ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΜΣ
«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ & ΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ
ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ
2006-2007
2η Σειρά Ασκήσεων
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται το γνωστό πρόβλημα των δύο δοχείων: «Υπάρχουν δύο δοχεία χωρητικότητας 4 και 3 λίτρων αντίστοιχα και μια βρύση. Κατ' αρχήν, τα δοχεία είναι άδεια. Θέλουμε να απομονώσουμε σ' ένα από τα δοχεία ποσότητα 2 λίτρων. Οι δυνατές ενέργειες είναι: γέμισμα των δοχείων από τη βρύση, άδειασμα των δοχείων στο έδαφος, άδειασμα του ενός δοχείου στο άλλο, μερικώς ή ολικώς.»

Ζητούνται:

α) Να ορίσετε (α1) την αρχική κατάσταση, (α2) την/τις τελική/ές κατάσταση/εις και (α3) τους τελεστές μετάβασης, με βάση την αναπαράσταση μιας κατάστασης, όπως δόθηκε στις παραδόσεις.

Ορίζουμε σαν αναπαράσταση μιας τυχαίας κατάστασης την: (x, y)
όπου x η ποσότητα νερού στο δοχείο των 4 λίτρων (με δυνατές τιμές 0, 1, 2, 3, 4) και y η ποσότητα νερού στο δοχείο των 3 λίτρων (με δυνατές τιμές 0, 1, 2, 3).

α1) Αρχική κατάσταση: (0,0)
α2) Τελικές καταστάσεις : (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (0,2), (1,2), (3,2), (4,2)
Με άλλα λόγια, το κριτήριο τερματισμού είναι: x=2 ή y=2.
α3) Τελεστές μετάβασης:

ΤΕΛΕΣΤΗΣ:ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
T1: Γέμισε το Α	x<4	(4,y)
T2: Γέμισε το Β	y<3	(x,3)
T3:Άδειασε το Α	x>0	(0,y)
T4: Άδειασε το Β	y>0	(x,0)
T5: Άδειασε το Α στο Β	x>0, y<3	Αν x≥3-y τότε (x-(3-y),3), αλλιώς (0,y+x)
T6: Άδειασε το Β στο Α	x<4, y>0	Αν y≥4-x τότε (4, y-(4-x)), αλλιώς (y+x,0)

β) Προσδιορίστε τον χώρο καταστάσεων του προβλήματος. Υπάρχουν ανέφικτες καταστάσεις; Αν ναι, μπορούν να προσδιοριστούν;

Χώρος καταστάσεων: (x.y): x ∈ {0,1,2,3,4}, y ∈ {0,1,2,3}

Αναλυτικά:

(0,0), (0,1), (0,2), (0,3)
(1,0), **(1,1)**, **(1,2)**, (1,3)
(2,0), **(2,1)**, **(2,2)**, (2,3)
(3,0), **(3,1)**, **(3,2)**, (3,3)
(4,0), (4,1), (4,2), (4,3)

Ανέφικτες καταστάσεις είναι αυτές στις οποίες, με δεδομένη την αρχική κατάσταση και τους τελεστές μετάβασης, δεν θα φτάσουμε ποτέ. Ξεκινάμε, λοιπόν, εφαρμόζοντας στην αρχική κατάσταση τους τελεστές που μπορούν να εφαρμοστούν. Με την εφαρμογή αυτών των τελεστών προκύπτουν κάποιες νέες καταστάσεις. Σε καθεμία από τις νέες καταστάσεις εφαρμόζουμε τους τελεστές που μπορούν να εφαρμοστούν σε αυτήν κοκ. Οταν προκύπτουν καταστάσεις που έχουν ήδη αναπτυχθεί δεν εφαρμόζουμε ξανά τελεστές σ'αυτές (θα προκύψουν καταστάσεις που έχουν ήδη προκύψει). Σε κάποια στιγμή φτάνουμε σ'ένα σημείο από το οποίο και μετά οι καταστάσεις πλέον διαρκώς θα ανακυκλώνονται. Όταν δεν μπορούμε να συνεχίσουμε άλλο παρατηρούμε πως κάποιες από τις καταστάσεις του Χώρου Καταστάσεων δεν εμφανίστηκαν καθόλου στον γράφο και ούτε πρόκειται να εμφανιστούν όσο κι αν συνεχίσουμε. Έτσι βρίσκουμε ποιές είναι οι ανέφικτες καταστάσεις. Ανέφικτες καταστάσεις εδώ είναι όσες από τις παραπάνω έχουν σημειωθεί πιο έντονα, δηλαδή οι καταστάσεις στις οποίες κανένα από τα δύο δοχεία δεν είναι άδειο ούτε γεμάτο. Επομένως, εφικτές είναι μόνο οι καταστάσεις όπου ένα από τα δύο δοχεία είναι άδειο ή γεμάτο.

