Ψηφιακες

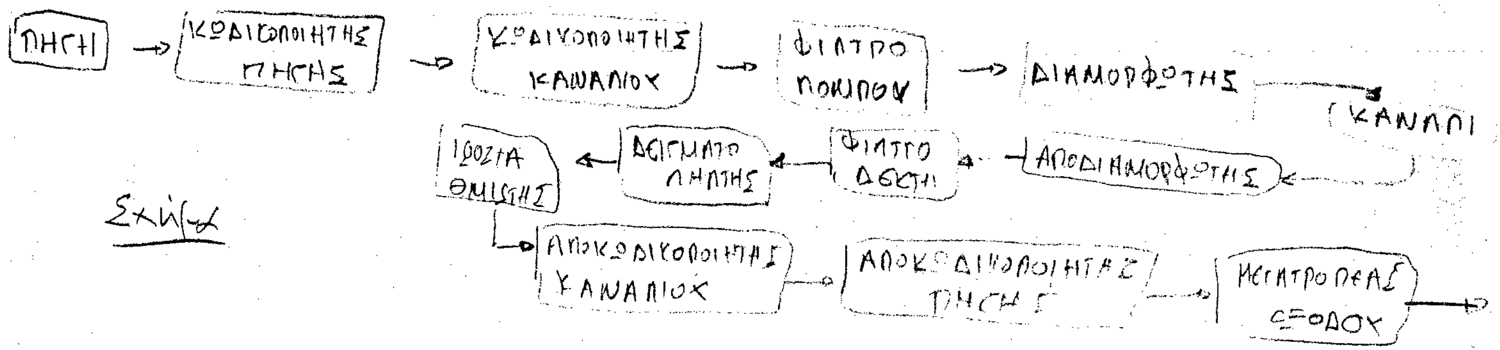
Τηλεπικοινωνιες

Τηλεπικοινωνίες

Εισαγωγή

Εύρος ζώνης (Bandwidth) μιας ηλεκτρονικής διάταξης είναι η περιοχή συχνοτήτων (φάσμα) μέσα στην οποία το σήμα εισόδου περνάει αναλλοίωτο στην έξοδο

Γενική Μορφή Τηλεπικοινωνιακού Συστήματος



Σχήμα

→ **Πηγή**
- Αναλογική (ήχος) ή ψηφιακή (κείμενο)
- Μετατροπή από αναλογική → ψηφιακή με δειγματοληψία

→ **(Απο)Κωδικοποιητής Πηγής** Γίνεται κωδικοποίηση (lossy ή lossless)

⊕ Εξοικονόμηση bits

Είσοδος: Ακολουθία Συμβόλων $\xrightarrow{\text{κωδικοποίηση}}$ Έξοδος: Ακολουθία bits (αποκωδικοποίηση ←)

→ **(Απο) Κωδικοποιητής Καναλιού** **Είσοδος**: ακολουθία bits **Έξοδος**: ακολουθία bits
- **Στόχος** Ανίχνευση/Διόρθωση Σφαλμάτων
- k bits αντιστοιχίζονται σε $n = k + \overset{\text{πλεονασμός}}{r}$ bits
- ρυθμός κωδικοποίησης k/n

→ **Φίλτρα Πομπού κ' Δέκτη** Γιατί έχω περιορισμένο εύρος ζώνης.

→ **(Απο) Διαμόρφωση** **Στόχος**: Τα μεταδιδόμενα σήματα (σύμβολα) αντιστοιχίζονται σε κυματομορφές πλάτους (ημιτονο) ώστε να διέρθουν από το ζωνοπερατό κανάλι

Η πληροφορία αποτυπώνεται στις παραμέτρους του ημιτόνου (πλάτος, φάση, συχνότητα)

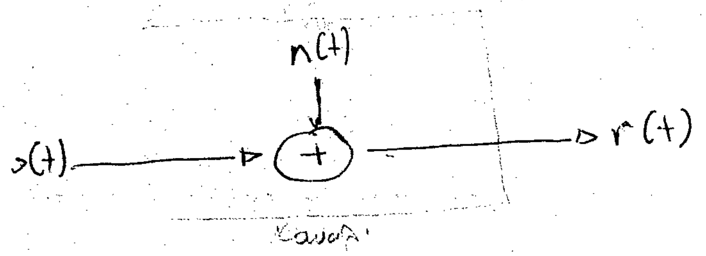
→ **Ισοσταθμιστής (Equalizer)** ψηφιακό φίλτρο που προσπαθεί να αναιρέσει τις συνέπειες της μη-ιδανικότητας του καναλιού (π.χ διασυμβολική παρεμβολή)

→ **Κανάλι** περιορισμένο bandwidth, παραμόρφωση πλάτους, παραμόρφωση φάσης, θόρυβος . .

②

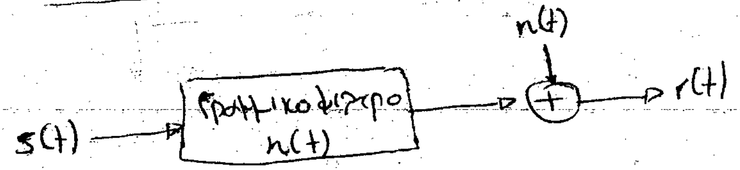
Μαθηματικά Μοντέλα Καναλιών

→ Προσθετικού Θορύβου



- Ο θόρυβος είναι μία τυχαία διαδικασία, ανεξάρτητη από το σήμα
- Αν το σήμα υφίσταται εξασθένηση τότε $r(t) = \alpha * s(t) + n(t)$, $\alpha < 1$

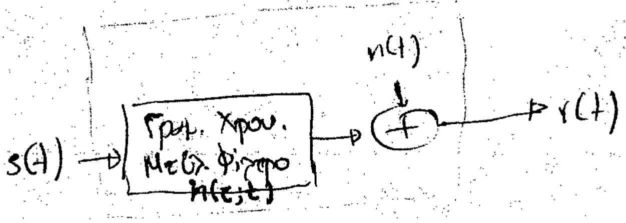
→ Γραμμικού Φίλτρου



- Είναι $r(t) = h(t) * s(t) + n(t)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) s(t-\tau)\, d\tau + n(t)$$

→ Γραμμικού Φίλτρου Χρονικά Μεταβαλλόμενου



Είναι $r(t) = h(\tau;t) * s(t) + n(t)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau;t) s(t-\tau)\, d\tau + n(t)$$

→ Παραμετρικό Μοντέλο Καναλιού

Για multipath channels, θεωρώ πως κάθε path έχει διαφορετική εξασθένηση $\alpha_k(t)$ χρονικά μεταβλητή, και χρονική καθυστέρηση τ_k

