

# Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

## Ενδεικτικές λύσεις ενδιάμεσης εξέτασης Απριλίου 2014

### Θέμα 1.

- (α) Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις εξηγώντας συνοπτικά την απάντησή σας. Είναι δυνατόν μια μηχανή Turing να διαβάσει στο πρώτο βήμα λειτουργία της κάποιο σύμβολο που δεν ανήκει στο αλφάβητο εισόδου και δεν είναι το κενό  $\sqcup$ ; Στο δεύτερο βήμα της λειτουργίας της με είσοδο κάποια λέξη; Είναι δυνατόν η μηχανή να βρεθεί περισσότερες από μία φορές στην κατάσταση  $q_{OXI}$ ; Πότε λέμε ότι μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing αποδέχεται την είσοδο της; Πότε μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing ονομάζεται διαγνώστης;
- (β) Δείξτε ότι οι προτάσεις "Υπάρχει πολυταινιακή μηχανή Turing που αναγνωρίζει τη γλώσσα  $L$ " και "Υπάρχει μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing που αναγνωρίζει τη γλώσσα  $L$ " είναι ισοδύναμες.
- (γ) Δώστε ορισμό για τις γλώσσες ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ, ΠΕΡΑΤΩΣΗ/ΤΜ, ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ και ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/ΤΜ.

### Λύση.

#### (α)

- ΟΧΙ. Όταν μια μηχανή Turing ξεκινά την λειτουργία της, η κεφαλή δείχνει στην αριστερότερη θέση της συμβολοσειράς εισόδου. Συνεπώς, η μηχανή στο πρώτο βήμα θα διαβάσει είτε κάποιο σύμβολο από το αλφάβητο εισόδου είτε το σύμβολο κενού σε περίπτωση που η είσοδος είναι η κενή συμβολοσειρά.
- ΝΑΙ. Αρχικά η κεφαλή βρίσκεται στο αριστερότερο κελί της ταινίας. Τώρα, φανταστείτε ότι στο πρώτο βήμα η μηχανή γράφει εκεί ένα σύμβολο  $x \in \Gamma \setminus \{\Sigma \cup \{\sqcup\}\}$  και επιχειρεί να μετακινήσει την κεφαλή αριστερά. Αφού δεν γίνεται να πάει πιο αριστερά, η κεφαλή παραμένει στο πρώτο κελί της ταινίας. Επομένως, στο δεύτερο βήμα η μηχανή αναγκαστικά θα διαβάσει το  $x$  το οποίο ούτε ανήκει στο αλφάβητο εισόδου ούτε είναι το κενό.
- ΟΧΙ. Οι ειδικές καταστάσεις αποδοχής και απόρριψης (τερματικές καταστάσεις) προκαλούν τον άμεσο τερματισμό του υπολογισμού.
- Μια μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing αποδέχεται την είσοδο της όταν υπάρχει κάποιος κλάδος υπολογισμού ο οποίος να οδηγεί στην κατάσταση αποδοχής.
- Μια μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing λέγεται διαγνώστης όταν, για κάθε είσοδο, όλοι οι κλάδοι υπολογισμού καταλήγουν είτε στην  $q_{NAI}$  είτε στην  $q_{OXI}$ .

#### (β) Από την θεωρία γνωρίζουμε τα εξής:

- (1) Μια γλώσσα  $L$  είναι αναγνωρίσιμη αν και μόνο αν υπάρχει πολυταινιακή μηχανή Turing που να την αναγνωρίζει. (Πόρισμα 3.9)

(2) Μια γλώσσα  $L$  είναι αναγνωρίσιμη αν και μόνο αν υπάρχει μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing που να την αναγνωρίζει. (Πόρισμα 3.11)

Συνεπώς, οι δύο ζητούμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες καθώς κάθε μία είναι ισοδύναμη με κοινή πρόταση.

(γ)

ΑΠΟΔΟΧΗ/TM =  $\{\langle M, w \rangle \mid \eta \text{ είναι μια TM που αποδέχεται την συμβολοσειρά } w\}$

ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM =  $\{\langle M, w \rangle \mid \eta M \text{ είναι μια TM που τερματίζει για είσοδο } w\}$

ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM =  $\{\langle M \rangle \mid \eta M \text{ είναι μια TM με } L(M) = \emptyset\}$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/TM =  $\{\langle M_1, M_2 \rangle \mid \text{οι } M_1 \text{ και } M_2 \text{ είναι δύο TM με } L(M_1) = L(M_2)\}$  □

**Θέμα 2.** Δίνεται η μηχανή Turing  $M$  με αρχική κατάσταση  $q_0$  και συνάρτηση μεταβάσεων η οποία δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	$a$	$b$	$\sqcup$
$q_0$	$(q_{\text{NAI}}, a, A)$	$(q_1, b, \Delta)$	$(q_0, b, A)$
$q_1$	$(q_{\text{OXI}}, a, A)$	$(q_0, b, \Delta)$	$(q_1, b, A)$

(α) Είναι η  $M$  διαγνώστης; Εξηγήστε την απάντησή σας.

