Βασικές έννοιες από Στοχαστικές Διαδικασίες

Στο κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε κάποιες βασικές έννοιες που αφορούν τις στοχαστικές διαδικασίες. Στόχος του κεφαλαίου δεν είναι να περιγράψει αναλυτικά τις αντίστοιχες έννοιες, αλλά να δώσει μια συνοπτική περιγραφή τους.

1 Η έννοια της στοχαστικής διαδικασίας

Ας υποθέσουμε πως κάνουμε ένα πείραμα τύχης στο οποίο ρίχνουμε ένα ζάρι και κρατάμε το αποτέλεσμα του πειράματος. Το αποτέλεσμα του πειράματος είναι έτσι ένας ακέραιος αριθμός από το 1 έως το 6. Όπως γνωρίζουμε, το αποτέλεσμα του συγκεκριμένου πειράματος τύχης μπορεί να αναπαρασταθεί από μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X η οποία λαμβάνει τις ακέραιες τιμές από 1 έως 6, κάθε μια με πιθανότητα $1/6$.

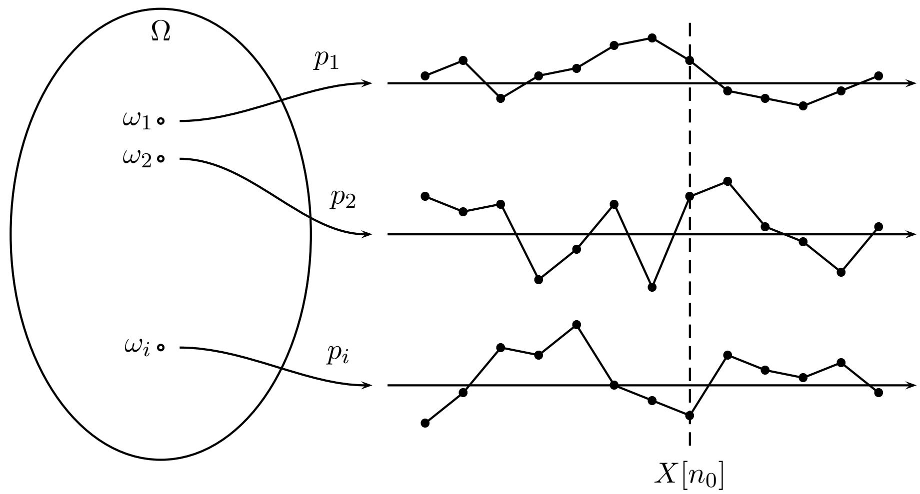
Ας υποθέσουμε τώρα πως κάνουμε ένα διαφορετικό πείραμα τύχης στο οποίο ρίχνουμε αρχικά ένα ζάρι, κρατάμε το αποτέλεσμα, στη συνέχεια ρίχνουμε ένα νόμισμα και κρατάμε το αποτέλεσμα κ.ο.κ. Διαπιστώνουμε πως αυτό το πείραμα τύχης δεν μπορεί να περιγραφεί από μια τυχαία μεταβλητή όπως το προηγούμενο. Αντίθετα, εδώ έχουμε μια *εξάρτηση από το χρόνο* γιατί για παράδειγμα είναι αδύνατο να πάρουμε το αποτέλεσμα "γράμματα " όταν τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή ρίχναμε το ζάρι. Για να περιγράψουμε το φαινόμενο αυτό, θέλουμε μια διαφορετική τυχαία μεταβλητή για κάθε χρονική στιγμή. Πιο συγκεκριμένα, το πείραμα περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή X του προηγούμενου πειράματος και από μια άλλη διακριτή τυχαία μεταβλητή Y η οποία λαμβάνει τις τιμές 1 (αντιστοιχία με κορώνα) και 2 (αντιστοιχία με γράμματα) κάθε μια με πιθανότητα $1/2$. Η τυχαία μεταβλητή X ισχύει για τις χρονικές στιγμές $0, 2, 4, 6, \ldots$ και η τυχαία μεταβλητή Y ισχύει για τις χρονικές στιγμές $1, 3, 5, \ldots$

Ας υποθέσουμε τώρα πως εκτελούμε το παραπάνω πείραμα τύχης για τις χρονικές στιγμές από 0 έως $K-1$. Καταλήγουμε έτσι σε μια ακολουθία αποτελεσμάτων