Αν υπάρχουν L paths τότε κρουστική απόκριση καναλιού $h(\tau;t) = \sum_{k=1}^{L} \alpha_k(t)\, \delta(\tau-\tau_k)$

Λαμβανόμενο σήμα $r(t) = \sum_{k=1}^{L} \alpha_k(t) s(t-\tau_k) + n(t)$

1) Έννοια της Στοχαστικής Διαδικασίας

→ Στοχαστική Διαδικασία

1) Μία συνάρτηση του χρόνου $X(t)$. Η τιμή αυτής της συνάρτησης $\forall t$ είναι μία τυχαία μεταβλητή

ή

2) Είναι ένα mapping από το σύνολο των σημείων $\Omega \rightarrow$ σύνολο των ≥ 0 πραγματικών αριθμών (πιθανότητες ή πυκνότητε πιθανότητας)

→ Τυχαία Μεταβλητή

Ένα mapping από τον δειγματοχώρο $\Omega \rightarrow R$

π.χ. ζάρι $X = \begin{cases} 1, & \text{αν κορώνα} \\ 0, & \text{αν γράμματα} \end{cases}$

και συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p = \begin{cases} 1/2, & \text{αν } x=0 \\ 1/2, & \text{αν } x=1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

→ Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως $F_X(x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x)$

→ Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (PDF) τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$

! Το ολοκλήρωμα της PDF από το α έως το b δίνει την $P(\alpha < X \leq b)$

→ Σημαντικές Τυχαίες Μεταβλητές

- Bernoulli διακριτή, παίρνει τιμές 1 ή 0 με πιθανότητα p, $1-p$ αντίστοιχ
- Διωνυμική διακριτή, δίνει το πλήθος των 1 σε n ανεξάρτητα πειράματα Bernoulli

  ισχύει $P(X=k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & \text{αν } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$
- Ομοιόμορφη συνεχής, λαμβάνει τιμές μεταξύ $[\alpha, b]$ με ίσες πιθανότητες για ισομήκη διαστήματα

  έχει pdf $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-\alpha}, & \alpha < x < b \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
- Gaussian ή Κανονική συνεχής, περιγράφεται συναρτήσει των παραμέτρων m και σ

  μέσω $N(m, \sigma^2)$ και pdf $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$
  - Η CDF για Gaussian με $m=0$, $\sigma=1$ $\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
  - $Q(x)$ η συμπληρωματική, δηλαδή $Q(x) = P(X > x)$

4

Στατιστικές Ιδιότητες 1ης τάξης

→ **Μέση ή Αναμενόμενη Τιμή E[X]** της τυχαίας μεταβλητής. Αν υποθέσουμε πως η τυχαία μεταβλητή X αποκτά τιμή α_k με πιθανότητα $P_r\{X=\alpha_k\}$ τότε:

$$E[X] = \sum_k \alpha_k * P_r\{X=\alpha_k\}$$! Για διακριτή Τ.Μ.

Αν η Τ.Μ είναι συνεχής, τότε $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f(\alpha)\, d\alpha$

→ Μέση τιμή στοχαστικής διαδικασίας α) **Διακριτή** $E[X[n]] = \sum_k \alpha_k P_r(X[n]=k)$ β) **Συνεχής** $m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f_{X}$

Στατιστικές Ιδιότητες 2ης Τάξης

→ **Αυτοσυσχέτιση Στοχαστικής Διαδικασίας** είναι μία συνάρτηση που συγκρίνει την στατιστική σχέση που έχουν δύο Τ.Μ. μέσα στην ίδια διαδικασία

Π.χ Για $X(t_1)$, $X(t_2)$ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E[X(t_1)\cdot X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_1\cdot\alpha_2 f_{X(t_1),X(t_2)}(\alpha_1,\alpha_2)\, d\alpha_1\, d$$

Αν θέλουμε να συγκρίνουμε τις Τ.Μ $X(t_1)$, $Y(t_2)$ που είναι διαφορετικών διαδικασιών τότε χρησιμοποιούμε την συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $R_{XY}(t_1,t_2) = E(X(t_1)Y(t_2)]$

→ **Στασιμότητα** Μια διαδικασία είναι στάσιμη αν τα στατιστικά της χαρακτηριστικά είναι ανεξάρτητα του χρόνου

1) **Αυστηρή Στασιμότητα** Αν ∀t και ∀n : $f_{X_{t_1},\dots,X_{t_N}}(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = f_{X_{t_1+t},\dots,X_{t_n+t}}(\alpha_1,$

2) **Μ-τάξης Στασιμότητα** αν η εξίσωση ισχύει μόνο για $n \leq M$

- Σε διαδικασίες k-τάξης στασιμότητας είναι ανεξάρτητες του χρόνου οι στατιστικές ιδιότητες μ-τάξης

3) **Στασιμότητα με την ευρεία έννοια (WSS)** αν ισχύουν:

1) Μέση τιμή ανεξάρτητη του χρόνου, δηλ. $m_X(t) \equiv m_X$

2) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης εξαρτάται μόνο από την χρονική διαφορά και όχι από τις στιγμές, δηλ. $R_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_1-t_2)$

→ Εργοδικότητα

Έστω διακριτή στοχαστική διαδικασία $X[n]$ και $x_i[n]$, $i=1,\dots,L$ μια τεράστια συλλογή από υλοποιήσεις της. Τότε μια εκτίμηση της μέσης τιμής θα είναι ο χρονικός μέσος όρος $\hat{m}_X[n] = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} x_i[n]$

→ Φιλτράρισμα Στοχαστικών Διαδικασιών

Η Έννοια της Πληροφορίας

Έστω πως πηγή διακριτών συμβόλων παράγει ένα σύμβολο στην έξοδό της. Η έξοδος αυτή μπορεί να μοντελοποιηθεί ως τυχαία μεταβλητή S, η οποία λαμβάνει τιμές από πεπερασμένο σύνολο $\Phi = \{s_0, s_1, \dots, s_{k-1}\}$ με πιθανότητα $P_r(S = s_i) = p_i$. Υποθέτουμε πως η πηγή βγάζει σύμβολο ανά χρόνο T_s.

