ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ

N_i περιμένουν

Αν $N_i > 0$, ένας τότε βρίσκεται σίγουρα στον server.

(χρόνος αναμ. του πελ. N_i) $W_i = \underbrace{\sum_{j=i-N_i}^{i-1} X_j}_{\text{χρον. εξυπ. όσων πριν}} + \underbrace{R_i}_{\text{αυτός που είναι στο server (υπολειπόμενος χρόνος)}}$

Αν χρόνοι εκθετική, τότε κατανομή R_i ίδια με κατανομή R_i

Άρα: $E[W_i] = E[\Sigma] + E[R_i] \Longrightarrow$

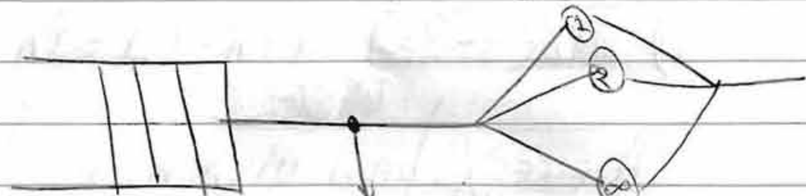
(Εργοδικό σύστημα: Κάποια στιγμή t, αδειάζει) όχι άπειροι πελάτες, δεν χάνονται πελάτες.

υπολειπόμενος χρόνος όσων είναι μέσα στο σύστημα | μέσο πλήθος σε ουρά $E[N_i] \cdot E[X]$

$\Rightarrow W = R + N_Q \cdot \frac{1}{\mu}$ → μέσο χρόνο στην ουρά

$\Rightarrow W = \frac{R}{1-\rho} \quad (\rho = \lambda/\mu)$

- $\bar{X} = 20$ sec (μέσ. χρόν. εξυπηρ.)
- $\lambda = 2$ εργ/sec (ρυθμ. αφίξεων)
- $W = 3$ sec (μέσ. χρ. αναμονής)



1/2 (πιθανότ. kick).

α) Μέσος αριθμός εργ. στην ουρά

β) Μέσος ~~πελατών~~ # εργασιών γενικά

ΛΥΣΗ

α) $N_Q = \lambda \cdot W = 6$

β) $N = N_Q + N_S = N_Q + 1/2 \cdot \lambda \cdot \bar{X} = 6 + 20 = 26$

- 2 modes: user jobs ή OS jobs

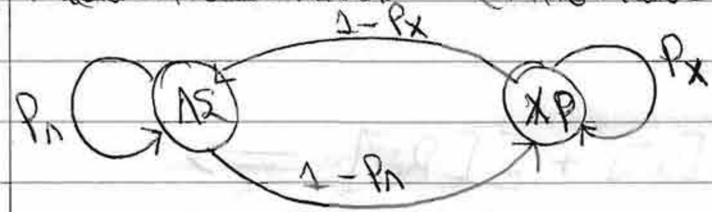
Χρόνος διακριτός, χωρισμένος σε slots.

Αν P_x, σε ένα slot, τότε στο επόμενο πάλι user

Αν P_Λ — // — — // — πάλι OS

Λύση

α) Μοντελοποίηση: (Αλυσίδα Markov)



β) Να λυθεί το σύστημα στην μόνιμη κατάσταση.
(πιθανότητα να είμαστε σε κάποια κατάσταση)

Αν $1-P_x = 1-P_\Lambda = 1$, εναλλάξ ΛΣ ⟷ ΧΡ (round robin)
[Στάσιμη κατανομή, οριακές πιθανότητες] *

Οριακ. πιθανότητες: όταν δεν τις έχω, δεν έχω στάσιμη κατανομή, δεν υπάρχουν αν η κατάσταση εξαρτάται από i.