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{K-1}\}$$

Η πιθανότητα η ακολουθία A να είναι μια συγκεκριμένη ακολουθία (π.χ. $A_0 = \{4, 2, 6, 1, 1, 2, 5, 1, \ldots, 1\}$) τότε θα είναι

$$Pr\{A = A_0\} = \left(\frac{1}{6}\right)^{K_1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{K_2}$$



Σχήμα 1: Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια αντιστοίχιση από ένα σύνολο σημάτων Ω στις πιθανότητες $p_1, p_2, \ldots, p_i$. Επίσης, σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή n_0 η τιμή της στοχαστικής διαδικασίας είναι μια τυχαία μεταβλητή $X[n_0]$

όπου K_1 και K_2 είναι το πλήθος των πειραμάτων με το ζάρι και το νόμισμα αντίστοιχα και $K = K_1 + K_2$. Επομένως, ένας άλλος τρόπος να περιγράψουμε αυτό το πείραμα τύχης είναι να δώσουμε όλες τις πιθανότητες για όλες τις πιθανές ακολουθίες A.

Με βάση όλα όσα περιγράψαμε, προκύπτουν οι ακόλουθοι δυο ισοδύναμοι ορισμοί για την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας:

1. Μια στοχαστική διαδικασία $X(t)$ είναι μια συνάρτηση του χρόνου. Η τιμή της συνάρτησης αυτής σε κάθε χρονική στιγμή είναι μια τυχαία μεταβλητή.

2. Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια αντιστοίχιση από ένα σύνολο σημάτων Ω (όπως η ακολουθία A) στο σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών (πιθανότητες ή πυκνότητες πιθανότητας). Κάθε ένα σήμα του δειγματοχώρου Ω ονομάζεται *στιγμιότυπο* ή *υλοποίηση* της στοχαστικής διαδικασίας.

Στο σχήμα (1) παρουσιάζουμε σχηματικά τους ανωτέρω ορισμούς.

Με βάση τις χρονικές στιγμές στις οποίες ορίζεται μια στοχαστική διαδικασία έχουμε τις ακόλουθες κατηγορίες:

1. Στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου: Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $X(t)$ ορίζεται σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

2. Στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου: Μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου $X[n]$ ορίζεται μόνο σε διακριτές χρονικές στιγμές.

Επιπρόσθετα, ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνει μια στοχαστική διαδικασία έχουμε τις ακόλουθες κατηγορίες:

1. Συνεχείς στοχαστικές διαδικασίες: Η τιμές μιας συνεχούς στοχαστικής διαδικασίας είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

2. Διακριτές στοχαστικές διαδικασίες: Η τιμές μιας διακριτής στοχαστικής διαδικασίας είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές.

Οι διακριτές στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου ονομάζονται και *αλυσίδες*.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια συνεχούς χρόνου στοχαστική διαδικασία $X(t)$. Θεωρούμε ακόμα τις τιμές της στοχαστικής διαδικασίας στις χρονικές στιγμές $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, όπου n ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Οι τιμές αυτές θα είναι οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ οι οποίες υποθέτουμε πως λαμβάνουν συνεχείς τιμές. Τότε, οι τυχαίες αυτές μεταβλητές περιγράφονται πλήρως από την *από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* των τυχαίων αυτών μεταβλητών $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2 Στατιστικές ιδιότητες πρώτης & δεύτερης τάξης

Στην παράγραφο αυτή, θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τις στατιστικές ιδιότητες πρώτης και δεύτερης τάξης μιας στοχαστικής διαδικασίας. Προηγουμένως, θα ήταν χρήσιμο, να υπενθυμίσουμε την έννοια του τελεστή E.

Ο τελεστής E μας δίνει τη μέση ή αναμενόμενη τιμή (mean or expected value) μιας τυχαίας μεταβλητής. Αν υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή και αποκτά τιμή a_k με πιθανότητα $Pr\{X = a_k\}$, τότε ορίζουμε:

$$E[X] = \sum_k a_k \cdot Pr\{x = a_k\} \tag{1}$$

Αντίστοιχα, αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής, τότε η μέση τιμή της ορίζεται με τη βοήθεια της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητάς της:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot f_X(a) da \tag{2}$$

όπου $f_X(\cdot)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

Έχοντας υπενθυμίσει την έννοια του τελεστή E, θα επιστρέψουμε στην περιγραφή των στατιστικών ιδιοτήτων πρώτης τάξης μιας στοχαστικής διαδικασίας. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου $X[n]$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Σε αυτήν την ακολουθία, θα θέλαμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή κάθε τυχαίας μεταβλητής και να δημιουργήσουμε την *ακολουθία μέσων τιμών*:

$$m_X[n] = E[X[n]] = \sum_k a_k \cdot Pr\{X[n] = a_k\} \tag{3}$$

Στην περίπτωση όπου έχουμε μια συνεχή στοχαστική διαδικασία ορίζουμε αντίστοιχα τη *συνάρτηση μέσων τιμών*:

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot f_{X(t)}(a)da \tag{4}$$

όπου με $f_{X(t)}(\cdot)$ έχουμε συμβολίσει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής - τιμής της διαδικασίας $X(t)$ στο χρόνο t.

