ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ 28-2-2012.

7-άδα $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{NAI}, q_{OXI})$

Q: σύνολο καταστάσεων
Σ: αλφάβητο εισόδου $(\sqcup \notin \Sigma)$
Γ: αλφάβητο ταινίας $\sqcup \in \Gamma, \Sigma \subseteq \Gamma$
δ: $Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{A, \Delta\}$ συνάρτηση μεταβάσεων
$q_0 \in Q$ αρχική κατάσταση
$q_{NAI} \in Q$ κατάσταση αποδοχής
$q_{OXI} \in Q$ » απόρριψης.

Turing: Η μηχανή Turing είναι ένα δόγμα. Όταν τη βάζουμε να δουλέψει, δουλεύει πάνω σε μια συμβολοσειρά του Σ. Η συμβ/σειρά τελειώνει με το σύμβολο $\sqcup$ ~κενό.

Η κεφαλή βρίσκεται αρχικά στο αριστερότερο άκρο και ξεκινά απ' την q_0.

Η κεφαλή μετακινείται ή δεξιά ή αριστερά.

$$\delta(q_{57}, \phi) = (q_{36}, 1, \Delta)$$

→ Όταν είσαι στην κατάσταση q_{57}, ~~...~~ και διαβάζεις ϕ πήγαινε στην q_{36} και μετακινήσου 1 θέση δεξιά.

Το αλφάβητο της ταινίας έχει μεν τα σύμβολα εισόδου αλλά έχει και άλλα για να κανονίζει την κίνηση και το τι θα κάνει η μηχανή.

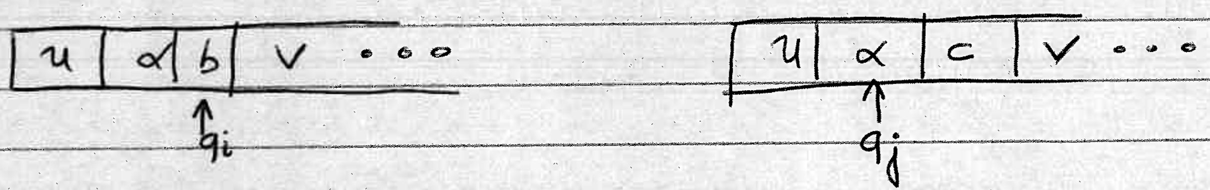
Πρέπει υποχρεωτικά να έχει το αλφάβητο εισόδου και την κενή συμβολοσειρά.

§ Η μόνη περίπτωση που δεν ακολουθούμε την συνάρτηση μετάβασης είναι όταν ~~ειμ~~αστε στην αριστερότερη θέση και λάβουμε εντολή να πάμε αριστερά.

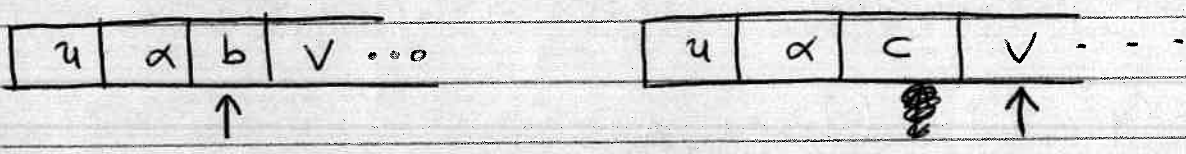
$\delta(q_{57}, \emptyset)$

φάση 101 q_{57} 110 $101, 110 \in \Sigma^*$

$u \alpha q_i b v$ παράγει ή αποδίδει τη φάση
$u q_i \alpha c v$ αν $\delta(q_i, b) = (q_j, c, A)$



$u \alpha q_i b v$ παράγει $u \alpha c q_j v$ αν
$\delta(q_i, b) = (q_j, c, \Delta)$



§ ΟΡΙΣΜΟΣ: Λέμε ότι η ΤΗ (Η) αποδέχεται την είσοδο $w \in \Sigma^*$ αν $\exists$ ακολουθία φάσεων $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_k$ τ.ω. C_1 είναι εναρκτήρια φάση (q_0). Η C_i παράγει την C_{i+1} και η τελική φάση είναι αποδεκτική (q_{NAI})

ΤΗ $H \rightarrow L(H) = \{$συμβολοσειρές του Σ^* που αποδέχεται η $H\}$.

§ ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια γλώσσα λέγεται κατα Turing αναγνωρίσιμη αν υπάρχει ΤΜ που την αναγνωρίζει

§ ΤΜ είναι διαγνώστης αν πάντα τερματίζει φτάνοντας είτε στην κατάσταση q_{NAI} είτε στην q_{OXI}.

§ Μια γλώσσα είναι διαγνώσιμη κατα Turing αν υπάρχει μηχανή Turing που τη διαγιγνώσκει.

> Η μηχανή Turing είναι πιο δυνατή από ένα αυτόματο γιατί μπορεί να κινείται και δεξιά και αριστερά, μπορεί να γράφει πάνω στην ταινία και να χρησιμοποιεί περισσότερα σύμβολα από το Σ.

Ένα πεπερασμένο αυτόματο δεν μπορεί να αναγνωρίσει την $L = \{\alpha^n b^n, n \geq 0\}$ γιατί δεν έχουν μνήμη.

Ψηλός: αναγνωρίζει σημαίνει ότι τερματίζει σε q_{NAI} για τις συμ/σειρές που ανήκουν στη γλώσσα και γι' αυτές που δεν ανήκουν είτε τερματίζει σε q_{OXI} είτε δεν τερματίζει ποτέ.

4.

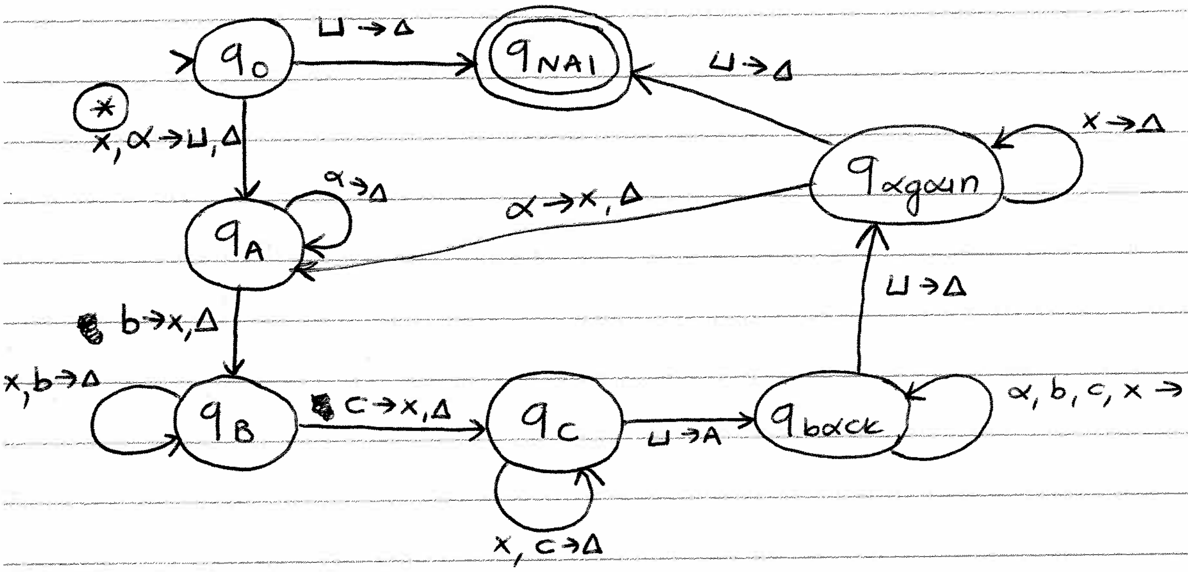
$a^n b^n c^n$ (συμβολοσειρές με τουλάχιστον 1 α, b και c)

Πρέπει το κενό να μας δίνει q_{NAI}.

Μετά πρέπει να διαπιστώσουμε αν η συμβολοσειρά ανήκει στη γλώσσα.

ΙΔΕΑ: (περιγραφή ΤΜ)

~> Διέτρεξε την είσοδο από αριστερά προς τα δεξιά. Αν βρεις α, διέγραψέ το μαζί με 1 b και 1 c. Αν δεν υπάρχουν πήγαινε σε q_{OXI}. Μετά πήγαινε αριστερά και επανέλαβε. Αν δεν βρεις α, b, c τότε q_{NAI}.



(*) Μαρκάρουμε την αριστερότερη θέση της ταινίας.

! Ο ορισμός της ΤΜ λέει ότι πάντα πρέπει να γράφω κάτι ακόμα κι αν γράφω το ίδιο σύμβολο που διάβασα.

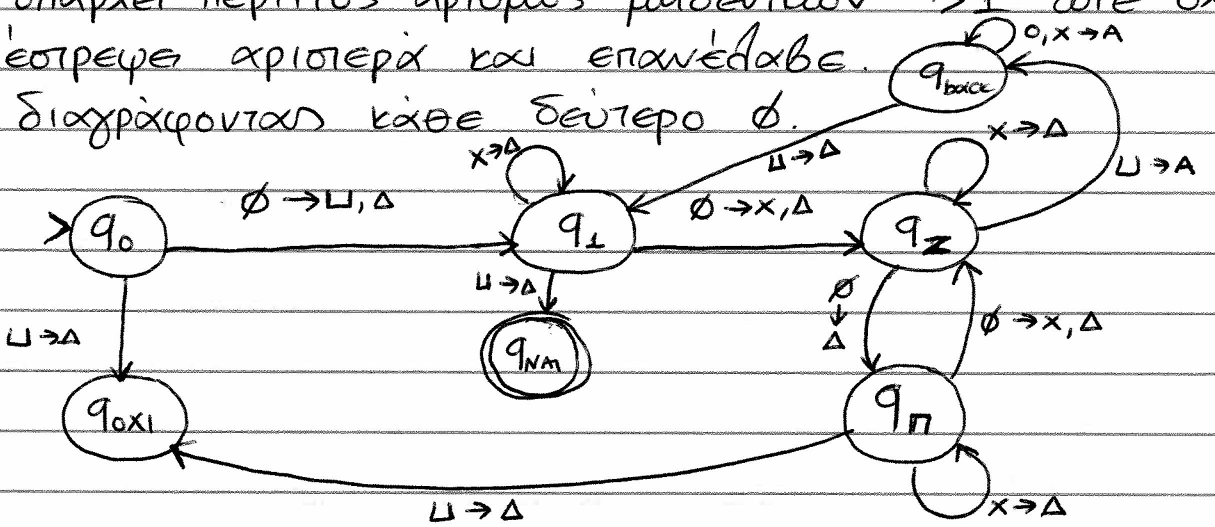
! Στο q_{again} μαρκάρουμε με x

| α | b | ⊔

| ⊔ | b | ⊔

| ⊔ | x | ⊔ ⤳ απο εδώ πάει στην q_{oxi} άρα δεν ανήκει στη γλώσσα.

Παράδειγμα: $L = \{ 0^{2^n} \; n \geq 0 \}$.
Θέλω αριθμό μηδενικών που είναι δυνάμεις του 2.
Ιδέα: (Περιγραφή TM)
1. Διατρέχουμε την ταινία από αριστερά προς τα δεξιά.(*)
2. Αν υπάρχει μόνο 1 μηδενικό τότε ΝΑΙ και τέλος.
3. Αν υπάρχει περιττός αριθμός μηδενικών >1 τότε ΟΧΙ
4. επέστρεψε αριστερά και επανέλαβε.
(*) διαγράφοντας κάθε δεύτερο 0.



π.χ.

| 0 | 0 | ⊔ |

| ⊔ | 0 | ⊔ |

| ⊔ | x | ⊔ | αποδεκτή.

π.χ. 2

| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ⊔ |

| ⊔ | 0 | 0 | 0 | 0 | ⊔ |

| ⊔ | ~~0~~ | 0 | 0 | 0 | ⊔ |

| ⊔ | x | 0 | x | 0 | ⊔ | οχι

Μη αποδεκτή.

6.

π.χ. 3.

0	0	0	0	⊔	
⊔	0	0	0	⊔	
⊔	x	0	0	⊔	
⊔	x	0	x	⊔	
⊔	x	x	x	⊔	αποδεκτή.

π.χ. 4.

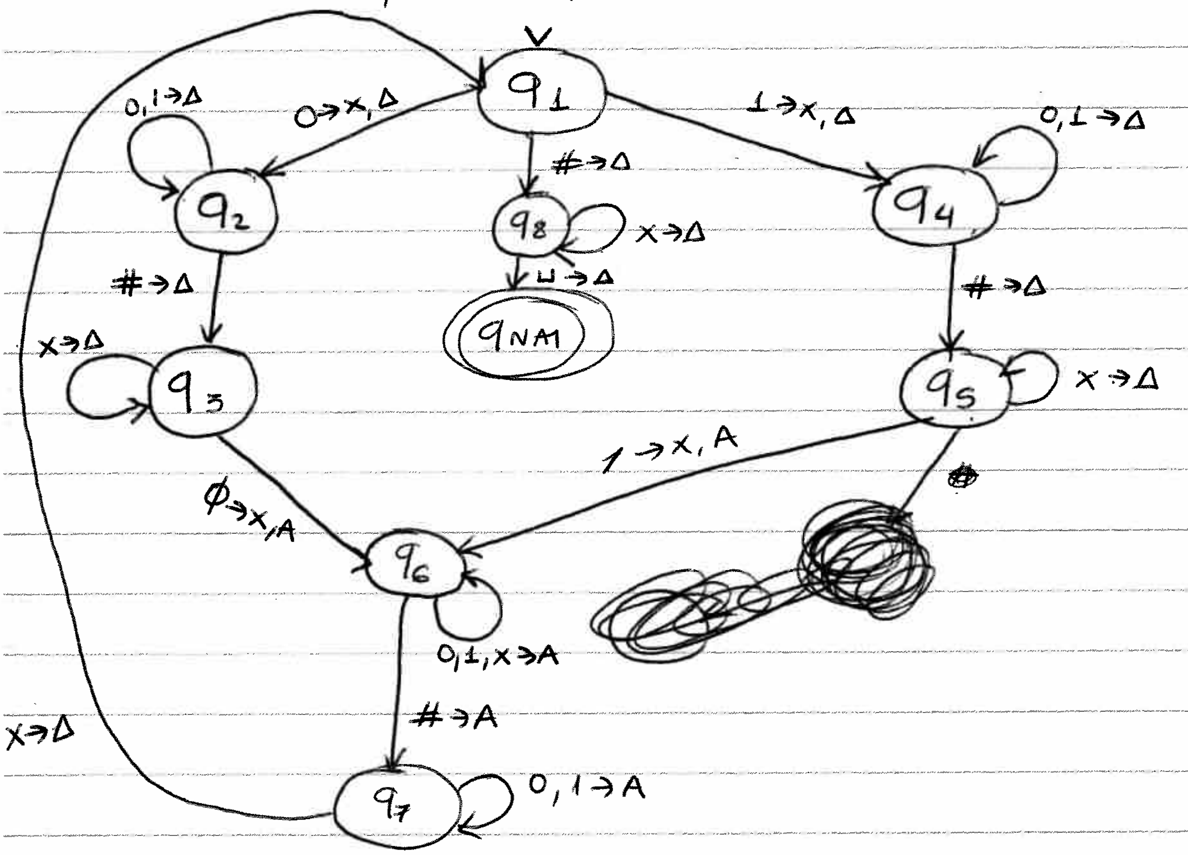
0	0	0	0	0	0	⊔
⊔	0	0	0	0	0	⊔
⊔	x	0	0	0	0	⊔
⊔	x	0	x	0	0	⊔
⊔	x	0	x	0	x	⊔
⊔	x	x	x	0	x	⊔

Είμαι στην q_n άρα $q_{όχι}$ και τέλος.

Παράδειγμα:

$\Sigma = \{0, 1, \#\}$

$L = \{\omega\#\omega,\ \omega \in \{0,1\}^*\}$



ΟΡΙΣΜΟΣ: ΤΜ 7-άδα $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{NAI}, q_{OXI})$ 1.

Q: πλήθος καταστάσεων
Σ: αλφάβητο εισόδου
Γ: αλφάβητο ταινίας
q_0: αρχική κατάσταση
q_{NAI}: κατάσταση αποδοχής
q_{OXI}: » απόρριψης

δ: συνάρτηση μεταβάσεων

$\delta \quad Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{A, \Delta\}$.

$q_{NAI} \neq q_{OXI}$.

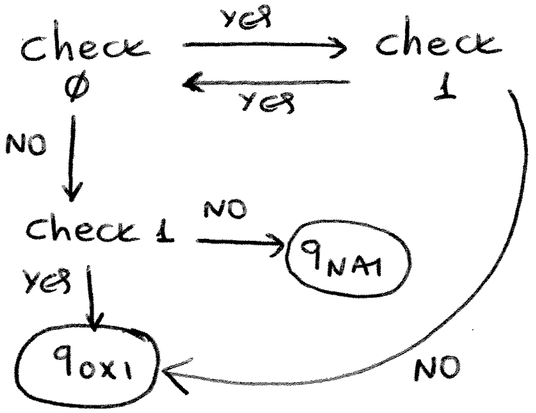
$\sqcup \notin \Sigma \quad \sqcup \in \Gamma, \ \Sigma \subset \Gamma$

? Υπάρχει περίπτωση με μία κίνηση να βρεθούμε στην ίδια θέση? ΝΑΙ αν αν είμαστε στην αριστερότερη θέση και λάβουμε εντολή να πάμε αριστερά.

3.8 ΤΜ που να διαγιγνώσκει τις: $\Sigma = \{0, 1\}$.
$\{\omega$: περιέχει ίδιο πλήθος 0 και 1$\}$.

0	1	0	0	0	1	1	1
⊔	1	0	0	0	1	1	1
x	x	0	0	0	1	1	1

? Μπορώ να βάλω διαφορετικό σύμβολο για το μαρκάρισμα του πρώτου 0 ή του πρώτου 1.



? Ένα εύκολο διάγραμμα για να δείξουμε την ιδέα της σάρωσης του string.

2. $\{\omega$ περιέχει διπλάσια μηδενικά από 1$\}$

$$\begin{tikzcd}
\text{check } 1 \arrow[r, "NO"] \arrow[d, shift right, "yes"'] & \text{check } \emptyset \arrow[r, "yes"] \arrow[d, "NO"] & q_{NAI} \\
\text{check } 2\emptyset s \arrow[u, shift right, "yes"'] \arrow[r, "NO"'] & q_{OXI} &
\end{tikzcd}$$

Βασική ιδέα: Για κάθε 1 σβήνω 2 μηδέν.

Καλό είναι να αναφέρω πως μαρκάρω γενικά και ειδικότερα την αριστερ. θέσ

$\{\omega$ <u>δεν</u> περιέχει διπλάσια μηδενικά από 1$\}$

Στο προηγούμενο διάγραμμα, αν αντιστρέψω την q_{NAI} και την q_{OXI} έχουμε το ζητούμενο.

$$\begin{tikzcd}
\text{check } 1 \arrow[r, "NO"] \arrow[d, shift right, "yes"'] & \text{check } \emptyset \arrow[r, "yes"] \arrow[d, "NO"] & q_{NAI} \\
\text{check } 2\emptyset s \arrow[u, shift right, "yes"'] \arrow[r, "NO"'] & q_{NAI} &
\end{tikzcd}$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u>

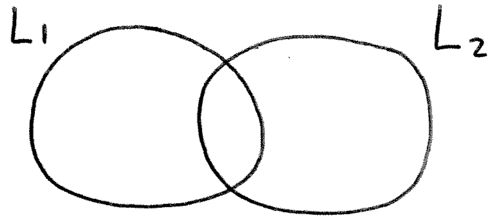
L: γλώσσα διαγνώσιμη $\Rightarrow \bar{L}$ διαγνώσιμη.

$\exists$ TM $\begin{cases} \to q_{NAI} \text{ αν } \omega \in L \\ \to q_{OXI} \text{ αν } \omega \notin L \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} q_{NAI} \to q_{OXI} \\ q_{OXI} \to q_{NAI} \end{matrix}$

$\exists$ TM $\begin{cases} \to q_{NAI} \text{ αν } \omega \notin L \\ \to q_{OXI} \text{ αν } \omega \in L \end{cases}$

L : αναγνωρίσιμη $\overset{?}{\Rightarrow} \bar{L}$ αναγνωρίσιμη

Αν η συμβολοσειρά ανήκει στο $\bar{L}$ μπορεί ναι μεν να πάει σε q_{NAI} αλλά μπορεί και να κολλήσει σε loop (αντίστοιχα loop του q_{OXI} για την L).



L_1, L_2 διαγνώσιμες
$L_1 \cap L_2$?
$L_1 \cup L_2$?

ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ ΤΜ:

$\delta \;\; Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{A, \Delta, \Sigma\}$. Επιτρέπω στη μηχανή να μένει και στάσιμη.

π.χ. $(q_i, \alpha) \to (q_j, b, \Sigma)$.