1) $\Pi_\Lambda + \Pi_X = 1$ (Π_i: πιθ. να βρίσκομαι στην κατ. i)

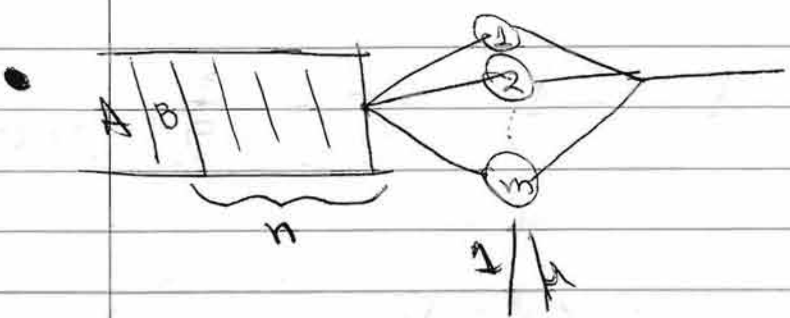
2) $\Pi_\Lambda \cdot (1-P_\Lambda) = \Pi_X \cdot (1-P_x)$

Η εισερχόμενη κίνηση σε μια κατάσταση, πρέπει να ισούται με την εξερχόμενη.

$$\Pi_X = \frac{1-P_\Lambda}{2-P_x-P_\Lambda}, \quad \Pi_\Lambda = \frac{1-P_x}{2-P_x-P_\Lambda}$$

γ) Αν $P_\Lambda = 0,2$, πόσο θα 'ναι P_x, αν στην μον. κατάσταση το 90% του χρόνου πάει στον χρήστη.

Άρα $\Pi_X = 0,9 \xrightarrow{P_\Lambda = 0,2} P_x = 0,91$

• 

m εξυπηρετητές, εξυπηρετούν εκθετικά με μέσο χρόνο $1/\mu$.
Φτάνει ο A, κλείνει, και στην ουρά περιμένουν n.

α) Μέσος χρόνος αναμονής A, $\overline{W}_A$

$n+1$ (n που είναι στην ουρά + 1 για να μπει ο A)

$$\overline{W}_A = \frac{n+1}{\boxed{m\cdot\mu}} \longrightarrow \text{ρυθμ. εξυπηρέτησης}$$

β) Μέσος χρόνος για να αδειάσει, T

(Ο πρώτος, αφού μπει ο A, φεύγει σε $m\cdot\mu$).
στη συνέχεια σε $(m-1)\cdot\mu$, $\longrightarrow (m-2)\mu$ κ.ο.κ.

$$\text{Άρα } T = \frac{n+1}{m\mu} + \frac{1}{\mu\cdot m} + \frac{1}{\mu(m-2)} + \dots + \frac{1}{\mu}$$

γ) Έστω X, η σειρά με την οποία τελείωσε ο A.
$P[X=k]$, $k=1,2,\dots,n+m+1$.
$P[X=k]=0$ για $k=1,2,\dots,n+1$ (Αφού ο A έχει μπροστά του n άτομα)
$P[X=k]=\frac{1}{m}$ για $k=n+2,\dots,n+m+1$.
$m \longrightarrow$ ένας από τους m εξυπηρετητές

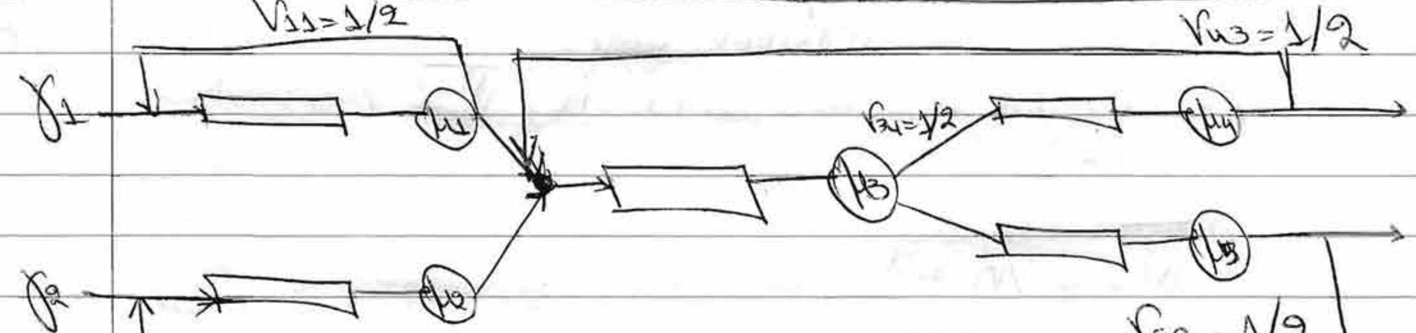
δ) $P[A \text{ πριν } B]$, πρέπει ο A να μπει στον σέρβερ πριν τελειώσει ο B και ο A να τελειώσει πιο νωρίς.

