Τυχαίες διαδικασίες και πιθανότητες

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών
Νοέμβριος 2007

- Πολλά πράγματα στις τηλεπικοινωνίες δεν είναι νομοτελειακά - ντετερμινιστικά αλλά περιγράφονται στοχαστικά ή πιθανοτικά (κανάλι, ακολουθία εισόδου, θόρυβος, ...)
- Κάθε σήμα που περιέχει πληροφορία πρέπει να περιέχει κάποια αβεβαιότητα

Πείραμα τύχης: Κάθε πείραμα, η έκβαση του οποίου δεν μπορεί να προβλεφθεί με βεβαιότητα (στρίψιμο νομίσματος, ρίψη ζαριού,...)

Δειγματοχώρος Ω: Το σύνολο όλων των πιθανών εκβάσεων ω του πειράματος. Διακρίνεται σε

1. Διακριτό
2. Μη διακριτό

Γεγονός Ε: Κάθε υποσύνολο του Ω

Βασικές ιδιότητες

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$, για ασυμβίβαστα γεγονότα $E_1 \cap E_2 = \oslash$, $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
4. $P(\oslash) = 0$
5. $E_1 \subseteq E_2, P(E_1) \leq P(E_2)$

Δεσμευμένη η υποσυνθήκη πιθανότητα

- Έστω δύο γεγονότα E_1, E_2 στον ίδιο δειγματοχώρο Ω. Αν πραγματοποιηθεί το E_2 τότε η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το E_1 δεν είναι $P(E_1)$ αλλά

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

Αν $P(E_1|E_2) = P(E_1)$ τότε τα γεγονότα λέγονται στατιστικά ανεξάρτητα και για στατιστικά ανεξάρτητα γεγονότα $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$

Ολική πιθανότητα και κανόνας *Bayes*

- Τα $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ αποτελούν μια διαμέριση του Ω αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο συνθήκες

$$\begin{aligned} &\cup_{i=1}^{n} E_i = \Omega \\ &E_i \cap E_j = \emptyset, \; i \neq j \end{aligned} \tag{1}$$

Θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)\, P(A \mid E_i)$$

Ο κανόνας ***Bayes*****:**

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i)\, P(A \mid E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)\, P(A \mid E_j)}$$

Ασκήσεις στις πιθανότητες (1/2)

- Έχουμε ένα κουτί με 3 άσπρες μπάλες και 2 κόκκινες. Ποια η πιθανότητα στη περίπτωση που πάρουμε δύο μπάλες η πρώτη να είναι άσπρη και η δεύτερη κόκκινη;
- Έχουμε 4 κουτιά. Το κουτί 1 περιέχει 2000 μπάλες από τις οποίες το 5% είναι ελαττωματικές. Το κουτί 2 περιέχει 500 μπάλες όπου το 40% είναι ελαττωματικές Τα κουτιά 3 και 4 περιέχουν από 1000 μπάλες όπου το 10 % είναι ελαττωματικές. Α) Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα κουτιά και αφαιρούμε τυχαία μια μπάλα. Ποια η πιθανότητα να είναι ελαττωματική Β) Εξετάζουμε την επιλεγμένη μπάλα και τις βρίσκουμε ελαττωματική. Ποια η πιθανότητα να προήλθε από το κουτί 2

Ασκήσεις στις πιθανότητες (2/2)

- Δίνονται οι παραπάνω από κοινού πιθανότητες. Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(A_i)$ για $i = 1, \ldots, 4$ και $P(B_j)$ για $j = 1, \ldots, 3$.

$$P(A_1, B_1) = 0.10, \quad P(A_1, B_2) = 0.08, \quad P(A_1, B_3) = 0.13$$
$$P(A_2, B_1) = 0.05, \quad P(A_2, B_2) = 0.03, \quad P(A_2, B_3) = 0.09$$
$$P(A_3, B_1) = 0.05, \quad P(A_3, B_2) = 0.12, \quad P(A_3, B_3) = 0.14$$
$$P(A_4, B_1) = 0.11, \quad P(A_4, B_2) = 0.04, \quad P(A_4, B_3) = 0.06$$

Τυχαία μεταβλητή: Μια απεικόνιση του δειγματοχώρου Ω στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

1. Διακριτές
2. Μη διακριτές

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής (*CDF*):

$$F_X(x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x)$$

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2. Η $F_X(x)$ είναι μη φθίνουσα
3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
4. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

- Για διακριτές τυχαίες μεταβλητές η $F_X(x)$ είναι κλιμακωτής μορφής
- Μια τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής αν η $F_X(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