Είναι οι καινούριες μηχανές πιο δυνατές? (δηλ. αναγνωρίζει η νέα ΤΜ γλώσσες τις οποίες η παλιά δεν αναγνωρίζει).

ΟΧΙ: γιατί η νέα ΤΜ μπορεί να εξομοιωθεί από την παλιά

π.χ. $(q_i, \alpha) \to (q_j, b, \Sigma)$

$(q_i, \alpha) \to (q'_j, b, \Delta)$

$(q'_j, *) \to (q_j, *, A)$

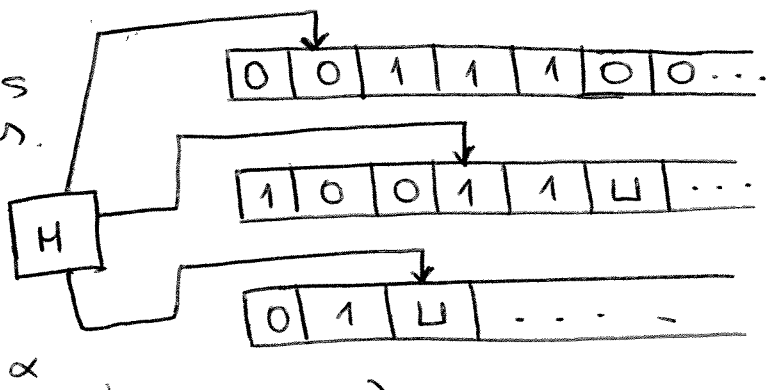
Χρησιμοποιούμε την βοηθητική κατάσταση q'_j για την εξομοίωση.

> Γενικά αδιαφορούμε για το πόσο αποδοτική είναι μια μηχανή. Μας ενδιαφέρει το σύνολο των γλωσσών που αναγνωρίζεται.

ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ ΤΜ: Πολυταινιακές ΤΜ. (k ταινίες).

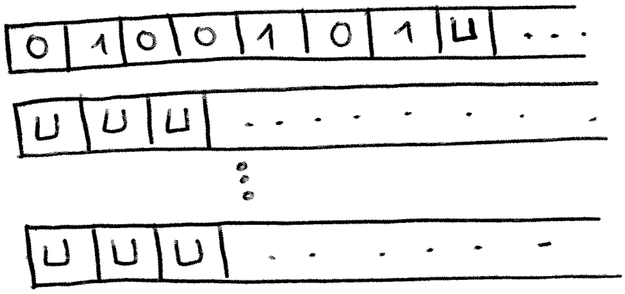
Q: σύνολο καταστάσεων
Σ: αλφ. εισόδου
Γ: αλφ. ταινίας
q_0: αρχική κατ.
q_{NAI}: κατ. αποδοχής
q_{OXI}: κατ. απόρριψης.

$\delta: Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{A, \Delta, \Sigma\}$



Διαβάζω και από τις k ταινίες. Όταν διαβάσω τα επιθυμητά σύμβολα από κάθε ταινία (έστω k_1 από την 1, το k_2 από τη 2 κ.ο.κ) η μηχανή αλλάζει κατάσταση.

4. Για την προσομοίωση, έχω όλο το string στην πρώτη ταινία, και οι υπόλοιπες έχουν ⊔ παντού.



$$(q_{57}, \alpha, b, c) \longrightarrow (q_{64}, x, b, \alpha, \Delta, A, A)$$

$$(q_{57}, \alpha, b, \alpha) \longrightarrow (q_{NAI}, \sqcup, \alpha, c, A, A, \Sigma).$$

ΧΕΙΡΟΤΕΡΗ ΤΜ:

>Δεν μπορεί να κινηθεί αριστερά.

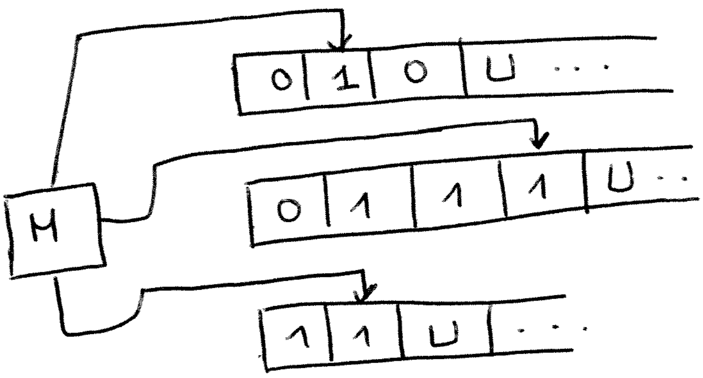
$$\delta: Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\Delta, \Sigma\}.$$

Ο ΚΑΝΕΙ ΤΗ ΔΟΥΛΕΙΑ? ΟΧΙ! γιατί η δυνατότητα να γυρίζουμε πίσω είναι εξαιρετικά σημαντική.

Η μηχανή αυτή γράφει στην ταινία. Ε ΚΑΙ ΤΙ ΕΓΙΝΕ? αφού δεν μπορεί να γυρίσει πίσω να το διαβάσει... Άρα το Γ καταργείται.

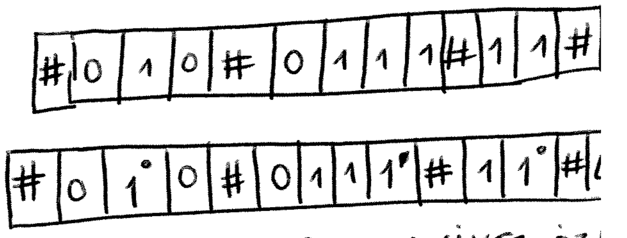
ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: Ακόμα και με την πολυταινιακή ΤΜ δεν κερδίζω κάτι παραπάνω από την κλασσική ΤΜ.

ΘΕΩΡΗΜΑ: ∀ πολυταινιακή ΤΜ ∃ μονοταινιακή ΤΜ που την προσομοιώνει.



~ διαχωριστής

$\Gamma = 0, 1, \#, 0^\circ, 1^\circ, \sqcup$



όπου έχω 1° σημαίνει ότι εκεί έχω κεφαλή.

$\boxed{S}$

Ιδέα (Περιγραφή S)

1. είσοδος $m_1, m_2, \ldots, m_n, \sqcup$

   $\# \dot{w}_1, w_2, \ldots, w_n \# \dot{\sqcup} \# \dot{\sqcup} \# \ldots$

2. Σάρωση από αριστερά προς τα δεξιά για να προσδιορίσει τα σύμβολα που διαβάζει η πολυταινιακή

   Σάρωση για να ενημερώσει κατάλληλα τις ταινίες

   $(q_{56}, a, a, c) \to (q_{32}, a, b, a, A, A, \Delta)$

#	a	$\dot{a}$	b	#	a	b	$\dot{a}$	#	a	$\dot{c}$	b	#

#	$\dot{a}$	a	b	#	a	$\dot{b}$	b	#	a	a	$\dot{b}$	#

4η

a	a	c	$\sqcup$

$\uparrow$

Και παίρνω εντολή να πάω δεξιά.

...	#	a	a	c	#	...

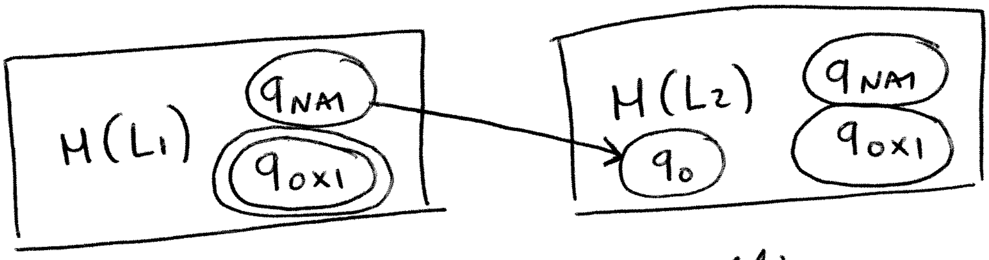
...	#	a	a	c	$\dot{\sqcup}$	#	...

3. Αν κάποια εικονική μηχανή πάει να βρεθεί πάνω σε διαχωριστή τότε μετακίνησε όλα τα περιεχόμενα της ταινίας S από αυτή τη θέση προς τα δεξιά και βάλε $\dot{\sqcup}$

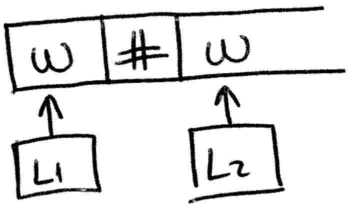
! Με ποια κριτήρια ονομάσαμε τις καταστάσεις που έχουμε και τις μεταβάσεις που πρέπει να κάνουμε
Το κάνουμε με πολλές καταστάσεις...

6. Έστω L_1, L_2 διαγνώσιμες $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ διαγνώσιμη.

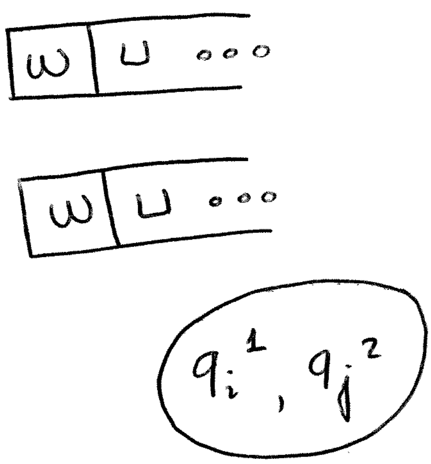
Η ΤΜ πρέπει να μου λέει ΝΑΙ αν η συμβολοσειρά ανήκει ή στη μία γλώσσα <u>ή</u> στην άλλη.



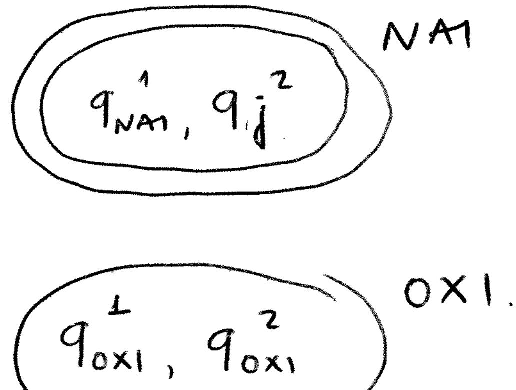
Η πρώτη μηχανή μπορεί να αλλάζει την είσοδο.
Η δεύτερη μηχανή <u>πρέπει</u> να πάρει την αρχική είσοδο!



! Με ΠΟΛΥΤΑΙΝΙΑΚΗ



! Εξομοιώνω την πρώτη μηχανή στην πρώτη ταινία και την δεύτερη μηχανή στη δεύτερη ταινία.



! ΠΑΡΟΜΟΙΑ ΜΕ $L_1 \cap L_2$.

Ορισμός: ΤΗ 7-άδα $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{NAI}, q_{OXI})$

Q: σύνολο καταστάσεων
Σ: αλφάβητο εισόδου
Γ: αλφάβητο ταινίας
δ: συνάρτηση μεταβάσεων
q_0: αρχική κατάσταση
q_{NAI}: κατάσταση αποδοχής
q_{OXI}: » απόρριψης.

— — — — — — —

ΜΗ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΗ Τ.Η. (ΝΤΗ)
(αντιαιτιοκρατική)

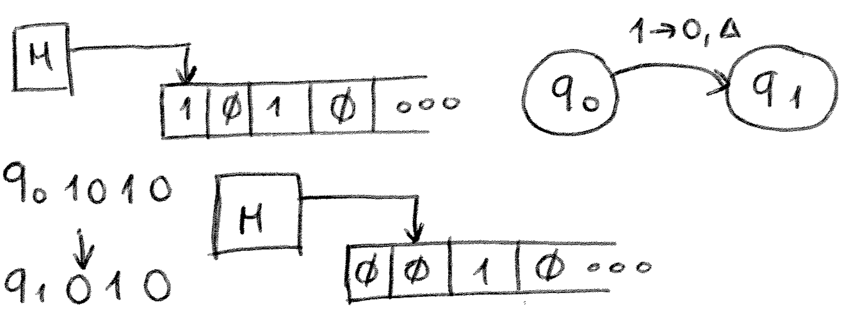
Διαφορά: Αν είναι σε μια κατάσταση και διαβάσει ένα σύμβολο μπορεί να πάει είτε σε μία κατάσταση είτε σε άλλη, μπορώ να έχω δηλ. για την ίδια είσοδο διαφορετικά αποτελέσματα.

$(q_{55}, \alpha) \rightarrow (q_{312}, b, A)$ (κάνε ή το ένα ή το άλλο).

$(q_{55}, \alpha) \rightarrow (q_{64}, c, \Delta)$

Θα λέμε ότι μια τέτοια μηχανή δέχεται την είσοδο εφόσον υπάρχει τουλάχιστον 1 μονοπάτι που οδηγεί στην κατάσταση q_{NAI}.

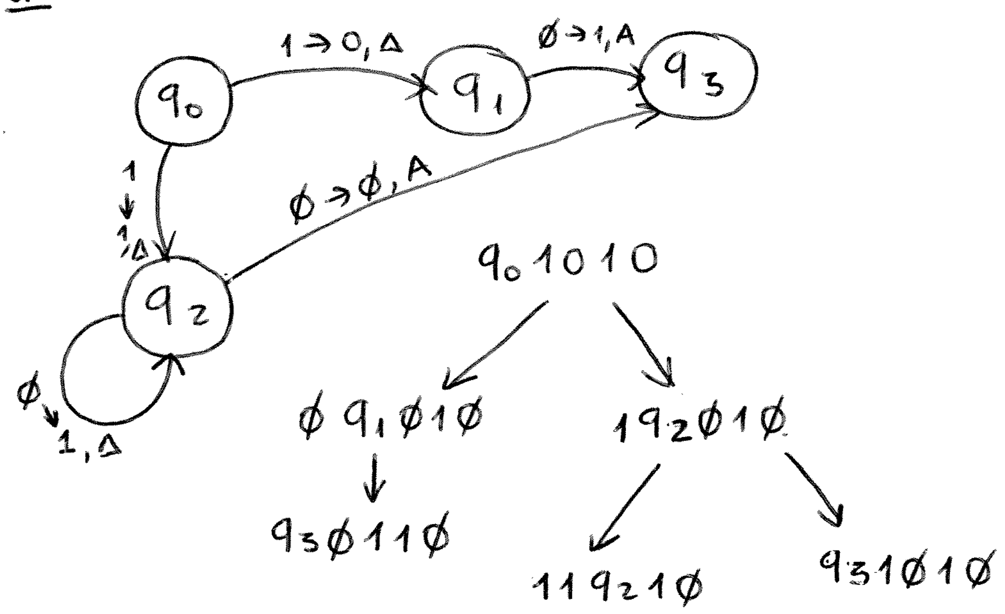
(*) ∃ κλάδος υπολογισμών



$q_0 1010$
↓
$0 q_1 010$

ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΜΟΣ

2.



Μη-ντετερμινισμός

Θα καταλήγουμε σε ένα δέντρο, που μας δείχνει όλους τους πιθανούς κλάδους του υπολογ.

! Είναι προφανές ότι μια ντετερμινιστική ΤΜ είναι ΚΑΙ ΜΗ ντετερμινιστική ΤΜ.

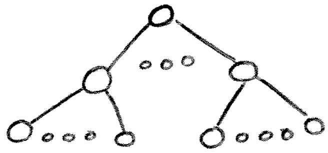
ΘΕΩΡΗΜΑ: ∀ ΝΤΜ Ν, ∃ ισοδύναμη ΤΜ D.

Θέλουμε να φτιάξουμε την ΤΜ D η οποία πρέπει να κάνει τα εξής:

∀ συμβ/σειρά ω που αποδέχεται η N, την αποδέχεται η D

∀ » ω » ΔΕΝ » η N, ΔΕΝ » η D.

! Βρίσκω το μέγιστο νούμερο διακλάδωσης, έστω b. Φτιάχνω ένα δέντρο ξεκινώντας από την q_0 και βάζοντας σε κάθε κόμβο b κλάδους.

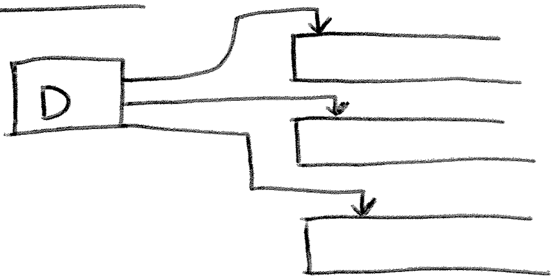


κλπ

Κάνω αναζήτηση κατά πλάτος και μόλις βρω q_{NAI} έχω ξεμπερδέψει.

> Κατά βάθος δεν ψάχνω γιατί μπορεί να παγιδευτώ σε ατέρμονο loop.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:



Ταινία 1: Περιέχει τη λέξη εισόδου και δεν μεταβάλλεται

Ταινία 2: περιέχει αντίγραφο της ταινίας της NTM N για κάποιο κλάδο υπολογισμού της.

Ταινία 3: παρακολουθεί τη θέση της D στο δέντρο.

Σύμβολα: 1, 2, ..., b εναλλακτικές.

π.χ. 231 ν δοκίμασε τον κλάδο υπολογισμού που από της q_0 παίρνει τη $2^{η}$ εναλλακτική για την πρώτη μετάβαση, την $3^{η}$ επίσης για τη δεύτερη μετάβαση και την $1^{η}$ επίσης για την τρίτη μετάβαση

Εμείς θα ψάχνουμε ως εξής:

1, 2, 3, ..., b, 11, 12, 13, ..., 1b, 21, 22, ... (λεξικογραφικά

D = Για είσοδο ω:

1. Η ταινία 1 περιέχει τη λέξη ω και οι 2,3 κενές
2. Αντιγράφω την ταινία 1 στην ταινία 2
3. Χρησιμοποιώντας την ταινία 2 προσομοιώνουμε έναν κλάδο του μη-ντετερμινιστικού υπολογισμού της N για είσοδο ω.
   Σε κάθε βήμα κοιτάμε το επόμενο σύμβολο στην ταινία 3 για να ξέρουμε τι μετάβαση θα ακολουθήσουμε.
   Αν δεν έχει απομείνει σύμβολο στην ταινία 3 ή αν ο κλάδος είναι άκυρος (δεν υπάρχει η μετάβαση) ή αν φτάσουμε σε απορριπτική φάση, τότε περνάμε στο 4. Αλλιώς αποδεχόμαστε
4. Αντικαθιστούμε τη λέξη στην ταινία 3 με την επόμενη λεξικογραφικά και go to 2.

Η τρίτη ταινία ξεκινάει κενή γιατί μπορεί η αρχική \
κατάσταση να είναι και τελική.

Πόρισμα: Μια γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη ανν
υπάρχει NTM που την αναγνωρίζει.

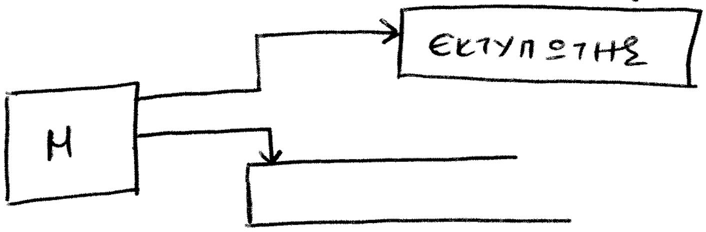
— — — — — —

Ορισμός: Μια NTM λέγεται διαγνώστης
αν τερματίζει πάντα.

Πόρισμα: Μια γλώσσα είναι διαγνώσιμη ανν
∃ NTM που την διαγιγνώσκει.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ 14-3-201

Ορισμός: ΑΠΑΡΙΘΜΗΤΗΣ είναι μια ΤΜ που δεν τελειώνει ποτέ και στέλνει λέξεις σε έναν εκτυπωτή.



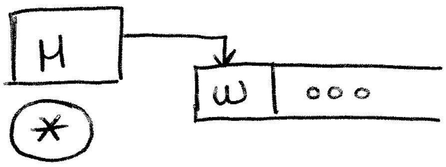
• Αρχικά ο απ/τής ξεκινάει με κενή ταινία.

! Το σύνολο των λέξεων που εκτυπώνονται είναι η γλώσσα που απαριθμεί ο απαριθμητής.

• Μία λέξη μπορεί να εκτυπωθεί πολλές φορές.

Θεώρημα: Μια γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη ανν υπάρχει απαρ/τής που την απαριθμεί.

⇐ Αν ∃ απαρ/τής Ε τότε ∃ ΤΜ που αναγν. τη γλώσσα (έστω Α η γλώσσα)



⚠ Η διαφορά μεταξύ αναγνωρίζω και διαγιγνώσκω είναι ότι στην αναγνώριση με νοιάζει μόνο να δηλώσω τις ΝΑΙ και δεν με νοιάζει αν στις άλλες καταστάσεις τερματίζει η μηχανή.

⇒ ∃ ΤΜ που αναγνωρίζει την Α, τότε ∃ απαρ/τής που απαριθμεί την Α.