Y = {ο A προλαβαίνει στους servers τον B}
Ω = {όταν A,B μαζί στους servers, ο A τελειώνει πιο νωρίς}

$P[Y] = 1 - \frac{1}{m}$ (δηλαδή ο B τελειώνει με $1/m$)

$P[A \text{ πριν } B] = P[Y, \underline{0}] = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{2}$ → λόγω συμμετρίας

ε) Ποια η κατανομή του χρόνου αναμονής του A
ο A περιμένει $n+1$ πελάτες
δηλαδή $W_A = \sum_{n+1}$ (εκθετ. κατανομ.) → κατανομή Erlang.



$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \qquad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_5 = \mu$.
Εκθετ. αφίξεις και εξυπ. ανεξάρτητες
Άπειρο μήκος ουράς

α) Συνολ. ενεργός (effective) μέσος ρυθμός αφίξεων συναρτ. γ.
β) Ποιο είναι σημείο συμφόρησης και γιατί;
γ) Για ποιο/ποια ζευγάρι(α) είναι το συστ. εργοδικό;
i) $\gamma = 1$, $\mu = 2{,}5$
ii) $\gamma = 1$, $\mu = 5$
δ) Για το/τα αποδεκτά ζευγάρια του (γ), ποιος ο συνολικός μέσος αριθμός πελατών στο δίκτυο;
ε) —//— —//— —//—, ποιο ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη;

Λύση

α) (Αυτό το βήμα, πρέπει να υπολογιστεί είτε ζητείται είτε όχι.)

$$\lambda_1 = \gamma + \frac{1}{2}\lambda_1$$

$$\lambda_2 = \gamma + \frac{1}{2}\lambda_5$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\lambda_1 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_4 \Rightarrow$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2}\lambda_3$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{2}\lambda_3$$

$$\Rightarrow \lambda_4 = \lambda_5$$

$$\boxed{\lambda_1 = 2\gamma}$$

$$\lambda_3 = \gamma + \gamma + \frac{1}{2}\lambda_5 + \frac{1}{2}\lambda_5 = 2\gamma + \lambda_5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_5 = \gamma + \frac{1}{2}\lambda_5 \Rightarrow \boxed{\lambda_5 = 2\gamma} \Rightarrow \boxed{\lambda_4 = 2\gamma}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 2\gamma}$$

$$\boxed{\lambda_3 = 4\gamma}$$

β) Σημείο συμφόρησης το σύστημα 3 (αυτό που έχει το μεγαλύτερο utilization).

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \Rightarrow \rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{4\gamma}{\mu} > \frac{2\gamma}{\mu}, \quad i = 1,2,4,5$$

(Σε άλλα συστήματα μπορεί να έχουμε διαφορετικά μ.)

γ] Εργοδικό: Δεν δημιουργούνται απεριόριστες ουρές.
Κάθε υποσύστημα να είναι εργοδικό, να λειτουργεί σαν M/M/1
Άρα θέλουμε:

$$\frac{2\gamma}{\mu} < 1 \text{ και } \frac{4\gamma}{\mu} < 1 \Rightarrow \frac{4\gamma}{\mu} < 1 \Rightarrow \mu > 4\gamma$$

