για την επίλυση προβλημάτων περιορισμών χρησιμοποιούνται συνήθως αλγόριθμοι ελέγχου συνέπειας τόξου σε συνδυασμό με κάποιο κλασσικό αλγόριθμο αναζήτησης (DFS, BFS, BestFS).

Κ-ΣΥΝΕΠΕΙΑ

Ένας γράφος περιορισμών είναι Κ-συνεπής (K-consistent) εάν για κάθε Κ-1 μεταβλητές που ικανοποιούν τους περιορισμούς υπάρχει μια μεταβλητή Κ με τέτοιο πεδίο ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα όλοι οι περιορισμοί που συνδέουν τις Κ μεταβλητές.

Ένας γράφος είναι ισχυρά Κ-συνεπής (strongly K- consistent) εάν για κάθε $L \leq K$, είναι L-συνεπής.

- Ο αλγόριθμος συνέπειας κόμβου εξασφαλίζει ότι ο γράφος είναι ισχυρά 1-συνεπής.
- Οι αλγόριθμοι συνέπειας τόξου εξασφαλίζουν ισχυρή 2-συνεπεία.
- Προφανώς σε ένα γράφο με Ν κόμβους, εάν εξασφαλισθεί ότι ο γράφος είναι ισχυρά Ν-συνεπής, τότε
  - Μπορεί να βρεθεί λύση χωρίς αναζήτηση.
  - Όμως σε προβλήματα με K>2 το υπολογιστικό κόστος εφαρμογής είναι υψηλό, οπότε προτιμάται ο συνδυασμός με κλασσικό αλγόριθμο αναζήτησης.

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΣΥΝΕΠΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΛΑΣΣΙΚΗΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ (1)

- Ο συνδυασμός αλγορίθμων συνέπειας και αναζήτησης στηρίζεται στη συμπληρωματικότητά τους:
  - Αλγόριθμοι συνέπειας: μη-πλήρεις αλλά αποδοτικοί
  - Κλασικοί αλγόριθμοι αναζήτησης: πλήρεις αλλά μη-αποδοτικοί
- Βασική ιδέα :

Μείωση του χώρου αναζήτησης με την χρήση ενός αλγορίθμου συνέπειας πριν από κάθε βήμα ανάθεσης τιμών (a priori pruning).

- Υπάρχουν τρεις βασικοί τρόποι συνδυασμού, που
  - έχουν κοινό το ότι εφαρμόζεται ένας αλγόριθμος συνέπειας πριν την εκκίνηση της διαδικασίας αναζήτησης,
  - διαφέρουν στο βαθμό ελέγχου των πεδίων των μεταβλητών σε κάθε βήμα, δηλ. στον τρόπο διάδοσης των περιορισμών.

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΣΥΝΕΠΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΛΑΣΣΙΚΗΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ (2)

- Ο *προοπτικός έλεγχος* (*Forward checking*)
  - Απαλείφει τιμές από τα πεδία των μη-δεσμευμένων μεταβλητών που συνδέονται άμεσα με περιορισμούς με την μεταβλητή στην οποία μόλις ανατέθηκε τιμή.
  - Παραμένει μεγάλος αριθμός ασυνεπών τιμών στα πεδία.
  - Χαμηλό υπολογιστικό κόστος κάθε βήματος.
- Ο αλγόριθμος *έγκαιρης μερικής εξέτασης* (*Partial Look Ahead*)
  - Κατευθυντική συνέπεια (directional consistency) σε κάθε βήμα (εξετάζει όλα τα πεδία τιμών των μη-δεσμευμένων μεταβλητών με προκαθορισμένη σειρά, ελέγχοντας τους περιορισμούς μία μόνο φορά).
  - Παραμένουν στα πεδία των μεταβλητών μη συνεπείς τιμές.
- Ο αλγόριθμος *έγκαιρης πλήρους εξέτασης* (*Full Look Ahead*) ή *διατήρησης συνέπειας τόξου* (Maintaining Arc Consistency - MAC).
  - Εφαρμόζει πλήρη αλγόριθμο συνέπειας τόξου σε κάθε βήμα.
  - Αφαιρεί το μεγαλύτερο αριθμό ασυνεπών τιμών από τους τρεις.
  - Υψηλό υπολογιστικό κόστος

