Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Εξέταση Ιουνίου 2013 – Ενδεικτικές λύσεις

Θέμα 1.

α. (10%) Δείξτε ότι αν οι γλώσσες L_1 και L_2 είναι αναγνωρίσιμες τότε και η ένωσή τους $L_1 \cup L_2$ είναι αναγνωρίσιμη.

β. (25%) Δίνεται η μηχανή Turing M με αρχική κατάσταση q_0 και συνάρτηση μεταβάσεων που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	a	$\sqcup$
q_0	(q_1, a, Δ)	(q_0, a, A)
q_1	(q_2, a, Δ)	$(q_{\text{OXI}}, \sqcup, A)$
q_2	(q_0, a, Δ)	$(q_{\text{NAI}}, \sqcup, A)$

Ποιά είναι η γλώσσα του αλφαβήτου $\{a\}$ που αναγνωρίζει η M; Είναι η M διαγνώστης;

γ. (15%) Δίνεται η μη ντετερμινιστική μηχανή Turing N με αρχική κατάσταση q_0 και συνάρτηση μεταβάσεων που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	a	$\sqcup$
q_0	$(q_{\text{NAI}}, \sqcup, A)$ (q_1, a, Δ)	$(q_{\text{OXI}}, \sqcup, A)$
q_1	(q_0, a, A)	$(q_{\text{OXI}}, \sqcup, A)$

Ποιά είναι η γλώσσα του αλφαβήτου $\{a\}$ που αναγνωρίζει η N; Είναι η N διαγνώστης;

Ενδεικτικές λύσεις:

α. Άσκηση 3.16 από το βιβλίο του Sipser. Η λύση βρίσκεται στη σελίδα 187 όπου χρησιμοποιώντας τις μηχανές M_1 και M_2 που αναγνωρίζουν τις γλώσσες L_1 και L_2 κατασκευάζουμε μηχανή M που αναγνωρίζει την ένωση $L_1 \cup L_2$ εκτελλώντας τις παράλληλα/εναλλάξ. Ένα συνηθισμένο λάθος που γίνεται εδώ είναι να εκτελείται πρώτα η μηχανή M_1 που αναγνωρίζει τη γλώσσα L_1 και, εφόσον αποδεχτεί, να εκτελείται η μηχανή M_2 που αναγνωρίζει τη γλώσσα L_2. Σε αυτή την περίπτωση, η μηχανή M_1 μπορεί να μην τερματίζει και η μηχανή M_2 να μην τρέξει ποτέ.

β. Η γλώσσα που αναγνωρίζει η M είναι η $(aa + aaa)(aaa)^*$. Είναι διαγνώστης γιατί απορρίπτει τις υπόλοιπες συμβολοσειρές (κενή και $a(aaa)^*$). Πολλές απαντήσεις δεν περιείχαν τις συμβολοσειρές $aaa(aaa)^*$.

γ. Η γλώσσα που αναγνωρίζει η N είναι η aa^*. Δεν είναι διαγνώστης γιατί για είσοδο aa εγκλωβίζεται σε κινήσεις μεταξύ των καταστάσεων q_0 και q_1. Προσοχή στους ορισμούς για τις μη ντετερμινιστικές μηχανές. Για να βρούμε τη γλώσσα (δηλ., το σύνολο των συμβολοσειρών που αποδέχεται η N), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η N μπορεί να καταλήξει σε q_{NAI} με οποιαδήποτε μη κενή είσοδο. Για να απαντήσουμε αν είναι διαγνώστης, αρκεί να βρούμε μια είσοδο για την οποία η μηχανή εγκλωβίζεται ακολουθώντας κάποιες από τις δυνατές μεταβάσεις της.

Θέμα 2.

α. (10%) Δώστε τους ορισμούς των γλωσσών Κενοτητα/ΤΜ και Περατωση/ΤΜ.

β. (10%) Δείξτε ότι η γλώσσα Αποδοχη/ΤΜ δεν είναι απεικονιστικά αναγώγιμη στην Κενοτητα/ΤΜ.

γ. (25%) Δείξτε ότι η γλώσσα

$$L = \{\langle M \rangle : \text{η } M \text{ είναι μηχανή Turing και απορρίπτει κάθε συμβολοσειρά}\}$$

δεν είναι διαγνώσιμη.

Ενδεικτικές λύσεις:

α. Σελίδες 219 και 220 από το βιβλίο του Sipser. Περιφραστικές απαντήσεις καταλήγουν σχεδόν σίγουρα να είναι λανθασμένες.

β. Άσκηση 5.5 από το βιβλίο του Sipser. Η λύση βρίσκεται στη σελίδα 249.

γ. Εδώ χρειάζεται αναγωγή από κάποια γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα. Πολλοί έκαναν την λανθασμένη παρατήρηση ότι η L είναι η γλώσσα Κενοτητα/ΤΜ. Αυτό δεν ισχύει. Η γλώσσα L αποτελείται από όλες τις μηχανές Turing που απορρίπτουν κάθε συμβολοσειρά ενώ η Κενοτητα/ΤΜ αποτελείται από όλες τις ΤΜ που απορρίπτουν ή εγκλωβίζονται για κάθε συμβολοσειρά εισόδου. Αυτά είναι διαφορετικά πράγματα.

Θα παρουσιάσουμε μια τέτοια αναγωγή από τη γλώσσα Αποδοχη/ΤΜ. Κάποιες από τις σωστές λύσεις που προτάθηκαν χρησιμοποίησαν ελαφρώς διαφορετική αναγωγή από τη γλώσσα Περατωση/ΤΜ. Για την αναγωγή από την Αποδοχη/ΤΜ, ξεκινάμε υποθέτοντας ότι η L είναι διαγνώσιμη και έστω R ο διαγνώστης της. Κατασκευάζουμε τη μηχανή S.