(*) Για είσοδο ω

1. Εκτελούμε τον Ε. Κάθε φορά που στέλνει στην έξοδό του μια λέξη τη συγκρίνουμε με τη ω.
2. Αν εμφανιστεί στην έξοδο του Ε η ω τότε αποδεχόμαστε

⟹

$\boxed{E}$

$\boxed{}$

Θα παράγουμε όλο το Σ^* και θα το δίνουμε στην ΤΗ Μ. Αν η λέξη αναγνωριστεί θα τυπώνεται. Σ' αυτή την ιδέα ενέχει ο κίνδυνος του infinite loop, αφού αν μια λέξη παγιδεύσει την Μ, τότε θα παγιδευτεί και η Ε.

Η Ε θα εκτυπώνει επ' άπειρον. Αυτό δεν μας νοιάζει. Αυτό που θέλουμε είναι να εκτυπώνει μόνο τις συμβολοσειρές που αναγνωρίζει η Μ.

Ε = Αγνοούμε την είσοδο [Φτιάχνω κατάλογο του Σ^* (λεξικογραφικ

1. Για $i = 1, 2, \ldots$
   2. Εκτέλεσε την Μ για i βήματα σε κάθε μία από τις λέξεις $s_1, \ldots, s_i$.
3. Κάθε φορά που κάποιος υπολογισμός αποδέχεται στείλε για εκτύπωση την αντίστοιχη λέξη.

Βάλε τη μηχανή να τρέξει 1 βήμα στην πρώτη λέξη. Έπειτα σταμάτα και τρέξε 2 βήματα στην πρώτη και τη δεύτερη λέξη. Έπειτα 3 βήματα στην πρώτη, τη δεύτερη και την τρίτη λέξη κ.ο.κ.

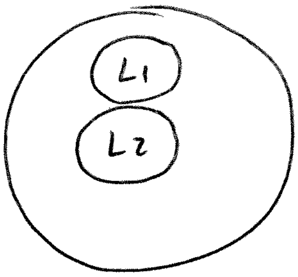
π.χ. $s_{104.257}$

Όταν φτάσω πρώτη φορά σ' αυτή τη λέξη θα τρέξω για 104.257 βήματα. Μπορεί αυτή η λέξη να θέλει 104.259 βήματα. Τότε θα εκτυπωθεί όταν τρέξει για πρώτη φορά η λέξη $s_{104.259}$.

Στον παραπάνω αλγόριθμο όμως μια λέξη μπορεί να εκτυπωθεί πολλές φορές.

<u>άσκηση 3.16</u>: Δείξτε ότι η κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς την ένωση.

ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΛΩΣΣΕΣ



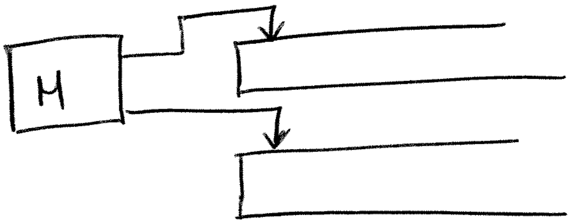
Θέλουμε να δείξουμε ότι για οποιεσδήποτε 2 γλώσσες είναι αναγνωρίσιμες, η ένωσή τους είναι αναγνωρίσιμη.

L_1 αναγνωρίσιμη $\Rightarrow \exists$ TM M_1 που την αν/ζει
L_2 » $\Rightarrow \exists$ TM M_2 » » »
$\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ TM M που αναγνωρίζει την $L_1 \cup L_2$

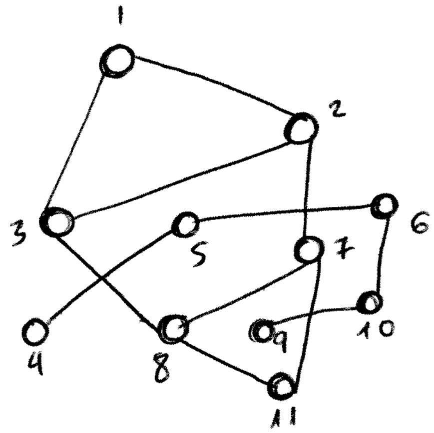
Αυτή η διατύπωση όμως είναι λάθος γιατί αν οι L_1, L_2 είναι απλά αναγνωρίσιμες τότε μπορεί να κολλήσουμε σε loop. Συνεπώς οι L_1, L_2 <u>πρέπει</u> να είναι ΔΙΑΓΝΩΣΙΜΕΣ!

Μπορώ να χρησιμοποιήσω τους απαριθμητές. Εφόσον οι γλώσσες μου είναι αναγνωρίσιμες σημαίνει ότι έχω απαριθμητή για κάθε μία από αυτές.



Θα βρω λοιπόν απαριθμητή για την ένωση.

4. Νέο Κεφάλαιο



$\underbrace{1\#2\#3\#}_{\text{κόμβοι}}\ldots\#11\#\underbrace{1\&2\#1\&3}_{\text{ακμές}}\ldots$

- Έχω 2 ταινίες. Μία είναι η αποπάνω και μία μόνο με τους κόμβους

- Παίρνω έναν-έναν τους κόμβους και κοιτάω τις ακμές του. Όταν τελειώσω με τις ακμές του ενός παίρνω κόμβο από τους σημαδεμένους. Αν τελειώσει η αναζήτηση και έχω ανακαλύψει όλους τους κόμβους, το γράφημά μου είναι συνεκτικό.

→ Μπορώ να κωδικοποιήσω τον ορισμό μιας TM σε μια ταινία. π.χ.

$q_4\$\alpha \rightarrow q_5\$b\$A$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

20-3-2012.

Θα δούμε ότι υπάρχουν πράγματα που δεν μπορούν να υπολογιστούν με Τ.Μ.

Αποδοχή Τ.Μ. $L_M = \{ \langle M, \omega \rangle :$ η M είναι μια ΤΜ που αποδέχεται τη λέξη $\omega \}$.

Ερώτηση → Είναι η γλώσσα L_M αναγνωρίσιμη?

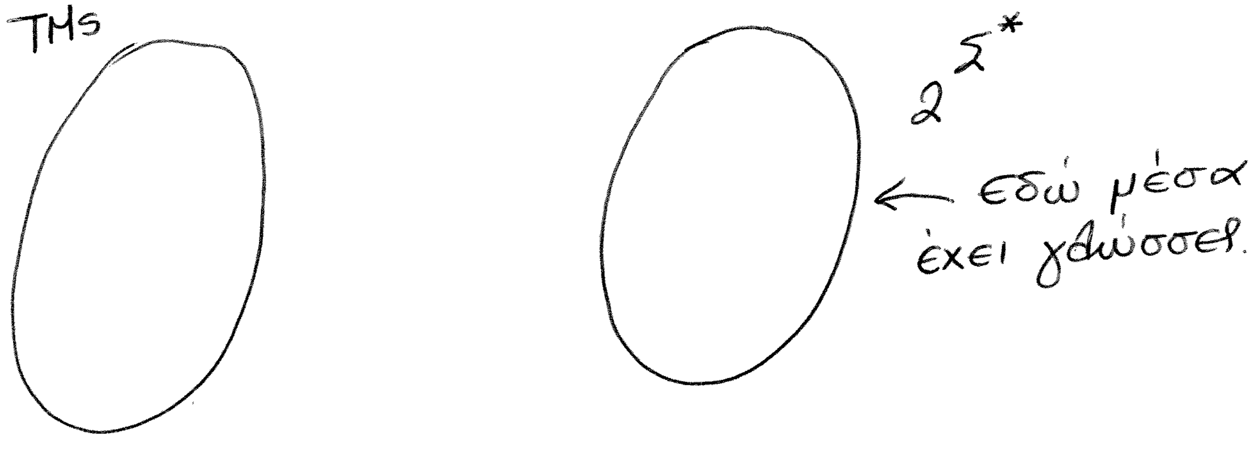
M	#	ω	⊔ ...

→ αυτό γίνεται.

Απάντηση: ΝΑΙ!!! Καθολική Τ.Μ. U με είσοδο $\langle M, \omega \rangle$

1. Προσομοιώνουμε την M με είσοδο ω
2. Αν η M μεταβεί ποτέ σε κατάσταση αποδοχής τότε η U αποδέχεται.

Ερώτηση → Είναι η γλώσσα L_M διαγνώσιμη?



2. ❓ Δίνονται 2 σύνολα A & B
Είναι το A μεγαλύτερο από το B?
Είναι ισομεγέθη?

<u>Ορισμός</u>: Έστω συνάρτηση $f: A \to B$ η f λέγεται "1-1" αν $\forall\, \alpha, b \in A$ $\alpha \neq b \Rightarrow f(\alpha) \neq f(b)$

Η f λέγεται επί αν $\forall\, b \in B$ $\exists\, \alpha \in A$ τ.ω. $f(\alpha) = b$.

Τα A και B λέγονται ισομεγέθη αν $\exists$ f "1-1" <u>και</u> επί $A \to B$.

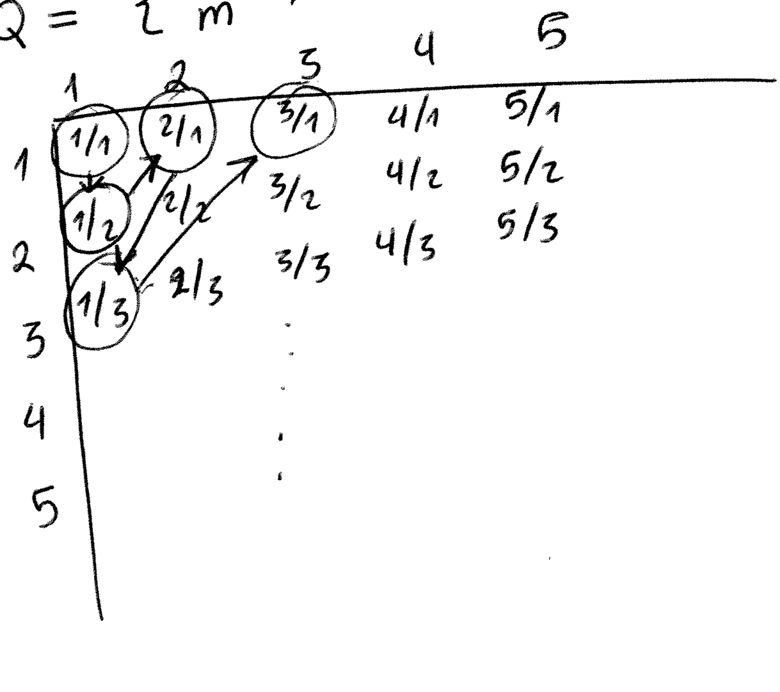
Παράδειγμα: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$
$\mathcal{E} = \{2, 4, \ldots\}$

Είναι ισομεγέθη?
$f(x) = 2x$

— — —

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$
$Q = \{\frac{n}{m},\ n, m \in \mathbb{N}\}$

<u>ΝΑΙ! ΕΙΝΑΙ</u>



Παράδειγμα:

$[0,1)$ vs $\mathbb{N}$

Θα δείξουμε ότι το $[0,1)$ είναι ΥΠΕΡΑΡΙΘΜΗΣΙΜΟ

<u>Υπόθεση:</u> Υπάρχει $f: \mathbb{N} \to [0,1)$ που είναι "1-1" και επί.

$n \in \mathbb{N}$	$f(n)$
1	$0,\underline{1}4579\ldots$
2	$0,2\underline{8}3914\ldots$
3	$0,99\underline{7}2\ldots$
4	$0,170\underline{0}0\ldots$
5	

$0,2432\ldots$

Επιλέγω $x \in [0,1)$ έτσι ώστε το i-οστό δ.ψ. να διαφέρει από το i-οστό δ.ψ. του $f(i)$

Άρα το σύνολο $[0,1)$ είναι μεγαλύτερο.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ 21-3-2012

	1	2	3	4	5	..
1	X	O	X	X	X	
2	X	X	O	X	O	
3	O	O	O	X	O	
4	X	O	X	O	X	
5	X	O	X	X	X	
⋮						

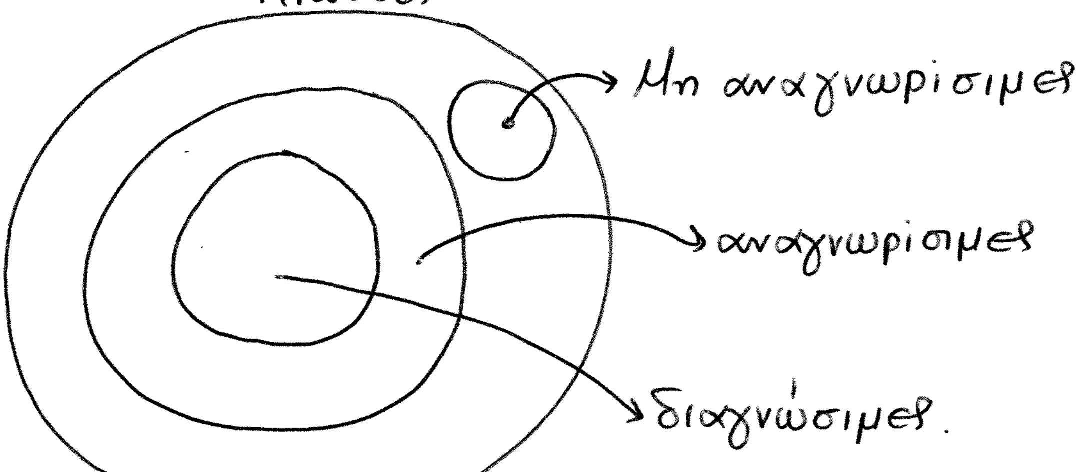
$\boxed{O\ O\ X\ X\ O.}$

Είναι η λέξη που προκύπτει αν αντιστρέψω τα στοιχεία της διαγωνίου. Αυτή η λέξη είναι μοναδική και δεν ταυτίζεται με καμία γραμμή του πίνακα

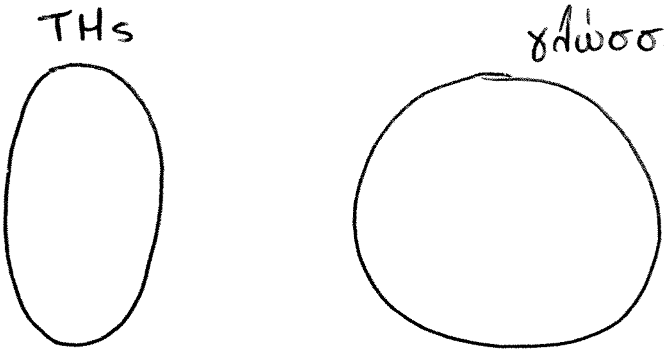
1. ∃ μη αναγνωρίσιμες γλώσσες ⇒ ∃ μη διαγνώσιμες γλώσσες.
2. Η γλώσσα L_H είναι μη διαγνώσιμη.
3. Η γλώσσα $\overline{L_H}$ είναι μη αναγνωρίσιμη.

$L_H = \{ \langle M,w \rangle$, η M είναι Τ.Μ. που αποδέχεται την $w \}$

Γλώσσες



2. Θεώρημα: ∃ μη αναγνωρίσιμες γλώσσες



Θα δείξουμε:

1. Το σύνολο των THs είναι αριθμήσιμο.
2. Το σύνολο των γλωσσών πάνω σε ένα συγκεκριμένο αλφάβητο είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη:

1. Θυμόμαστε ότι μπορούμε να απαριθμήσουμε συμβολοσειρές ΛΕΞΙΚΟΓΡΑΦΙΚΑ.

π.χ. 0, 1, α

1 → 0
2 → 1
3 → α
4 → 00
5 → 01
6 → 0α
⋮

Συνεπώς Σ^* μετρήσιμο και το υποσύνολο του Σ^* που αντιστοιχεί σε περιγραφή THs είναι αριθμήσιμο.

2. Έστω ότι το σύνολο των γλωσσών είναι αριθμήσιμο.

	s_1	s_2	s_3 (συμβ/ρες)
L_1	$\in$	$\notin$	$\in$
L_2	$\notin$	$\in$	$\in$
L_3	$\in$	$\in$	$\notin$
L_4	...	...	...
(γλώσσες)			

Φτιάχνω, με βάση τη διαγώνιο την $L_j = \notin \notin \in \ldots$

Η γλώσσα L_j δεν μπορεί να μπει στον πίνακα, άρα η L_j είναι υπεραριθμήσιμη.

(π.χ. Αν πάρω το πρώτο στοιχείο της $L_j = \notin$ βλέπω ότι η s_1 δεν ανήκει στην L_j. OK. Αλλά αν πάρω το i-οστό το έχω ορίσει έτσι ώστε να είναι το αντίθετο από αυτό που πρέπει. Αν η γλώσσα είναι η L_{10} τότε η s_{10} είναι το αντίθετο από το αναμενόμενο.)

Θεώρημα: Η γλώσσα L_H είναι μη διαγνώσιμη.

Ιδέα απόδειξης:

1. Υποθέτω ότι L_H διαγνώσιμη τότε:
   ∃ TM H που αποδέχεται τη λέξη <M,ω>
   ανν η TM M αποδέχεται τη λέξη ω.
2. Χρησιμοποιώντας αυτή την TM, θα φτιάξουμε την TM D που απορρίπτει τη λέξη <M> ανν η TM M αποδέχεται τη λέξη <M>.
3. Εκτελώντας την D με είσοδο την <D> θα έχω ότι:
   η D απορρίπτει την D ανν η D αποδέχεται την D
   ΑΤΟΠΟ

ΟΧΙ, ΝΑΙ Ρουτίνα H (TM M, string s)

ΟΧΙ, ΝΑΙ Ρουτίνα D (TM M)

Απόδειξη:

D = Για είσοδο <M>, όπου M είναι TM.
1. Εκτελούμε την H για είσοδο <M,<M>>
2. Αν η H αποδεχτεί, τότε απορρίπτουμε
   Αν η H απορρίψει, τότε αποδεχόμαστε.

Δηλ. D(<M>) → αποδοχή αν η M απορρίπτει τον εαυτό της
→ απόρριψη αν η M αποδέχεται » » »

D (<D>) → αποδοχή αν η D απορρίπτει την D
→ απόρριψη αν η D αποδέχεται την D.

Άρα ΑΤΟΠΟ. Συνεπώς η L_H δεν είναι διαγνώσιμη

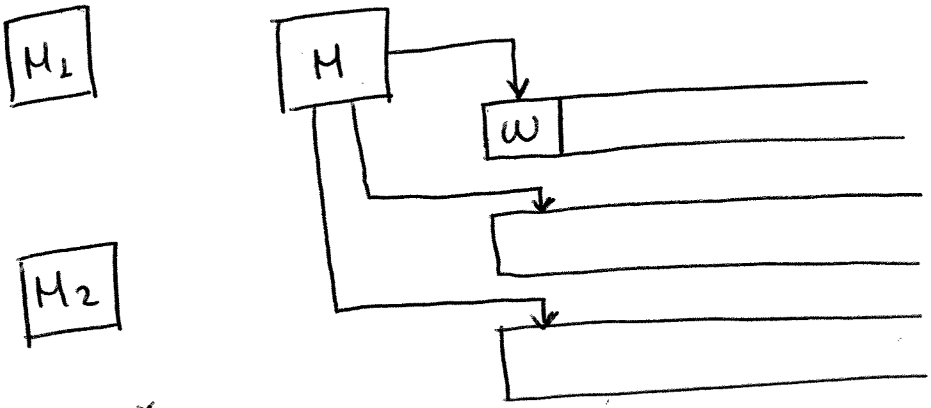
4. <u>Θεώρημα</u>: Μια γλώσσα A είναι διαγνώσιμη ανν αυτή και η συμπληρωματική της είναι αναγνωρίσιμες.

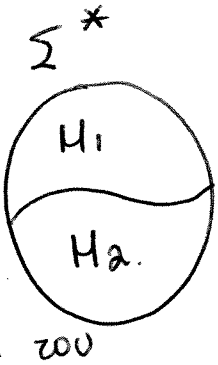
1. Αν A διαγνώσιμη τότε A και $\bar{A}$ αναγνωρίσιμες.

A διαγνώσιμη $\Rightarrow$ $\bar{A}$ διαγνώσιμη (αντιστρέφοντας τις $q_{ΝΑΙ}$ και $q_{ΟΧΙ}$ της ΤΗ που διαγ. την A).

$\Rightarrow$ A, $\bar{A}$ αναγνωρίσιμες.

2. Αν A και $\bar{A}$ αναγνωρίσιμες τότε A διαγνώσιμες.





Στο πνεύμα του Πάσχα. (Kinder αυγό)

M = Για είσοδο ω
1. Εκτελούμε παράλληλα τις M_1 και M_2 με είσοδο ω (πως? Με τις επιπλ. ταινίες)
2. Αν η M_1 αποδεχτεί τότε τερμάτισε λέγοντας ΝΑΙ.
   Αν η M_2 αποδεχτεί τότε τερμάτισε λέγοντας ΟΧΙ.