- Η *PDF* μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως η παράγωγος της $F_X(x)$,

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

- Για την περίπτωση διακριτών ή μικτών τυχαίων μεταβλητών, η *PDF* περιέχει κρουστικούς παλμούς
- **Ιδιότητες:**
  1. $f_X(x) \geq 0$
  2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$
  3. $P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$
  4. $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)du$

Σημαντικές τυχαίες μεταβλητές

Bernoulli **τυχαία μεταβλητή:** Διακριτή τυχαία μεταβλητή που παίρνει τις τιμές 0 και 1 με πιθανότητες p και $1 - p$

- Χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση σφαλμάτων καναλιού
- Η *CDF* της έχει κλιμακωτή μορφή
- Η *PDF* της αποτελείται από δύο κρουστικές συναρτήσεις στο 0 και 1

Ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή: Συνεχής τυχαία μεταβλητή. Η *PDF* της δίνεται από

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Gaussian **ή κανονική τυχαία μεταβλητή:** Συνεχής τυχαία μεταβλητή που περιγράφεται συναρτήσει των παραμέτρων m και σ με την $N\left(m, \sigma^2\right)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

- Την συναντάμε πολύ συχνά στις τηλεπικοινωνίες
- Η *CDF* για *Gaussian* τυχαία μεταβλητή με $m = 0$ και $\sigma = 1$ δηλώνεται με $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

- Μια στενά συνδεδεμένη συνάρτηση είναι η $Q(x) = 1 - \Phi(x)$ η οποία δίνει την $P(X > x)$. Σε τι αντιστοιχεί;
  1. $Q(-x) = -Q(x)$
  2. $Q(0) = \frac{1}{2}$
  3. $Q(\infty) = 0$
- Στη γενική περίπτωση όπου $X\ N(m, \sigma^2)$, $P(X > x) = Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$

Ασκήσεις στις τυχαίες μεταβλητές (1/2)

- Θεωρείστε την ΤΜ Y που ορίζεται ως

$$Y = aX + b$$

  όπου a και b είναι σταθερές. Αν $f_X(x)$ είναι η *PDF* της X βρείτε την *PDF* της Y σε σχέση με την *PDF* της X

- Έστω ότι η X είναι μια *Gaussian* ΤΜ με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Έστω, ότι

$$Y = aX^3 + b, \quad a > 0$$

  Βρείτε την *PDF* της Y.

Ασκήσεις στις τυχαίες μεταβλητές (2/2)

- Στην ειδική περίπτωση, όπου για κάθε y η $g(x) = y$ έχει αριθμήσιμο σύνολο λύσεων $\{x_i\}$ και για όλες αυτές τις λύσεις υπάρχει η $g'(x_i)$ και είναι μη μηδενική τότε η *PDF* της $Y = g(X)$ είναι
$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$
- Έστω η ΤΜ Y
$$Y = aX^2 + b, \quad a > 0$$
Βρείτε με δύο τρόπους την *PDF* της Y αν γνωρίζεται την *PDF* της X.

Στατιστικές ιδιότητες των τυχαίων μεταβλητών

- Οι τυχαίες μεταβλητές θα μπορούσαν να περιγραφούν από τα στατιστικά τους χαρακτηριστικά
- Θεωρείστε την ΤΜ που αντιστοιχεί στο έκβασμα της ρίψης ενός ζαριού. Ποια είναι η μέση τιμή της;
- Αν τα εκβάσματα είναι διακριτά αλλά όχι ισοπίθανα τότε

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

- Ενώ στη συνεχή περίπτωση

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

Στατιστικές ιδιότητες των τυχαίων μεταβλητών

- Επειδή η μέση τιμή είναι κάτι σημαντικό, την ορίζω ως πράξη, ως τελεστή

  Τελεστής στατιστικής αναμονής (*Expectation operator*) $E[\cdot]$:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = m_x$$

- Η αναμενόμενη τιμή της $Y = g(X)$ είναι

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

- Αν $Y = g(X) = (X - m_x)^2$ τότε η $E[g(X)]$ ορίζεται ως η διασπορά της X και δείχνει τη διακύμανση της X γύρω από τη μέση τιμή της. Συμβολίζεται με $VAR(X)$

Πολλαπλές Τυχαίες Μεταβλητές (1/2)