γ) Ορίστε μια συνάρτηση κόστους g(n) και μια ευρετική συνάρτηση h(n).

<u>Συνάρτηση κόστους:</u>

Η συνάρτηση κόστους σχετίζεται με το **κόστος μετάβασης**. Το κόστος μετάβασης χαρακτηρίζει μια μετάβαση από μια κατάσταση n'= (x', y') σε μια άλλη κατάσταση n = (x, y). Στην περίπτωσή μας θεωρούμε ότι το κόστος αυτό σχετίζεται με τον όγκο του νερού που διακινείται σε μια μετάβαση και το εκφράζουμε ως εξής:

$$g(n', n) \begin{cases} |x'-x|+|y'-y| & \text{αν } (x=x' \text{ ή } y=y') \\ (|x'-x|+|y'-y|)/2 & \text{αν } (x\neq x' \text{ και } y\neq y') \end{cases}$$

Επομένως, το συνολικό κόστος μετάβασης (δηλ. το κόστος μετάβασης από την αρχή) στην κατάσταση n είναι: <u>g(n) = g(n') + g(n', n)</u>

<u>Ευρετική συνάρτηση:</u>

Σαν ευρετικό, σε μια κατάσταση (x, y), θεωρούμε το πόσο κοντά στα 2 λίτρα βρίσκεται η ποσότητα νερού σε κάθε δοχείο. Επίσης, θέλουμε να είναι h(n)=0 στις καταστάσεις-στόχους. Γι' αυτό, εκφράζουμε την ευρετική συνάρτηση ως εξής:

$$h(n) \begin{cases} (|2-x|+|2-y|)/2 & \text{αν } x, y \neq 2 \\ 0 & \text{αν } x=2 \text{ ή } y=2 \end{cases}$$

δ) Εφαρμόστε τα τρια πρώτα βήματα των αλγορίθμων (δ1) αναζήτηση δέσμης και (δ2) διακλάδωση και δέσμευση, σχεδιάζοντας τα αντίστοιχα επίπεδα στο δέντρο καταστάσεων.