$S =$ για είσοδο $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκεύασε την ΤΜ M_1 που λειτουργεί ως εξής:

   $M_1 =$ για είσοδο x

   1. Προσομοίωσε την M με είσοδο w
   2. Αν αποδεχτεί, απόρριψε (τη συμβολοσειρά x)
   3. Αν απορρίψει, εγκλωβίσου (ή αποδέξου τη συμβολοσειρά x)

2. Εκτέλεσε την R με είσοδο $\langle M_1 \rangle$
3. Αν αποδεχτεί, αποδέξου
4. Αν απορρίψει, απόρριψε.

Η κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι η R αποδέχεται την M_1 (δηλ., η M_1 απορρίπτει κάθε συμβολοσειρά εισόδου και επομένως η $\langle M_1 \rangle$ ανήκει στην L) αν και μόνο αν η M αποδέχεται την w (δηλ., $\langle M, w \rangle \in$ Αποδοχη/ΤΜ). Επομένως, η S είναι διαγνώστης για την Αποδοχη/ΤΜ, η οποία γνωρίζουμε ότι είναι μη διαγνώσιμη γλώσσα. Άτοπο!

Θέμα 3.

α. (5%) Είναι δυνατόν να ισχύουν ταυτόχρονα οι προτάσεις 3SAT $\in P$ και $P \neq NP$;

β. (25%) Έστω 3SAT-37 $= \{\langle\phi\rangle$: ο ϕ είναι λογικός τύπος σε συζευκτική κανονική μορφή με τρία λεξιγράμματα ανά φράση και έχει τουλάχιστον 37 διαφορετικές αληθείς τιμοδοσίες$\}$. Δείξτε ότι το πρόβλημα 3SAT-37 είναι NP-πλήρες.

Ενδεικτικές λύσεις:

α. Γνωρίζουμε ότι η 3SAT είναι NP-πλήρης γλώσσα. Επομένως, από τον ορισμό της NP-πληρότητας, οποιαδήποτε γλώσσα του NP ανάγεται πολυωνυμικά στην 3SAT. Αν η 3SAT διαγιγνώσκεται ντετερμινιστικά σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε οποιαδήποτε γλώσσα του NP διαγιγνώσκεται ντετερμινιστικά σε πολυωνυμικό χρόνο. Άρα $P = NP$. Επομένως, οι δυο προτάσεις δεν μπορεί να ισχύουν ταυτόχρονα. Η χρήση της ιδιότητας της NP-πληρότητας είναι απολύτως απαραίτητη για να απαντηθεί σωστά το ερώτημα.

β. Θυμηθείτε την άσκηση για την NP-πληρότητα της γλώσσας 3SAT-7 που παρουσιάσαμε στο μάθημα. Καταρχάς, η 3SAT-37 ανήκει στην κλάση NP καθώς με είσοδο έναν λογικό τύπο ϕ σε συζευκτική κανονική μορφή με τρία λεξιγράμματα ανά φράση και 37 αναθέσεις τιμών στις μεταβλητές μπορώ να επαληθεύσω σε πολυωνυμικό χρόνο αν αυτές οι αναθέσεις είναι διαφορετικές και αν όντως αληθεύουν το λογικό τύπο. Για την ολοκλήρωση της απόδειξης θα ανάγουμε πολυωνυμικά τη γλώσσα 3SAT στην 3SAT-37. Για κάθε λογικό τύπο ϕ σε συζευκτική κανονική μορφή με τρία λεξιγράμματα ανά φράση κατασκευάζω το λογικό τύπο ϕ' προσθέτοντας δυο φράσεις με τρία λεξιγράμματα στον ϕ, δηλ., $\phi' = \phi \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (d \vee e \vee f)$, όπου οι μεταβλητές a, b, c, d, e, f δεν εμφανίζονται στον ϕ. Προφανώς, η κατασκευή του ϕ' γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς το μέγεθος του ϕ. Οι κρίσιμες παρατηρήσεις για την απόδειξη ορθότητας της αναγωγής είναι:

- Αν ο ϕ είναι αληθεύσιμος, τότε υπάρχουν τουλάχιστον 49 (άρα και τουλάχιστον 37) διαφορετικές αληθείς αναθέσεις τιμών για τις μεταβλητές που εμφανίζονται στον ϕ και τις επιπλέον μεταβλητές a, b, c, d, e, f. Αυτό προκύπτει αν πάρουμε μια ανάθεση που αληθοποιεί τον ϕ και τη συνδυάσουμε με τις 7 αναθέσεις τιμών που αληθοποιούν τη φράση $(a \vee b \vee c)$ και τις 7 αναθέσεις τιμών που αληθοποιούν τη φράση $(d \vee e \vee f)$.
- Αν ο ϕ δεν είναι αληθεύσιμος, τότε δεν υπάρχει καμμιά αληθής ανάθεση για τον ϕ'.

Συμπεραίνουμε ότι ο ϕ είναι αληθεύσιμος αν και μόνο αν ο ϕ' έχει τουλάχιστον 37 διαφορετικές αληθείς τιμοδοσίες και η απόδειξη ορθότητας της αναγωγής ολοκληρώθηκε. Ένα κλασσικό λάθος που αρκετοί έκαναν εδώ ήταν να προσθέσουν μια φράση με έξι λεξιγράμματα στον ϕ. Δυστυχώς, ένας τέτοιος λογικός τύπος δεν ανήκει ποτέ στη γλώσσα 3SAT-37 καθώς δεν περιέχει τρία λεξιγράμματα ανά φράση.