M_1 αναγνωρίζει την A
M_2 » » $\bar{A}$

Πόρισμα: Η γλώσσα $\bar{L}_H$ <u>δεν</u> είναι αναγνωρίσιμη.

$\bar{L}_H = \{ \langle M, \omega \rangle$ η M είναι ΤΗ που <u>δεν</u> αποδέχεται τη λέξη $\omega \}$.

Αν $L=\emptyset$ τότε η ΤΗ λέει πάντα <u>ΟΧΙ</u>
$\bar{L}=\Sigma^*$ η ΤΗ λέει πάντα <u>ΝΑΙ</u>

Η L είναι διαγνώσιμη. :)

<u>Άσκηση 4.28:</u> Γλώσσα A που αποτελείται από περιγραφές ΤΗ που είναι διαγνώστες.
Η A είναι αναγνωρίσιμη. Δείξτε ότι:
$\exists$ διαγνώστης $D \notin A$.

<u>Άσκηση για σπίτι:</u> Αν η A αναγνωρίσιμη τότε $\exists$ απαριθμητής E_A που τυπώνει κάθε συμβολοσειρά της A ακριβώς μία φορά.

Συνεπώς μπορώ την A να τη γράψω ως μια σειρά από ΤΗs χωρίς επαναλήψεις.

$A=\{\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle, \ldots\}$.

1. Θα φτιάξω μια γλώσσα D
2. Θα δείξω ότι είναι διαγνώσιμη
3. Θα δείξω ότι $D \notin A$.

	s_1	s_2	s_3	s_4	... (συμβολοσειρές του Σ^*)
$\langle M_1\rangle$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	
$\langle M_2\rangle$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	
$\langle M_3\rangle$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	
$\langle M_4\rangle$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	...
⋮					

Θα φτιάξω τη D.
βάζοντας σ' αυτή τη συμβολοσειρά i αν η $\langle M_i\rangle$ <u>ΔΕΝ</u> την αποδέχεται

D $\boxed{\in \;\notin\; \in \;\notin\; \ldots}$

Η γλώσσα αυτή δεν πάει σε καμία γραμμή.
π.χ. Η D περιέχει την s_{57}.
αν όμως πάω να τη βάλω στη M_{57}, η M_{57} δεν περιέχει την s_{57}.
Γενικά: η D περιέχει την s_i
η M_i δεν περιέχει την s_i
και αντίστροφα.

6. $M_D(\omega)$ → αποδέχεται το ω αν $\omega \in D$
→ απορρίπτει την ω αν $\omega \notin D$.

M_D = Σε είσοδο ω

1. τρέξε παράλληλα τον απαριθμητή για το Σ^* κ' τον απαριθμητή της Α
2. Αν $S_i = \omega$ τότε εκτέλεσε την M_i στο S_i
   Αν αποδεχτεί, απόρριψε.
   Αν απορρίψει, αποδέξου.

- Σάββατο μετά το Πάσχα ... Πρόοδος.

Τα ερωτήματα:

Κατανόηση θεωρίας (ασκήσεις).

Π > Ε.Τ. → Μ.Ο.

Ε.Τ. > Π → Ε.Τ.

Π = Πρόοδος
Ε.Τ. = Τελική εξέταση.
Μ.Ο = Μέσος όρος.

— — — — — — —

- ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ.

$= \{\langle M, w\rangle$ η M είναι ΤΜ και αποδέχεται την $w\}$.

↳ Μη διαγνώσιμη.

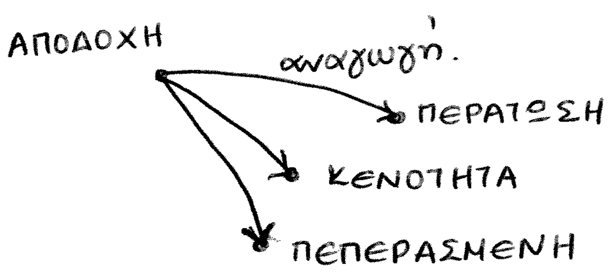
ΠΕΡΑΤΩΣΗ/ΤΜ $= \{\langle M, w\rangle$ η M είναι ΤΜ και τερματίζει με είσοδο $w\}$.

↳ Μη διαγνώσιμη.

ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ $= \{\langle M\rangle$, η M είναι ΤΜ κ $L(M) = \emptyset\}$.

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ/ΤΜ $= \{\langle M\rangle$ η M είναι ΤΜ κ' $L(M)$ πεπερασμένη$\}$.

- Διαβάζω πολύ καλά τους ορισμούς.



- Αν θέλω να δείξω ότι μια γλώσσα είναι μη διαγνώσιμη μπορώ να χρησιμοποιήσω, οποιαδήποτε από αυτές τις δύσκολες γλώσσες για αναγωγή.

2. <u>Θεώρημα:</u>

Η γλώσσα ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/ΤΜ $= \{ \langle M_1, M_2 \rangle$, οι M_1 και M_2 είναι ΤΜ κ' $L(M_1) = L(M_2) \}$.

είναι μη διαγνώσιμη.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u>

(Υ) → η ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ είναι διαγνώσιμη δηλαδή $\exists$ ΤΜ R που τη διαγιγνώσκει.

$(M_1 - M_2) \cup (M_2 - M_1) = \emptyset$ ανν $M_1 = M_2$.

~~S. Για είσοδο $\langle M_1, M_2 \rangle$~~

~~1. Κατασκεύασε την ΤΜ $M_{1,2}$ έτσι ώστε $L(M_{1,2}) = (L(M_1) - L(M_2)) \cup (L(M_2) - L(M_1))$~~

(*) Δεν μπορώ να το φτιάξω αυτό.

S: Για είσοδο $\langle M, \omega \rangle$

1. Κατασκευάζω την ΤΜ M, που λειτουργεί ως εξής
   M_1: Για είσοδο x
   1. Αν $x = \omega$, αποδέχομαι
   2. Αν $x \neq \omega$, απορρίπτω.

2 Κατασκευάζω ΤΜ M_2 που λειτουργεί ως εξής.
   M_2: Για είσοδο x
   1. Αν $x \neq \omega$, απορρίπτω
   2. Αν $x = \omega$, προσομοιώνουμε την M με είσοδο ω
   3. Αν αποδεχτεί, αποδέχομαι.
3. Εκτέλεσε την R με είσοδο $\langle M_1, M_2 \rangle$
4 Αν αποδεχτεί, αποδέχομαι
5. Αν απορρίψει, απορρίπτω.

R = διαγνώστης
ΑΤΟΠΟ γιατί η αποδοχή είναι μη διαγνώσιμη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 2

(γ) Η ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/ΤΗ είναι διαγνώσιμη.
∃ R που τη διαγιγνώσκει.

Χρησιμοποιώντας την R, κατασκευάζω την εξής διάγνωση για την ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΗ.

S = Για είσοδο <Μ>

1. Κατασκευάζω την ΤΗ $M_\emptyset$
   $M_\emptyset$ = Για είσοδο x απόρριψε
2. Εκτέλεσε την R με είσοδο < $M_\emptyset$ M >
3. Αν αποδεχτεί, αποδέξου
4. Αν απορρίψει, απόρριψε.

ΑΤΟΠΟ

— — — — — —

ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ/ΤΗ = { <Μ> η Μ είναι ΤΗ κ' $L(M) = \Sigma^*$ }.

∃ ΤΗ R που αποδέχεται την ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ

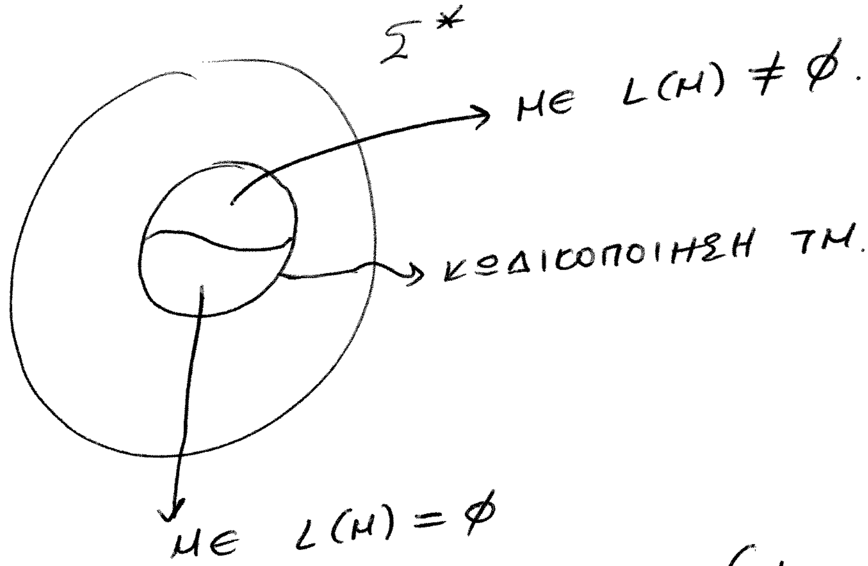
Για είσοδο <Μ,ω>

1. Κατασκευάζω την M_1 που λειτουργεί ως εξής:
   M_1 για είσοδο x:
   1. Αν $x \neq \omega$, αποδέχομαι
   2. Αν $x = \omega$, αποδέχομαι ανν η Μ αποδέχεται το ω
2. Εκτελώ την R με είσοδο M_1.
3. Αν αποδεχτεί, αποδέχομαι
4. Αν απορρίψει, απορρίπτω.

4. ΜΗ-ΚΕΝΟΤΗΤΑ$_{ΤΜ}$ = { <M> η M είναι ΤΜ κ' $L(M) \neq \emptyset$ }.

S = Για είσοδο <M> (*)

1. Εκτελώ των R με είσοδο <M>
2. Αν απορρίψει, απορρίπτω
3. Αν αποδεχτεί, αποδέχομαι.



(*) έλεγξε αν <M> είναι ΤΜ. (Μπορώ να το παραλείπω στις αποδείξεις.

ΠΕΡΑΤΩΣΗ$_\epsilon$ $/_{ΤΜ}$ = { <M>, η M είναι ΤΜ και τερματίζει με είσοδο των κενή συμβολοσειρά }.

Έστω ότι είναι διαγνώσιμη, τότε ∃ ΤΜ R που τη διαγιγνώσκει. Χρησιμοποιώντας των R, θα κατασκευάσω διάγνωση S για των ΠΕΡΑΤΩΣΗ$/_{ΤΜ}$.

M_ϵ : Για είσοδο x

Αν $x = \epsilon$ (κενή)

Προσομοίωσε των M με είσοδο w

Αν αποδεχτεί, αποδέχομαι

Αν απορρίψει απορρίπτω.

Αν $x \neq \epsilon$

αποδέχομαι.

Διάγνωση της ΠΕΡΑΤΩΣΗ/ΤΜ.

S: Για είσοδο <Μ,ω>

1. Κατασκευάζω M_ε
2. Εκτέλεσε την R με είσοδο M_ε
3. Αν αποδεχτεί, αποδέχομαι
4. Αν απορρίψει, απορρίπτω.

— — — — — — —

ΑΠΟΔΟΧΗ$_\varepsilon$/ΤΜ = {<Μ>, η Μ είναι ΤΜ και αποδέχεται την κενή συμβολοσειρά}

! Έστω ότι είναι διαγνώσιμη τότε ∃ ΤΜ R που τη διαγιγνώσκει χρησιμοποιώντας την R, θα κατασκευάσω διαγνώστη S για την ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ.

M_ε: Για είσοδο x

Αν $x = \varepsilon$ (κενή)

προσομοιώνουμε την Μ με είσοδο ω

Αν αποδεχτεί αποδ.

Αν απορ. απορ.

Αν $x \neq \varepsilon$

αποδ.

S: Για είσοδο <Μ,ω>

1. Κατασκευάζω την M_ε
2. Εκτελώ την R με είσοδο M_ε
3. Αν αποδ., αποδ.
4. Αν απορ., απορ.

6. (5.9) ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ/ΤΜ = $\{<M> :$ η M είναι ΤΜ και αποδέχεται την λέξη ω ανν αποδ. την $\omega^R \}$.

(γ) $\exists$ ΤΜ που διαγιγνώσκει την ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΙΚΗ.

Διαγνώστης για την ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ.

S: Για είσοδο $<M, \omega>$

1. Κατασκευάζω την ΤΜ M_R.

   Για είσοδο x

   1. Αν $x = "\alpha b"$, αποδέχομαι
   2. Αν $x = "b\alpha"$, προσομοιώνω την M με είσοδο ω
      3. Αν αποδ., αποδ.
         Αν απορ., απορ.
   4. Αν $x \neq b\alpha, \alpha b$ απορρίπτω.

2. Εκτελώ την R με είσοδο M_R

   Αν αποδ., αποδ.

   Αν απορ., απορ.

ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΙΚΗ⁻/ΤΜ = { <Μ>, η Μ είναι ΤΜ που τερματίζει με είσοδο ω αν τερματίζει με είσοδο ω^R. }.

3.1, 3.2, 3.3, 3.5

Δεν διαβάζω ότι έχει σχέση με θεωρία υπολογ.

ΕΚΤΟΣ 4.1.

Πρόβλημα τερματισμού (ΠΟΛΥ ΚΑΛΑ)

Б3 ΕΚΤΟΣ

→ θεώρημα.

Б.1.1 ΕΚΤΟΣ

ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΙΚΗ'/ΤΜ = { <Μ> : η Μ είναι ΤΜ και τερματίζει με είσοδο ω, ανν τερματίζει με είσοδο ω^R }

ΛΥΣΗ:

(ΥΠΟΘΕΣΗ): ∃ διαγνώστης R της ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

Θα κατασκευάσω διαγνώστη για την ΑΠΟΔΟΧΗ.

S = Για είσοδο <Μ,ω>

1. Κατασκευάζω την ΤΜ M_R:

   Για είσοδο x

   1. Αν x = "αb" αποδέχομαι (τερματίζω)
   2. Αν x = "bα" προσομοιώνω την Μ με είσοδο ω.
      Αν αποδεχτεί, αποδέχομαι (τερματίζω)
      Αν απορρίψει, κολλάω
   3. Αν x ≠ αb ή bα κολλάω

2. Εκτελώ την R με είσοδο M_R
   Αν αποδεχτεί, αποδέχομαι
   Αν απορρίψει, απορρίπτω

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ 4-4-2012.

(*) Δοθείσας ΤΜ Μ, κατάστασης q και λέξης ω, μεταβαίνει ποτέ η Μ στην κατάσταση q όταν ξεκινάει με εισ. ω?

$L = \{ \langle M, q, \omega \rangle$ η Μ είναι ΤΜ, η q είναι μια κατάσταση της Μ, η ω είναι λέξη, έτσι ώστε η Μ να μεταβαίνει στην κατάσταση q με είσοδο ω. $\}$.

Δείξτε ότι L μη διαγνώσιμη.

(y) Η L είναι διαγνώσιμη. Άρα $\exists$ ΤΜ R που τη διαγιγνώσκει. Θα χρησιμοποιήσω την R για να κατασκευάσω διαγνώστη S για την ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ.

S = Για είσοδο $\langle M, \omega \rangle$
1. Εκτέλεσε τον διαγνώστη R με είσοδο $\langle M, q_{ΝΑΙ}, \omega \rangle$
2. Αν αποδεχτεί, αποδέξου.
3. Αν απορρίψει, απέρριψε.

(*) Δοθείσας ΤΜ Μ και συμβόλου α, γράφει ποτέ η Μ το α στην ταινία όταν ξεκινάει με είσοδο την κενή συμβολοσειρά?

$L = \{ \langle M, \alpha \rangle$ η Μ είναι ΤΜ και $\alpha \in \Gamma$ έτσι ώστε η Μ να γράφει κάποια στιγμή στην ταινία το σύμβολο α, όταν ξεκινάει με είσοδο την κενή σ. $\}$

$ΑΠΟΔΟΧΗ_{\varepsilon}/ΤΜ = \{ \langle M \rangle$, Μ είναι ΤΜ που αποδέχεται την κενή σ. $\}$

(y) L είναι διαγνώσιμη και R διαγνώστης της L

S = Για είσοδο $\langle M \rangle$
1. Κατασκευάζω την M'
   Για είσοδο x
   1. Αν $x \neq \varepsilon$ αποδέξου
   2. Αν $x = \varepsilon$ τρέξε την $\langle M \rangle$
      Αν φτάσει σε $q_{ΝΑΙ}$ γράψε σ
2. Τρέξε την R με είσοδο $\langle M', \sigma \rangle$
   Αν αποδεχτεί, αποδέξου.

2. (*) $L = \{ \langle M_1, M_2 \rangle$ οι M_1, M_2 είναι ΤΜ και $L(M_1) = L(M_2) \}$.

(Υ) L διαγνώσιμη κ' R ο διαγνώστης της L. Θα χρησιμοποιήσω την R για να κατασκευάσω διαγνώστη S για την ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/ΤΜ.

~~S = Για είσοδο $\langle M_1, M_2 \rangle$~~

~~1. Κατασκεύασε την M_2' έτσι ώστε η M_2'~~
   ~~1. αποδέχεται αν η M_2 απορρίπτει~~
   ~~2. απορρίπτει αν η M_2 αποδέχεται.~~

!! Δεν δουλεύει γιατί δεν ξέρω αν η M_2 είναι διαγνώσιμη άρα στις περιπτώσεις που εγκλωβίζεται δεν ξέρω τι κάνω.

Κατασκευάζω S για την ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ.

S: Για είσοδο $\langle M \rangle$

1. Κατασκευάζω την ΤΜ $M*$ που αποδέχεται όλες τις συμβολοσειρές.
2. Εκτέλεσε την R με είσοδο $\langle M*, M \rangle$
3. Αν αποδεχτεί, ~~απορρίπτω~~ αποδέχομαι
4. Αν απορρίψει, απορρίπτω.

. $L = \{ \langle M_1, M_2 \rangle$ όπου M_1 & M_2 είναι ΤΗ και ∃
σ/σειρά με είσοδο την οποία και η
2 ~~τερματίζουν~~ αποδέχονται. $\}$.

(γ) L διαγνώσιμη και R ο διαγνώστης της.
Αναγωγή στην ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΗ.

S = Για είσοδο $\langle M \rangle$

1. Κατασκευάζω την ΤΗ M_* που αποδέχεται όλες τις συμ/σειρές.
2. Εκτελώ την R με είσοδο $\langle M_*, M \rangle$
3. Αν αποδεχτεί, απορρίπτω
4. Αν απορρίψει, αποδέχομαι.

(2) Αναγωγή στην ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΗ.

S: Για είσοδο $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκευάζω την ΤΗ M_1
   M_1 για είσοδο x
   Αν $x \neq w$ απορρίπτω
   Αν $x = w$ αποδέχομαι
2. Εκτελώ την R με είσοδο $\langle M_1, M \rangle$
3. Αν αποδεχτεί, αποδέχομαι
4. Αν απορρίψει, απορρίπτω.

4. (*) $L = \{ \langle M_1, M_2 \rangle$, M_1, M_2 TM κ' ∃ συμ/σειρά με είσοδο την οποία και οι δύο τερματίζουν $\}$.

(Y) L είναι διαγνώσιμη και έστω R ο διαγνώστης της.
Αναγωγή από ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM.

S: Για είσοδο $\langle M, \omega \rangle$
1. Κατασκευάζω την TM M_1
   Για είσοδο x
   Αν $x = \omega$ αποδέχομαι (ή απορρίπτω)
   Αν $x \neq \omega$ ~~απορρίπτω~~ εγκλωβίσου.
2. Εκτέλεσε την R με είσοδο $\langle M_1, M \rangle$
3. Αν αποδεχτεί, αποδέχομαι
4. Αν απορρίψει, απορρίπτω.

ΚΕΝΟΤΗΤΑ-ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM = $\{ \langle M \rangle$ ή M είναι TM.
κ δεν τερματίζει για καμία συμ/σειρά $\}$.

?

(*) Δοθείσης διταινιακής μηχανής γράφει ποτέ στη δεύτερη ταινία της το σύμβολο α όταν ξεκινάει με είσοδο την κενή συμ/σειρά?

ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΣΤΟ ΒΙΒΛΙΟ.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

24-4-2012.

(*) Αναγωγή από το πρόβλημα A στο πρόβλημα B.

(Υ) ∃ ΤΜ R που διαγιγνώσκει τη γλώσσα B

Χρησιμοποιώντας τον R, κατασκευάζουμε διαγνώστη S για τη γλώσσα A.

S = Για είσοδο λέξη z

1. Χρησιμοποιώντας τη z, κατασκεύασε λέξη z'
   τ.ω. $z \in A \iff z' \in B$
2. Εκτέλεσε τον R στη λέξη z'
3. Αν αποδεχτεί, αποδέχομαι
   Αν απορρίψει, απορρίπτω.

Παραδείγματα:

ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ → ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/ΤΜ

ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ → ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ/ΤΜ

ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ → ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ/ΤΜ

ΠΕΡΑΤΩΣΗ/ΤΜ → ΠΕΡΑΤΩΣΗ$_\varepsilon$/ΤΜ

ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ → ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΙΚΗ/ΤΜ

Δεν ανάγονται στην κατηγορία ~~αριστερά~~ πάνω-πάνω:

ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ → ΠΕΡΑΤΩΣΗ/ΤΜ

ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ → ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ.