<u>Αναζήτηση Δέσμης</u>

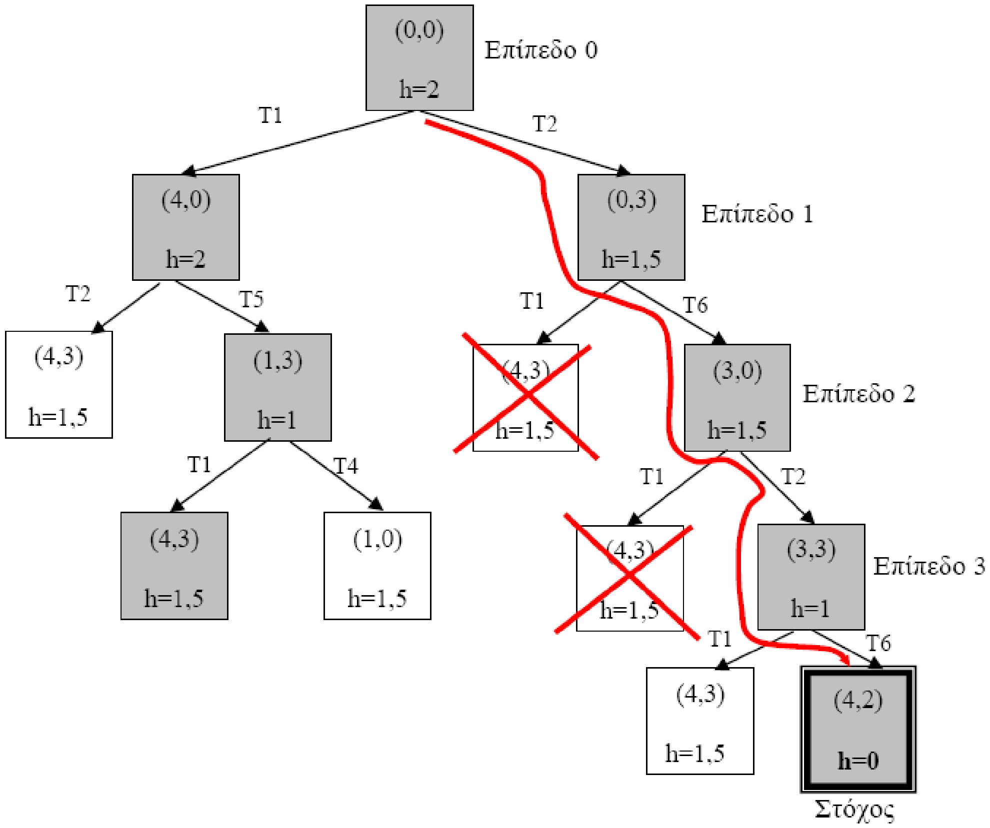
Ο αλγόριθμος αναζήτησης δέσμης επιλέγει τα m καλυτερα παιδιά (με βάση το h(n)) από κάθε επίπεδο για περαιτέρω ανάπτυξη. Τα υπόλοιπα τα διαγράφει. Επίσης καθορίζουμε τα εξής για αποδοτικότερη λειτουργία του αλγορίθμου:

(α) Διαγράφονται όσες καταστάσεις έχουν ήδη αναπτυχθεί σε προηγούμενο επίπεδο είτε είναι στο ίδιο μονοπάτι είτε όχι (αφού μας ενδιαφέρει να βρούμε μια λύση).
(β) Διαγράφεται κάθε ίδια κατάσταση που παράγεται στο ίδιο επίπεδο, δηλ. κρατάμε μόνο την πρώτη που παράγεται.

(γ) Στην περίπτωση δύο ή περισσότερων καταστάσεων που έχουν την ίδια ευρετική τιμή προτιμούμε τέτοια διάταξη, ώστε μια κατάσταση να ανήκει σε διαφορετικό γονέα από την προηγούμενη και την επόμενή της.

(δ) Μεταξύ δύο καταστάσεων του ίδιου γονέα με την ίδια ευρετική συνάρτηση επιλέγουμε την πρώτη αριστερά.

Στη συνέχεια φαίνεται η ανάπτυξη (όλου) του δέντρου για m=2, όπου δεν αναγράφονται καθόλου τα κλαδιά που οδηγούν σε καταστάσεις που έχουν ήδη αναπτυχθεί (δηλ. όσες εμπίπτουν στην περίπτωση (α)), με κόκκινο Χ παριστάνεται η διαγραφή καταστάσεων της περίπτωσης (β) και με γκρι εμφανίζονται οι καταστάσεις που επιλέγονται σε κάθε επίπεδο.



<u>Σημείωση :</u> Στην παραπάνω εικόνα ο κόμβος που έχει διαγραφεί στο επίπεδο 3 είναι λάθος. Αντιστοιχεί στην κατάσταση (4,0) με h=2 που έχει αναπτυχθεί στο επίπεδο 1.