→ Διακριτή πηγή χωρίς μνήμη (DMS)

i) Παράγει στατιστικά ανεξάρτητα σύμβολα
ii) Περίοδος συμβόλου T_s
iii) Αλφάβητο $\Phi = \{s_1, \dots, s_{k-1}\}$
iv) Πιθανότητα εμφάνισης συμβόλων p_i, $i \in \Phi$

→ Συνάρτηση Πληροφορίας I

Γενικά όσο λιγότερο πιθανό είναι να συμβεί ένα γεγονός, τόσο μεγαλύτερη πληροφορία παίρνω από την πραγματοποίησή του. Έτσι:

- Αν πραγματοποιηθεί γεγονός s_k πιθανότητας p_k, τότε αποκτώ πληροφορία

$$I(s_k) = \log_2 \left(\frac{1}{p_k}\right) = -\log_2 p_k$$

Ισχύουν:

i) Αν $p_k = 1$, $I(s_k) = 0$ αν γνωρίζω εκ των προτέρων, λαμβάνω μηδενική πληροφορία
ii) Αν $0 \leq p_k \leq 1$, $I(s_k) \geq 0$ ποτέ δεν χάνεται πληροφορία
iii) Αν $p_k < p_i$, $I(s_k) > I(s_i)$ όσο λιγότερο πιθανό γεγονός, τόσο περισσότερη πληροφορ
! φθίνουσα συνάρτηση
iv) Αν s_k, s_i στατιστικά ανεξάρτητα, τότε $I(s_k \cup s_i) = I(s_k) + I(s_i)$

! Μέτρηση σε bits

1 bit = $I(s_k)$ αν $p_k = 1/2$

Εντροπία $H(\Phi)$

Εκφράζει την μέση αβεβαιότητα (βαθμός σκοτεινότητας) που έχω για την πηγή

Είναι ο μέσος όρος της πληροφορίας των συμβόλων, δηλαδή:

$$H(\Phi) = E[I(s_k)] = \sum_{k=0}^{K-1} p_k I(s_k) = \sum_{k=0}^{K-1} p_k \log_2\left(\frac{1}{p_k}\right)$$

Άρα για DMS πηγή αλφαβήτου Φ, με $|\Phi| = K$, είναι:

$$H(\Phi) = -\sum_{k=0}^{K-1} p_k \log_2(p_k) = \sum_{k=0}^{K-1} p_k \log_2\left(\frac{1}{p_k}\right)$$

→ Ιδιότητες

1) αν $\exists\, s_k$ με $P(s_k) = 1$, τότε $H(\Phi) = 0$

γιατί τότε πάντα θα βγαίνει το s_k → μηδενική αβεβαιότητα

2) i) Η $H(\Phi)$ μεγιστοποιείται αν $p_k = \frac{1}{K}$, $\forall k \in 0,1,\dots,K$

ii) Τότε η τιμή της εντροπίας γίνεται $H(\Phi) = \log_2 K$

γιατί τότε έχουμε την μέγιστη αβεβαιότητα για το σύμβολο που θα προκύψει

3) $H(\Phi) \leq K$, από το 2) ii

! Μετριέται σε bits/symbol Αφού λες είναι την μέση πληροφορία/σύμβολο

Παράδειγμα Πηγή με εύρος ζώνης 4KHz δειγματοληπτείται με Nyquist. Αν $\Phi = \{5, 25, -47, 3\}$ και αντίστοιχες πιθανότητες $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\}$ να βρεθεί i) η εντροπία της πηγής ii) ο ρυθμός της πηγής

Απ: i) $H(\Phi) = \sum p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = \frac{1}{2} \cdot \log 2 + \frac{1}{4} \cdot \log 4 + \frac{1}{8} \log 8 + \frac{1}{16} \log 16$

$= \frac{13}{8}$ bits/σύμβολο

ii) Αφού δειγματοληπτείται με Nyquist, έχω 8 000 δείγματα/sec

Άρα η πηγή παράγει πληροφορία με ρυθμό $8.000 \times \frac{13}{8}$ bits

→ **Ν-οστής τάξης επέκταση πηγής (DMS)**

Έστω πηγή με αλφάβητο ϕ, με $|\phi| = K$ σύμβολα

Τότε παίρνω μία ομάδα n συμβόλων και τα θεωρώ ως σύμβολα καινούργιου αλφαβήτου ϕ^n, με $|\phi| = K^n$.

- Η πιθανότητα εμφάνισης ενός συμβόλου από το ϕ^n είναι ίση με την πιθανότητα εμφάνισης των n επιμέρους συμβόλων του ϕ που το αποτελούν
- $H(\phi^n) = nH(\phi)$ → η αβεβαιότητα μεγαλώνει!

Κωδικοποίηση Πηγής (mapping ϕ → binary)

Αναπαράσταση συμβόλων πηγής με κωδικές λέξεις (δυαδικές για τις τηλεπικοινωνίες). Το σύνολο των κωδικών λέξεων ονομάζεται κώδικας πηγής — σταθερού μήκους όλες οι κώδικες λέξεις έχουν ίδιο μήκ. μεταβλητού!! αλλιώς

- Ο κώδικας πηγής πρέπει να είναι αποκωδικοποιήσιμος, δηλαδή από την ακολουθία κωδικών λέξεων πρέπει να μπορεί πάντα να ανακατασκευαστεί η ακολουθία συμβόλων πηγής

→ **Μέσο μήκος κώδικα** $\bar{L} = \sum_{k=0}^{K-1} p_k l_k$, όπου p_k: πιθανότητα εμφάνισης s_k

l_k: # bits που χρησιμοποιώ για να αναπαραστήσω το s_k

π.χ. $100 \rightarrow l = 3$

$1111 \rightarrow l = 4$

ο μέσος αριθμός δυαδικών ψηφίων ανά σύμβολο πηγής

→ **Αποδοτικότητα κώδικα** $\eta = \dfrac{L_{min}^{\;=H(\phi)}}{\bar{L}}$, όπου L_{min} η ελάχιστη δυνατή τιμή του $\bar{L}$

→ **1º Θεώρημα Shannon**

Για διακριτή πηγή χωρίς μνήμη με εντροπία $H(\phi)$, το μέσο μήκος κώδικα $\bar{L}$ οποιουδήποτε κωδικοποιητή πηγής φράσσεται από την ανισότητα $\bar{L} \geq H(\phi)$

! **Απόδειξη** → Βιβλίο, σελ 305-...

