Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Ηλεκτρονικων Υπολογιστων και Πληροφορικης

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Νοέμβριος 2011

ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1. Είναι το σύνολο των αναγνωρίσιμων γλωσσών σε ένα κοινό αλφάβητο κλειστό ως προς τη συνολοθεωρητική ένωση; Να αποδείξετε προσεκτικά και σύντομα την απάντησή σας.

Λύση. Έστω M_1 και M_2 δύο μηχανές που αναγνωρίζουν δύο δεδομένες γλώσσες κοινού αλφαβήτου, έστω τις L_1 και L_2, αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε μία μηχανή M με δύο πρόσθετες ταινίες, η οποία για οποιαδήποτε είσοδο w, στην πρώτη από τις δύο πρόσθετες ταινίες προσομοιώνει την M_1 για είσοδο w και στη δεύτερη την M_2 για την ίδια είσοδο. Η M αποδέχεται εάν και μόνον εάν μία τουλάχιστον από της M_1 και M_2 αποδεχθεί. Είναι φανερό ότι η M αναγνωρίζει τη γλώσσα Ł$_1 \cup L_2$.

Θέμα 2. έστω L_1 μία διαγνώσιμη (αποκρίσιμη, αποφασίσιμη)γλώσσα και L_2 μία αυθαίρετη γλώσσα (ενδεχομένως ούτε καν αναγνωρίσιμη) η οποία όμως δεν είναι κενή, ούτε έχει κενό συμπλήρωμα. Είναι πάντοτε η L_1 απεικονιστικά αναγώγιμη στην L_2; Η ίδια ερώτηση αν η L_1 είναι μόνον αναγνωρίσιμη. Αιτιολογήστε προσεκτικά και σύντομα τις απαντήσεις σας με απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

Λύση. Στην πρώτη ερώτηση η απάντηση είναι θετική. Πράγματι έστω $w_1 \in L_2$ και $w_2 \in \overline{L_2}$, όπου $\overline{L_2}$ το συμπλήρωμα της L_2 (ή ύπαρξη των w_1, w_2 συνάγεται από την υπόθεση ότι η L_2 και το συμπλήρωμά της δεν είναι κενές). Κατασκευάζουμε τώρα την απεικονιστική αναγωγή F η οποία για είσοδο w επιστρέφει w_1 αν $w \in L_1$, και w_2 αλλιώς. Η απεικόνιση F είναι υπολογίσιμη επειδή η L_1 είναι διαγνώσιμη. Επίσης προφανώς ισχύει ότι $w \in L_1$ αν και μόνον αν $F(w) \in L_2$. Άρα στην περίπτωση αυτή αποδείξαμε την απεικονιστική αναγωγιμότητα της L_1 στην L_2. Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα δεν είναι πάντοτε καταφατική (δηλαδή είναι γενικά αρνητική). Πράγματι ας θεωρήσουμε ως L_1 μία οποιαδήποτε αναγνωρίσιμη αλλά όχι διαγνώσιμη γλώσσα (π.χ. την Αποδοχη/TM) και ως L_2 μία διαγνώσιμη γλώσσα. Εάν η L_1 αναγόταν απεικονιστικά στην L_2, τότε από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η L_1 θα ήταν διαγνώσιμη, διότι κάθε γλώσσα που ανάγεται σε διαγνώσιμη γλώσσα είναι επίσης διαγνώσιμη, το οποίο όμως αντιβαίνει στην υπόθεσή μας ότι η L_1 δεν είναι διαγνώσιμη.

Θέμα 3. Να αποδείξετε ότι η γλώσσα

$$\text{Ζυγες-Φρασεις-Sat} = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ είναι ικανοποιήσιμος λογικός τύπος σε ΣΚΜ με άρτιο αριθμό φράσεων}\}$$

είναι NP -πλήρης.
Επεξήγηση: ΣΚΜ = Συζευκτική Κανονική Μορφή· κάθε σύζευξη ονομάζεται «φράση» (clause).
Υπόδειξη: Αν ο ϕ έχει περιττό πλήθος φράσεων, να συζεύξετε στον ϕ άλλη μία κατάλληλη φράση.

Λύση. Ότι η γλώσσα Ζυγες-Φρασεις-Sat ανήκει στην NP συμπεραίνεται σχεδιάζοντας ανταιτιοκρατική μηχανή η οποία, αφού ελέγξει ότι ο τύπος είναι σε ΣΚΜ και έχει άρτιο αριθμό φράσεων, παράγει ανταιτιοκρατικά (μαντεύει) μία τιμοδοσία και ελέγχει εάν είναι αληθοποιός. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ο έλεγχος εάν μία τιμοδοσία είναι αληθοποιός μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο. Για την πληρότητα, θα κατασκευάσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο υπολογίσιμη αναγωγή F από το γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα Sat. Η F απεικονίζει ένα τύπο ϕ στον ϕ' που ορίζεται ως εξής: αν ο ϕ έχει ζυγό αριθμό φράσεων, τότε ως ϕ' παίρνουμε τον ίδιο τον ϕ, αλλιώς τον $(\phi \wedge \sigma)$ όπου σ μία φράση η οποία είναι πάντοτε αληθής, π.χ. η $(v \vee \neg v)$. Ότι ο ϕ είναι ικανοποιήσιμος αν και μόνον αν ο ϕ' είναι ικανοποιήσιμος είναι άμεσο όταν ο ϕ έχει άρτιο αριθμό φράσεων, διότι τότε οι δύο τύποι συμπίπτουν. Έστω ότι ο ϕ έχει περιττό πλήθος φράσεων. Τότε επειδή η νέα φράση σ ικανοποιείται από κάθε τιμοδοσία, έχουμε πάλι ότι ο ϕ είναι ικανοποιήσιμος αν και μόνον αν ο ϕ' είναι ικανοποιήσιμος. Τέλος είναι προφανές από τον ορισμό του ότι ο ϕ' μπορεί να κατασκευαστεί σε πολυωνυμικό χρόνο από τον ϕ.

Όλα τα θέματα βαθμολογούνται με άριστα το 3,5. **Κάθε θέμα που δεν έχει απολύτως καμία περιττολογία ούτε λάθος (ακόμη και εάν είναι απολύτως κενό) θα πάρει επιπλέον μισή χαριστική μονάδα.** Συνολικό άριστα το 10. Για βαθμό ≥ 9 δε θα μετρήσουν οι χαριστικές μονάδες.

Λευτέρης Κυρούσης