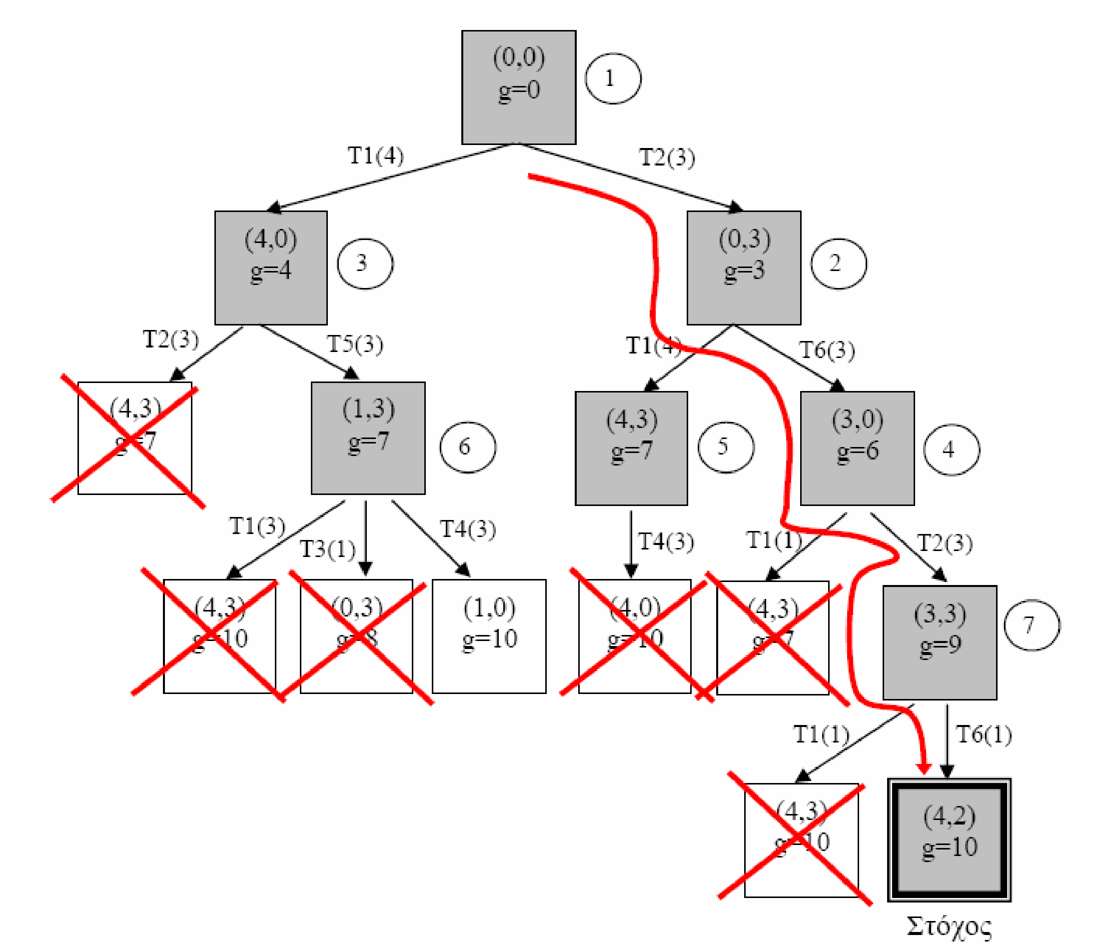
Η διαδρομή λύσης που βρέθηκε (και είναι μία από τις δυνατές) φαίνεται με κόκκινη γραμμή. Άρα μια λύση του προβλήματος είναι: T2-T6-T2-T6, δηλαδή:

Γέμισε το δοχείο B (T2)
Άδειασε το δοχείο B στο A (T6)
Γέμισε το δοχείο B (T2)
Άδειασε το δοχείο B στο A (T6)

<u>Διακλάδωση και δεύσμευση (ή επέκταση και οριοθέτηση)</u>

Ο αλγόριθμος διακλάδωσης και δέσμευσης επιλέγει κάθε φορά από τις τρέχουσες ανοικτές καταστάσεις (που δεν έχουν αναπτυχθεί) την κατάσταση που «απέχει» λιγότερο από την αρχή, με βάση τη συνάρτηση κόστους g(n). Ως γνωστόν, βρίσκει τη βέλτιστη λύση (δηλ. τη λύση με το μικρότερο κόστος), αν η συνάρτηση κόστους είναι σωστή. Θεωρούμε παρόμοια με τον προηγούμενο αλγόριθμο:
(α) Διαγράφονται όσες καταστάσεις έχουν ήδη αναπτυχθεί σε προηγούμενο επίπεδο.
(β) Διαγράφεται κάθε ίδια ανοικτή κατάσταση με μεγαλύτερο κόστος.
(γ) Στην περίπτωση δύο ή περισσότερων ίδιων καταστάσεων που έχουν το ίδιο

κόστος διαγράφουμε αυτή που παρήχθη πιο πρόσφατα.
(δ) Στην περίπτωση δύο ή περισσότερων καταστάσεων που έχουν το ίδιο κόστος προτιμούμε αυτή που παρήχθη παλαιότερα.