- Έστω ότι έχω δύο ΤΜ και θέλω να δω τι μου λέει η μια για την άλλη. Ότι κάναμε και στις πιθανότητες·
- Η συνδυασμένη αθροιστική συνάρτηση κατανομής (*joint CDF*) ορίζεται ως:

$$F_{X,Y}(x,y) = P\left(X \leq x, Y \leq y\right)$$

- και η συνδυασμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως

$$f_{X,Y}\left(x,y\right) = \frac{\theta^2}{\theta x \theta y} F_{X,Y}(x,y)$$

- Η υποσυνθήκη *PDF* μιας τυχαίας μεταβλητής Y, υπό την προϋπόθεση ότι η τιμή της τυχαίας μεταβλητής X είναι ίση με x, δηλώνεται με $f_{Y|X}\left(y\,|x\right)$ και ορίζεται ως

$$f_{Y|X}\left(y\,|x\right) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, & f_X\left(x\right) \neq 0 \\ 0, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

Πολλαπλές Τυχαίες Μεταβλητές (2/2)

- Αν $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$, τότε οι τυχαίες μεταβλητές ονομάζονται στατιστικά ανεξάρτητες και ισχύει ότι

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Στατιστικές ιδιότητες πολλαπλών τυχαίων μεταβλητών

Συσχέτιση (*Corelation*) $r_{x,y}$:

$$r_{x,y} = E[xy^*] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy^* f_{x,y}(x,y)\, dxdy$$

Συμμεταβολή (*Covariance*) $COV(x,y)$:

$$COV(x,y) = C_{x,y} = E[(x-m_x)(y-m_y)^*]$$

- Αν $m_x = 0$, τότε $C_{x,y} = r_{x,y}$ και χρησιμοποιούνται ισοδύναμα.
- Αν ισχύει $C_{x,y} = 0$ τότε $E[xy] = m_x m_y$ τότε λέμε ότι οι ΤΜ είναι ασυσχέτιστες

Πολλαπλές συναρτήσεις πολλαπλών τυχαίων μεταβλητών

- Έστω X, Y, Z, W τυχαίες μεταβλητές και επίσης

$$\begin{cases} Z &= g(X, Y) \\ W &= h(X, Y) \end{cases}$$

- Αν για κάθε z, w η επίλυση των

$$\begin{cases} z &= g(x, y) \\ w &= h(x, y) \end{cases}$$

έχει αριθμήσιμο πλήθος λύσεων x_i, y_i και στα σημεία αυτά η ορίζουσα του *Jacobian* πίνακα είναι μη μηδενική

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

τότε

$$f_{Z,W}(z, w) = \sum_i \frac{f_{X,Y}(x_i, y_i)}{|detJ(x_i, y_i)|}$$

Πολλαπλές συναρτήσεις Πολλαπλών τυχαίων μεταβλητών

- Έστω X_1, X_2 Τ.Μ. με από κοινού *pdf* $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ και έστω

$$\begin{cases} Y_1 &= g_1(X_1, X_2) \\ Y_2 &= g_2(X_1, X_2) \end{cases}$$

  όπου g_1, g_2 είναι αντιστρέψιμες συναρτήσεις $X_i = g_i^{-1}(Y_1, Y_2)$ με συνεχείς παραγώγους Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ δοθέντος της $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$
- Αν R_x ο 2-διάστατος χώρος που ορίζουν οι X_1, X_2 και R_Y ο χώρος που ορίζουν οι Y_1, Y_2

$$\int_{R_x}\int f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{R_y}\int f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2$$

Πολλαπλές συναρτήσεις Πολλαπλών τυχαίων μεταβλητών

- Κάνοντας την παραπάνω αλλαγή μεταβλητής $x_i = g_i^{-1}(Y_1, Y_2)$ στη παραπάνω έκφραση

$$\int_{R_y}\int f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 = \int_{R_x}\int f_{X_1,X_2}\left(g_2^{-1}(y_1, y_2), g_2^{-1}(y_1, y_2)\right)|J|\, dy_1 dy_2 \qquad (2)$$

όπου

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_2} \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}\left(g_2^{-1}(y_1, y_2), g_2^{-1}(y_1, y_2)\right)|J|$$

Ασκήσεις (1/2)

- Έστω $X_1, \ldots, X_N$, N ανεξάρτητες *Gaussian* ΤΜ μέσης τιμής 0 και διασποράς 1. Υπολογίστε τη *PDF* της ΤΜ $Y = max\left(X_1, \ldots, X_N\right)$
- Έστω X_r, X_i στατιστικά ανεξάρτητες μηδενικής μέσης τιμής *Gausssian* ΤΜ με μοναδιαία διασπορά. Δείξτε ότι ο παρακάτω μετασχηματισμός

$$Y_r + jY_i = \left(X_r + jX_i\right) e^{j\phi}$$

  οδηγεί σε ένα άλλο ζεύγος *Gaussian* ΤΜ με την ίδια από κοινού *PDF* με αυτή των X_r, X_i

Ασκήσεις (2/2)

- Οι δύο ΤΜ X, Y είναι ανεξάρτητες και *Gaussian* μέσης τιμής 0 και διασποράς σ^2. Αν αυτές δηλώνουν τις συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο, βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των πολικών συντεταγμένων του σημείου (μέτρο και φάση).