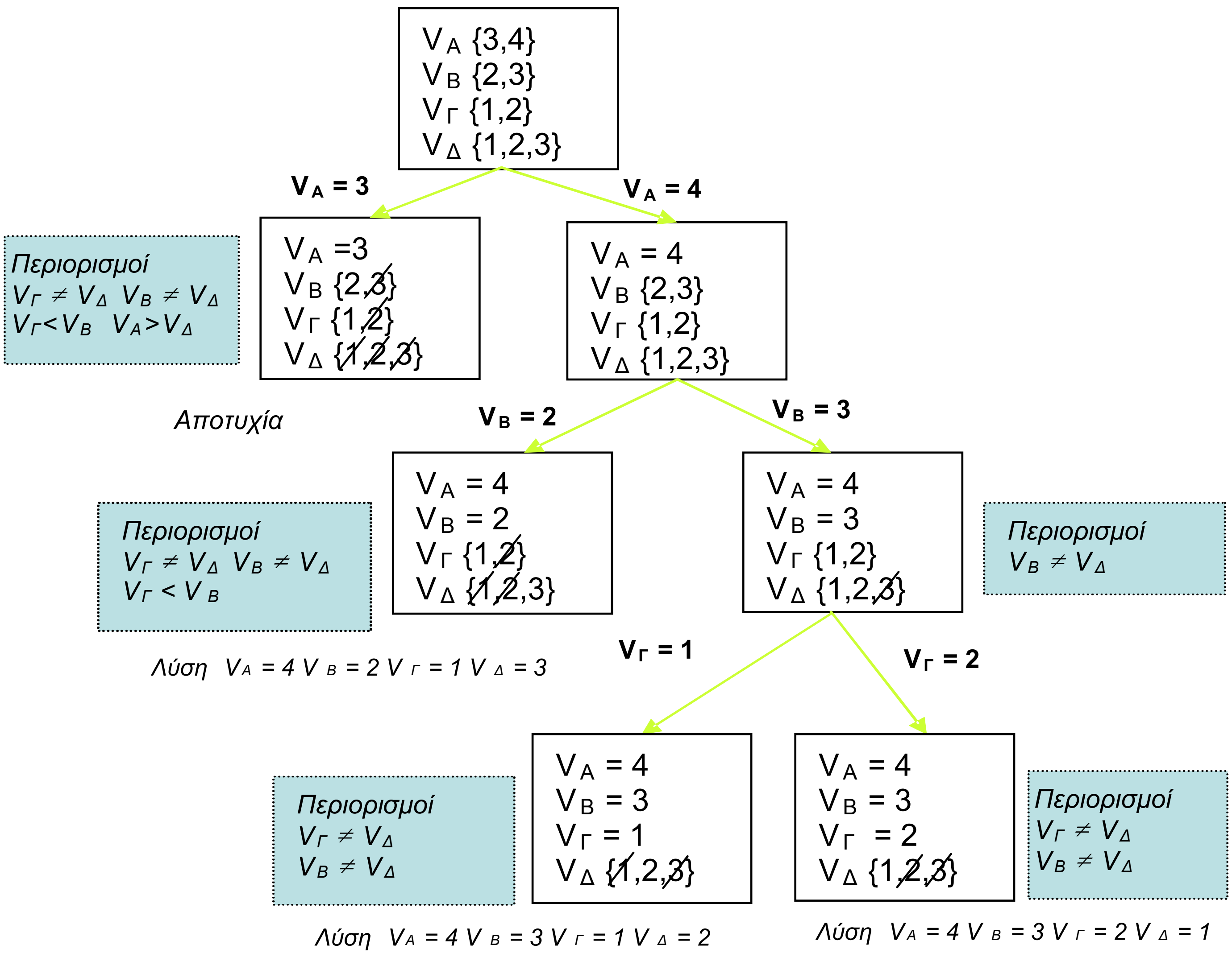
ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΣΥΝΕΠΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΛΑΣΣΙΚΗΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ (3)

Ο ολοκληρωμένος αλγόριθμος διατήρησης συνέπειας τόξου :

1. Για κάθε περιορισμό αφαίρεσε από τα πεδία τιμών των μεταβλητών τις τιμές εκείνες που δεν μπορούν να συμμετέχουν στην τελική λύση με ένα αλγόριθμο ελέγχου συνέπειας.
2. Στο μειωμένο χώρο αναζήτησης που προκύπτει από το προηγούμενο βήμα εφάρμοσε έναν κλασικό αλγόριθμο αναζήτησης για να βρεθεί η λύση.