Προθεματικοί Κώδικες

→ **Πρόθεμα** Έστω ~~κωδική~~ λέξη $b_k=(m_1,m_2,\dots,m_n)$. Τότε πρόθεμα αυτής της λέξης είναι οποιαδήποτε ακολουθία μορφής $(m_1,\dots,m_k)$, $k\leq n$

→ **Προθεματικός Κώδικας** είναι ένας κώδικας που καμία του κωδική λέξη δεν είναι πρόθεμα κάποιας άλλης του κωδικής λέξης. Ισχύει:

i) Ένας προθεματικός κώδικας είναι πάντα αποκωδικοποιήσιμος

ii) Ισχύει $\sum_{i=1}^{N} 2^{-l(s_i)} \leq 1$

iii) $H(\Phi) \leq \bar{L} < H(\Phi)+1$

↓

iv) Αν θεωρήσω την επέκταση n-τάξης της πηγής με αλφάβητο Φ^n τότε για $n\to\infty$, $\bar{L}_n \to H(\Phi)$

Απόδειξη: Από την 3 ισχύει $H(\Phi)\leq \bar{L} \leq H(\Phi)+1$. Για την n-επέκταση ισχύει $H(\Phi^n)\leq \bar{L}_n \leq H(\Phi^n)+1 \Rightarrow nH(\Phi)\leq \bar{L}_n \leq nH(\Phi)+1 \Rightarrow H(\Phi)\leq \frac{\bar{L}_n}{n} \leq H(\Phi)+\frac{1}{n}$. Άρα $\bar{L}_n \to H(\Phi)$ για $n\to\infty$

Κωδικοποίηση Huffman

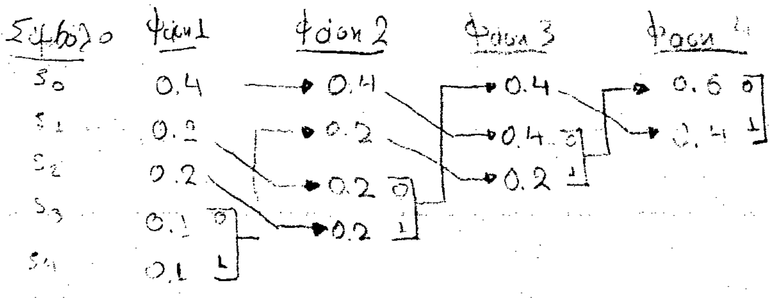
Αλγόριθμος 1ο Βήμα: Ταξινομώ τα σύμβολα από το πιο πιθανό ↓ στο λιγότερο πιθανό. Στα δύο λιγότερο πιθανά αναθέτω τα ψηφία 0 και 1 αντίστοιχα

2ο Βήμα: Τα 2 αυτά σύμβολα συγχωνεύονται σε ένα με πιθανότητα το άθροισμα, και ταξινομ (ξανά)

3ο Βήμα: Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να απομείνουν 2 σύμβολα. Τους αναθέτω 0 και 1

4ο Βήμα: Οι κωδικές λέξεις βρίσκονται ξεκινώντας από την τελευταία φάση και ακολουθώντας τα ψηφία που έχουμε αναθέσει μέχρι να καταλήξουμε στο αρχικό σύμβολο (φάση 1)

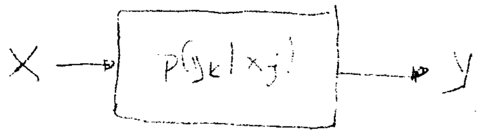
π.χ $\Phi=\{s_0,s_1,s_2,s_3,s_4\}$ με πιθανότητες $\{0.4,0.2,0.2,0.1,0.1\}$ Τότε



Τότε
$s_0 \to 00$
$s_1 \to 10$
$s_2 \to 11$
$s_3 \to 010$
$s_4 \to 011$

⊖ Απαιτεί να γνωρίζει τις $P(s_i)$ ⊕ Βέλτιστο $\bar{L}$

Διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη (DMC)



Ένα DMC λαμβάνει είσοδο $\overset{\text{τμ}}{X}$ και δίνει έξοδο $\overset{\text{τμ}}{Y}$
με $X \in \mathcal{X} = \{x_0, x_1, \dots, x_{J-1}\}$ και $Y \in \Psi = \{y_0, y_1, \dots, y_{K-1}\}$

- Διακριτό → γιατί $|\mathcal{X}| = J$ και $|\Psi| = K$ πεπερασμένα σύνολα
- Memoryless → γιατί η τρέχουσα έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα είσοδο
- Πιθανότητα να λάβω y_k αν έχω στείλει x_j είναι $P(y_k|x_j)$

1) Αν η $p(y_k|x_j)$ για $k=j$ είναι η πιθανότητα σωστής μετάδοσης του x_j τότε οι $p(y_k|x_j)$ για $k \neq j$ είναι οι πιθανότητες λανθασμένης μετάδοσης

Θα ισχύει $\displaystyle\sum_{k=0}^{K-1} p(y_k|x_j) = 1$

2) Αν η πιθανότητα εμφάνισης του x_j είναι $p(x_j)$ τότε η πιθανότητα να πάρω έξοδο y_k και να έχει σταλεί x_j είναι:

$$p(x_j, y_k) = p(y_k|x_j)\,p(x_j)$$

Ομοίως, αν η πιθανότητα εμφάνισης στην έξοδο το y_k είναι $p(y_k)$ τότε

$$p(x_j, y_k) = p(x_j|y_k)\,p(y_k)$$

3) Πιθανότητα λανθασμένης μετάδοσης x_j είναι όταν στέλνω x_j και παίρνω y_k με $k \neq j$

δηλαδή $\displaystyle\sum_{k\neq j,\, k=0}^{K-1} p(y_k|x_j))$

Πιθανότητα λανθασμένης μετάδοσης P_e είναι το άθροισμα όλων αυτών των πιθανο

$$\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k\neq j} p(x_j, y_k)$$

Πιθανότητα σωστής μετάδοσης $P_c = 1 - P_e$

Αμοιβαία Πληροφορία

→ Υπο συνθήκη Εντροπία

Αν γνωρίζω πως $Y = y_k$ τότε η αβεβαιότητα για την τιμή της X είναι

$$H(X \mid Y = y_k) = \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j \mid y_k) \log_2\left(\frac{1}{p(x_j \mid y_k)}\right)$$

Είναι η μέση πληροφορία που παίρνω αν ξέρω $Y = y_k$

Τότε η μέση πληροφορία που παίρνω από κάθε σύμβολο εξόδου είναι:

$$H(\cancel{X},Y) = H(X \mid Y) = \sum_{k=0}^{K-1} p(y_k)\, H(X \mid Y = y_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j, y_k) \log_2\left(\frac{1}{p(x_j \mid y_k)}\right)$$

Δηλαδή η μέση αβεβαιότητα για την είσοδο του καναλιού αν γνωρίζω την έξοδο

→ Αμοιβαία Πληροφορία

Η μείωση της αβεβαιότητας για την είσοδο του καναλιού μέσα από την παρατήρηση της εξόδου $I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y)$

Ιδιότητες

1) Συμμετρία $I(X;Y) = I(Y;X)$

2) Μη αρνητική $I(X;Y) \geq 0$

3) Λόγω του 1) $I(X;Y) = H(Y) - H(Y \mid X)$

4) Σχέση αμοιβαίας πληροφορίας - Από κοινού εντροπίας εισόδου-εξόδου

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

όπου $H(X,Y) = \sum_{X} \sum_{Y} p(x,y) \log_2\left(\frac{1}{p(x,y)}\right)$ με $p(x,y) = p(x)p(y \mid x) = p(y)p(X \mid y$

και εκφράζει την μέση αβεβαιότητα για το συνδυασμό των 2 Τ.Μ.