Τυχαία Διαδικασία $X(t)$: Είναι μια συνάρτηση χρόνου. Η τιμή της συνάρτησης αυτής σε κάθε χρονική στιγμή είναι μια τυχαία μεταβλητή

- Η ρίψη ενός ζαριού πολλές φορές
- Το σήμα $x(t) = A\cos(\omega t)$, όπου A μια ΤΜ
- Μια ακολουθία από *bits* είναι επίσης μια τυχαία διαδικασία

- Οι στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου $X(t)$ ορίζονται σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή
- ενώ οι διακριτού χρόνου $X[n]$ ορίζονται σε διακριτές χρονικές στιγμές
- Ανάλογα επίσης με τις τιμές που λαμβάνουν οι στοχαστικές διαδικασίες διαχωρίζονται σε συνεχείς (αν οι τιμές τις είναι συνεχείς ΤΜ) και διακριτές

Στατιστικές ιδιότητες πρώτης τάξης

- Έστω μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου (ακολουθία τυχαίων μεταβλητών). Η ακολουθία μέσω τιμών ορίζεται ως

$$m_x(n) = E\left[X\left[n\right]\right] = \sum_k a_k Pr\left\{X\left[n\right] = a_k\right\}$$

- Η συνάρτηση μέσων τιμών για συνεχής στοχαστικές διαδικασίες ορίζεται ως

$$m_x\left(t\right) = E\left[X\left(t\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} a f_{X(t)}(a) da$$

- Κατά ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία και συνάρτηση διασπορών μιας στοχαστικής διαδικασίας διακριτού και συνεχούς χρόνου αντίστοιχα.

Στατιστικές ιδιότητες δεύτερης τάξης

Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης: Παρέχει πληροφορίες για τη στατιστική σχέση που έχουν δύο ΤΜ μέσα στην ίδια διαδικασία. Ποια η σχέση ανάμεσα στις ΤΜ $X(t_1)$ και $X(t_2)$

$$\begin{aligned} R_{xx}(t_1, t_2) &= E[X(t_1) X(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_1 a_2 f_{X(t_1),X(t_2)}(a_1, a_2)\, da_1 da_2 \end{aligned}$$

- Αν $t_1 = t_2 = t$, και $m_x = 0$ τότε

$$R_{xx}(t, t) = E\left[X^2(t)\right] = \sigma_x^2$$

Συνάρτηση ετεροσυσχέτισης: $R_{xy}(t_1, t_2) = E[X(t_1) Y(t_2)]$

Στασιμότητα (*Stationarity*)

- Μια τυχαία διαδικασία είναι στάσιμη όταν τα στατιστικά της χαρακτηριστικά είναι ανεξάρτητα του χρόνου.

Αυστηρή στασιμότητα:

$$f_{X_{t_1},\ldots,X_{t_N}}\left(a_1,\ldots,a_n\right)=f_{X_{t_1+t},\ldots,X_{t_N+t}}\left(a_1,\ldots,a_n\right)$$

για κάθε t και για όλα τα n.

Πρώτης & Δεύτερης τάξης στασιμότητα: $f_{X_{t_1}}\left(a\right)=f_{X_{t_1+t}}(a),\ \forall t$ Οι στατιστικές ιδιότητες πρώτης τάξης είναι ανεξάρτητες του χρόνου Μια δεύτερης τάξης στάσιμη είναι και πρώτης τάξης και επίσης

$$R_{xx}\left(t_1,t_2\right)=R_{xx}\left(t_1-t_2,0\right)$$

Εξάρτηση μόνο από τη χρονική μετατόπιση (*lag*)

Στασιμότητα με την ευρεία έννοια (*WSS*)

- Η μέση τιμή είναι ανεξάρτητη του χρόνου $m_X(t) = m_X$
- Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης εξαρτάται μόνο από το *lag*