Κατά παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και την *ακολουθία διασπορών* μιας στοχαστικής διαδικασίας διακριτού χρόνου ως

$$\sigma_X^2[n] = E[|X[n] - m_X[n]|^2] = \sum_k (a_k - E[X[n]])^2 \cdot Pr\{X[n] = a_k\} \tag{5}$$

και την *συνάρτηση διασπορών* μιας στοχαστικής διαδικασίας συνεχούς χρόνου

$$\sigma_X^2(t) = E[|X(t) - m_X(t)|^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (a - E[X(t)])^2 \cdot f_{X(t)}(a)da \tag{6}$$

Οι συναρτήσεις (ή ακολουθίες) μέσων τιμών και διασπορών μιας στοχαστικής διαδικασίας αποτελούν τα στατιστικά πρώτης τάξης και όπως φάνηκε παραπάνω, στη γενική περίπτωση, εξαρτώνται από τη χρονική στιγμή t (ή n).

Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε στην αυτοσυσχέτιση μιας στοχαστικής διαδικασίας. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας στοχαστικής διαδικασίας ανήκει στις στατιστικές ιδιότητες δεύτερης τάξης. Η συνάρτηση αυτή μας παρέχει πληροφορίες για τη στατιστική σχέση που έχουν δύο τυχαίες μεταβλητές μέσα στην ίδια διαδικασία. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $X(t)$ και κάποιες συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, t_1 και t_2. Στόχος μας είναι να δούμε ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις τυχαίες μεταβλητές $X(t_1)$ και $X(t_2)$. Αυτό εκφράζεται μέσα από τη *συνάρτηση αυτοσυσχέτισης* (autocorrelation function):

$$\begin{aligned} R_{xx}(t_1, t_2) &= E[X(t_1) \cdot X(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_1 \cdot a_2 \cdot f_{X(t_1),X(t_2)}(a_1, a_2)da_1 da_2 \end{aligned} \tag{7}$$

όπου $f_{X(t_1),X(t_2)}(a_1, a_2)$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $X(t_1)$ και $X(t_2)$.

Σε περιπτώσεις που εμφανίζονται περισσότερες από μία στοχαστικές διαδικασίες, συχνά είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε τη στατιστική σχέση ανάμεσα σε μια τυχαία μεταβλητή της μιας διαδικασίας, έστω $X(t_1)$, και την τυχαία μεταβλητή μιας άλλης διαδικασίας, έστω $Y(t_2)$. Η σχέση αυτή μας δίνεται από τη *συνάρτηση ετεροσυσχέτισης* (cross-correlation function)των δύο διαδικασιών, η οποία ορίζεται ως:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot Y(t_2)] \tag{8}$$

3 Στασιμότητα (Stationarity)

Σε πολλές εφαρμογές επεξεργασίας σημάτων, οι στατιστικές ιδιότητες που περιγράψαμε παραπάνω είναι ανεξάρτητες του χρόνου t (για την περίπτωση του συνεχούς χρόνου) ή n (για την περίπτωση του διακριτού χρόνου). Για παράδειγμα, ο θόρυβος κβαντισμού που εισάγεται σε ένα DSP (Digital Signal Processor) με αριθμητική σταθερής υποδιαστολής, λόγω της πεπερασμένης αριθμητικής ακρίβειας, συνήθως έχει σταθερή μέση τιμή και διασπορά. Γενικά, θεωρούμε ότι ο θόρυβος κβαντισμού έχει στατιστικά πρώτης και δεύτερης τάξης που είναι χρονικά αμετάβλητα.

Αυτές οι συνθήκες αποτελούν παραδείγματα “στατιστικής χρονικής Σταθερότητας ”ή “στασιμότητας ” (stationarity). Στη συνέχεια, θα ορίσουμε διάφορα είδη στασιμότητας.

