Μέθοδος Simplex

Η πλέον γνωστή και περισσότερο χρησιμοποιουμένη μέθοδος για την επίλυση ενός γενικού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, είναι η μέθοδος Simplex η οποία αναπτύχθηκε από τον George Dantzig. Η μέθοδος αυτή αποτελεί μια αλγεβρική επαναληπτική διαδικασία η οποία επιλύει ακριβώς, κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, σε ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Τα βήματα αυτά θα αναφερθούν αναλυτικά παρακάτω αφού πρώτα ορίσουμε κάποιες έννοιες.

• Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού βρίσκεται στην κανονική μορφή όταν:

i) Η αντικειμενική συνάρτηση ζητείται να μεγιστοποιηθεί.

ii) Οι μεταβλητές είναι όλες μη αρνητικές, δηλαδή, μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός.

iii) Στους περιορισμούς, οι γραμμικές εκφράσεις που περιέχουν τις μεταβλητές είναι μικρότερες ή ίσες από μία μη αρνητική σταθερά, δηλαδή είναι της μορφής:
(γραμμικό πολυώνυμο) ≤ α, όπου α ≥ 0

Παράδειγμα κανονικής μορφής : Μεγιστοποίηση της m=6x+8y υπό τους περιορισμούς x+y ≤ 10, 2x+3y ≤ 12, x ≥ 0 και y ≥ 0

• Μία μεταβλητή ονομάζεται χαλαρή, όταν παριστάνει τη διαφορά μεταξύ μιας διαθέσιμης ποσότητας και της ποσότητας που πράγματι χρησιμοποιείται.

Παράδειγμα χαλαρής μεταβλητής : Δίνεται η ανισότητα 2x+y ≤ 10 Θα ορίσουμε τη χαλαρή μεταβλητή s1 έτσι ώστε 2x+y+s1 = 10

• Η τυποποιημένη μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης δημιουργείται όταν ταξινομούμε τους όρους της έτσι ώστε να έχει την ίδια μορφή εξίσωσης με τους περιορισμούς.

Παράδειγμα τυποποιημένης μορφής : Δίνεται η αντικειμενική συνάρτηση m=6x+8y. Η τυποποιημένη μορφή της θα είναι -6x-8y+m=0

• Αρχικός Simplex πίνακας καλείται ο επαυξημένος πίνακας ο οποίος αποτελείται από σειρές με στοιχεία τους συντελεστές των μεταβλητών των εξισώσεων των περιορισμών, η τελευταία του σειρά αποτελείται από τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης και η τελευταία του στήλη από τις σταθερές τους.

Παράδειγμα αρχικού Simplex πίνακα:

Παράδειγμα αρχικού Simplex πίνακα:

Μεγιστοποίηση της m= 2x + 3y + 4z υπό περιορισμούς

$$x + 2y + 3z \le 12$$
$$2x + 5z \le 10$$
$$3x + y + z \le 6$$

Εικόνα 11

Από αυτά τα δεδομένα προκύπτει ο πίνακας

x	y	z	s_1	s_2	s_3	m	
1	2	3	1	0	0	0	12
2	0	5	0	1	0	0	10
3	1	1	0	0	1	0	6
-2	-3	-4	0	0	0	1	0

Εικόνα 12

• Μία στήλη βρίσκεται σε βασική μορφή όταν μόνο ένα στοιχείο της είναι ίσο με το 1 και όλα τα υπόλοιπα είναι 0. Η μεταβλητή στην οποία αντιστοιχεί ονομάζεται βασική μεταβλητή.Οι υπόλοιπες μεταβλητές ονομάζονται μη-βασικές.

• Την βασική εφικτή λύση την παίρνουμε όταν στον αρχικό Simplex πίνακα θέσουμε τις μη-βασικές μεταβλητές ίσες με 0, οπότε αντιστοιχίζομαι τις βασικές μεταβλητές με τα σταθερά στοιχεία της τελευταίας στήλης.

Παράδειγμα εύρεσης βασικής λύσης :

Παράδειγμα εύρεσης βασικής λύσης :

Δίνεται ο αρχικός Simplex πίνακας

x	y	s_1	s_2	m	
-1	0	1	-2	0	2
1	1	0	1	0	5
1	0	0	3	1	15

Εικόνα 13

Οι στήλες που βρίσκονται σε βασική μορφή είναι η δεύτερη, Τρίτη και πέμπτη. Οι βασικές μεταβλητές είναι η y, s1, m και η βασική εφικτή λύση, αν θέσουμε x= s2 =0 , είναι y=5 , s1 =2 , m=15.

• Κάθε αρχικός Simplex πίνακας έχει περισσότερες στήλες από ότι σειρές, ώστε το σύστημα να έχει άπειρο αριθμό λύσεων. Ποια είναι η καλύτερη εφικτή λύση θα εξαρτηθεί από την μορφή του πίνακα και την εφαρμογή του ελέγχου μέγιστης λύσης που λέει: Ο αρχικός

Simplex πίνακας θα δώσει την βέλτιστη λύση αν και μόνο αν η τελευταία σειρά, η οποία αναφέρεται στην αντικειμενική συνάρτηση, περιλαμβάνει μόνο μη αρνητικά στοιχεία.