επίσης $H(X,Y) = H(X \mid Y) + H(Y)$

5) $I(X,Y) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}$ με $p(y) = \sum_{j=1}^{0} p(y \mid x)p(x)$

→ **Διαφορική Εντροπία**

μιας συνεχούς Τ.Μ. X με PDF $f_X(x)$ είναι $h(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \log f_X(x) d$

Χωρητικότητα Καναλιού C

Χωρητικότητα ενός DMC είναι η μέγιστη τιμή της αμοιβαίας πληροφορίας I(X; ως προς όλες τις δυνατές κατανομές εισόδου του αλφαβήτου X. Άρα

$$C = \max_{\{p(x_j)\}} I(X;Y)$$

- είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης του καναλιού, δηλαδή η μέγιστη πληροφορία που μπορεί να περάσει σωστά από το κανάλι ανά χρήση του (π.χ bits/symbol)
- για να βρω το C μεγιστοποιώ το I(X,Y) ως προς $p(x_j)$ με περιορισμούς
  i) $p(x_j) \geq 0$ ii) $\sum_{j=1}^{J-1} p(x_j) = 1$

→ **Χωρητικότητα Δυαδικού συμμετρικού καναλιού** με πιθανότητα σφάλματος μετάδοσης p

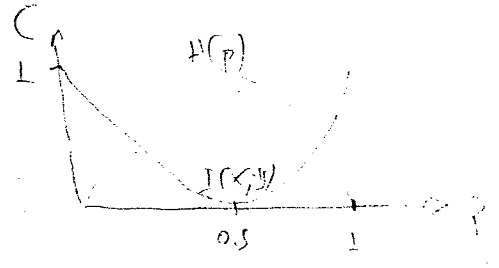
Χρησιμοποιώντας τον τύπο υπολογισμού του I(X;Y) προκύπτει

$$I(X;Y) = 1 + p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p)$$

$$= 1 - H(p)$$, όπου H(p) η εντροπία δυαδικού συμμετρικού καναλιού.

έτσι θα έχω $C = I(X;Y)_{max}$ για $H(p) = 0 \rightarrow P_{error} = 0$

Όπως στο γράφημα



Η αμοιβαία πληροφορία γίνεται max για p=0

! Όμως η χωρητικότητα δεν γίνεται max για p=0! [illegible] C [illegible]

→ Θεώρημα Χωρητικότητας Καναλιού (2ο Shannon)

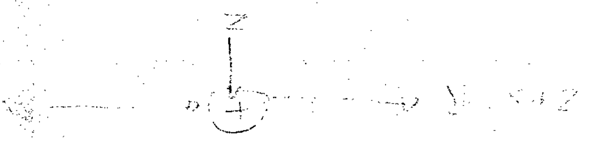
Έστω κανάλι χωρητικότητας C στο οποίο επιθυμώ να μεταδώσω με ρυθμό R

- Αν R<C τότε για οσοδήποτε μικρό δ>0, ∃ κώδικας (κωδικοποιητής κωδ
  που να πετυχαίνει πιθανότητα σφάλματος μικρότερη του δ
- Αν R>C τότε όσο πολύπλοκος και να είναι ο κώδικας, η πιθανότητα του
  σφάλματος θα είναι μακριά από το 0

→ Κανάλια με συνεχές Αλφάβητο ([illegible];)

- Από κοινού διαφορική εντροπία : $h(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\log_2 f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$
- Υπό συνθήκη " " $h(X|Y) = h(X,Y) - h(Y)$
- Αμοιβαία Πληροφορία $I(X;Y) = h(X) - h(X|Y)$

→ Κανάλι AWGN



- Αλφάβητα X, Y συνεχή
- Περιορισμός μέσης ισχύος εισόδου $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le P$
  με n = το μέγεθος του μπλοκ κωδικοποίη
- memoryless θόρυβος, ακολουθεί Gaussιανή κατανομή
  $N(0, N)$

else look at: σελ 34-39 Set_03_info_theory-3

Ρυθμός - Παραμόρφωση

Από το 1ο Θεώρημα Shannon ξέρω πως πρέπει να διαθέσω τουλάχιστον $H(X)$ bits/σύμβολο ώστε να μην έχω σφάλμα. Αν δεν μπορώ → σφάλμα → παραμόρφωση

→ **Μέτρα παραμόρφωσης** (x το original, $\hat{x}$ το αναπαραγμένο, $d(x,\hat{x})$ η απόσταση τους)

- Παραμόρφωση Hamming (πηγές με διακριτό αλφάβητο)

$$d_H(x,\hat{x}) = \begin{cases} 1, & x \neq \hat{x} \\ 0, & x = \hat{x} \end{cases}$$

- Παραμόρφωση Τετραγωνικού σφάλματος (πηγές με συνεχές αλφάβητο)

$$d(x,\hat{x}) = (x-\hat{x})^2$$

- Παραμόρφωση ανά γράμμα σε μπλοκ n δειγμάτων

$$d(x^n,\hat{x}^n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_i,\hat{x}_i)$$

• μέσος όρος παραμόρφωσης

→ **Παραμόρφωση**

Ορίζεται ως η μέση τιμή της Τ.Μ $d(X^n,\hat{X}^n)$, δηλαδή $D=E[d(X^n,\hat{X}^n)]$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[d(X_i,\hat{X}_i)] \Rightarrow D = E[d(X,\hat{X})]$$

π.χ. Για την παραμόρφωση Hamming

$$D = 1 \times p(X \neq \hat{X}) + 0 \times p(X = \hat{X})$$
$$= p(X \neq \hat{X}) = P_{error}$$

→ **Θεώρημα Ρυθμού-Παραμόρφωσης**

Ο ελάχιστος αριθμός bits/σύμβολο που απαιτείται για να αναπαραχθεί μια πηγή χωρίς μνήμη με παραμόρφωση $\leq D$, ονομάζεται συνάρτηση ρυθμού-παραμόρφωσης και ισούται:

$$R(D) = \min_{p(\hat{x}|x):\, E[d(X,\hat{X})] \leq D} I(X;\hat{X})$$

βλ. Παράδειγμα [illegible] ΣΗΣ [illegible]