Αυστηρή στασιμότητα: Ας θεωρήσουμε μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $X(t)$ και τις τιμές της στις χρονικές στιγμές $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ $X(t_i) = X_{t_i}, i = 1, 2, \ldots, n$. Οι τυχαίες αυτές μεταβλητές όπως έχουμε ήδη αναφέρει χαρακτηρίζονται πλήρως από την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς τους $f(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα άλλο σύνολο από n τυχαίες μεταβλητές $X_{t_i+t} = X(t_i + t), i = 1, 2, \ldots, n$, όπου t μια αυθαίρετη χρονική μετατόπιση. Το νέο αυτό σύνολο από τις τυχαίες μεταβλητές χαρακτηρίζεται πλήρως από την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(X_{t_1+t}, X_{t_2+t}, \ldots, X_{t_n+t})$. Όταν ισχύει η σχέση:

$$f_{X_{t_1},X_{t_2},\ldots,X_{t_n}}(a_1, \ldots, a_n) = f_{X_{t_1+t},X_{t_2+t},\ldots,X_{t_n+t}}(a_1, \ldots, a_n) \qquad (9)$$

για κάθε t και για όλα τα n, η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ θα ονομάζεται *αυστηρώς στάσιμη*. Η ιδιότητα αυτή εκφράζει πως όλα τα στατιστικά χαρακτηριστικά της διεργασίας $X(t)$ είναι χρονικά αμετάβλητα.

M-τάξης στασιμότητα: Μια στοχαστική διαδικασία $X(t)$ είναι M-τάξης στάσιμη, αν η παραπάνω εξίσωση ισχύει μόνο για $n \leq M$. Για παράδειγμα, μια διαδικασία είναι πρώτης τάξης στάσιμη, αν ισχύει:

$$f_{X(t_1)}(a) = f_{X(t_1+t)}(a) \qquad \forall t \qquad (10)$$

Σε μια τέτοια διαδικασία, οι στατιστικές ιδιότητες πρώτης τάξης (μέση τιμή και διασπορά) θα είναι ανεξάρτητες του χρόνου, για παράδειγμα:

$$m_X(t) = m_X$$

Κατά αναλογία, μια τυχαία διαδικασία είναι δεύτερης τάξης στάσιμη, αν ισχύει:

$$f_{X(t_1),X(t_2)}(a_1, a_2) = f_{X(t_1+t),X(t_2+t)}(a_1, a_2) \qquad \forall t \qquad (11)$$

Μια δεύτερης τάξης στάσιμη διαδικασία είναι ταυτόχρονα και πρώτης τάξης στάσιμη. Επιπλέον, τα στατιστικά δεύτερης τάξης (συνάρτηση αυτοσυσχέτισης) είναι ανεξάρτητα του χρόνου, δηλαδή:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_1 - t_2, 0) \tag{12}$$

η οποία εξαρτάται μόνο από τη χρονική μετατόπιση $t_1 - t_2$ την οποία ονομάζουμε και lag. Μπορούμε έτσι να απλοποιήσουμε το συμβολισμό της προηγούμενης σχέσης και να γράψουμε:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_1 - t_2) \tag{13}$$

Επειδή η ισχυρή στασιμότητα είναι πολύ αυστηρή συνθήκη και σπάνια ακολουθείται από φυσικές διαδικασίες, συνήθως χρησιμοποιείται ένας χαλαρότερος ορισμός της στασιμότητας:

Στασιμότητα με την ευρεία έννοια: μια τυχαία διαδικασία είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια (wide sense stationary ,WSS), αν τηρούνται οι δύο παρακάτω συνθήκες:

1. Η μέση τιμή είναι ανεξάρτητη του χρόνου, δηλαδή

$$m_X(t) = m_X$$

2. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(t_1, t_2)$ εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά $lag = t_1 - t_2$, και όχι από τις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, t_1 και t_2, δηλαδή

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_1 - t_2)$$

Επειδή η WSS στασιμότητα εμφανίζεται σε πολλές εφαρμογές, αναφέρουμε στη συνέχεια κάποιες βασικές της ιδιότητες:

1. Συμμετρία: Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας WSS διαδικασίας είναι συζυγώς συμμετρική, δηλαδή:

$$R_{xx}(t) = \overline{R}_{xx}(-t)$$

   όπου το σύμβολο $\overline{R}$ δηλώνει το συζυγή μιγαδικό (στη γενική περίπτωση όπου οι τυχαίες μεταβλητές που συμμετέχουν στη στοχαστική διαδικασία λαμβάνουν μιγαδικές τιμές).