(Η ισότητα =1, ισχύει μόνο για ντετερμινιστικούς χρον. άφιξης)

i] ΟΧΙ

ii] ΝΑΙ

δ] Έχουμε $\gamma=1$, $\mu=5$
Κάθε επιμέρους σύστημα είναι M/M/1, άρα:

$$\overline{N_1} = \overline{N_2} = \overline{N_4} = \overline{N_5} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{2\gamma}{\mu}}{1-\frac{2\gamma}{\mu}} = \frac{2}{3} \quad \left(\rho = \frac{2}{5}\right)$$

$$\overline{N_3} = \frac{\frac{4\gamma}{\mu}}{1-\frac{4\gamma}{\mu}} = 4 \quad \left(\rho_3 = \frac{4}{5}\right)$$

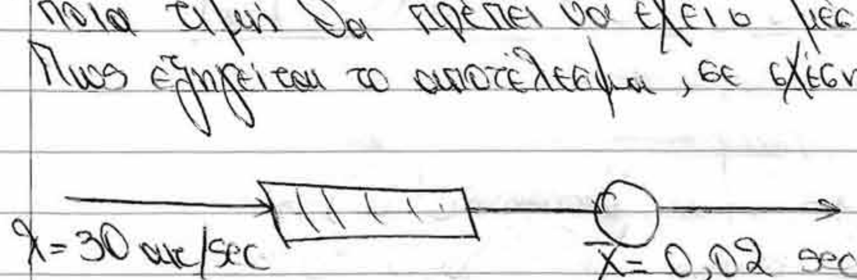
$$\overline{N} = \sum_{i=1}^{5} \overline{N_i} = 4 \cdot \frac{2}{3} + 4 \Rightarrow \boxed{\overline{N} = 6,67}$$

ε] Δεν μπορούμε να προσθέσουμε μέσο χρόνο κάθε υποσυστήματος. Θεωρούμε το σύστημα ως ένα μεγάλο σύστημα με είσοδο 2γ $(\gamma_1+\gamma_2)$. Εφαρμόζουμε νόμο Little.

$$\overline{N} = 2\gamma \cdot \overline{T} \Rightarrow \boxed{\overline{T} = 3,34}$$

- Αιτήσεις φθάνουν σε db server με εκθετικό τρόπο.
Μέσος ρυθμός 30 αιτήσεις/sec.
Μέσος Χρόνος εξυπηρ. αίτησης 0.02 sec
Εκθετικοί Χρόνοι εξυπηρ. και μεγάλη ουρά

α) Μέσος Χρόνος απόκρισης αίτησης
β) –//– –//– –//– αν ο αντικατασταθεί ο server με έναν άλλο διπλάσιας ταχύτητας (χωρητικ.)
γ) Με τον νέο server, αν διπλασιαστεί και ο ρυθμός αφίξεων, ποια τιμή θα πρέπει να έχει ο μέσος χρόνος απόκρισης; Πως εξηγείται το αποτέλεσμα, σε σχέση με το αρχ. σύστημα;



ΛΥΣΗ

M/M/1 σύστημα

$\bar{X} = 0{,}02\ sec \longrightarrow \mu = \frac{1}{\bar{X}} = 50$ αιτ/sec

$\rho = \frac{30}{50} = 0{,}6$ (άρα και εργοδικό).

α] $T = \frac{1/\mu}{1-\rho} = \frac{0{,}02}{0{,}4} = \boxed{T = 0{,}05\ sec}$

β] $\mu' = 2 \cdot 50$ αιτ/sec $= 100$ αιτ/sec

$\rho' = \frac{30}{100} = 0{,}3$

- Κλειστό / ανοιχτό δίκτυο
- Προσομοίωση
- Specmarks / Instruction

$$T' = \frac{1/\mu'}{1-\rho'} = \frac{0{,}01}{0{,}7} \Rightarrow \boxed{T' = 0{,}014 \text{ sec}}$$

γ] $\lambda'' = 2 \cdot 30$ αιτ/sec $= 60$ αιτ/sec
$\mu'' = \mu' = 100$ αιτ/sec

Utilization $\rho'' = \frac{60}{100} = 0{,}6$ Ίδιο με (α), δηλαδή ίδιος μέσος αριθμ. πελ.