   Σε κάθε βήμα (ανάθεση τιμής) αυτής της αναζήτησης εφάρμοσε ξανά τον αλγόριθμο ελέγχου συνέπειας έτσι ώστε να αφαιρεθούν τυχόν τιμές από τα πεδία των μεταβλητών οι οποίες δεν μπορούν να συμμετέχουν στην λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



V_A {3,4}
V_B {2,3}
V_Γ {1,2}
V_Δ {1,2,3}
$V_A = 3$
$V_A = 4$
Περιορισμοί
$V_\Gamma \neq V_\Delta$ $V_B \neq V_\Delta$
$V_\Gamma < V_B$ $V_A > V_\Delta$
$V_A = 3$
V_B {2,$\cancel{3}$}
V_Γ {1,$\cancel{2}$}
V_Δ {$\cancel{1}$,$\cancel{2}$,$\cancel{3}$}
$V_A = 4$
V_B {2,3}
V_Γ {1,2}
V_Δ {1,2,3}
Αποτυχία
$V_B = 2$
$V_B = 3$
Περιορισμοί
$V_\Gamma \neq V_\Delta$ $V_B \neq V_\Delta$
$V_\Gamma < V_B$
$V_A = 4$
$V_B = 2$
V_Γ {1,$\cancel{2}$}
V_Δ {$\cancel{1}$,$\cancel{2}$,3}
$V_A = 4$
$V_B = 3$
V_Γ {1,2}
V_Δ {1,2,$\cancel{3}$}
Περιορισμοί
$V_B \neq V_\Delta$
Λύση $V_A = 4$ $V_B = 2$ $V_\Gamma = 1$ $V_\Delta = 3$
$V_\Gamma = 1$
$V_\Gamma = 2$
Περιορισμοί
$V_\Gamma \neq V_\Delta$
$V_B \neq V_\Delta$
$V_A = 4$
$V_B = 3$
$V_\Gamma = 1$
V_Δ {$\cancel{1}$,2,$\cancel{3}$}
$V_A = 4$
$V_B = 3$
$V_\Gamma = 2$
V_Δ {1,$\cancel{2}$,$\cancel{3}$}
Περιορισμοί
$V_\Gamma \neq V_\Delta$
$V_B \neq V_\Delta$
Λύση $V_A = 4$ $V_B = 3$ $V_\Gamma = 1$ $V_\Delta = 2$
Λύση $V_A = 4$ $V_B = 3$ $V_\Gamma = 2$ $V_\Delta = 1$

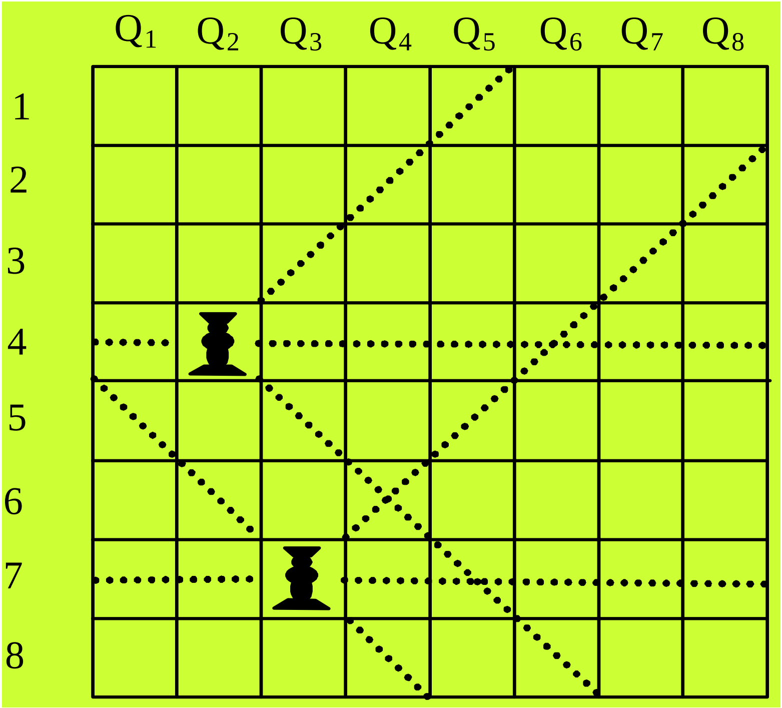
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8 ΒΑΣΙΛΙΣΣΩΝ (1)