- Η στήλη που έχει το πιο αρνητικό στοιχείο στην τελευταία σειρά ονομάζεται στήλη οδηγός. Η μεταβλητή που αντιστοιχεί στην στήλη αυτή καλείται εισερχομένη μεταβλητή. Αν υπάρχουν δύο ή περισσότερα ίσα και αρνητικά στοιχεία, τότε μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις στήλες που τους αντιστοιχούν. Όταν επιλεγεί η στήλη οδηγός, αναζητάμε τη σειρά οδηγό ως εξής: Για κάθε σειρά, εκτός από την τελευταία, με θετική καταχώριση στην στήλη οδηγό, υπολογίζουμε τον λόγο του στοιχείου στην τελευταία στήλη προς το στοιχείο στην στήλη οδηγό. Αν προκύψουν δύο ή περισσότερες σειρές με τον ίδιο λόγο, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε σειρά αλλιώς το στοιχείο που αντιστοιχεί στην σειρά με τον μικρότερο θετικό λόγο ονομάζεται στοιχείο οδηγός. Το στοιχείο αυτό θα γίνει 1 και τα υπόλοιπα της στήλης του 0 ύστερα από μία σειρά εργασιών στις σειρές που θα πραγματοποιηθεί, προκειμένου να μετατραπεί η στήλη άξονας σε βασική μορφή. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται οδήγηση.

Παράδειγμα οδήγησης :

Δίνεται ο πίνακας

x	y	s_1	s_2	m	
1	2	0	3	0	26
0	1	1	1	0	10
0	-2	0	10	1	12

Εικόνα 14

Ο έλεγχος μέγιστης λύσης αποτυγχάνει αφού υπάρχει αρνητικό στοιχείο στην τελευταία σειρά. Η δεύτερη στήλη είναι η στήλη άξονας και η y η εισερχόμενη μεταβλητή. Μετά από υπολογισμό του λόγου της πρώτης σειράς 26/2 και της δεύτερης σειράς 10/1 προκύπτει ότι η δεύτερη σειρά είναι σειρά άξονας και η καταχώριση άξονα θα είναι ίση με το στοιχείο(2,2)=1. Στη συνέχεια μέσα από τις ακόλουθες πράξεις σειρών μετατρέπουμε το πίνακα μας σε βασική μορφή

x	y	s_1	s_2	m		
1	0	-2	1	0	6	R1+(-2)R2
0	1	1	1	0	10	
0	0	2	12	1	32	R3+ 2R2

Εικόνα 15

Και από όπου προκύπτει η μέγιστη εφικτή λύση x=6 , y=10 , m=32 Να σημειωθεί εδώ ότι η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται όσες φορές χρειαστεί προκειμένου ο πίνακας που θα προκύψει τελικά να έχει τελευταία σειρά με μη αρνητικά στοιχεία. Αφού ορίσαμε όλες τις έννοιες, μπορούμε σε αυτό το σημείο να δώσουμε τα βήματα για την επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο Simplex τα οποία βρίσκονται σε κανονική μορφή.

Η Μέθοδος Simplex για Προβλήματα σε Κανονική Μορφή .

1. Ανάγουμε τους περιορισμούς που εκφράζονται με ανισώσεις σε εξισώσεις, εισάγοντας νέες μη αρνητικές μεταβλητές, οι οποίες ονομάζονται χαλαρές μεταβλητές και εκφράζουμε την αντικειμενική συνάρτηση σε κατάλληλη μορφή.
2. Κατασκευάζουμε τον αρχικό Simplex πίνακα.
3. Εφαρμόζουμε τον έλεγχο της μέγιστης λύσης. Αν η βασική εφικτή λύση είναι μέγιστη, τότε το πρόβλημα έχει λυθεί. Αν όχι τότε προχωράμε στο επόμενο βήμα.
4. Κατασκευάζουμε ένα νέο Simplex πίνακα ακολουθώντας την εξής διαδικασία:
   a) Επιλέγουμε την στήλη άξονα
   b) Επιλέγουμε την σειρά άξονα
   c) Εφαρμόζουμε τη διαδικασία οδήγησης γύρω από την καταχώριση άξονα.
5. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 3.