$$T'' = \frac{1/\mu''}{1-\rho''} = \frac{0{,}01}{0{,}4} \Rightarrow \boxed{T'' = 0{,}025}$$

Response (γ) = 1/2 · Response (α)
Τώρα ο server "δουλεύει" με διπλάσιο ρυθμό.

$$\overline{N_\alpha} = \overline{N_\gamma} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}6}{0{,}4} = \frac{3}{2}$$

Το σύστημα (γ) είναι πιο αποδοτικό, γιατί έρχονται πιο γρήγορα οι πελάτες και εξυπηρετούνται πιο γρήγορα.

Σε ασύρματη γραμμή μετάδοσης παρατηρείται ότι:
Αν τα 2 τελευταία bit μεταδοθ. σωστά, τότε το επόμενο bit μεταδίδ. σωστά με πιθανότητα 4/5. Αν κάποιο ή και τα 2 από τα 2 ~~bits~~ τελευταία bits μεταδόθηκε/καν λάθος, τότε το επόμενο bit θα μεταδοθεί σωστά με πιθ. 1/2

α] Διάγραμμα καταστάσεων - πιθανοτήτων μεταβάσεων και του πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων P της αλυσίδας Markov διακριτού χρόνου που μοντελοποιεί το παραπάνω σύστημα στην μόνιμη κατάσταση.

Η αλυσίδα θα έχει τις 3 παρακάτω καταστάσεις:

0: (το τελευταίο bit έχει μεταδ. λάθος)

1: (το προτελευταίο bit έχει μεταδ. λάθος και το τελευταίο σωστά).

2: (τα 2 τελευταία έχουν μεταδ. σωστά).

b] Ποια είναι στην μόνιμη κατάσταση, η πιθανότητα να έχει μεταδοθεί σωστά, το τελευταίο τουλάχιστον bit; (δηλ. το άθροισμα των πιθ. των καταστ. 1 κ 2).

c] Έχουμε την εξής διαφοροποίηση:

Αν 3 τελευταία σωστά $\longrightarrow$ επόμενο πιθ 4/5

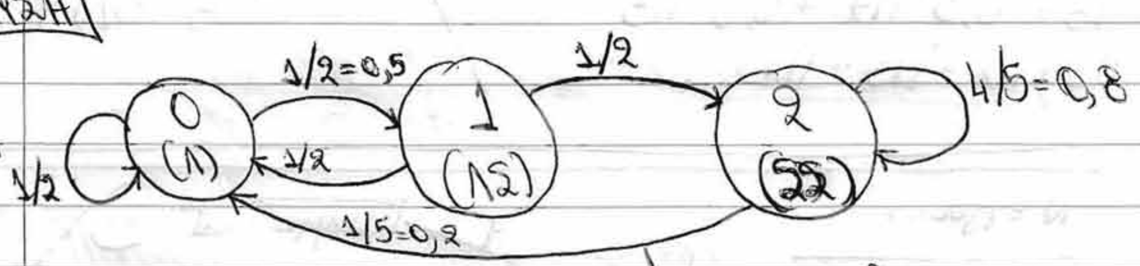
Αν κάποιο από τα 3 λάθος $\longrightarrow$ επόμενο πιθ 1/2.

(επαναλάβετε (a), (b)).

d] ~~Ιδ~~ Ίδιο με (b), συγκρίνετε.

ΛΥΣΗ

a]



(Αλυσίδα Διακριτού Χρόνου: έχουμε και πιθανότητα παραμονής στην ίδια κατάσταση).