- Κλασικό παράδειγμα προβλήματος περιορισμών.
  - Το πρόβλημα απαιτεί να τοποθετηθούν 8 βασίλισσες σε μια σκακιέρα 8x8 χωρίς να απειλούν η μια την άλλη.
  - Το πρόβλημα ορίζεται και για περισσότερες των 8 βασιλισσών
  - Η δυσκολία στην επίλυσή του αυξάνει εκθετικά.
  - Χρησιμοποιείται για την μέτρηση της απόδοσης αλγορίθμων ικανοποίησης περιορισμών.
- Συνθήκη μη απειλής μεταξύ των βασιλισσών:
  - Όλες οι βασίλισσες πρέπει να είναι σε διαφορετική γραμμή:

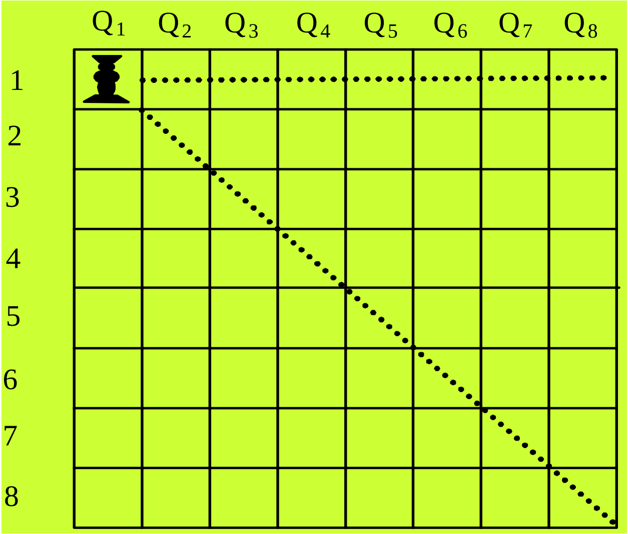
    $\forall$ i, j: Qj ≠ Qi.
  - Ισχύουν οι περιορισμοί:

    Qj ≠ Qj+n + n, για n>1 και n+j ≤8

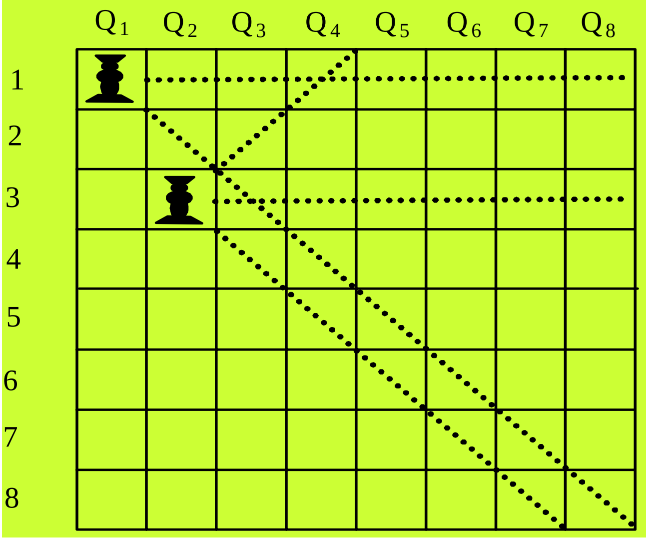
    Qj ≠ Qj+n – n, για n>1 και n+j ≤8
  - Σχηματική αναπαράσταση περιορισμών με δύο βασίλισσες στην σκακιέρα.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8 ΒΑΣΙΛΙΣΣΩΝ (2)