Κβάντιση

→ Βαθμωτή Κβάντιση

Κάθε έξοδος πηγής $x(n) \in \mathbb{R}$ κβαντίζεται χωριστά μ' έναν αριθμό από στάθμες N και αυτές κωδικοποιούνται σε δυαδική ακολουθία. Ειδικότερα:

i) Το $\mathbb{R}$ διαμερίζεται σε N ξένα υποσύνολα R_k, $1 \le k \le N$

Λέμε πως η κβάντιση γίνεται με N στάθμες

ii) Για κάθε R_k επιλέγεται ένα αντιπροσωπευτικό σημείο $\hat{x}_k$ (συνήθως $\hat{x}_k \in R$

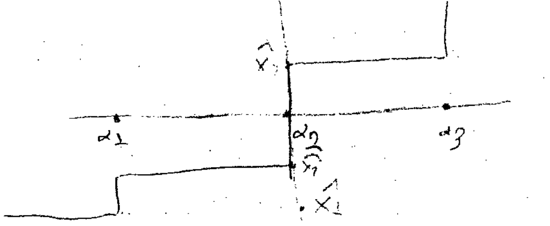
iii) Η συνάρτηση κβάντισης ορίζεται ως

$$Q(x) = \hat{x}_i \quad , \quad \forall x \in R_i$$

! μη γραμμική

! μη αναστρέψιμη - χάνεται πληροφορία

· παραμόρφωση



κβάντιση με

και 4 στάθμες

περιοχές

$R_1 = (-\infty, \alpha_1$

$R_2 = (\alpha_1, \alpha_2$

$R_3 = (\alpha_2, \alpha_3$

$R_4 = (\alpha_3, +\infty$

Τιμές κβάντισης

$\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3,$

iv) Έστω $\tilde{x} = x - Q(x)$.

Τότε έχουμε παραμόρφωση (μέση τετραγωνική) $D = E[\, d(X, \hat{X})^2] = E[(X - Q(X))^2]$

$\Rightarrow D = E[\tilde{X}^2] =$ ισχύς θορύβου

v) Ορίζω τον λόγο ισχύος σήματος προς [illegible] ισχύ θορύβου κβάντισης

$$SQNR = \frac{E[X^2]}{E[(X-Q(X))^2]} = \frac{E[X^2]}{E[\tilde{X}^2]} = \frac{P_X}{P_{\tilde{X}}}$$

! Για συνεχή πηγή η μέση τετραγωνική παραμόρφωση είναι, με f_x το pdf του σήματος είναι

$$D = E[(X-\hat{X})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-Q(x))^2 f_X(x)\, dx =$$

ανάλυση με κβάντιση του παραπάνω σχήματος

$$= \int_{-\infty}^{\alpha_1} (x-\hat{x}_1)^2 f_X(x)\, dx + \sum_{i=2}^{3} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} (x-\hat{x}_i)^2 f_X(x)\, dx + \int_{\alpha_3}^{+\infty} (x-\hat{x}_4)^2 f_X(x)\, dx$$

→ Βαθμωτοί: Ομοιόμορφοι Κβαντιστές

- Το R διαμερίζεται σε N περιοχές ίσου εύρους Δ (εκτός από τις R_1, R_N που εκτείνο

Ισχύει $D = \int_{-\infty}^{\alpha_1}(x-\hat{x}_1) f_x(x)dx + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (x-\hat{x}_{i+1})^2 f_x(x)dx + \int_{\alpha_{N-1}}^{+\infty}(x-\hat{x}_N)^2 f_x$

- Τα όρια των περιοχών κβάντισης είναι ο αριθμητικός μέσος δύο διαδοχικών τιμών κβάντισης, δηλαδή $\alpha_i = \frac{\hat{x}_i + \hat{x}_{i+1}}{2}$
- Υπολογίζω τις τιμές κβάντισης έτσι ώστε να ελαχιστοποιώ το D

→ Βαθμωτοί: Μη Ομοιόμορφοι Κβαντιστές

- Οι περιοχές κβάντισης μπορεί να μην έχουν το ίδιο εύρος → καλύτερη επίδο
- Η παραμόρφωση D δίνεται από τον ίδιο τύπο όπως πριν, ~~[illegible]~~ τα όρια των περιοχών κβάντισης είναι πάλι $\alpha_i = \frac{\hat{x}_i + \hat{x}_{i+1}}{2}$, αλλά οι τιμές κβάντισης υπολογίζονται ως εξής: $\frac{dD}{d\hat{x}_i} = 0 \Rightarrow \ldots \hat{x}_i = \frac{\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} x f_x(x)dx}{\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f_x(x)dx} = E[X|_{\alpha_{i-1} < X \leq \alpha_i}$

Άρα κάθε κέντρο κβάντισης είναι ο αριθμητικός μέσος της περιοχής κβάντισ

→ Αλγόριθμος Lloyd-Max

1) Επιλέγω τυχαία ή ομοιόμορφα τις περιοχές κβάντισης
2) Τιμές κβάντισης ← κέντρα μάζας των περιοχών κβάντισης ($\hat{x}_i$ = [illegible]
3) Τα νέα άκρα των περιοχών κβάντισης θα δίνονται από τον μέσο όρο των γειτονικών τιμών κβάντισης ($\hat{\alpha}_i$ = Μ.Ο των τιμών που ισχύει $\hat{x}_i < \quad \leq x_{i+1}$)

4) Επαναλαμβάνω τα 2, 3 μέχρι να συγκλίνει

→ Διανυσματική Κβάντιση

Έστω ότι θέλω κβάντιση με 4 στάθμες. Τότε

i) Βαθμωτή Κβάντιση χρειάζομαι 2 bits για κάθε στάθμη, άρα 2 bits/έξοδο

ii) Διανυσματική " με μπλοκ 2 εξόδων θα έχουμε 16 πιθανά μπλοκ, άρα χρειάζονται

$\log_2 16 = 4$ bits/μπλοκ = 2 bits/έξοδο

iii) κτλ...