Σημείωση : Στην παραπάνω εικόνα ο κόμβος-παιδί του (3,0)- που έχει διαγραφεί στο επίπεδο 3 είναι λάθος. Αντιστοιχεί στην κατάσταση (4,0) που έχει αναπτυχθεί στο επίπεδο 1.

Η διαδρομή λύσης που βρέθηκε (και είναι η βέλτιστη) φαίνεται με κόκκινη γραμμή. Παρατηρείστε τώρα ότι και ο αλγόριθμος αναζήτησης δέσμης βρήκε την ίδια λύση, που κατά σύμπτωση είναι η βέλτιστη. Άρα η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι:

T2-T6-T2-T6.

2. Δίνεται το γνωστό πρόβλημα των Ιεραποστόλων και Κανιβάλων:

«Υπάρχουν τρείς ιεραπόστολοι, τρεις κανίβαλοι και μια βάρκα στη μια όχθη ενός ποταμού. Θέλουμε όλοι να μεταφερθούν στην απέναντι όχθη με τη βάρκα. Όμως, η βάρκα για να κινηθεί χρειάζεται τουλάχιστον ένα άτομο, χωρά μόνο μέχρι δύο άτομα και σε καμμιά περίπτωση δεν πρέπει ο αριθμός των κανιβάλων να είναι μεγαλύτερος από αυτόν των ιεραποστόλων σε κάποια όχθη.»

Ζητούνται:

α) Να περιγραφεί σαν πρόβλημα αναζήτησης, δηλ. να οριστούν η αρχική κατάσταση, η τελική κατάσταση, οι τελεστές μετάβασης, μια συνάρτηση κόστους g(n) και μια ευρετική συνάρτηση h(n).

Η αναπαράσταση μιας τυχαίας κατάστασης του προβλήματος μπορεί να είναι η εξής:

(K1, I1, K2, I2, O)

όπου:

K1, K2 είναι ο αριθμός των καννιβάλλων στην όχθη 1, 2 αντίστοιχα,

I1, I2 είναι ο αριθμός των ιεραποστόλων στην όχθη 1, 2 αντίστοιχα,
O είναι 1 ή 2 ανάλογα με το σε ποιά όχθη βρίσκεται η βάρκα.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:
Αρχική κατάσταση: (3, 3, 0, 0, 1)
Τελική κατάσταση: (0, 0, 3, 3, 2)

Πέντε τελεστές μετάβασης είναι οι παρακάτω. Οι υπόλοιποι 5 (για να καλύψουμε και τις περιπτώσεις της αντίστροφης μεταφοράς) είναι παρόμοιοι:

Α/Α	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
T1	Μεταφορά 1 ιεραποστόλου από την Οχθη1 στην Οχθη2	I1>0, (I1>=K1+1 ή I1=1), O=1	(K1, I1-1, K2, I2+1, 2)
T2	Μεταφορά 1 καννιβάλου από την Οχθη1 στην Οχθη2	K1>0, (I2>K2 ή K2=0 ή I2=0), O=1	(K1-1, I1, K2+1, I2, 2)
T3	Μεταφορά 2 ιεραποστόλων από την Οχθη1 στην Οχθη2	I1>1, (I1>=K1+2 ή I1=2), O=1	(K1, I1-2, K2, I2+2, 2)
T4	Μεταφορά 2 καννιβάλων από την Οχθη1 στην Οχθη2	K1>1, (I2>K2+1 ή I2=0),O=1	(K1-2, I1, K2+1, I2, 2)
T5	Μεταφορά 1 ιεραπ. και 1 καν. από την Οχθη1 στην Οχθη2	K1,I1>0, (K2=0 ή I2>0), O=1	(K1-1, I1-1, K2+1, I2+1, 2)

Μια άλλη αναπαράσταση μιας τυχαίας κατάστασης του προβλήματος, συνοπτικότερη και επομένως αποδοτικότερη, μπορεί να είναι η εξής:

(K, I, O)