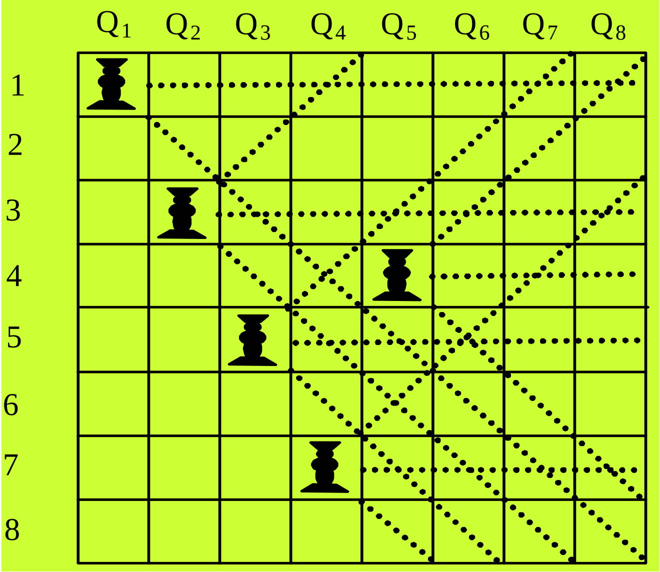


1. Ανάθεση τιμής στην πρώτη βασίλισσα (Q1=1)
2. Αφαίρεση τιμών που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς (βλ. σχήμα) από τα πεδία των μεταβλητών των υπολοίπων βασιλισσών

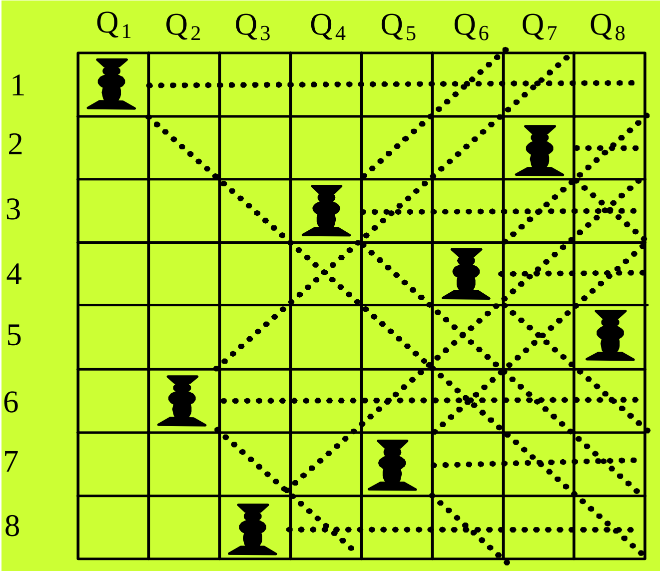


3. Ανάθεση τιμής στη δεύτερη βασίλισσα (Q2=3)
4. Αφαίρεση τιμών που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς (βλ. σχήμα) από τα πεδία των μεταβλητών των υπολοίπων βασιλισσών

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8 ΒΑΣΙΛΙΣΣΩΝ (3)



Περαιτέρω ανάθεση τιμών που δεν οδηγεί σε λύση.



Λύση στο πρόβλημα των 8 βασιλισσών

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

- Δημιουργία ενός νέου είδους προγραμματισμού, του *προγραμματισμού με περιορισμούς* (*constraint programming*).
- *Λογικός Προγραμματισμός με Περιορισμούς* (*Constraint Logic Programming - CLP*), ως επέκταση των γλωσσών λογικού προγραμματισμού (π.χ. Prolog).
- Παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι το CHIP με πλήθος βιομηχανικών εφαρμογών:
  - σύνταξη ωρολογίων προγραμμάτων κατανομής εργασιών,
  - σχεδιασμός ενεργειών (planning) για την οργάνωση γραμμών παραγωγής.
- Άλλες γνωστές γλώσσες που υποστηρίζουν προγραμματισμό με περιορισμούς: SICSTUS, ECLIPSE PROLOG, η Oz και η GNU-PROLOG, κλπ
- Αρκετές εκδόσεις της γλώσσας Prolog υποστηρίζουν σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό το νέο είδος προγραμματισμού.