Αντίστοιχη αλυσίδα: (0): ΣΛ ΛΛ (1) ΛΣ (2) ΣΣ

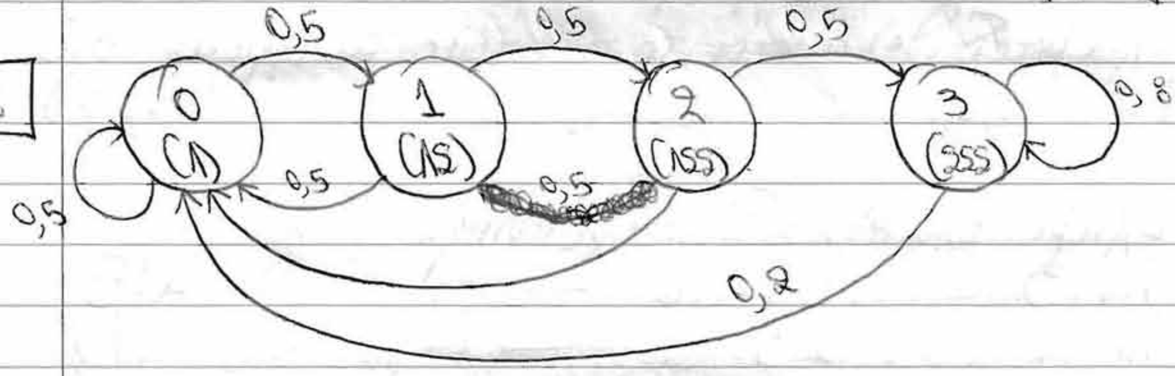
$$\vec{P} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}$$

b] $\Pi_0 = 0{,}5\cdot\Pi_0 + 0{,}5\cdot\Pi_1 + 0{,}2\cdot\Pi_2$
$\Pi_1 = 0{,}5\cdot\Pi_0$
$\Pi_2 = 0{,}5\cdot\Pi_1 + 0{,}8\cdot\Pi_2$
Επειδή είναι εξαρτημένες $\Pi_0+\Pi_1+\Pi_2 = 1$

$\Rightarrow \Pi_0 = \frac{4}{11}$, $\Pi_1 = 2/11$, $\Pi_2 = 5/11$

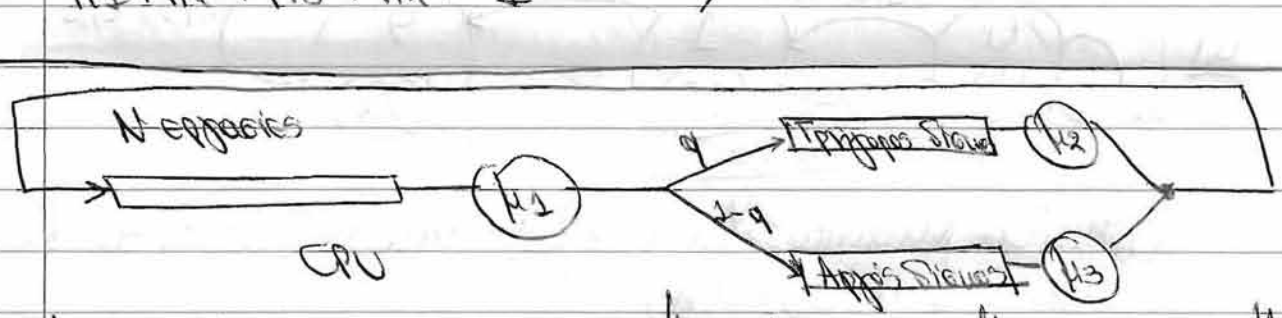
Άρα η πιθανότητα που ψάχνουμε είναι $\Pi = \frac{2}{11} + \frac{5}{11} = \frac{7}{11} = 0{,}636$

c]



$\Pi_0 = 0{,}5\cdot\Pi_1 + 0{,}5\cdot\Pi_2 + 0{,}2\cdot\Pi_3$
$\Pi_1 = 0{,}5\cdot\Pi_0$
$\Pi_2 = 0{,}5\cdot\Pi_1$
$\Pi_3 = 0{,}5\cdot\Pi_2 + 0{,}8\cdot\Pi_3$
$\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4 = 1$

$\Rightarrow \Pi_0 = 8/19$, $\Pi_1 = 4/19$, $\Pi_2 = 2/19$, $\Pi_3 = 5/19$ $\rightarrow \Pi = \frac{11}{19}$