! Γενικά ρυθμός $R = \frac{\log_2 K}{n}$ bits/έξοδο, όπου K οι περιοχές στον n-διάστατο χώρο

Άρα η διανυσματική κβάντιση έχει ίδιο ρυθμό με την βαθμωτή

! Αν έχαμε πηγές με μνήμη, τότε η διανυσματική κβάντιση ~~[illegible]~~ έχει καλύτερη απόδοση

→ Βέλτιστος Διανυσματικός Κβαντιστής

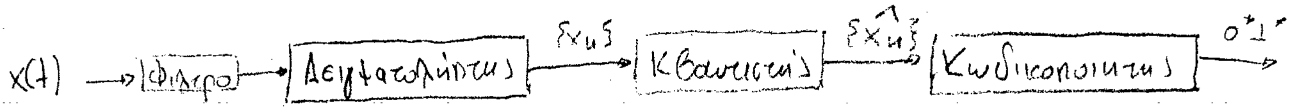
- Η περιοχές κβάντισης R_i ορίζονται ως

  $R_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-\hat{x}_i\| < \|x-\hat{x}_j\|, \forall j \neq i\}$ δηλαδή όλα τα σημεία με μικρότερες δυνατές αποστάσεις από το $\hat{x}_i$

- Σημεία Κβάντισης $\hat{x}_i$ ορίζονται ως το κέντρο μάζας της αντίστοιχης περιοχής R_i, δηλαδή $\hat{x}_i = \frac{1}{P(X \in R_i)} \int_{R_i} x f_x(x) dx$

ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗΣ

Παλμοκωδική Διαμόρφωση (PCM)



Γενικά γίνεται ως εξής:

- Προδειγματοληπτικό φίλτρο εύρους ζώνης W
- Γίνεται υπερδειγματοληψία με $f > f_{NYQUIST}$
- Βαθμωτός κβαντιστής (ομοιόμορφος ή όχι, αναλόγως με την πηγή)
- Κωδικοποίηση της εξόδου του κβαντιστή, σε δυαδικές ακολουθίες μήκους n, με $n = \log_2 N$ όπου N οι στάθμες κβάντισης

→ Ομοιόμορφο PCM → χρησιμοποιείται ομοιόμορφος κβαντιστής

Θεωρούμε πως το σήμα κυμαίνεται στην $[-x_{max}, x_{max}]$ (δυναμική περιοχή σήματος) και πως έχουμε N στάθμες κβάντισης. Άρα

- Απαιτούνται $n = \log_2 N$ bits/έξοδο
- Εύρος περιοχής κβάντισης $\Delta = \frac{x_{max} - (-x_{max})}{N} = \frac{2x_{max}}{2^n} = \frac{x_{max}}{2^{n-1}}$
- Τιμές κβάντισης → τα κέντρα των περιοχών κβάντισης
- Σφάλμα (θόρυβος) κβάντισης $\tilde{x} = x - Q(x) \in (-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$

✓

Αν υποθέσω ότι ο θόρυβος κβαντισμού είναι ομοιόμορφα κατανεμημένος στο $(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$ ώστε η pdf θα είναι $f_{\tilde{x}}(\tilde{x}) = \frac{1}{\Delta}, -\frac{\Delta}{2} \le \tilde{x} \le \frac{\Delta}{2}$ και η παραμόρφωση, ή αλλιώς μέση ισχύς θορύβου κβαντισμού, θα είναι $E[\tilde{X}^2] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} \tilde{x}^2 \, dx = \dots = \frac{x_{max}^2}{3N^2}$

Αν πάρουμε το κανονικοποιημένο $\breve{X} = \frac{X}{x_{max}} \le 1$ και $E[\breve{X}^2] = \frac{E[X^2]}{x^2_{max}}$

τότε $SQNR = 3N^2 E[\breve{X}^2] = 3 \cdot 4^n E[\breve{X}^2]$

Παρατηρώ αφού $E[\breve{X}^2] \le 1 \Longrightarrow \underline{SQNR \le 3 \cdot 4^n = 3N^2}$ ← άνω φράγμα

! Παρατηρώ πως αν ↑ x_{max} → ↓ SQNR (λογικό)

! Αν μετατρέψω το SQNR σε db, τότε

$SQNR|_{DB} = P_{\breve{X}}|_{db} + 6n + 4.8$ $\quad L_{db} = 10 \log_{10}\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$

Άρα αύξηση του n κατά 1 αυξάνει το SQNR κατά 6db $\quad P_1 = 10^{L_{db}} P_0$

Εύρος ζώνης PCM

Για κάθε δείγμα χρησιμοποιούνται n bits. Αν το εύρος ζώνης είναι W δειγματοληπτούμε με συχνότητα $f_s > 2W$

Άρα συνολικά χρειάζονται $f_s * n$ bits/sec

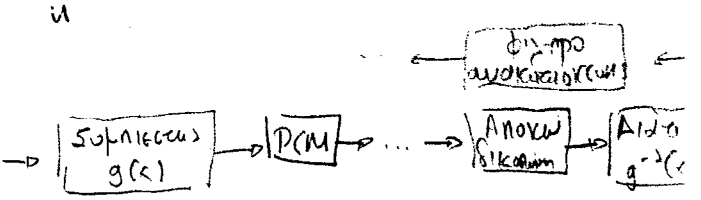
* Θα μάθουμε πως η ελάχιστη απαίτηση BW για να μεταδώσω R bits/sec είναι R/2

Άρα το PCM χρειάζεται $BW_{PCM} \ge \frac{f_s * n}{2} \overset{f_s \ge 2W}{\Longleftrightarrow} (BW_{PCM})_{MIN} = nW$

! Άρα το PCM αυξάνει το BW του σήματος κατά n → κακή συμπεριφορά

→ Μη-ομοιόμορφο PCM

Χρησιμοποιείται μη-ομοιόμορφη κβάντιση ή μπορεί να υλοποιηθεί και με companding:



→ **Companding** (COMPressing + expANDING)

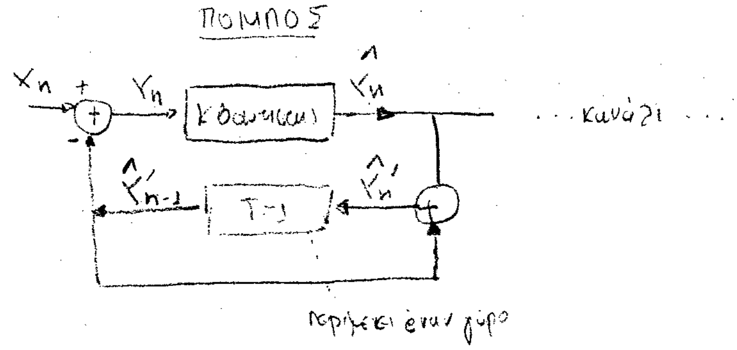
συμπίεση: compress

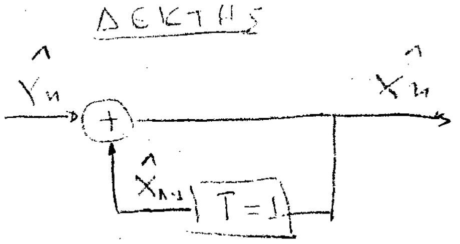
Τα δείγματα διέρχονται πρώτα από ένα μη γραμμικό στοιχείο το οποίο συμπιέζει τα μεγάλα πλάτη και άρα η δυναμική περιοχή του σήματος μειώνεται. Ύστερα κβαντίζονται ομοιόμορφα. Στην λήψη γίνεται το αντίθετο [illegible]

