Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη

Τμημα Μηχανικων Ηλεκτρονικων Υπολογιστων και Πληροφορικης

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Ενδεικτικές Λύσεις - Γραπτή εξέταση Ιουνίου 2011

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1 [3.5 μονάδες]
Να αποδειχθεί ότι οι αναγνωρίσιμες γλώσσες δεν είναι κλειστές ως προς το συμπλήρωμα χρησιμοποιώντας το ότι η γλώσσα

$$\text{ΑΠΟΔΟΧΗ/TM} = \{\langle M, w\rangle | \text{ η μηχανή Turing M αποδέχεται τη γλώσσα } w\}$$

είναι αναγνωρίσιμη αλλά όχι διαγνώσιμη. Οποιοδήποτε άλλο θεώρημα χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη, να έχει αποδειχθεί προηγουμένως.

(ενδεικτική) Λύση:

Θα αποδείξουμε, πρώτα, ότι εάν μία αναγνωρίσιμη γλώσσα L έχει αναγνωρίσιμο συμπλήρωμα, τότε είναι διαγνώσιμη.

Θεωρούμε μηχανές Turing M_1 και M_2 που αναγνωρίζουν τη γλώσσα L και το συμπλήρωμά της, αντίστοιχα. Προσομοιώνουμε τη λειτουργία των M_1 και M_2 για την ίδια είσοδο σε δύο ταινίες μιας μηχανής Turing M, η οποία αποδέχεται εάν η M_1 αποδέχεται και απορρίπτει εάν η M_2 αποδέχεται. Επειδή, αναγκαστικά, ακριβώς μία από τις M_1 και M_2 αποδέχεται για οποιαδήποτε είσοδο, διότι κάθε είσοδος ανήκει στη L ή στο συμπλήρωμά της, η M είναι καλά ορισμένη και επιπλέον είναι διαγνώστης της L.

Γνωρίζουμε ότι η γλώσσα Αποδοχη/TM είναι αναγνωρίσιμη αλλά όχι διαγνώσιμη. Άρα δε μπορεί να έχει αναγνωρίσιμο συμπλήρωμα.

Κατά συνέπεια, αφού υπάρχει το παραπάνω αντιπαράδειγμα, ισχύει ότι οι αναγνωρίσιμες γλώσσες δεν είναι κλειστές ως προς το συμπλήρωμα.

Θέμα 2 [3.5 μονάδες]
Να αποδειχθεί ότι μια γλώσσα L είναι διαγνώσιμη εάν και μόνον εάν είναι απεικονιστικά αναγώγιμη στη γλώσσα

$$\text{KENOTHTA/DFA} = \{\langle A\rangle |\ \text{το A είναι ένα DFA και } L(A) = \emptyset\}.$$

(ενδεικτική) Λύση:

Έστω A_1 ένα οποιοδήποτε DFA για το οποίο $L(A_1) = \emptyset$, π.χ., ένα DFA που στο γράφημα μεταβάσεών του καμία ακμή δεν καταλήγει σε κατάσταση αποδοχής.
Έστω A_2 ένα οποιοδήποτε DFA για το οποίο $L(A_2) \neq \emptyset$.

Για να αποδείξουμε το ευθύ: θεωρούμε αναγωγή η οποία απεικονίζει μία λέξη w στο A_1 εάν $w \in L$ και στο A_2 εάν $w \notin L$. Η υπολογισιμότητα της αναγωγής συμπεραίνεται από τη διαγνωσιμότητα της L και η ορθότητά της είναι προφανής.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο: θα αποδείξουμε πρώτα ότι η γλώσσα ΚΕΝΟΤΗΤΑ/DFA είναι διαγνώσιμη. Πράγματι, για να διαπιστώσουμε εάν $L(A) = \emptyset$, αρκεί να διατρέξουμε το γράφημα μεταβάσεων του A για να διαπιστώσουμε εάν υπάρχει μονοπάτι που οδηγεί από εναρκτήρια κατάσταση σε κατάσταση αποδοχής. Το ζητούμενο προκύπτει από τη γνωστή ιδιότητα ότι μία γλώσσα είναι διαγνώσιμη εάν ανάγεται απεικονιστικά σε διαγνώσιμη γλώσσα.

Θέμα 3 [3.5 μονάδες]
Να αποδειχθεί ότι είναι NP-πλήρης η γλώσσα

ΤΡΙΠΛΟ-SAT $= \{\langle \phi \rangle |$ ο ϕ είναι λογικός τύπος με τουλάχιστον τρεις αληθοποιούς τιμοδοσίες$\}$.

Υπόδειξη: Να συζευχθεί ο ϕ με κατάλληλη φράση (clause) για να προκύψει νέος τύπος ϕ' τέτοιος ώστε οποιαδήποτε αληθοποιός τιμοδοσία του ϕ να μπορεί να επεκταθεί κατά τρεις διαφορετικούς τρόπους σε αληθοποιούς τιμοδοσίες του ϕ'.

(ενδεικτική) Λύση:

Η γλώσσα Τριπλο-Sat ανήκει στην NP. Αυτό ισχύει γιατί μπορούμε να σχεδιάσουμε ανταιτιοκρατική μηχανή η οποία 'μαντεύει' (δηλ., παράγει ανταιτιοκρατικά) τρεις διαφορετικές τιμοδοσίες και ελέγχει εάν είναι αληθοποιοί. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ο έλεγχος εάν μία τιμοδοσία είναι αληθοποιός μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο.

Για την πληρότητα, θα κατασκευάσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο υπολογίσιμη αναγωγή F από το γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα Sat. Η F απεικονίζει ένα τύπο ϕ στον ϕ' που ορίζεται ως ο $\phi \wedge (y_1 \vee y_2)$, όπου y_1, y_2 δύο μεταβλητές που δεν εμφανίζονται στον ϕ. Η πολυωνυμικού χρόνου υπολογισιμότητα της αναγωγής F είναι προφανής.

Για την ορθότητα, παρατηρούμε ότι μία αληθοποιός τιμοδοσία στις μεταβλητές του ϕ μπορεί να επεκταθεί κατά τρεις διαφορετικούς τρόπους σε αληθοποιό τιμοδοσία του ϕ' δίνοντας στις μεταβλητές y_1, y_2 τα τρία διαφορετικά ζεύγη τιμών που κάνουν τη φράση $(y_1 \vee y_2)$ αληθή. Επίσης, προφανώς, εάν ο ϕ δεν είναι αληθεύσιμος, ούτε ο ϕ' είναι. Επομένως, ο ϕ είναι αληθεύσιμος εάν και μόνον εάν ο ϕ' είναι αληθεύσιμος από τρεις τουλάχιστον διαφορετικές τιμοδοσίες.