όπου K είναι ο αριθμός των καννιβάλλων στην όχθη 1
I είναι ο αριθμός των ιεραποστόλων στην όχθη 1
O είναι 1 ή 2 ανάλογα με το σε ποιά όχθη βρίσκεται η βάρκα.
Οπότε, αρχική κατάσταση: (3, 3, 1), τελική κατάσταση: (0, 0, 2)

Πέντε τελεστές μετάβασης είναι οι παρακάτω. Οι υπόλοιποι 5 (για να καλύψουμε και τις περιπτώσεις της αντίστροφης μεταφοράς) είναι παρόμοιοι:

Α/Α	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
T1	Μεταφορά 1 ιεραποστόλου από την Οχθη1 στην Οχθη2	I>0, (I>=K+1 ή I=1), O=1	(K, I-1, 2)
T2	Μεταφορά 1 καννιβάλου από την Οχθη1 στην Οχθη2	K>0, (I=3 ή I=0),O=1	(K-1, I, 2)
T3	Μεταφορά 2 ιεραποστόλων από την Οχθη1 στην Οχθη2	I>1, (I>=K+2 ή I=2), O=1	(K, I-2, 2)
T4	Μεταφορά 2 καννιβάλων από την Οχθη1 στην Οχθη2	K1>1, (K=3 ή I=0),O=1	(K-2, I, 2)
T5	Μεταφορά 1 ιεραπ. και 1 καν. από την Οχθη1 στην Οχθη2	K,I>0, (K=3 ή I<3), O=1	(K-1, I-1, 2)

<u>Συνάρτηση Κόστους</u>

Δεν υπάρχει κάτι που να διαφοροποιεί το «κόστος» (π.χ. τον κόπο ή το έργο που απαιτείται) στις διάφορες μεταβάσεις, οπότε θεωρούμε ότι το κόστος μετάβασης είναι πάντα 1, δηλ. $g(n) = 1 + g(n-1)$ για κάθε κατάσταση n (όπου n-1 είναι η κατάσταση-γονέας της n).

<u>Ευρετική Συνάρτηση</u>

Σαν ευρετική συνάρτηση, δηλ. μια συνάρτηση που μετρά την απόσταση κάθε κατάστασης από τον στόχο (τελική κατάσταση), ορίζουμε την εξής:

$$h(n) = K1+I1 \text{ ή } h(n) = K+I$$

(ανάλογα με την αναπαράσταση)

Η συνάρτηση αυτή επιστρέφει τον αριθμό των καννιβάλων και ιεραποστόλων που απομένουν ακόμη για μετακίνηση.

β) Ποιός αλγόριθμος πρέπει να χρησιμοποιηθεί ώστε να βρούμε β1) μια οποιαδήποτε λύση, β2) όλες τις λύσεις, β3) τη συντομότερη, β4) τη βέλτιστη λύση. Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.

(β1) μία λύση:

· <u>κατά βάθος</u> (depth-first).

(Είναι συνήθως υπολογιστικά πιο «φθηνός» και πιο γρήγορος στο να βρίσκει μια λύση)

(β2) όλες τις λύσεις:

· <u>κατά πλάτος</u> (breadth-first)

(Βρίσκει όλες τις λύσεις με ασφάλεια και χωρίς χρήση ευρετικών)

· <u>επαναληπτική εκβάθυνση</u> (iterative-deepening)

(Βρίσκει όλες τις λύσεις με ασφάλεια, σε περισσότερο χρόνο από τον κατά πλάτος, αλλά με λιγότερη χρήση μνήμης)

(β3) συντομότερη λύση = λιγότερα βήματα:

· <u>κατά πλάτος</u>

(Βρίσκει πάντα τη συντομότερη λύση, δηλ. αυτή με τα λιγότερα βήματα, που δε σημαίνει όμως ότι είναι και η βέλτιστη. Στην περίπτωσή μας όμως, λόγω σταθερού κόστους βρίσκει και την βέλτιστη.)