2.1

ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ → ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/ΤΜ

S = Για είσοδο <M> όπου M είναι TM (z=<M>)

1. Κατασκευάζω την TM M_0 που απορρίπτει όλες τις εισόδους της. ~> (z'=<M,M_0>)
2. Εκτελώ την R με είσοδο <M,$M_\emptyset$>.
3. Αν αποδεχτεί, αποδ.
   Αν απορ. , απορ.

ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ → ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ.

S = Για είσοδο <M, ω>.

1. Κατασκεύασε TM M_1 που λειτουργεί ως εξής
   - Για είσοδο x :
     1. Αν x≠ω απορρίπτω
     2. Αν x=ω εκτελώ την M με είσοδο ω και αποδέχομαι αν αποδεχτεί.
2. Εκτελώ τον R με είσοδο <M_1>.
3. Αν αποδ. , απορ.
4. Αν απορ. , αποδ.

(*) Απλ. υπολόγισε την κωδικοποίηση της M_1.

Μωβ-

Το έχουμε λύσει σε προηγούμενη διάλεξη.

Οι αναγωγές όπως οι παραπάνω ονομάζονται απεικονιστικές.

<u>Ορισμός</u>: Μια συνάρτηση $f\ \Sigma^* \to \Sigma^*$ λέγεται (Turing) υπολογίσιμη αν $\exists$ ΤΜ F η οποία για είσοδο $z \in \Sigma^*$, τερματίζει έχοντας στην ταινία μόνο $f(z)$

$$f(\langle M, w\rangle) = \langle M_1 \rangle$$

<u>Ορισμός</u>: Λέμε ότι η γλώσσα A είναι απεικονιστικά αναγώγιμη στη γλώσσα B (γράφουμε $A \leq_m B$) αν $\exists$ υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ τ.ω.

$\forall z \in \Sigma^*,\ z \in A \iff f(z) \in B$

Η συνάρτηση f λέγεται αναγωγή.

<u>Θεώρημα</u>: Αν $A \leq_m B$ και B διαγνώσιμη, τότε A διαγνώσιμη.

<u>Απόδειξη</u>: $\exists$ f υπολογίσιμη και μια ΤΜ F τ.ω.

$\forall z \in \Sigma^*,\ z \in A \iff f(z) \in B$.

4.

S = Για είσοδο z
1. Υπολογίζω την f(z) (προσομοιώνοντας την f).
2. Εκτελώ τον R για είσοδο f(z) και επιστρέφω ότι επιστρέφει ο R.

<u>Πόρισμα:</u> Αν $A \leq_m B$ κ' A μη διαγνώσιμη τότε B μη διαγνώσιμη.

ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ $\leq_m$ ΠΕΡΑΤΩΣΗ/ΤΜ.

Θα φτιάξουμε μια υπολογίσιμη συνάρτηση f που με είσοδο $\langle M, \omega \rangle$ παράγει έξοδο $\langle M', \omega' \rangle$ τ.ω $\langle M, \omega \rangle \in$ ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ $\Leftrightarrow$ $\langle M', \omega' \rangle \in$ ΠΕΡΑΤΩΣΗ/ΤΜ.

F = Για είσοδο $\langle M, \omega \rangle$
1. Κατασκευάζω την ΤΜ M' ως εξής: (έτσι ώστε M' τερματίζει με είσοδο ω ανν η M αποδέχεται την ω)
   M' = Για είσοδο x
   1. Εκτέλεσε την M στην x
   2. Αν αποδεχτεί, αποδέχομαι
   3. Αν απορρίψει, απορρίπτω.
2. Επέστρεψε $\langle M', \omega \rangle$. ($\langle M', \omega \rangle$ τ.ω. η M τερματίζει με είσοδο ω ανν η M αποδέχεται την ω)

!
ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ $\rightarrow$ $\overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ}}$
ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ $\rightarrow$ ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ ?

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ|ΤΜ = { <M,ω> }

(γ) R είναι ΤΜ που τη διαγιγνώσκει.

Χρησιμοποιώντας την R θα κατασκευάσω διαγνώστη για την αποδοχή.

S = Για είσοδο <M,ω>

1. Κατασκευάζω την ΤΜ M_2

   M_2 = Για είσοδο x

   1. Αν x="∅" αποδέχομαι
   2. Αν x≠"∅" εκτέλεσε την M με είσοδο ω

      Αν αποδεχτεί, αποδ.

      Αν απορ., απορ.

   ~~3. Αν αποδεχτεί, αποδέχομαι~~

      ~~Αν απορ.~~

2. Εκτελώ την R με είσοδο M_2

   Αν αποδ., απορ.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ
ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

25-4-2012

<u>Ορισμός</u>: $A \leq_m B$ αν $\exists$ υπολογίσιμη συνάρτηση f τ.ω.

$\forall z \in \Sigma^*$, $z \in A \Leftrightarrow f(z) = B$

H f λέγεται αναγωγή του A στο B.

<u>!</u> Έστω ότι έχω έναν διαγνώστη R για τη γλώσσα B. Φτιάχνουμε διαγνώστη S για τη γλώσσα A

S = Για είσοδο z

1. Υπολόγισε την $f(z)$
2. Εκτέλεσε την R στη λέξη $f(z)$ και επέστρεψε το αποτέλεσμα.

<u>!</u> Οι απεικονιστικές αναγωγές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δείξουμε τη μη αναγνωρισιμότητα.

<u>Θεώρημα</u>: Αν $A \leq_m B$ και B αναγνωρίσιμη, τότε A αναγνωρίσιμη.

<u>Απόδειξη</u>: $\exists$ TM R που αναγνωρίζει τη γλώσσα B. Θα τη χρησιμοποιήσω για να κατασκευάσω TM S που αναγνωρίζει την A.

S = Για είσοδο z

1. Υπολόγισε την $f(z)$
2. Εκτέλεσε την R πάνω στη λέξη $f(z)$ και επέστρεψε το αποτέλεσμα.

<u>Πόρισμα</u>: Αν $A \leq_m B$ και A μη αναγνωρίσιμη τότε και B μη αναγνωρίσιμη

<u>!</u> Η ΑΠΟΔΟΧΗ$_{TM}$ είναι μη αναγνωρίσιμη.

2.

Θεώρημα: Η γλώσσα $\overline{\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{TM}}$ είναι μη-αναγνωρ.
Η γλώσσα ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ_{TM} είναι μη αναγνωρ.

$\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}} \leq_m \text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{TM}$ είναι το ίδιο με το να αποδείξω ότι $\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM} \leq_m \overline{\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{TM}}$

$\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM} \leq_m \text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{TM}$

$A \leq_m B \quad f \; \forall z \in \Sigma^*, z \in A \Longleftrightarrow f(z) \in B$

$\forall z \in \Sigma^*, z \in A \Longleftrightarrow f(z) \notin B$

$z \in \overline{A} \Longleftrightarrow f(z) \in \overline{B}$

$\overline{A} \leq_m \overline{B}$

$\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM} \leq_m \overline{\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{TM}}$

$f: \underbrace{\langle M, w \rangle}_{z} \in \text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM} \Longleftrightarrow \underbrace{\langle M_1, M_2 \rangle}_{f(z)} \in \text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}$

F = Για είσοδο $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκευάζω τις TM M_1, M_2

   M_1 = Για κάθε είσοδο (*)
      1. Απορρίπτει / αποδέχεται

   M_2 = Για κάθε είσοδο
      1. Εκτέλεσε την M στη λέξη w
      2. Αν αποδεχτεί, αποδεχόμαστε

2. Επιστρέφουμε τη λέξη $\langle M_1, M_2 \rangle$.

$\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM} \leq_m \text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{TM}$

Ίδια με την παραπάνω μόνο που αλλάζει ότι έχω σε (*).

Άσκηση 5.5:

ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ $\not\leq_m$ ΚΕΝΟΤΗΤΑ

Υπόθεση: $\exists\, f$ τ.ω. ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ $\leq_m$ ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ

ισοδύναμα $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ}} \leq_m \overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ}}$

Αυτό είναι άτοπο γιατί $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ}}$ μη αναγν. και $\overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ}}$ αναγνωρίσιμη.

Θεώρημα: Η γλώσσα $\overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ}}$ είναι αναγνωρίσιμη

$\overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ}} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ είναι ΤΜ κ' } L(M) \neq \emptyset \}$.

Υπολογιστική
Πολυπλοκότητα

2/5/2012

Λύσεις θεμάτων:

(1) α → ΝΑΙ
β → ΝΑΙ
γ → ΟΧΙ   δ → ΠΟΤΕ
ε → ΝΑΙ (αυτό με την πολυτανιακή)
στ → ΝΑΙ.
↳ Λύση η μηχανή αποδέχεται

(2)

	$\emptyset$	1	$\sqcup$
q_0	$(q_{OXI}, \emptyset, A)$	$(q_\emptyset, 1, \Delta)$	$(q_{OXI}, \emptyset, A)$
q_1	$(q_\emptyset, 1, \Delta)$	$(q_{NAI}, \emptyset, \Delta)$	$(q_1, \emptyset, \Delta)$

! Όταν δεν τερματίζει η μηχανή κινείται όλο Δ. Άρα τα σύμβολα που την επηρρεάζουν είναι μόνο αυτά που ήδη έχει.

$$1\,(01)^*\,1\,(0+1)^*$$

! Η μηχανή δεν είναι διαγνώστης. π.χ. για τη συμβολοσειρά $1\sqcup\sqcup\ldots$ θα εγκλωβιστεί.

2.

(3) L_1, L_2, αναγνωρίσιμες
$L_1 \cup L_2$ αναγνωρίσιμη ?

Λύση:

Χρησιμοποιώ μια διταινιακή μηχανή

| ω | προσομοιώνει την M_1

| ω | » » M_2

Αν απαντήσει έστω και μία ΝΑΙ τότε αποδέχομαι.

Λύση 2:

Για $i=1$
Προσομοιώνω τη M_1 για i βήματα
» » M_2 » » »
Αν κάποια αποδεχτεί, αποδέχομαι.
Αν και οι δύο απορρίψουν, απορρίπτω.

(3β.) L_1, L_2, αναγνωρίσιμες
$\overline{L_1 \cap L_2}$ μη αναγνωρίσιμη.

$\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}}_{\text{ΤΗ}}$ ⇝ μη αναγνωρίσιμη

Έστω $L_1 = \text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{\text{ΤΗ}}$.
και $L_2 = \Sigma^*$

Άρα $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{\text{ΤΗ}} \cap \Sigma^*}$ ⇝ μη αναγνωρίσιμη.

(4) $L = \{ \langle M, q \rangle$ η M είναι ΤΜ και φτάνει στην κατάσταση q με είσοδο την κενή συμβολοσειρά $\}$.

Λύση:

ΑΠΟΔΟΧΗ$_\varepsilon$/ΤΜ

(y) Υπάρχει διαγνώστης R για την L

S: για είσοδο $\langle M \rangle$

Εκτελώ την R με είσοδο $\langle M, q_{NAI} \rangle$

⋮

Λύση 2:

ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ

(y) Η ίδια.

S = Για είσοδο $\langle M, \omega \rangle$

M' = Για είσοδο x

Αν $x \neq \varepsilon$ απορρίπτω

Αν $x = \varepsilon$ προσομοιώνω την M @ ω

Εκτέλεσε την R με είσοδο $\langle M', q_{NAI} \rangle$.

Αν αποδεχτεί, αποδέξου.

Αν απορρίψει, απέρριψε.

4.

Λύση 3:

ΠΕΡΑΤΩΣΗ$_E$ / ΤΜ

S = Για είσοδο <M>

Εκτέλεσε την R με είσοδο <M, qναι>

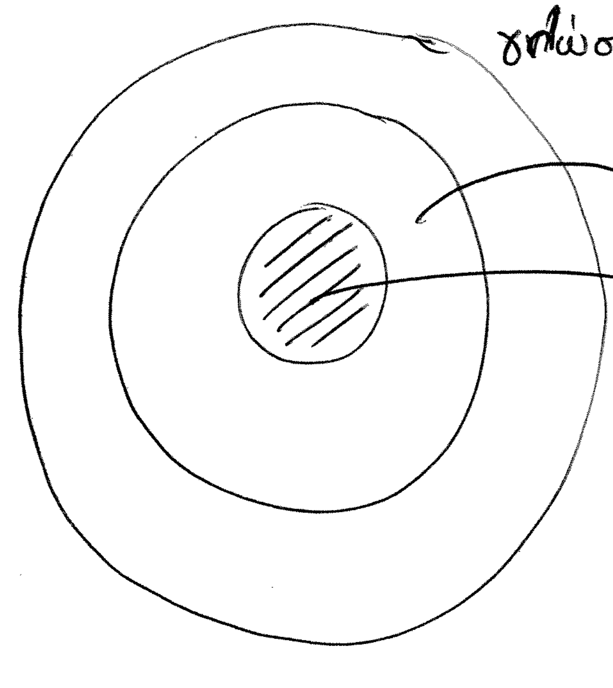
Αν αποδεχτεί, αποδέξου

Εκτέλεσε την R με είσοδο <M, qοχι>

Αν αποδεχτεί, αποδέξου

Αλλιώς απέρριψε.

ΝΕΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ



! Θα ασχοληθούμε μόνο με τις διαγνώσιμες.
Προβλήματα απόφασης:
Στιγμιότυπο εισόδου

<u>π.χ.</u> Δίνεται γράφημα G και δύο κόμβοι του s, t.
Ερώτηση: ∃ μονοπάτι από τον s στον t? (ΝΑΙ ή ΟΧΙ)

$L = \{ \langle G, s, t \rangle :$ ∃ μονοπάτι από τον κόμβο s στον κόμβο t για γράφημα G $\}$.

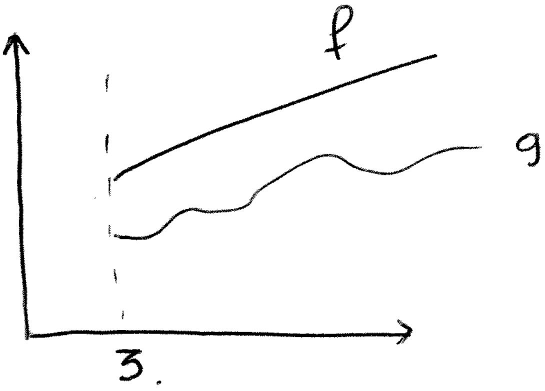
χρόνος → αποδεδειγμένα γρήγορα
χρόνος → πολύ δύσκολα.

! ΧΡΟΝΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ: Πόσο χρόνο χρειάζεται ένας διαγνώστης για να απαντήσει.

<u>Ορισμός:</u> $f(n) = O(g(n))$ αν ∃ θετικός ακέραιος $n_0 \in C$ τ.ω. $n \geq n_0$

$$f(n) \leq C \cdot g(n)$$

6.



g: Για $n = 3$ και μετά

$f(n) \leq z \cdot g(n)$.

$f(n) = \underline{o}(g(n))$

$f(n) = \Theta(g(n))$ αν $f(n) = O(g(n))$

$f(n) = \underline{o}(g(n))$.

\- - - - - - -

$A = \{ 0^k 1^k : k \geq \phi \}$.

M_1 = Για είσοδο ω

1. Διατρέχουμε την ταινία και αν εντοπίσουμε ϕ στα δεξιά κάποιου άσσου, απορρίπτουμε.
2. Ενώ όσο η ταινία περιέχει ξ' ϕ και 1
3. Διατρέχουμε την ταινία διαγράφοντας ένα ϕ και 1 άσσο.
4. Αν έχουν διαγραφεί όλα τα 1 αλλά όχι όλα τα ϕ, ή όλα τα ϕ αλλά όχι όλα τα 1, απορρίπτουμε αλλιώς αποδεχόμαστε.

<u>Ορισμός:</u> Μ διαγνώστης

Χρόνος εκτέλεσης (ή η χρονική πολυπλοκότητα) της Μ είναι μια συνάρτηση $f: N \to N$ τ.ω. $f(n) =$ ο μέγιστος # βημάτων που είναι δυνατόν να πραγματοποιήσει η Μ όταν το μήκος της εισόδου είναι n.

Για την M_1

1. $O(n)$

2. $\frac{n}{2} O(n)$

3. ~~[illegible]~~

4. $O(n)$

$\Big\} \; O(n^2)$.

<u>Ορισμός:</u> Κλάση χρονικής πολυπλοκότητας TIME$(t(n))$ ονομάζουμε την συλλογή των γλωσσών που μπορούν να διαγνωστούν από TM χρόνου $O(t(n))$.

π.χ. $A \in$ TIME(n^2).

$A \in$ TIME$(n \log n)$ ~στο βιβλίο.

$A \notin$ TIME$(t(n))$ για $f(n) = o(n \log n)$.

8.

M_3 = Για είσοδο ω

1. Διατρέχουμε την ταινία 1 μια φορά
   Αν εντοπίσω ϕ στα δεξιά κάποιου άσσου απορρίπτω
2. Διατρέχουμε τα ϕ της ταινίας 1 μέχρι το πρώτο 1 και τα αντιγράφουμε στην ταινία 2.
3. Διατρέχουμε τα 1 της ταινίας 1. Για κάθε 1 που διαβάζουμε σβήνουμε ένα ϕ από την ταινία 2. Αν διαγράψουμε όλα τα ϕ απορρίπτουμε (έχουν μείνει άσσοι)
4. Αν έχουμε διαγράψει όλα τα ϕ, αποδεχόμαστε, αλλιώς απορρίπτουμε (δεν έχουν μείνει άσσοι).

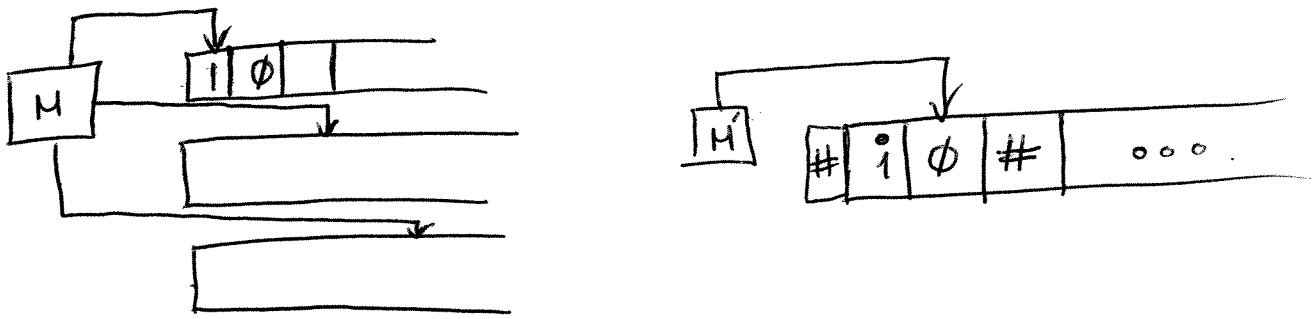
$$\left.\begin{array}{l} 1.\ O(n) \\ 2.\ O(n) \\ 3.\ O(n) \\ 4.\ O(n). \end{array}\right\} O(n) \text{ χρόνος.}$$

Καλές λύσεις: n^2, $n\log n$, n^5, n^{100} ...

Κακές λύσεις: 2^n, 2^{1000} κλπ.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $t(n) > n$ μια συνάρτηση. Για κάθε πολυταινιακή ΤΜ χρόνου $t(n)$, ∃ μονοταινιακή ΤΜ ισοδύναμη χρόνου $O(t^2(n))$.

Βασική Ιδέα:



§ ΚΛΑΣΗ $P = \bigcup_k TIME(n^k)$

↳ όλες οι γλώσσες που μπορούν να διαγνωστούν σε χρόνο n^k.

Παράδειγμα: ΔΙΑΔΡΟΜΗ $\in P$

ΔΙΑΔΡΟΜΗ $= \{ \langle G,s,t \rangle$ $\exists$ διαδρομή από το s στο t στο γράφημα $G \}$.

Για είσοδο $\langle G,s,t \rangle$

1. Μαρκάρω τον s
2. Μέχρι να πάψουν να μαρκάρονται νέοι κόμβοι
3. Διατρέχουμε όλες τις ακμές. Αν $\exists$ ακμή από μαρκαρισμένο κόμβο α σε μαρκαρισμένο κόμβο β, μάρκαρε β
4. Αν ο t είναι μαρκαρισμένος, αποδέχομαι.

1. 1
2.
3.
4.

$O(|V|^3)$

↳ κορυφές.

§ θέλω χώρο για να αναπαραστήσω τους κόμβους και χώρο για τις ακμές.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ
ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

8-5-201

Κλάση P

$P = \bigcup_k TIME(n^k)$

→ Polynomial Time TMs

π.χ. Το πρόβλημα G, s, t που μας δίνονται γράφημα και 2 κόμβοι του και ψάχνουμε αν υπάρχει διαδρομή από την s στην t.