Εκτός όμως από τα προβλήματα αυτά, η μέθοδος Simplex μπορεί να εφαρμοστεί και σε προβλήματα που δεν βρίσκονται σε κανονική μορφή, δηλαδή, συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω:

i) Ζητείται η αντικειμενική συνάρτηση να ελαχιστοποιηθεί.
ii) Στους περιορισμούς, οι γραμμικές εκφράσεις που περιέχουν τις μεταβλητές είναι μεγαλύτερες από μία μη αρνητική σταθερά, δηλαδή είναι της μορφής: (γραμμικό πολυώνυμο) ≥ α , όπου α ≥ 0

Και στα προβλήματα αυτά συνεχίζει να ισχύει ότι οι μεταβλητές είναι όλες μη αρνητικές, δηλαδή, μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός. Στις περιπτώσεις αυτές τα βήματα που ακολουθούμε για την επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο Simplex τα οποία βρίσκονται σε μη-κανονική μορφή είναι τα εξής :

Η Μέθοδος Simplex για Προβλήματα σε Μη-Κανονική Μορφή

1. Αν το πρόβλημα ζητά την ελαχιστοποίηση της m , τότε δουλεύουμε με το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της – m.
2. Αν οι περιορισμοί είναι της μορφής
   (γραμμικό πολυώνυμο) ≥ α , όπου α ≥ 0
   τότε πολλαπλασιάζοντας επί -1 λαμβάνουμε την επιθυμητή μορφή.
3. Αν δεν εμφανιστεί αρνητικός αριθμός στην τελευταία στήλη,εκτός από το τελευταίο της στοιχείο, τότε πηγαίνουμε κατευθείαν στο βήμα 6, αλλιώς συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.
4. Μετατρέπουμε τον αρνητικό αριθμό σε θετικό με τον ακόλουθο τρόπο: a) Διαλέγουμε ένα αρνητικό στοιχείο που βρίσκεται στην ίδια σειρά με τον αρνητικό αριθμό της τελευταίας στήλης.Η στήλη του θα γίνει στήλη οδηγός. b) Υπολογίζουμε όλους τους λόγους, συμπεριλαμβανομένων και αυτών που αντιστοιχούν στους αρνητικούς αριθμούς της στήλης οδηγό.Τότε η σειρά οδηγός θα είναι αυτή με το μικρότερο θετικό λόγο. c) Εφαρμόζουμε τη διαδικασία οδήγησης γύρω από το στοιχείο οδηγό.
5. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 3 εώς ότου να μην υπάρχει άλλη αρνητική καταχώριση στην τελευταία στήλη.

6. Τελικά ο πίνακας που προκύπτει είναι σε κανονική μορφή και χρησιμοποιούμε κατά τα γνωστά τη μέθοδο Simplex για την επίλυση προβλήματος σε κανονική μορφή.

Παράδειγμα προβλήματος σε μη-κανονική μορφή :

Παράδειγμα προβλήματος σε μη-κανονική μορφή :

Ελαχιστοποίηση της m= x+y υπό περιορισμούς

$$2x-y \geq 30$$
$$-x+y \geq 50$$

Εικόνα 16

Οπότε ακολουθώντας τα βήματα ζητάμε την μεγιστοποίηση της -m= -x-y

Υπό περιορισμούς -2x+y ≤ -30 x-y ≤ -50

Ο αρχικός Simplex πίνακας θα είναι

x	y	s_1	s_2	m	
-2	1	1	0	0	-30
1	-1	0	1	0	-50
1	1	0	0	1	0

Εικόνα 17

Υπάρχουν 2 αρνητικοί αριθμοί στην τελευταία στήλη επιλέγουμε τυχαία τον -50 της δεύτερης σειράς.Τότε η δεύτερη στήλη γίνεται στήλη άξονας λόγω της ύπαρξης του -1 και οι λόγοι θα είναι ίσοι με -80/(-1) για την πρώτη σειρά και 50/(-1) για την δεύτερη σειρά.Οπότε το στοιχείο άξονας θα είναι το (2,2)= -1.

Με πράξεις θα προκύψει ο πίνακας

x	y	s_1	s_2	m		
-1	0	1	1	0	-80	R2+R1
-1	1	0	-1	0	50	(-1)R2
2	0	0	1	1	-50	R2+R3

Εικόνα 18

x	y	s_1	s_2	m		
1	0	-1	-1	0	80	(-1)R1
0	1	-1	-2	0	130	(-1)R1+R2
0	0	2	3	-1	-210	2R1+R3

Εικόνα 19

Παρατηρούμε ότι πάλι εμφανίζεται αρνητικός αριθμός -80 στην τελευταία στήλη, οπότε με επανάληψη των παραπάνω βημάτων θα καταλήξουμε στον πίνακα

x	y	s_1	s_2	m		
1	0	-1	-1	0	80	(-1)R1
0	1	-1	-2	0	130	(-1)R1+R2
0	0	2	3	-1	-210	2R1+R3

Εικόνα 20

Ανακεφαλαιώνοντας είδαμε πως μπορούμε με τη μέθοδο Simplex να επιλύσουμε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική και μη-κανονική μορφή. Η μέθοδος αυτή υπερισχύει έναντι της γεωμετρικής προσέγγισης και αυτό οφείλεται στο ότι :

1) Η μέθοδος Simplex μπορεί να χειριστεί πολλές εξισώσεις και μεταβλητές, ενώ η γεωμετρική μέθοδος μπορεί μόνο 2 μεταβλητές.

2) Η μέθοδος Simplex είναι μηχανική και δεν βασίζεται σε οπτικές ή γεωμετρικές ερμηνείες των δεδομένων. Έτσι είναι ευκολότερο να προγραμματιστεί ένας υπολογιστής να κάνει τους υπολογισμούς.