2. Μέση Τετραγωνική Τιμή: Η τιμή της αυτοσυσχέτισης μιας WSS διαδικασίας στο lag $t = 0$ ισούται με τη μέση τετραγωνική τιμή της διαδικασίας, δηλαδή:

$$R_{xx}(0) = E[|X(t)|^2] \geq 0$$

3. Μέγιστη Τιμή: Το μέτρο της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης μιας WSS διαδικασίας στο lag t έχει ως άνω όριο την τιμή της συνάρτησης για το lag $t = 0$, δηλαδή:
$$|R_{xx}(t)| \leq R_{xx}(0)$$

4. Περιοδικότητα: Αν για κάποιο t_0 η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας WSS διαδικασίας είναι $R_{xx}(t_0) = R_{xx}(0)$, τότε η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο t_0:
$$R_{xx}(k \cdot t_0) = R_{xx}(0)$$
όπου k οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός.

Τέλος, για την περίπτωση που έχουμε δύο ή περισσότερες στοχαστικές διαδικασίες, υπάρχουν αντίστοιχοι ορισμοί για την από κοινού στασιμότητα (joint stationarity).Για παράδειγμα, δύο διαδικασίες, $X(t)$ και $Y(t)$, είναι από κοινού WSS (jointly WSS) αν καθεμιά από αυτές είναι WSS και η ετεροσυσχέτισή τους (σχέση 8) εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $lag = t_1 - t_2$:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1 - t_2)$$

4 Εργοδικότητα (Ergodicity)

Η μέση τιμή και η αυτοσυσχέτιση μιας στοχαστικής διαδικασίας διακριτού χρόνου αποτελούν στατιστικές ιδιότητες, οι οποίες προκύπτουν χρησιμοποιώντας όλα τα σήματα διακριτού χρόνου που αποτελούν τη διαδικασία. Ωστόσο, σε πολλά προβλήματα, αν και χρειαζόμαστε τα παραπάνω στατιστικά, δεν τα γνωρίζουμε εξαρχής, αλλά θα πρέπει να τα εκτιμήσουμε από τα δεδομένα.

Ας υποθέσουμε λοιπόν, ότι έχουμε μια στοχαστική διαδικασία, $X[n]$, και έχουμε μια τεράστια συλλογή από υλοποιήσεις της, δηλαδή από σήματα διακριτού χρόνου, $x_i[n], i = 1, 2, \ldots, L$. Στην περίπτωση αυτή, θα μπορούσαμε να κάνουμε μια εκτίμηση της μέσης τιμής, ως το χρονικό μέσο όρο:

$$\hat{m}_X[n] = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} x_i[n] \tag{14}$$

Όμως, στις περισσότερες εφαρμογές, δεν έχουμε διαθέσιμες όλες αυτές τις υλοποιήσεις της $X[n]$, αλλά μόνο μια υλοποίησή της, δηλαδή ένα μόνο σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$. Στην περίπτωση αυτή επομένως, η σχέση (14) μας είναι άχρηστη. Αν περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας σε WSS διαδικασίες, τότε έχουμε το πλεονέκτημα ότι η ακολουθία της μέσης τιμής είναι σταθερή, εφόσον η μέση τιμή είναι ανεξάρτητη του χρόνου, δηλαδή $m_X[n] = m_X$. Έτσι, στις περιπτώσεις αυτές γεννάται το ερώτημα, αν μπορώ να εκτιμήσω τη στοχαστική μέση τιμή του σήματος (που θα είναι σταθερή για όλες τις χρονικές στιγμές) ως τη μέση τιμή μιας υλοποίησης του σήματος. Δηλαδή, αν μπορεί να γίνει η παρακάτω εκτίμηση της μέσης τιμής:

$$\hat{m}_X[N] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x[n] \tag{15}$$

Έτσι καταλήγουμε στον ορισμό της εργοδικότητας πρώτης τάξης: Μια WSS στοχαστική διαδικασία λέγεται εργοδική πρώτης τάξης, αν ο χρονικός μέσος όρος, $\hat{m}_X[N]$, συγκλίνει υπό την έννοια του μέσου τετραγώνου στη στοχαστική μέση τιμή:

$$\lim_{N \leftarrow \infty} \hat{m}_X[N] = m_X$$

Κατά ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και την εργοδικότητα δεύτερης τάξης. Συγκεκριμένα, μια WSS στοχαστική διαδικασία λέγεται εργοδική δεύτερης τάξης, αν μπορώ να εκτιμήσω τα στατιστικά δεύτερης τάξης με χρονικούς, αριθμητικούς μέσους όρους. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε ότι μια στοχαστική διαδικασία είναι εργοδική δεύτερης τάξης, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε την αυτοσυσχέτισή της ως:

$$\hat{R}_{xx}[k, N] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x[n] \cdot x[n-k] \tag{16}$$