Πρόβλημα: ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΠΡΩΤΟΙ $\in P$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΠΡΩΤΟΙ = { <x, y> : οι x ή y είναι πρώτοι μεταξύ τους }

Πρώτοι μεταξύ τους ⇒ ΜΚΔ = 1

> Την είσοδο την γράφουμε σε όσο το δυνατόν πιο συμπαγή μορφή (χωρίς να υπερβάλλουμε)

Πολυωνυμικός χρόνος $\simeq O((\log x + \log y)^6)$
όπου x, y οι χώροι αναπαράστασης των εισόδων.

Λύση: Αλγόριθμος του Ευκλείδη.

E = Για είσοδο <x, y>

loop:
1. Επαναλαμβάνουμε μέχρι $y = \emptyset$
2. Αναθέτουμε στον x την τιμή $\boxed{x \bmod y}$
3. Εναλλάσσουμε τα x και y

4. Έξοδος = $\boxed{x}$

Η E υπολογίζει τον ΜΚΔ των <x, y>

Η R θα απαντά στο αρχικό μας ερώτημα.

2. R = Για είσοδο <x,y>

1. Εκτέλεσε την E με είσοδο <x,y>
2. Αν επιστρέψει 1, αποδέχομαι
   Αλλιώς απορρίπτω.

! Θα δείξουμε ότι σε κάθε βήμα (εκτός του πρώτου) το x μειώνεται στο μισό.

Σε κάθε εκτέλεση του loop το x μειώνεται στο μισό

Έχω ότι στην αρχή του Β2, $\boxed{x>y}$

1) Αν $x/2 \geq y$ τότε $x \bmod y < y \leq \frac{x}{2}$

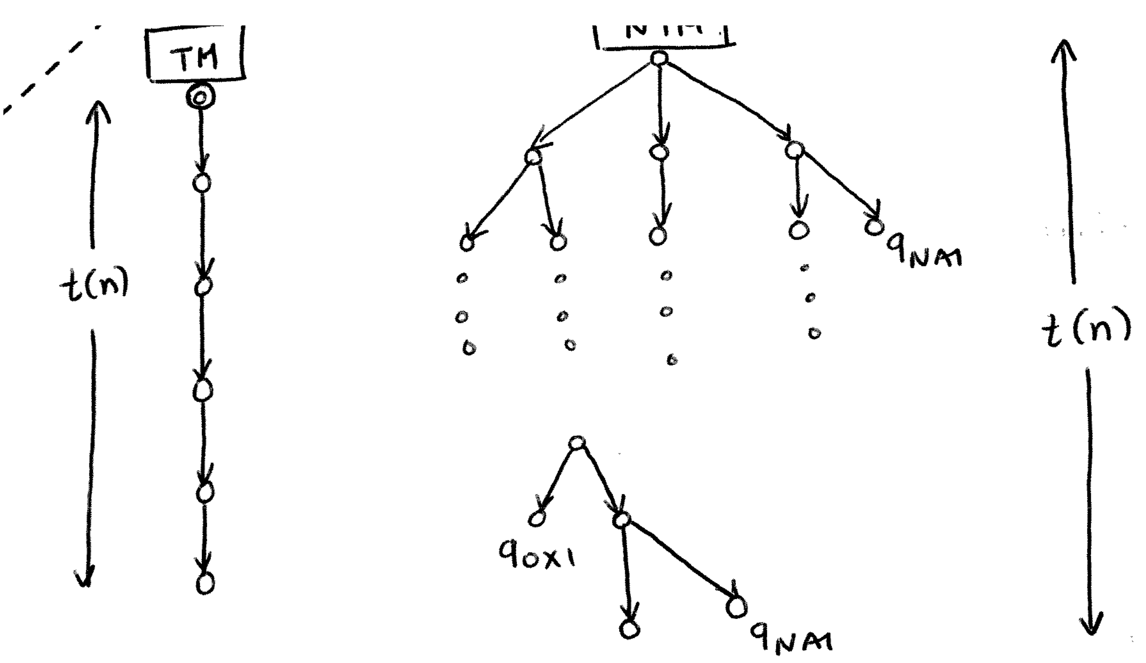
2) Αν $x/2 < y$ τότε $x \bmod y = x - y \leq x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$.

Άσκηση: Δείξτε ότι αν αλλάζω τον τρόπο αναπαράστασης του παραπάνω προβλήματος με τον μοναδιαίο (δηλ τόσοι άσσοι όσο και η αξία του αριθμού). ο χρόνος επίλυσης παραμένει πολυωνυμικός.

Κλάση NP (δεν σημαίνει not polynomial)
→ Polynomial Time Non-Deterministic TMs.

Ορισμός: NTIME$(t(n))$
= Η κλάση των γλωσσών που διαγιγνώσκονται από Μη-Ντετερμινιστικές TM πολυωνυμικού χρόνου.

! Επανάληψη N.D. NTM κ.λ.π



Σημείωση: Μιλάμε για ΝΤΜ που είναι διαγνώστες.

<u>ΧΡΟΝΟΣ εκτέλεσης ΝΤΜ</u> → ο μέγιστος χρόνος υπολογισμού μεταξύ όλων των δυνατών κλάδων υπολογισμού.

<u>Θεώρημα:</u> Για κάθε μη ντετερμινιστική ΤΜ χρόνου $t(n)$ $\exists$ ισοδύναμη ντετερμινιστική ΤΜ χρόνου $2^{O(t(n))}$

<u>3 ταινίες</u>

ταινία 1: περιέχει την είσοδο

ταινία 2: αντίγραφο εισόδου όπου προσομοιώνεται κάθε κλάδος υπολογ. της N.

ταινία 3: δείχνει τον κλάδο υπολογισμού.

M = Για είσοδο ω

1. Η ταινία 1 περιέχει τη λέξη ω και οι ταινίες 2 και 3 είναι κενές.
2. Απαριθμούμε τις λέξεις x μήκους $t(n)$ με σύμβολα $1,2,\dots,b$ λεξικογραφικά (κλάδος υπολογισμού) στην ταινία 3.
   Για κάθε τέτοια λέξη x
3. Προσομοιώνω τον κλάδο υπολογισμού που αντιστοιχεί στη λέξη x στην ταινία 2. (Αν φτάσουμε σε κατάσταση αποδοχής τη θυμόμαστε.)
4. Αν η προσομοίωση στα βήματα 2-3 έφτασε κάποια στιγμή σε q_{NAI} αποδεχόμαστε.
   Αλλιώς απορρίπτουμε.

Βήμα 2. απαριθμούμε $b^{t(n)}$

∀ τέτοια λέξη εκτελούμε έναν κλάδο υπολογισμού σε χρόνο $t(n)$.

Συνολικά $b^{t(n)} \cdot t(n) = 2^{t(n) \log b + \log[t(n)]}$

$\rightsquigarrow 2^{O(t(n))}$ → χρόνος σε μονοταινιακή.

Κλάση NP = η κλάση των γλωσσών που διαγιγνώσκονται από κάποια NTM πολυωνυμικού χρόνου.

$NP = \bigcup_k NTIME(n^k)$

$NP \subseteq EXPTIME = \bigcup_k TIME(2^{n^k})$

1. $NP \subseteq P$
2. $P \subset NP$

$\Rightarrow$ Πιθανά ενδεχόμενα. Δεν ξέρουμε αν ισχύει το 1 ή το 2.

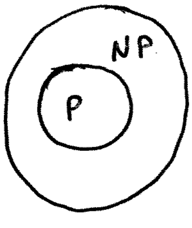
1. $P = NP$
2. $P \neq NP$

$\Rightarrow$ Το τι ισχύει απ' τα 2 είναι ένα από τα μεγαλύτερα ανοιχτά προβλήματα

Το να υπάρχουν δύσκολα προβλήματα δεν είναι απαραίτητα κακό αφού θα μπορούσαμε να φτιάξουμε ασφαλή κρυπτογράφηση.

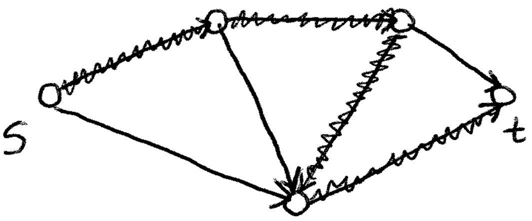
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ
ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

9-5-2012.

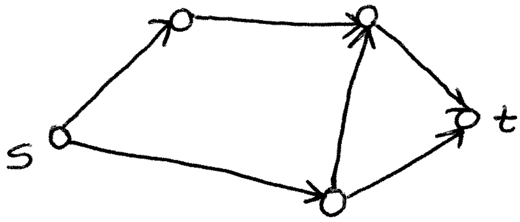


Παράδειγμα: ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ

$= \{ \langle G, s, t \rangle$: το G είναι κατευθυνόμενο γράφημα που περιέχει μια διαδρομή από τον s στον t που περνάει απ' όλες τις κορυφές ακριβώς μία φορά $\}$.

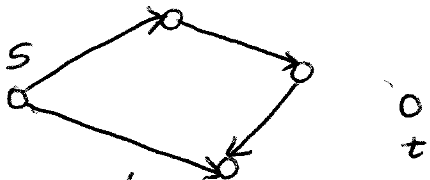


∃ Δ.Χ.



∄ Δ.Χ.

Θέλω να δείξω ότι αυτό το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP.



∄ Δ.Χ.

ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ (Hamilton Path) $\in$ NP.

N_1 = Για είσοδο $\langle G, s, t \rangle$

1. Κατασκευάζουμε κατάλογο m κόμβων $p_1, \ldots, p_m$ όπου m το πλήθος των κόμβων του G. Η επιλογή γίνεται μη-ντετερμινιστικά.
2. Αν ο κατάλογος περιέχει επαναλήψεις, απορρίπτεται.
3. Αν $s \neq p_1$ ή $t \neq p_m$, απορρίπτεται
4. Για $i=1$ μέχρι $m-1$, ελέγχουμε αν το ζευγάρι (p_i, p_{i+1}) αποτελεί ακμή. Αν αυτό δεν ισχύει για κάποιο i απορρίπτουμε.
Αλλιώς, αποδεχόμαστε.

α. ⚬ Για το βήμα 1. Επειδή έχω NTM μου αρκεί να έχω έναν κατάλογο που φτάνει σε q_{NAI}.

⚬ Το βήμα 1 μας δίνει μη-ντετερμινιστικά τον κατάλογο που θέλουμε και μετά εμείς μπορούμε να επαληθεύσουμε ντετερμινιστικά αν είναι σωστός ο κατάλογος.

<u>Ορισμός</u>: Ονομάζουμε επαληθευτή μιας γλώσσας A οποιονδήποτε ντετερμινιστική TM (ή αλγόριθμο) V τ.ω.

$A = \{ \omega : \text{o } V \text{ αποδέχεται τη λέξη } \langle \omega, c \rangle \text{ για κάποια λέξη } c \}$.

⚬ Μια γλώσσα λέγεται πολυωνυμικά επαληθεύσιμη αν ∃ γι' αυτήν επαληθευτής πολυωνυμικού χρόνου (ως προς το μήκος της λέξης ω)

⚬ Το c το ονομάζουμε πιστοποιητικό ή απόδειξη της συμμετοχής της ω στην A.

<u>Θεώρημα</u>: $A \in NP \iff$ η A έχει επαληθευτή πολυωνυμικού χρόνου.

<u>Απόδειξη</u>: (⟹) ∃ NTM N που διαγιγνώσκει την A σε πολυωνυμικό χρόνο (n^k)

V = Για είσοδο $\langle \omega, c \rangle$
1. Ερμηνεύουμε το c σαν κλάδο υπολογισμού της NTM N.
2. Προσομοιώνουμε τον κλάδο και αν αποδεχτεί, αποδεχόμ.
   Αλλιώς απορρίπτουμε.

∴ ∃ ένας κλάδος υπολογισμού c που καταλήγει σε $q_{ΝΑΙ}$, γι' αυτό και ο V είναι επαληθευτής.

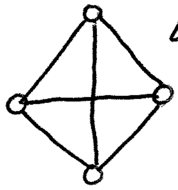
(⇐) Έστω ότι ∃ επαληθευτής V για την A με χρόνο εκτέλεσης n θα λέμε ότι ∃ NTM χρόνου $O(n^k)$ που διαγιγνώσκει την A.

N = Για είσοδο ω, λέξη μήκους n

1. Επιλέγουμε μη ντετερμινιστικά μια λέξη μήκους n^k (λέξη = c)
2. Εκτελούμε τον V για είσοδο <ω, c>
3. Αν ο V αποδεχτεί, αποδέχομαι
   Αλλιώς απορρίπτω.

Παράδειγμα: ΚΛΙΚΑ = { <G, k> : περιέχει το G μια κλίκα μεγέθους k? }

Κλίκα μεγέθους k = σύνολο S από k κόμβους του G. τ.ω. ∃ ακμή μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κόμβων του S.



4-κλίκα

∴ Πρέπει να υπάρχουν ακμές μεταξύ όλων των κόμβων.

N = Για είσοδο <G, k>

1. Επιλέγουμε μη ντετερμινιστικά ένα σύνολο k κόμβων του G, έστω C
2. Ελέγχουμε αν ∃ όλες οι ακμές μεταξύ κόμβων του C στο γράφημα G.
3. Αν ναι, αποδεχόμαστε
   Αλλιώς, απορρίπτουμε.

4. Μπορούμε να εξομοιώσουμε ντετερμινιστικά το πρόβλημα αλλά ο χρόνος επίλυσης είναι εκθετικός.

18-ΚΛΙΚΑ = { <G> : ο G περιέχει μια 18-κλίκα }.

Αυτό το πρόβλημα <u>ΕΙΝΑΙ</u> αποδοτικό γιατί ο χρόνος που χρειάζεται είναι πολυωνυμικός (έχω πλέον σταθερό εκθέτη = 18 και όχι k).

<u>Αλγόριθμος:</u>

1. Δοκίμασε όλες τις διαφορετικές 18-άδες κόμβων
2. έλεγξε αν ∃ όλες οι δυνατές ακμές στη 18-άδα (δηλ αν υπάρχει ακμή για κάθε δυνατό ζευγάρι).
3. Αν ∃, αποδεχόμαστε. Αλλιώς απορρίπτουμε.

m = # κόμβων $\binom{m}{18} * O(1) = \frac{m!}{18!(m-18)!} * O(1)$

$$= \frac{(m-17)\cdot(m-16)\cdot\ldots\cdot m}{18!} * O(1) \le \frac{m^{18}}{18!} * O(1)$$

$$= \underline{\underline{O(m^{18})}}$$

<u>ΚΛΑΣΙΚΟ ΘΕΜΑ!</u>

ΔΕΙΞΤΕ ΟΤΙ Η ΥΠΟΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΝΟΣ ΔΥΣΚΟΛΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΙΝΑΙ ΕΥΚΟΛΟ!!!

Επαληθευτής V = Για είσοδο <<G, k>, c>

1. Ελέγχουμε αν το c είναι σύνολο k διαφορετικών κόμβων του G.
2. Ελέγχουμε αν το c περιέχει όλες τις ακμές μεταξύ κόμβων του G.
3. Αν ΝΑΙ στα παραπάνω, αποδεχόμαστε
   Αλλιώς απορρίπτουμε.

Παράδειγμα: ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ $= \{ <S, t> :$

$S = <x_1, \ldots, x_k>$ κ $\exists$ υπακολουθία $y_1, \ldots, y_\ell$

του S τ.ω $\sum y_i = t \}$.

π.χ $S = <4, 4, 7, 11, 11, 15, 26> \rightsquigarrow 45$

Υπάρχει υπακολουθία που να αθροίζει στο 45? (ΝΑΙ)

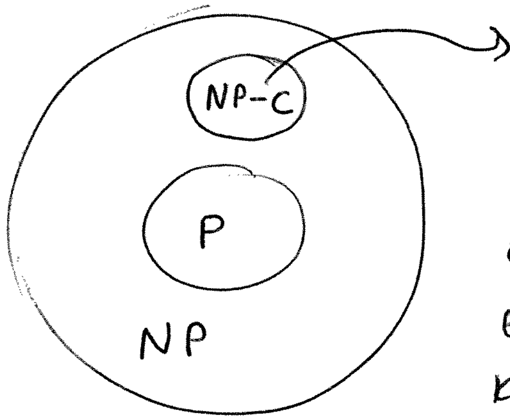
$\in$ NP?

- - - - - - - - - - - - - - - - -

N = Για είσοδο <S, t>

1. Επιλέγω μη ντετερμινιστικά μια υπακολουθία της S έστω c
2. Ελέγχω αν οι αριθμοί της c έχουν άθροισμα t.
3. Αν ΝΑΙ, αποδέχομαι.
   Αλλιώς, απορρίπτω.

6. ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ = Απαντάει ΝΑΙ αν ∄ χαμιλτονιανή διαδρομή από το s στο t.



Τα δύσκολα προβλήματα της κλάσης NP. Αν λύσουμε ένα πρόβλημα σε πολυωνυμικό χρόνο θα μπορέσουμε να λύσουμε και όλα τα υπόλοιπα σε π.χ.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ 15/5/2012

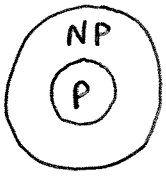
ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

Κλάση P: κλάση των γλωσσών που διαγιγνώσκονται σε πολυωνυμικό χρόνο (η συμμετοχή μπορεί να υπολογιστεί γρήγορα)

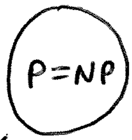
κλάση NP: κλάση των γλωσσών στις οποίες η συμμετοχή μπορεί να επαληθευτεί γρήγορα. (Υπάρχει ένα μη-ντετερμινιστικό βήμα που μαντεύει τη λύση και ένας αλγόριθμος που την επαληθεύει)

ΓΡΗΓΟΡΑ = πολυωνυμικός χρόνος.

$P \subseteq NP$: Τα προβλήματα που λύνω γρήγορα είναι υποσύνολο αυτών που επαληθεύω γρήγορα.



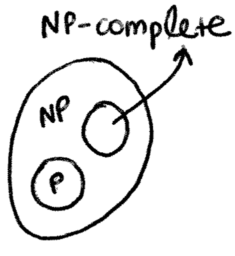
ή



Δεν έχουμε βρει ακόμα πρόβλημα που επαληθεύεται γρήγορα αλλά να μην λύνεται γρήγορα.

Φαντάζει αδιανόητο

NP-πληρότητα:

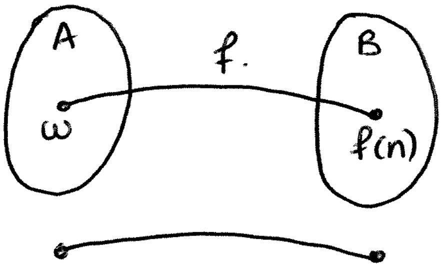


Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ είναι υπολογίσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο αν $\exists$ ντετερμινιστική TM πολυωνυμικού χρόνου η οποία $\forall$ είσοδο $\omega \in \Sigma^*$ τερματίζει έχοντας στην ταινία της μόνο τη λέξη $f(\omega)$.

Ορισμός: Έστω γλώσσες A κ' B. Λέμε ότι η A είναι απεικονιστικά αναγώγιμη σε πολυωνυμικό χρόνο στη B και γράφουμε $A \leq_p B$ αν $\exists$ υπολογίσιμη συνάρτηση πολυωνυμικού χρόνου $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ τ.ω. $\forall$ $\omega \in \Sigma^*$

$$\omega \in A \iff f(n) \in B.$$

α.



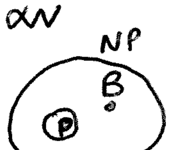
!H f δέχεται πολυωνυμικού χρόνου αναγωγή της A στη B.

<u>Θεώρημα</u>: Αν $A \leq_p B$ και $B \in P$ τότε $A \in P$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω η M TH πολυωνυμικού χρόνου που διαγιγνώσκει τη B.
Έστω η f αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου από την A στη B.

N = Για είσοδο ω $\rightsquigarrow$ ω ∈ A?
1. Υπολογίζω το f(ω) $\rightsquigarrow$ f(ω) ∈ B <=> ω ∈ A.
2. Εκτελούμε την M με είσοδο f(ω)
3. Επιστρέφουμε την έξοδό της.

<u>Ορισμός</u>: Μια γλώσσα B είναι NP-πλήρης αν



1. $B \in NP$
2. $\forall$ γλώσσα $A \in NP$, $A \leq_p B$.

!H απόδειξη ότι ένα πρόβλημα είναι NP-πλήρες δίνει ΙΣΧΥΡΗ ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ ότι δεν μπορεί να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

<u>Θεώρημα</u>: H γλώσσα SAT είναι NP-πλήρης.

<u>SAT</u>
Μεταβλητές (λογικές) $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{0,1\}$.
φράσεις $(x_{35} \underbrace{\vee}_{OR} \overline{x_{47}} \vee x_2 \vee x_{11})$

λεξιγράμματα (literal) → είτε μια μεταβλητή είτε η άρνησή της.

φράση (clause) = λογικό OR λεξιγραμμάτων.