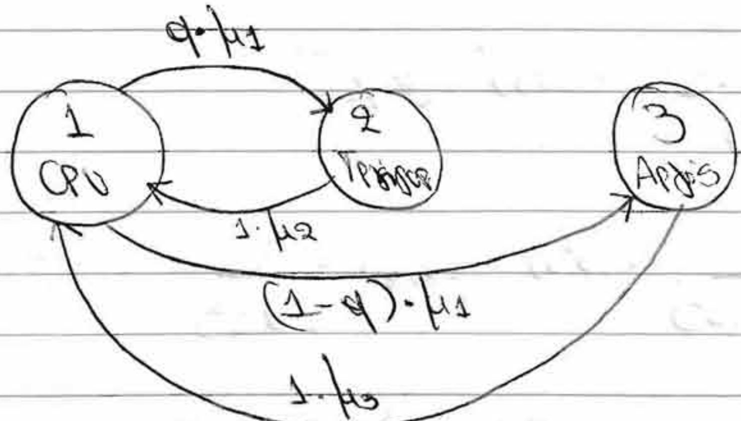
Μέσοι Χρόνοι εξυπηρέτησης $1/\mu_1 = 45$ ms, $1/\mu_2 = 25$ ms, $1/\mu_3 = 90$ ms
Πιθ. δρομολόγησης $q = 0.6$

a) Για $N=1$, να επιλυθεί το δίκτυο με αλ. Markov (όχι θεωρία δικτύων, αλγ. Buzen).
1. Ποσοστό Χρόνου που είναι αργή CPU
2. Πιθαν η εργασία να Χρησιμ. αργό δίσκο

b) Να επιβεβαιωθούν τα παραπάνω χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Buzen.

ΛΥΣΗ

a]



Λύνουμε σαν Μαρκοβιανή αλυσίδα.

$P_1 \cdot [\mu_1 \cdot q + \mu_1 (1-q)] = \mu_2 \cdot P_2 + \mu_3 \cdot P_3$

$\mu_1 \cdot q \cdot p_1 = \mu_2 \cdot p_2$

$\mu_1 \cdot (1-q) \cdot p_1 = \mu_3 \cdot p_3$

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$\Rightarrow p_1 = 0{,}47$, $P_2 = 0{,}155$, $P_3 = 0{,}375$

1. $P_2 + P_3 = 1 - P_1 = 0{,}53$
2. $P_3 = 0{,}375$

b] Παίρνουμε τις εξισώσεις που συνδέουν τις εισερχόμενες με τις εξερχόμενες ροές κάθε κατάστασης

$\mu_1 \cdot P_1 = \mu_2 \cdot P_2 + \mu_3 \cdot P_3$

$\mu_2 \cdot P_2 = q \cdot \mu_1 \cdot p_1$

$\mu_3 \cdot p_3 = (1-q) \cdot \mu_1 \cdot p_1$

Θέτουμε $p_1 = 1$ βρίσκουμε $p_2 = 0.33$, $P_3 = 0.8$

	$P_1 = 1$	$P_2 = 0,33$	$P_3 = 0,8$
0	$g_1(0) = 1$	$g_2(0) = 1$	$g_3(0) = G(0) = 1$
1	$g_1(1) = 1$	$g_2(1) = 1,33$	$g_3(1) = G(1) = 2,13$

$$P_{\bar{n}} = \frac{1}{2,13} \cdot 1^{n_1} \cdot (0,33)^{n_2} \cdot (0,8)^{n_3}$$

CPU: $P_{1,0,0} = \frac{1}{2,13} \cdot (0,33)^0 \cdot (0,8)^0 = \frac{1}{2,13} = 0,47$

Γρήγορος: $P_{0,0,1} = \frac{1}{2,13} \cdot (0,33)^0 \cdot (0,8)^1 = 0,375$

Αργός: $P_{0,1,0} = \frac{1}{2,13} \cdot (0,33)^1 \cdot (0,8)^0 = 0,155$