5 Φιλτράρισμα Στοχαστικών Διαδικασιών

Τα γραμμικά, χρονικά σταθερά φίλτρα χρησιμοποιούνται σε μια πληθώρα εφαρμογών για να εκτελέσουν κάποια επεξεργασία πάνω σε μια στοχαστική διαδικασία. Για το λόγο αυτό, μας ενδιαφέρει να δούμε τι γίνεται στην περίπτωση που μια στοχαστική διαδικασία περάσει μέσα από ένα φίλτρο. Έστω λοιπόν, η WSS στοχαστική διαδικασία $X[n]$, με μέση τιμή m_X και συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}[k]$. Αν η διαδικασία αυτή φιλτραριστεί από ένα γραμμικό, χρονικά σταθερό φίλτρο με κρουστική απόκριση $h[n]$, τότε η έξοδος $Y[n]$ θα είναι επίσης μια στοχαστική διαδικασία με τα εξής χαρακτηριστικά:

- Μέση τιμή:
  $$E[Y[n]] = m_X \cdot H(e^{j0}) \tag{17}$$
  Από τη σχέση αυτή διαπιστώνουμε ότι η $Y[n]$ έχει σταθερή μέση τιμή, m_Y, και ίση με τη μέση τιμή της $X[n]$ πολλαπλασιασμένη με την τιμή της απόκρισης συχνότητας του φίλτρου στη συχνότητα $\omega = 0$.

- Αυτοσυσχέτιση:
  $$R_{yy}(k) = R_{xx}(k) * h[k] * \overline{h}[-k] \tag{18}$$
  Όπου το σύμβολο $*$ δηλώνει συνέλιξη.

Από τις (17) και (18), προκύπτει ότι αν η $X[n]$ είναι WSS, τότε και η $Y[n]$ είναι WSS δοθέντος ότι $\sigma_Y^2 < \infty$ δηλαδή ότι το φίλτρο είναι ευσταθές. Επίσης, προκύπτει ότι οι δύο διαδικασίες είναι και από κοινού WSS (jointly WSS).

6 Πυκνότητα Φάσματος Ισχύος (Power Spectral Density)

Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier παίζει ένα σημαντικό ρόλο για την περιγραφή και την ανάλυση ντετερμινιστικών σημάτων διακριτού χρόνου. Αντίστοιχα, είναι εξίσου σημαντικός και στην περίπτωση των στοχαστικών σημάτων. Ωστόσο, επειδή μια τυχαία διαδικασία είναι μια συλλογή σημάτων διακριτού χρόνου, δε μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της ίδιας της διαδικασίας. Έτσι, θα πρέπει να ορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier βασιζόμενοι σε στατιστικά χαρακτηριστικά. Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας WSS διαδικασίας παρέχει μια περιγραφή των στατιστικών δεύτερης τάξης της διαδικασίας στο πεδίο του χρόνου. Εφόσον η $R_{xx}[k]$ είναι μια ντετερμινιστική ακολουθία, μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της:

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}[k] \cdot e^{-jk\omega} \tag{19}$$

ο οποίος καλείται φάσμα ισχύος (power spectrum) ή πυκνότητα φάσματος ισχύος (power spectral density) της διαδικασίας.

Η σχέση (19) απλά ορίζει το φάσμα ισχύος μιας τυχαίας διαδικασίας. Ωστόσο, δε μας δίνει πολλά στοιχεία για το πώς μπορεί αυτό να υπολογιστεί σε πραγματικές εφαρμογές. Έτσι, αν έχουμε μια εργοδική διαδικασία, τότε το φάσμα ισχύος της μπορεί να βρεθεί ως:

$$\hat{P}_x(\omega, N) = \frac{1}{N}|X(\omega)|^2 \tag{20}$$

Τέλος, να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση του φιλτραρίσματος μιας τυχαίας διαδικασίας $X[n]$ με ένα φίλτρο $h[n]$, τότε το φάσμα ισχύος της εξόδου του φίλτρου, $Y[n]$, θα δίνεται από τη σχέση:

$$P_y(\omega) = P_x(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \tag{21}$$

όπου $H(\omega)$ η απόκριση συχνότητας του φίλτρου.