$(x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)$

λογικός τύπος σε κανονική συζευκτική μορφή (ΣΚΜ)

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 1$

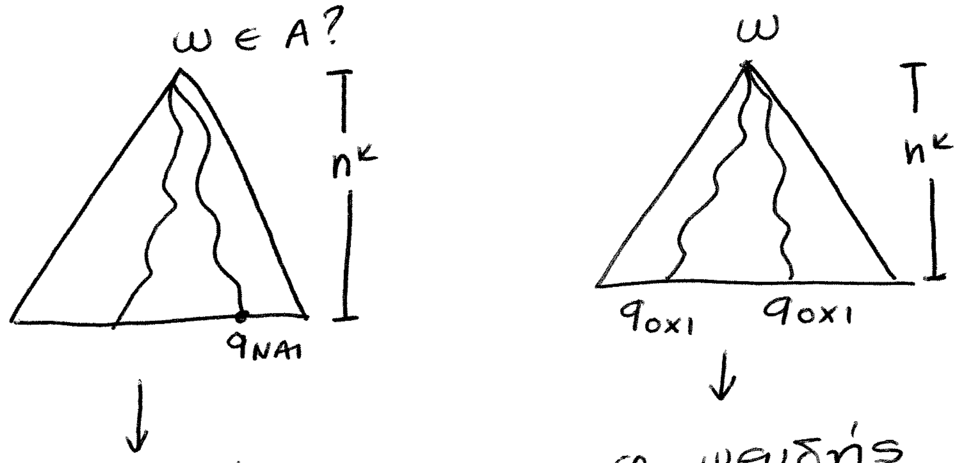
Η πρώτη παρένθεση τα μηδενίζει όλα.

$SAT = \{ \langle \varphi \rangle :$ ο φ είναι αληθεύσιμος λογικός τύπος $\}$

Υπάρχει συνδυασμός τιμών των μεταβλητών έτσι ώστε ο λογικός τύπος να έχει την τιμή 1?

>Το πρόβλημα ανήκει στο NP γιατί αν μου δώσεις ένα συνδυασμό τιμών μπορώ να σου <u>επαληθεύσω</u> σε πολυωνυμικό χρόνο αν ο λογικός τύπος είναι αληθής.

⇝ Αυτό είναι το πρώτο βήμα και πρέπει να το κάνω.



φ αληθής

φ ψευδής

Ανάγουμε κάθε πρόβλημα μη-ντετερμινιστικό σε πρόβλημα SAT.

⇝ Το πρόβλημα SAT είναι το πιο δύσκολο.

1.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

22-5-2012.

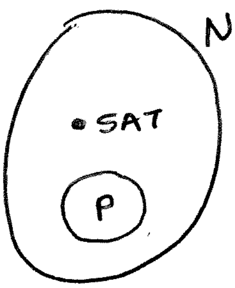
Θεώρημα: Το πρόβλημα ΑΛΗΘΕΥΣΙΜΟΤΗΤΑ (SAT) είναι NP-πλήρες.

μεταβλητές $x, y, z \ldots$

λογικός τύπος

$$\underbrace{(x \vee y \vee \bar{z} \vee \omega)}_{\text{φράση}} \wedge \underbrace{(x \vee \alpha \vee \overset{\text{literal}}{\bar{b}} \vee d \vee \bar{e})}_{\text{φράση}}$$

$$L = \{ \langle \varphi \rangle \mid \text{ο } \varphi \text{ είναι λογικός τύπος με μια αληθή τιμοδοσία} \}.$$



SAT $\in$ NP

$\forall A \in NP, \ A \leq_p SAT.$

! Αν αποδείξουμε ότι το SAT λύνεται πολυωνυμικά τότε αποδεικνύουμε ότι $P = NP$.

Θεώρημα: Το 3SAT είναι NP-πλήρες

3SAT → SAT με τον περιορισμό ότι κάθε φράση έχει ακριβώς 3 λεξιγράμματα.

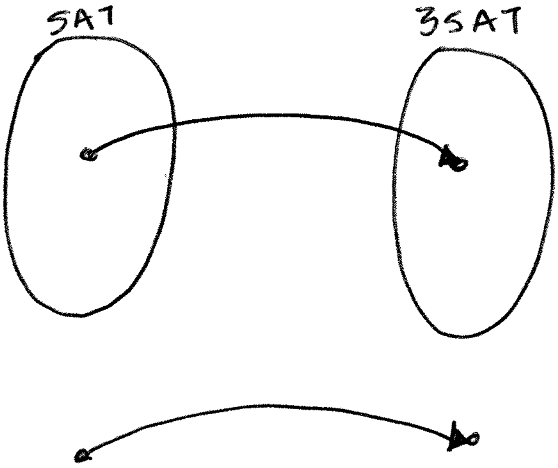
π.χ $(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (y \vee \bar{z} \vee \omega) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z} \vee \bar{\omega}) \wedge (x \vee y \vee z) \ldots$

1.) 3SAT $\in$ NP (αν μαντέψουμε μια λύση, μπορούμε να επαληθεύσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν ισχύει).

2.) Θα δείξουμε ότι SAT $\leq_p$ 3SAT

! Αυτές οι 2 προτάσεις αρκούν για να δείξουμε ότι το 3SAT είναι NP-πλήρες.

2.



!
Έστω ένας λογικός τύπος φ με φράσεις αυθαίρετου μεγέθους. Θα δείξω πως θα μετασχηματίζω τον φ σε ένα άλλο τύπο φ' (χρησιμοποιώντ επιπλέον μεταβλητές) με ακριβώς 3 λεξιγράμματα ανά φράση.

Ο φ' θα είναι τ.ω. φ αληθής <=> φ' αληθής.

Ο φ περιέχει φράσεις διαφορετικού μεγέθους.
Δεν πειράζω τις φράσεις του φ που έχουν 3 λεξιγράμ.
∀ φράση (x) με ένα λεξιγραμμα, βάζω στον φ' 4 φράσεις $(x \vee z_1 \vee z_2) \wedge (x \vee z_1 \vee \bar{z}_2) \wedge (x \vee \bar{z}_1 \vee z_2) \wedge (x \vee \bar{z}_1 \vee \bar{z}_2)$ όπου z_1 κ' z_2 νέες μεταβλητές
(Τι προσπαθώ να κάνω? Αν η (x) είναι αληθής θέλω να υπάρχει ανάθεση στις 4 φράσεις που να είναι αληθής. Αλλιώς θέλω να μην γίνεται.)

∀ φράση $(x \vee y)$ με 2 λεξιγράμματα, βάζω στο φ' δύο φράσεις $(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z})$ όπου z νέα μεταβλητή.

∀ φράση $(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_k)$ με $k > 3$ με τουλάχιστον 4 λεξιγράμματα, βάζω $k-2$ φράσεις
$(x_1 \vee x_2 \vee \omega_1) \wedge (\bar{\omega}_1 \vee x_3 \vee \omega_2) \wedge (\bar{\omega}_2 \vee x_4 \vee \bar{\omega}_3) \wedge \ldots$
$\wedge (\bar{\omega}_3 \vee x_5 \vee \omega_4) \wedge \ldots \wedge (\bar{\omega}_{k-3}\ x_{k-1}\ x_k)$
όπου $\omega_1, \ldots, \omega_{k-3}$ νέες μεταβλητές γι' αυτή τη συγκεκριμένη φράση. (∀ νέα φράση άλλο ω)

1. $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = \phi$.

$x_1 = \phi$ και $x_2 = \phi$ και ... και $x_k = \phi$.

$(\phi \vee \phi \vee w_1) \wedge (\overline{w_1} \vee \phi \vee w_2) \wedge (\overline{w_2} \vee \phi \vee w_3) \dots$
$\wedge (\overline{w_{k-3}} \vee \phi \vee \phi)$.

$w_1 = 1 \rightarrow w_2 = 1 \rightarrow \dots \rightarrow w_{k-3} = 1$ άρα $\overline{w_{k-3}} = \phi$.

Άρα συνολικά: ϕ.

2. $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = 1$.

Δηλ. $x_i = 1$, για κάποιο i.

$(\overline{w_{i-3}}\, x_{i-1}\, w_{i-2})(\overline{w_{i-2}} \vee x_i \vee w_{i-1}) \wedge (\overline{w_{i-1}} \vee x_{i+1} \vee w_i) \dots$

$\dots(\phi \vee x_{i-1} \vee 1) \wedge (\phi \vee 1 \vee \phi) \wedge (1 \vee x_{i+1} \vee \phi) \dots$

Άρα συνολικά: 1.

Ο. έχουμε κάνει μια σωστή πολυωνυμική αναγωγή από το SAT στο 3SAT. Άρα το 3SAT είναι NP-πλήρ

Ο. Το 2SAT λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Πρόβλημα: 3SAT-7 = $\{\langle\varphi\rangle \mid$ ο φ είναι λογικός τύπος με 3 λεξιγράμματα ανά φράση που έχει τουλ. 7 διαφορετικές αληθείς τιμοδοσίες$\}$.

1) 3SAT-7 $\in$ NP (αν μου δώσουν 7 λύσεις μπορώ να δω σε πολυωνυμικό χρόνο αν είναι λύση)

2) $3SAT \le_p 3SAT\text{-}7$.

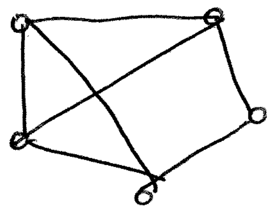
$\varphi \qquad \varphi'$

$\varphi' = \varphi \wedge (\omega_1 \vee \omega_2 \vee \omega_3)$

η φράση $(\omega_1 \vee \omega_2 \vee \omega_3)$ έχει ακριβώς 7 λύσεις.

Φτιάχνω τους 7-συνδυασμούς των ω που αληθεύουν. Αν ∃ τουλ. 7 συνδυασμοί της φ που κάνουν τη φ αληθή, τότε θα βγουν όλα αληθή.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΛΙΚΑΣ



$\langle G, k \rangle = \{\exists$ σύνολο k κόμβων στο G τ.ω ο G να περιέχει ακμή μεταξύ οποιωνδήποτε από αυτούς τους κόμβους$\}$.

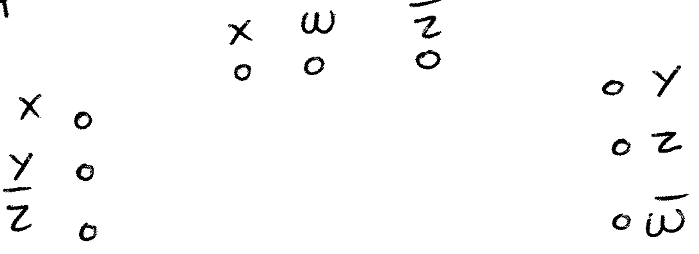
ΚΛΙΚΑ $= \{\langle G, k \rangle \mid \exists$ κλίκα μεγέθους k στο G$\}$

1.) ΚΛΙΚΑ $\in NP \rightsquigarrow$ Μπορώ αν μου δώσουν ένα σύνολο να ελέγξω σε πολυωνυμικό χρόνο αν ∃ ακμές

2.) Θα χρησιμοποιήσουμε ένα από τα $SAT \le_p 3SAT \le_p 3SAT\text{-}7$.

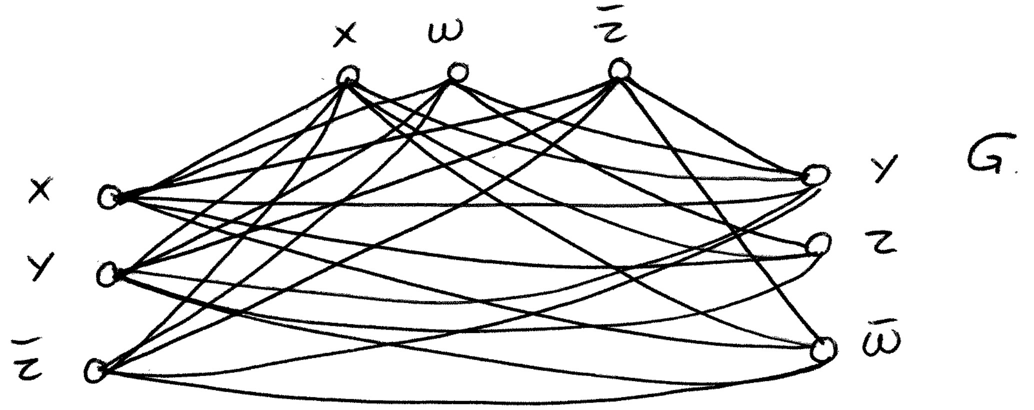
Χρησιμοποιώ το 3SAT.

$\varphi = (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \omega \vee \bar{z}) \wedge (y \vee z \vee \bar{\omega})$



για κάθε φράση και κάθε λεξίγραμμα φτιάχνω έναν κόμβο και τον ονομάζω με το αντίστοιχο λεξίγραμμα.

∀ λεξίγραμμα μιας φράσης συνδέω τον αντίστοιχο κόμβο με κάθε άλλο κόμβο διαφορετικής φράσης που δεν αντιστοιχεί σε αντίθετο λεξίγραμμα.



Θέτω το κ ίσο με τον αριθμό των φράσεων. Εδώ $\kappa = 3$.

<u>Ισχυρισμός:</u> ∃ μια κλίκα μεγέθους κ σ' αυτό το γράφημα ανν η φ είναι αληθής. (∃ αληθής τιμοδοσία για το φ ανν ∃ κλίκα μεγέθους κ στο G).

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u>

($\Longrightarrow$) (γ) ∃ αληθής τιμοδοσία για το φ (δηλ. σε κάθε φράση ∃ 1 λεξίγραμμα με τιμή 1).

Οι αντίστοιχοι κόμβοι για αυτά τα λεξιγράμματα σχηματίζουν κλίκα μεγέθους κ.

→ ∃ γραμμή απ' όλα σε όλα γιατί δεν μπορεί ένας κόμβος να είναι 1 σε μία φράση και το συμπλήρωμά του να είναι επίσης 1 σε μια άλλη.

6. (<=) Έστω ∃ κλίκα μεγέθους κ. στο G (y) ...

- Θα έχει έναν κόμβο από κάθε ομάδα
- Δεν θα έχω πουθενά κόμβο και το συμπλήρωμά του. Θα βάλω τέτοιες τιμές ώστε οι κόμβοι να είναι άσσοι. Συνεπώς σε κάθε φράση θα έχω τουλ. 1 άσσο άρα όλη η φράση θα είναι αληθής.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

29-5-2012

$SAT \le_p 3SAT \le$ 3SAT-7
3SAT-6
3SAT-3

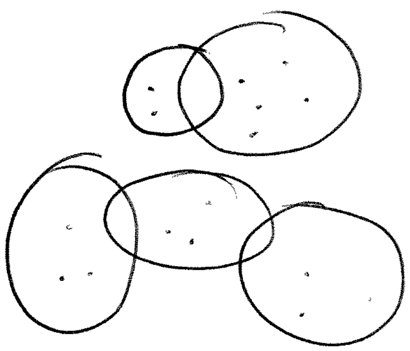
$L = \{ <\varphi> :$ ο φ αποτελείται από φράσεις με 3 λεξιγραφήματα και $\exists$ ανάθεση τ.ω. #αληθών φράσεων ≥ 8 #ψευδών$\}$.

$3SAT \le_p$ ΚΛΙΚΑ $\le_p$ ΜΕΓΑΛΗ ΚΛΙΚΑ

ΚΛΙΚΑ $\le_p$ ΑΝΕΞ. ΣΥΝΟΛΟ

$3SAT \le$ ΚΟΜΒΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ.

$3SAT \le_p$ ΚΟΜΒΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ $\le_p$ ΚΑΛΥΨΗ ΜΕ ΣΥΝΟΛΑ $\le_p$ ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΣΥΝΟΛΟ.



$U = x_1, x_2, \dots, x_k$

$S_1 = \{x_1, x_3, x_{37} \dots\}$

$S_2 = \{x_2, x_4, \dots x_{17}\}$

$S_k \subseteq U$ → σύνολο χωρίων
↳ υποσύνολο.

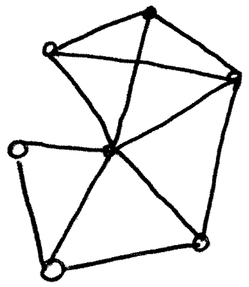
U, S, k: $\exists$ k σύνολα του S που να καλύπτουν όλα τα στοιχεία του U? (ΚΑΛΥΨΗ ΜΕ ΣΥΝΟΛΑ) ή (SET COVER) ινγκλις.

Το SET COVER είναι NP-πλήρες.

1) $\in NP$. Θα φτιάξουμε μια ένωση των συνόλων που θα μας δώσουν ως λύση και θα ελέγξουμε αν είναι ίσο με U. Αυτό γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο

2) ΚΟΜΒΙΚΟ ΚΑΛΥΜΑ ≤ SET COVER

ΚΟΜΒΙΚΟ ΚΑΛΥΜΑ



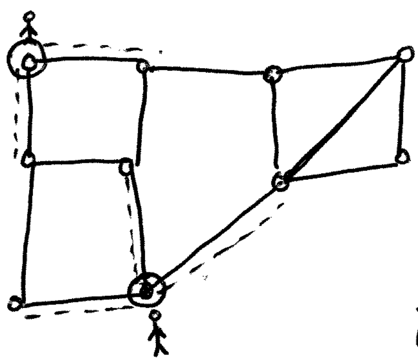
G, k, ∃ k κόμβοι του G τ.ω ∀ ακμή να έχει τουλάχιστον ένα άκρο σε κάποιον από αυτούς?

↳ ! Κατασκευάζω στιγμιότυπο του SET COVER ως εξής:

∀ ακμή, έχω ένα στοιχείο

∀ κόμβο έχω ένα σύνολο που περιέχει τα στοιχεία εκείνα που αντιστοιχούν σε γειτονικές ακμές του κόμβου u.

ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΣΥΝΟΛΟ (DOMINATING SET).



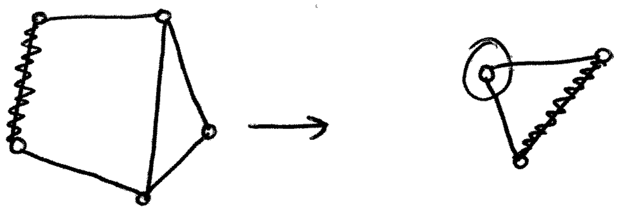
! Έστω ότι οι κόμβοι είναι γειτονικές περιοχές. Έχω k πυροσβέστες και τοποθετούνται σε κόμβους. Κάθε πυροσβέστης μιας περιοχής μπορεί να σβήσει την περιοχή του και τις γειτονικές μήκους 1. Μπορώ με k πυροσβέστες να καλύψω όλες τις περιοχές?

! ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΣΥΝΟΛΟ είναι το σύνολο των κόμβων που έχουν πυροσβέστες.

! Ένα σύνολο κόμβων σε ένα γράφημα ονομάζεται κυρίαρχο σύνολο αν κάθε κόμβος στο γράφημα είναι είτε στο κυρίαρχο σύνολο είτε απέχει μήκος 1 από κάποιον από τους κόμβους του κ.σ.

κ.Σ. = $\{<G,k>$, το G περιέχει κ.σ. μεγέθους $k\}$.

1) ∈ NP αν μαντέψω μια λύση μπορώ να ελέγξω γρήγορα αν αυτοί οι κόμβοι και οι γείτονές τους καλύπτουν το γράφημα.

2) 

G, k

αντιγράφω όλες τις ακμές και προσθέτω έναν καινούριο κόμβο

1. ∀ κόμβο του ΚΚ ⇒ κόμβο του ΚΣ
2. ∀ ακμή του ΚΚ ⇒ ακμή του ΚΣ
3. ∀ ακμή του ΚΚ ⇒ νέος κόμβος που συνδέεται με τα άκρα της αντίστοιχης ακμής.

ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ.

Κατευθυνόμενο γράφημα G.
και 2 κόμβοι s, t.
∃ μονοπάτι από τον s στον t που να περνάει απ' όλους τους κόμβους? ↳ ακριβώς μια φορά.

Χ.Δ. = $\{<G,s,t>$: ∃ μονοπάτι από τον s στον t που περνάει απ' όλους τους κόμβους$\}$ ↳ ακριβώς μια φορά.

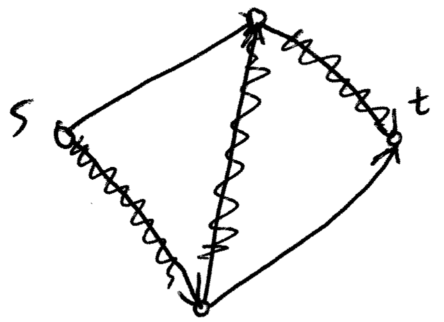
Θ. Η Χ.Δ. είναι NP-πλήρης.