(β4) βέλτιστη λύση = μικρότερο κόστος :

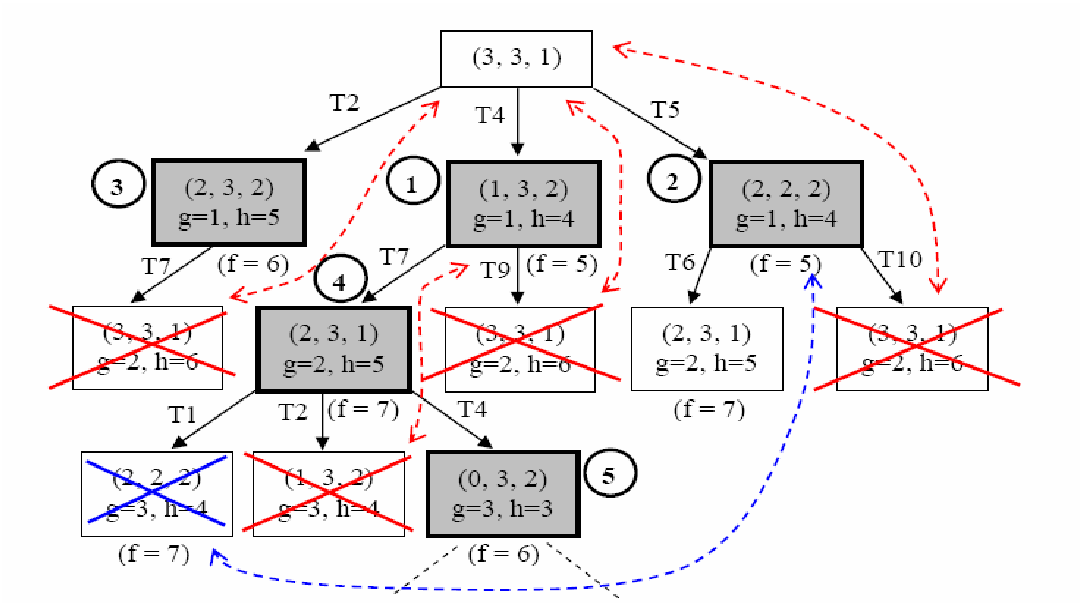
· <u>Α*</u>

(Εγγυάται εύρεση της βέλτιστης λύσης. Δεδομένου όμως ότι το κόστος είναι σταθερό, ουσιαστικά μετατρέπεται σε αλγόριθμο βέλτιστου κόμβου (best-first). Οπότε, θα μπορούσε να προταθεί και ο βέλτιστου κόμβου, ως υπολογιστικά «ελαφρύτερος».)

Στο β4 θα μπορούσε να προταθεί και ο B&B, με την επιφύλαξη της συνάρτησης κόστους, αλλά στην περίπτωσή μας μεταπίπτει στον κατα πλάτος λόγω σταθερού κόστους. Επομένως, θα μπορούσε να προταθεί και ο κατά πλάτος, ο οποίος όμως είναι συνήθως πιο αργός από τον Α*.

γ) Εφαρμόστε τα τρια πρώτα βήματα του αλγορίθμου που προτείνατε για το β4, σχεδιάζοντας τα αντίστοιχα επίπεδα στο δέντρο καταστάσεων.

Α* : (Εφαρμόζουμε τη δεύτερη μέθοδο αναπαράστασης καταστάσεων)



Στο παραπάνω σχήμα έχουν αναπτυχθεί περισσότερα από 3 βήματα για εκπαιδευτικούς λόγους. Οι σκιασμένοι κόμβοι είναι αυτοί που προτιμήθηκαν για ανάπτυξη λόγω καλύτερης εκτίμησης f και οι αριθμοί δίπλα τους μέσα σε κύκλο δείχνουν τη σειρά ανάπτυξης.

Στην ανάπτυξη του δέντρου ακολουθήθηκαν οι παρακάτω κανόνες:

1. Μια κατάσταση που είναι ίδια με μία πρόγονο κατάσταση, δεν αναπτύσσεται (βλ. καταστάσεις με κόκκινη διαγράμμιση στο σχήμα).
2. Αν δύο καταστάσεις έχουν την ίδια εκτίμηση f και βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε αναπτύσσεται πρώτα η αριστερότερα ευρισκόμενη.
3. Αν έχουμε δύο ίδιες καταστάσεις και δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε διαγράφεται αυτή που απέχει περισσότερο από τον στόχο (π.χ. βλ. κατάσταση με μπλε διαγράμμιση στο σχήμα).

Γενικά, οι κανόνες αυτοί ακολουθούνται σε τέτοιους αλγορίθμους.