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_1 - t_2)$$

- **Βασικές Ιδιότητες:**
  1. Συμμετρία: $R_{xx}(t) = \overline{R}_{xx}(-t)$
  2. Μέση Τετραγωνική Τιμή: $R_{xx}(0) = E\left[|X(t)|^2\right] \geq 0$
  3. Μέγιστη τιμή: $|R_{xx}(t)| \leq R_{xx}(0)$
  4. Περιοδικότητα: $R_{xx}(kt_0) = R_{xx}(t_0)$ για κάθε ακέραιο k

Εργοδικότητα

- Έστω μια διακριτή στοχαστική διαδικασία $X[n]$, και $x_i[n]$, $i = 1, \ldots, L$ μια τεράστια συλλογή από υλοποιήσεις της.
- Ο χρονικός μέσος όρος αποτελεί μια εκτίμηση της μέσης τιμής

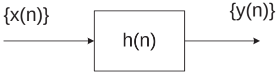
$$\hat{m}_X[n] = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} x_i[n]$$

- Στις περισσότερες περιπτώσεις έχουμε στη διάθεσή μας ένα μόνο σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$
- Αν περιοριστούμε στις *WSS* διαδικασίες τότε $\hat{m}_X[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x[n]$

Εργοδικότητα ως προς τη μέση τιμή: Μια *WSS* διαδικασία λέγεται εργοδική ως προς τη μέση τιμή αν ο χρονικός μέσος όρος συγκλίνει στο στοχαστικό μέσο όρο

$$\lim_{N\to\infty} \hat{m}_X(N) = m_X$$

Φιλτράρισμα Στοχαστικών Διαδικασιών



- Έστω ότι η είσοδος είναι *WSS* με μέση τιμή m_X και συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}[k]$
- Η έξοδος $Y[n]$ θα είναι επίσης στοχαστική διαδικασία με τα εξής χαρακτηριστικά:
  1. Μέση τιμή:
  $$E[Y(n)] = m_X H\left(e^{j0}\right)$$
  2. Αυτοσυσχέτιση:
  $$R_{yy}(k) = R_{xx}(k) * h[k] * \overline{h}[-k]$$
  Το σύμβολο $*$ δηλώνει συνέλιξη
  3. Αν η $X[n]$ είναι *WSS* τότε και η $Y[n]$ είναι *WSS* δοθέντος ότι $\sigma_Y^2 < \infty$, δηλαδή το φίλτρο ευσταθές

Πυκνότητα Φάσματος Ισχύος

- Πως θα μπορούσε να εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός *Fourier* σε τυχαίες διαδικασίες;
- Για τυχαίες διαδικασίες ορίζουμε το μετασχηματισμό *Fourier* βασισμένοι στα στατιστικά χαρακτηριστικά
- Ο Μ. *F.* της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης καλείται φάσμα ισχύος ή πυκνότητα φάσματος ισχύος

$$P_x\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}\left[k\right] \cdot e^{-jk\omega}$$

- Στη περίπτωση του φιλτραρίσματος μιας τυχαίας διαδικασίας το φάσμα ισχύος της εξόδου δίνεται από την

$$P_y\left(\omega\right) = P_x\left(\omega\right)\left|H\left(\omega\right)\right|^2$$

$H\left(\omega\right)$: Η απόκριση συχνότητας του φίλτρου

Ασκήσεις στις Στοχαστικές Διαδικασίες (1/2)

- Έστω ότι οι τυχαίες διαδικασίες $X(t)$, $Y(t)$ είναι στάσιμες και από κοινού στάσιμες. Βρείτε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $Z(t) = X(t) + Y(t)$· Βρείτε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του $Z(t)$ όταν οι $X(t)$, $Y(t)$ είναι ασυσχέτιστες και όταν είναι ασυσχέτιστες και έχουν μηδενική μέση τιμή.
- Υπολογίστε τη μέση τιμή, την ακολουθία αυτοσυσχέτισης, την πυκνότητα ισχύος ενός συστήματος με απόκριση

$$h(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ -2 & (n = 1) \\ 1 & (n = 2) \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

όταν διεγείρεται από διαδικασία λευκού θορύβου με διασπορά σ_x^2.

Ασκήσεις στις Στοχαστικές Διαδικασίες (2/2)

- Έστω X, Y δύο *Gaussian* τυχαίες μεταβλητές που είναι ασυσχέτιστες, έχουν μηδενική μέση τιμή και διασπορά 1. Έστω $A(t)$ μια τυχαία διαδικασία που ορίζεται ως:

$$A(t) = X \cos(2\pi t) + Y \sin(2\pi t).$$

Είναι η $A(t)$ *WSS*; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.