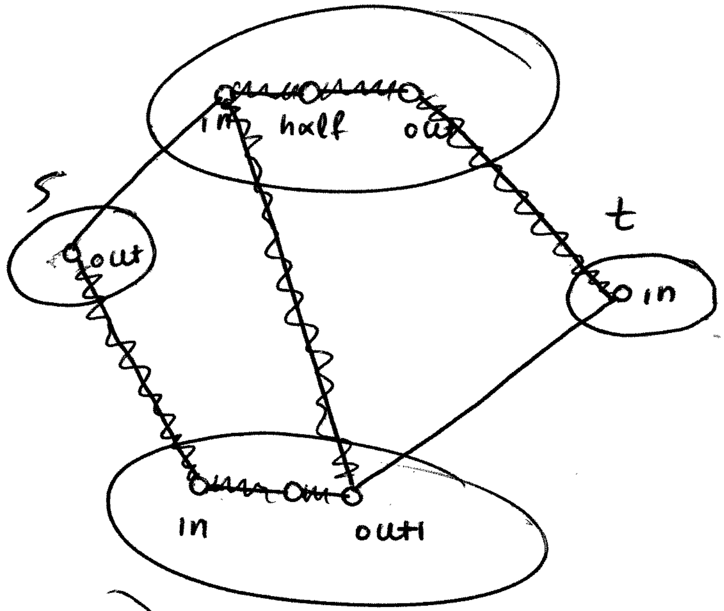
1) ∈ NP
2) 3SAT $\leq_p$ ΧΔ.

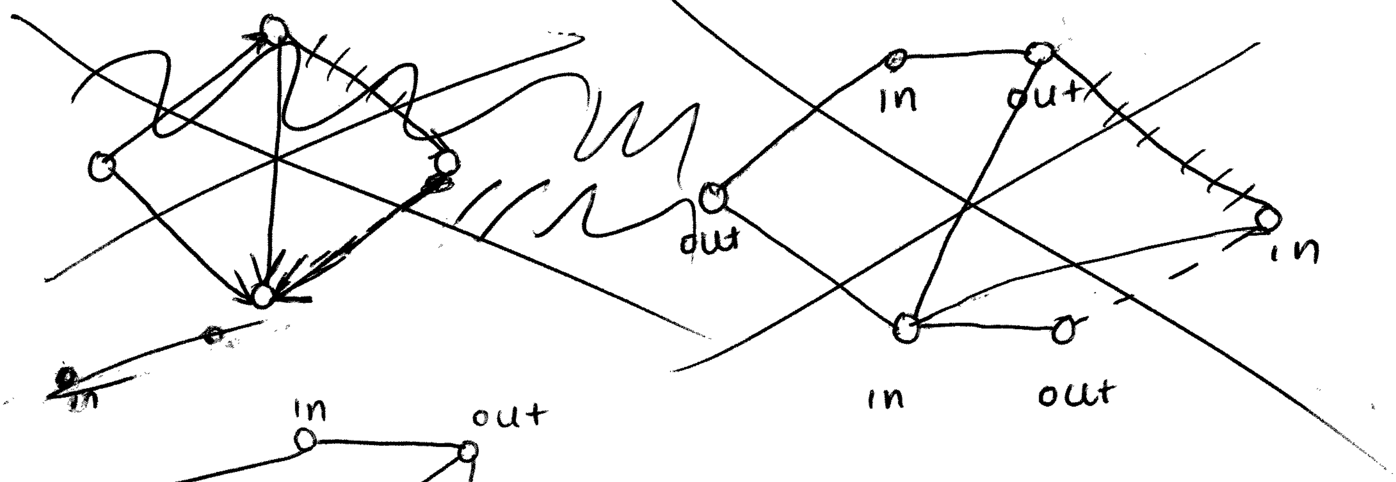
7. Χ.Δ. σε μη κατευθυνόμενο γράφημα.

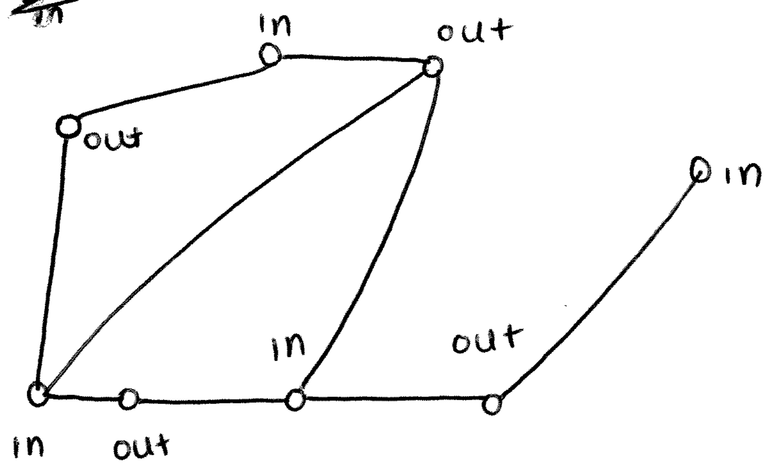
$= \{ < G, s, t > \ldots \}$ είναι NP-πλήρες?

Ιδέα: ~~αντικατέστησε κάθε~~

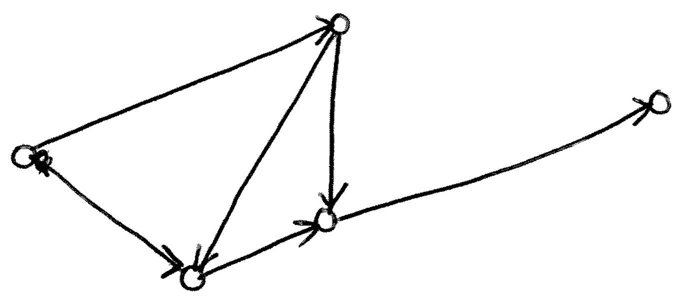








7.36

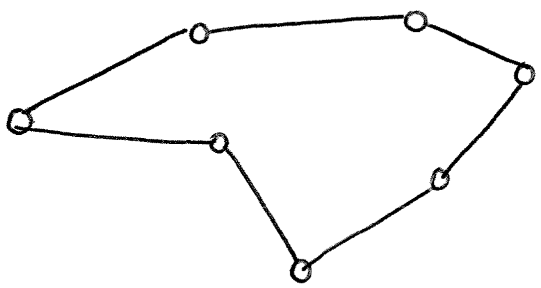


TSP

Γράφημα G

Βάρη στις ακμές, ακέραιο k

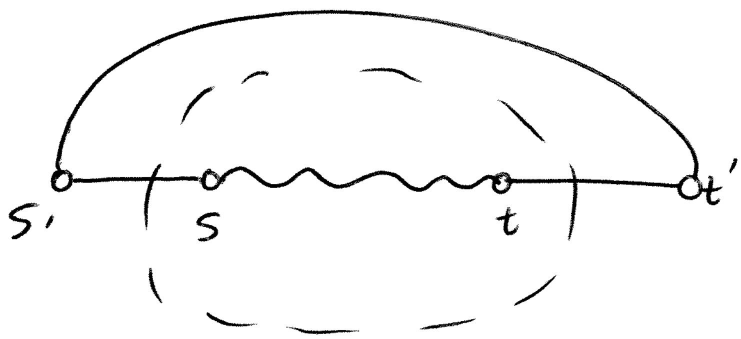
$\exists$ κύκλος που να περνά από κάθε κόμβο μία φορά ακριβώς με συνολικό βάρος $\leq k$.



ΚΥΚΛΟΣ HAMILTON

$= \{\langle G\rangle$, ο G έχει απλό κύκλο που περιέχει όλους τους κόμβους$\}$.

ΧΔ G, s, t



ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

Τελευταίο Μάθημα

*

> Κλασσική ΤΗ (ορισμός απ' έξω)

ΘΕΜΑ: Περιγραφή ΤΗ → πείτε τι κάνει

> Πολυταινιακή ΤΗ
> ΝΤΗ

) Παραλλαγές → Ορισμούς, → Ισοδυναμία

! Εδώ δεν μας ενδιαφέρουν οι χρόνοι

! Δεν πέφτουν ορισμοί, μόνο Σ, Λ πάνω σ' αυτούς.

> Απαριθμητής

$A \Leftrightarrow B$

$A \Leftrightarrow \Gamma$

$A \Leftrightarrow \Delta$

Πόρισμα 3.9, 3.11

Θεώρημα 3.13

$B \Leftrightarrow \Delta \leadsto B \Rightarrow A \Rightarrow \Delta \leadsto \Delta \Rightarrow A \Rightarrow B$.

Θα ζητηθεί απλή απόδειξη.

! ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5

L αναγνωρίσιμη → ∃ ΤΗ που την αναγνωρίζει

L_1, L_2 αναγν. → $L_1 \cup L_2$ αναγν. ?

! Διαβάζω τους απαριθμητές για να μάθω πως τρέχω μια ΤΗ χωρίς να έχω τον κίνδυνο να εγκλωβιστεί

3.6, 3.7, 3.8.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ: ότι έχει σχέση με θεωρία υπολογισμού είναι εκτός. 3.9 (εκτός)

2. 3.10, 3.15, 3.16

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1 → ΕΚΤΟΣ

! Πρόβλημα Τερματισμού !

ΑΠΟΔΟΧΗ / ΤΜ.

Πόρισμα 4.17 (ΠΟΛΥ ΚΑΛΑ)

4.28 → ΕΤΣΙ ΚΙ ΕΤΣΙ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

→ ΠΕΡΑΤΩΣΗ
→ ΚΕΝΟΤΗΤΑ
→ 5.3 ΕΚΤΟΣ Θ
→ 5.4 Θ
→ 5.1.1. ΕΚΤΟΣ
→ 5.2.1 ΕΚΤΟΣ

! ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΤΙΚΕΣ ΑΝΑΓΩΓΕΣ

! ΟΛΟ ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΜΕΓΑΛΗ ΠΡΟΣΟΧΗ.

Άσκηση 5.5 !// SOS → Πρέπει να καταλάβω ΓΙΑΤΙ

5.6, 5.7 Προβλήματα 5.9, 5.10, 5.11.

→ Μπορεί να βάλει αναγωγή με πολυωνυμικά.

5.30 → λύση από σημειώσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

? Πολύ καλά τους ορισμούς

ΝΤΗ → αποδέχεται
ΝΤΗ → δεν αποδέχεται.

Συμβολισμοί: O, o

> Πρέπει να ξεχωρίζουμε αν ένας χρόνος είναι πολυωνυμικός.

7.1.2. Θ → σχέσεις μεταξύ μοντέλων (7.8)

7.14 (ΕΚΤΟΣ)

NP-πληρότητα
1) ∈ NP (επαληθευτής) → ΚΛΙΚΑ, ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ
2) αναγωγή.

7.4 παράγραφος

? Θα πρέπει να ξέρω τι σημαίνει το να μπορώ να λύσω ένα NP-πλήρες πρόβλημα σε πολυωνυμικό χρόνο.

7.19: B το αγαπημένο σας πρόβλημα ∈ P
Δίνονται n αριθμοί και ένας αριθμός Σ
~~Αθροίζ~~ Αθροίζονται οι αριθμοί στο Σ?

1.) Δείξτε ότι αν B είναι NP-πλήρες τότε P=NP.
2) Δείξτε ότι αν B δεν είναι NP-πλήρες τότε P≠NP

1. Για το 2

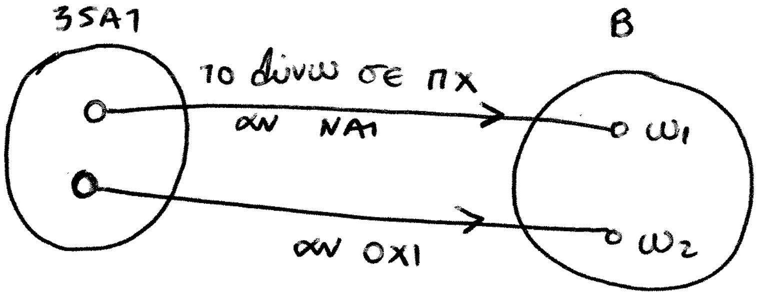
(γ) B όχι NP-πλήρες και P=NP.

Αφού $P=NP$, $3SAT \in P$

~~Πάρε ένα $\varphi_1 \in 3SAT$ και $\varphi_2 \notin 3SAT$.~~

Θα δείξω ότι $3SAT \leq_p B$

Πάρε $\omega_1 \in B$ και $\omega_2 \notin B$

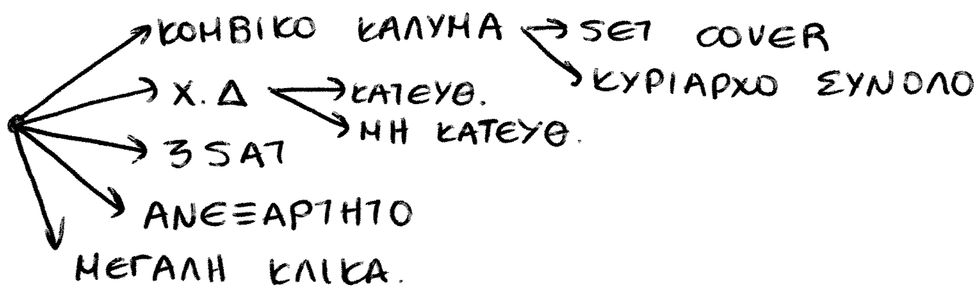


$f(n) \in B \iff \omega \in 3SAT$

f είναι πολυωνυμικού χρόνου.

B → NP-πλήρες άρα όλα ανάγονται σ' αυτό.

7.4.2 (Μέχρι εδώ διαβάζω τα πάντα).



ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

7.6.3 ΕΚΤΟΣ

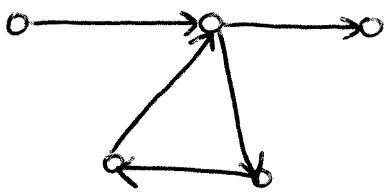
7.1, 7.2, 7.3, 7.5, 7.6, 7.7, 7.8, 7.9, 7.11

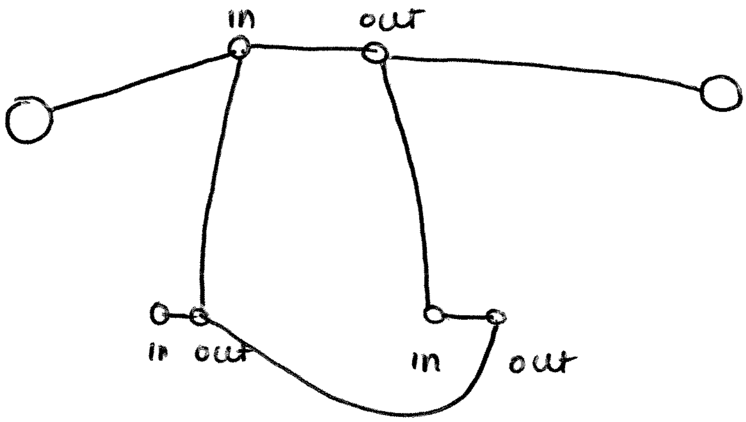
ένωση

7.17, 7.19, 7.20, 7.21, 7.22, 7.34

↓

3SAT-7

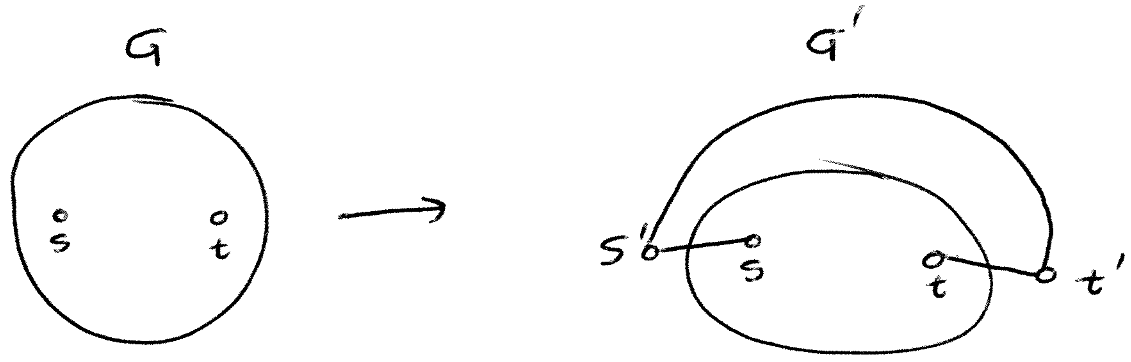




άρα χρειαζόμαστε το hub.

ΧΔ $= \{ \langle G, s, t \rangle \; \exists$ ΧΔ από τον s στον t στο $G \}$

Χ. ΚΥΚΛΟΣ $= \{ \langle G \rangle \; \exists$ κύκλος που περνάει μία ακριβώς φορά από κάθε κόμβο $\}$



Ισχύει για κατευθυνόμενα και μη κατευθυνόμενα

TSP (πρόβλημα περιοδεύοντος πωλητή)

γράφημα G

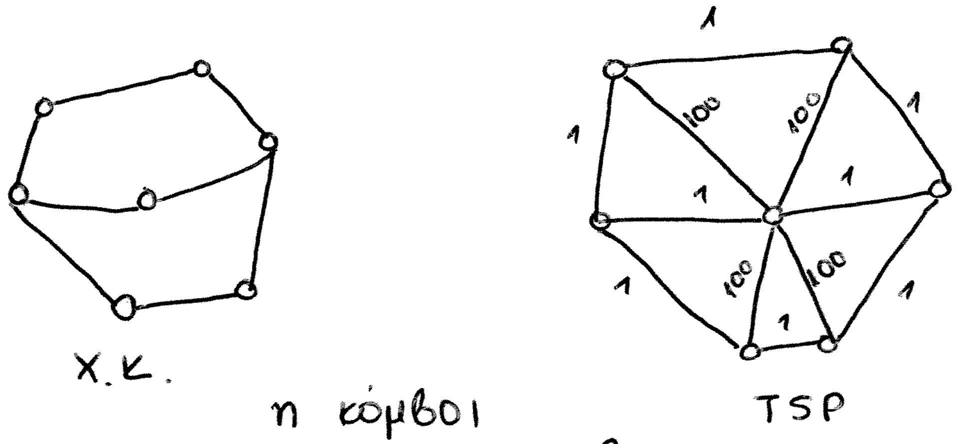
οι ακμές έχουν βάρη

Ακέραιος κ

∃ κύκλος συνολικού βάρους $\leq k$ στο G που περνά από κάθε κόμβο ακριβώς μια φορά?

$$XK \leq_p TSP$$

$G \rightarrow G'$



n κόμβοι

$k = n$

∀ ζευγάρι κόμβων που δεν συνδέονται με ακμή, βάζω μια καινούρια που έχει πολύ μεγάλο βάρος.

ΕΥΡΕΣΗ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΓΕΝΝΗΤΙΚΟΥ ΔΕΝΤΡΟΥ

G, k → Βρες ένα δέντρο στο G που καλύπτει όλους τους κόμβους και έχει συνολικό βάρος ≤ k.

Γράφημα G με βάρη στις ακμές και περιορισμοί d(v) στο βαθμό κάθε κόμβου και ακέραιος k.

∃ δέντρο στο G που καλύπτει όλους τους κόμβους έτσι ώστε ο βαθμός του κόμβου v να είναι d(v) ∀ v και το συνολικό βάρος του δέντρου να είναι ≤ k? ⤷ BOUNDED DEGREE SPAWNING TREE.

Αναγωγή στο Χ.Δ.

$(x \vee y \vee \bar{z}), (y \vee z \vee \bar{\omega}), (\alpha, \bar{z}, \omega), (\bar{\alpha}, b, c) \ldots$

∃ ανάθεση τιμών στις μεταβλητές τ.ω. ο αριθμός των αληθών φράσεων ≥ 8 · #ψευδών.

1.) ∈ NP

2.) 3SAT $\leq_p$ Π.

έστω στιγμιότυπο του 3SAT δηλαδή λογικός τύπος φ με 3 λεξιγράμματα ανά φράση και k # φράσεων.

Κατασκευάζω στιγμιότυπο για το Π:

∀ φράση του φ την αντιγράφω στο Π (k φράσεις)

εισάγω 3k νέες μεταβλητές $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \ldots$

Για κάθε τριάδα μεταβλητών $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ βάζω επιπλέον 8 φράσεις γ. $(\alpha_i, b_i, \gamma_i), (\alpha_i, b_i, \overline{\gamma_i}), (\alpha_i, b_i, \gamma_i) \ldots$

k αρχικές φράσεις + $8k$ επιπλέον φράσεις

είτε k αληθείς
είτε $k-1$ αληθείς

k ~~αληθείς~~ ψευδείς

~~ψευδείς~~ $7k$ αληθείς

1. Ορισμός ΤΗ, ΣΛ, παγίδες
2. Διαφορά αναγνωρίσιμη - διαγνώσιμη.
3. Παράδειγμα με σχήμα.
4. Πολυωνυμική
5. ΝΤΗ
6. Απαριθμητής
7. Μη διαγνώσιμες γλώσσες
8. Εισαγωγή στις αναγωγές (πρόβλημα τερματισμού).
9. Εισαγωγή στα P, NP προβλήματα
   (ορισμοί, αναπαράσταση, εισαγωγή χρόνου).