(β) Ποια είναι η γλώσσα του αλφαβήτου  $\{a, b\}$  που αναγνωρίζει η  $M$ ;

Λύση.

(α) Η μηχανή δεν είναι διαγνώστης καθώς με είσοδο τη συμβολοσειρά  $b$  εγκλωβίζεται.

(β) Η γλώσσα που αναγνωρίζει η  $M$  είναι η  $(bb)^*a\Sigma^*$ . □

**Θέμα 3.**

(α) Δείξτε ότι η γλώσσα

$$L = \{\langle M \rangle \mid \eta M \text{ είναι TM και τερματίζει ξεκινώντας με είσοδο 'aba'}\}$$

δεν είναι διαγνώσιμη.

(β) Δείξτε ότι η γλώσσα

$$L' = \{\langle M, q_1, q_2 \rangle \mid \eta M \text{ είναι TM και περνά είτε από την κατάσταση } q_1 \text{ είτε από την κατάσταση } q_2 \text{ όταν εκτελείται με είσοδο 'aba'}\}$$

δεν είναι διαγνώσιμη.

Λύση. Έχουμε:

(α) Έστω ότι η γλώσσα  $L$  είναι διαγνώσιμη και ότι η μηχανή Turing  $R$  είναι ένας διαγνώστης για αυτήν. Θα κάνουμε αναγωγή από την γλώσσα ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM. Δηλαδή, χρησιμοποιώντας την  $R$  θα κατασκευάσουμε έναν διαγνώστη  $S$  για την ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM το οποίο μας οδηγεί σε άτοπο καθώς γνωρίζουμε ότι η συγκεκριμένη γλώσσα δεν είναι διαγνώσιμη.

$S =$  "Για είσοδο  $\langle M, w \rangle$ :

1. Φτιάξε την μηχανή  $M_0$  με περιγραφή:

$M_0 =$  "Για είσοδο  $x$ :

(α) Αν  $x \neq \text{'aba'}$ , τότε απέρριψε. (δεν έχει σημασία)

(β) Αν  $x = 'aba'$ , τότε τρέξε την  $M$  για είσοδο  $w$  και αν τερματίσει, τότε αποδέξου."

2. Τρέξε την  $R$  με είσοδο  $\langle M_0 \rangle$ .
3. Αν η  $R$  αποδεχτεί, τότε αποδέξου.
4. Αν η  $R$  απορρίψει, τότε απέρριψε."

Η μηχανή  $M_0$  απορρίπτει κάθε είσοδο διαφορετική του 'aba' και αποδέχεται την 'aba' αν και μόνο αν η μηχανή  $M$  τερματίζει για είσοδο  $w$ , ενώ δεν απορρίπτει ποτέ. Συνεπώς, η  $M_0$  τερματίζει για είσοδο 'aba' αν και μόνο αν η  $M$  τερματίζει για είσοδο  $w$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} M \text{ τερματίζει για } w &\Rightarrow M_0 \text{ τερματίζει για 'aba'} \\ &\Rightarrow R \text{ αποδέχεται } \langle M_0 \rangle \\ &\Rightarrow S \text{ αποδέχεται } \langle M, w \rangle \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} M \text{ εγκλωβίζεται για } w &\Rightarrow M_0 \text{ εγκλωβίζεται για 'aba'} \\ &\Rightarrow R \text{ απορρίπτει } \langle M_0 \rangle \\ &\Rightarrow S \text{ απορρίπτει } \langle M, w \rangle \end{aligned}$$

Συνεπώς, η  $S$  είναι όντως διαγνώστης για την ΠΕΡΑΤΩΣΗ/ΤΜ.

**(β)** Έστω ότι η γλώσσα  $L'$  είναι διαγνώσιμη και ότι η μηχανή Turing  $R'$  είναι ένας διαγνώστης για αυτήν. Χρησιμοποιώντας την  $R'$  θα κατασκευάσουμε έναν διαγνώστη  $S'$  για την γλώσσα  $L$ . Αυτό μας οδηγεί σε άτοπο καθώς στο προηγούμενο ερώτημα αποδείξαμε ότι η  $L$  δεν είναι διαγνώσιμη και επομένως δεν γίνεται να υπάρχει η  $R'$ .

$S' =$  "Για είσοδο  $\langle M \rangle$ :

1. Τρέξε την  $R'$  για είσοδο  $\langle M, q_{\text{ΝΑΙ}}, q_{\text{ΟΧΙ}} \rangle$ .
2. Αν η  $R'$  αποδεχτεί, τότε αποδέξου.
3. Αν η  $R'$  απορρίψει, τότε απέρριψε."

Όταν τρέχουμε την  $R'$  για είσοδο  $\langle M, q_{\text{ΝΑΙ}}, q_{\text{ΟΧΙ}} \rangle$ , στην ουσία ρωτάμε αν η μηχανή  $M$  τερματίζει για είσοδο 'aba'. Συνεπώς, είναι προφανές ότι η  $S'$  είναι ένας διαγνώστης για την γλώσσα  $L$ .  $\square$