→ Διαφορικό PCM (DPCM)

Εκμεταλλευόμαστε την (φυσική) συσχέτιση μεταξύ συνεχόμενων δειγμάτων, κβαντίζοντας μόνο την διαφορά μεταξύ των συνεχόμενων δειγμάτων. Αν η συσχέτιση είναι μεγάλη τότε η διαφορά θα έχει μικρή δυναμική περιοχή και άρα μπορώ να χρησιμοποιήσω λιγότερα bits.

→ Απλό DPCM





- Αντί για να κβαντίσω το $x_n - x_{n-1}$, κβαντίζω το $x_n - \hat{y}'_{n-1}$

Στον πομπό
$$y_n = x_n - \hat{y}'_{n-1}$$
$$\hat{y}'_n = \hat{y}_n + \hat{y}'_{n-1}$$

Άρα σφάλμα κβάντισης: $\hat{x}_n - x_n = \dots = \hat{y}'_n - x_n$

Στο δέκτη έχω $\hat{x}_n = \hat{y}_n + \hat{x}_{n-1}$

→ DPCM χρησιμοποιώντας πρόβλεψη

- Πιο γενική περίπτωση. Χρησιμοποιούνται τα p τελευταία δείγματα για πρόβλεψη του τρέχοντος. Κβαντίζω την διαφορά σήματος – πρόβλεψής του.
- Χρησιμοποιείται γραμμικός προβλεπτής τάξης p, ~~έτσι ώστε~~ της μορφής:

$X_n \approx \sum_{i=1}^{p} a_i X_{n-i}$, και μετέπειτα τα a_i ώστε να μινιμάρεται η μέση παραμόρφωση $D = E\left[\left(X_n - \sum_{i=1}^{p} a_i X_{n-i} \right)^2 \right]$

→ Διαμόρφωση Δέλτα

Είναι μία απλή DPCM όπου ο κβαντιστής διαθέτει μόνο ένα bit και άρα 2 στάθμες κβάντισης, με τιμές κβάντισης +Δ και −Δ

Το γεγονός πως χρειαζόμαστε 1 bit / δείγμα μας επιτρέπει να κβαντίζουμε με $f >> f_{NYQUIST}$ (αλλά πρέπει τα X_n, X_{n+1} να έχουν πολύ μεγάλη συσχέτιση)

Στο δέκτη έχω: $\hat{X}_n - \hat{X}_{n-1} = \hat{Y}_n$, και προκύπτει:

$$\hat{X}_n = \sum_{i=0}^{n} \hat{Y}_i$$

→ για να προκύψει το $\hat{X}_n$ αθροίζω όλα τα $\hat{Y}_n$ μέχρι το n

? Πόσο Δ να επιλέξω → πρόβλημα!

Μεγάλο Δ → καλή συμπεριφορά στις απότομες μεταβολές, κοκκώδης θόρυβος στις μικρές

Μικρό Δ → καλή συμπεριφορά σε αργή μεταβολή, αλλά σε μεγάλες εμφανίζεται παραμόρφωση υπερφόρτωσης κλ

↙ ΛΥΣΗ

→ Προσαρμοστική ΔΔ (ADM)

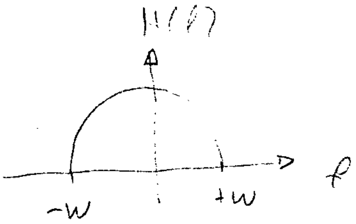
Ανάλογα με την κλίση του σήματος εισόδου, αλλάζει το Δ σύμφωνα με τον απλό κανόνα:

$\Delta_n = \Delta_{n-1} K^{\epsilon_n \cdot \epsilon_{n-1}}$, με ϵ_n το πρόσημο της εξόδου του κβαντιστή και $K > 1$ σταθερά.

Έτσι όταν χρειάζεται, το βήμα αυξάνεται ή μειώνεται εκθετικά [illegible] με [illegible] του σήματος εισόδου

Γεωμετρική Αναπαράσταση Κυματομορφών Σήματος

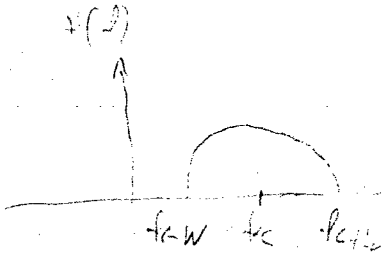
→ Κανάλια Βασικής Ζώνης (Baseband)



Η ζώνη διέλευσης συμπεριλαμβάνει το $f=0$

Δεν χρησιμοποιείται φέρον ημιτονοειδές σήμα για την μετάδοση

→ Ζωνοπερατά Κανάλια (Passband)



Χρησιμοποιείται φέρον, ένα ημιτονοειδές σήμα

Αλλά η πληροφορία μεταφέρεται με διαμόρφωση φέροντος, δηλαδή με αλλαγές στο πλάτος/συχνότητα/φάση του ημιτόνου

→ Αντιστοίχιση Κυματομορφών σε Διανύσματα

↗ ανάγκη να μετασχηματίσω σε αλλ...

Μέσα από το κανάλι στέλνω μόνο αναλογικές κυματομορφές, έστω $s_1(t), \ldots, s_M(t)$

Τις αντιστοιχίζω σε διανύσματα, για καλύτερη ανάλυση. ~~[illegible]~~

Για να αναπαραστήσουμε τις M κυματομορφές πρέπει να ορίσουμε ~~για~~ ένα σύνολο από $N \leq M$ ορθοκανονικών κυματομορφών, που θα ορίζουν τον χώρο που βρίσκονται οι κυματομορφές σήματος.

μπορεί κάποια να είναι γραμμικώς εξαρτημένα

Ορθοκανονικότητα — ορθογώνια και μοναδιαία ενέργεια →

Διανύσματα $s_i^T s_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

Κυματομορφές $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_i(t)\phi_j(t) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

• Ορθογωνοποίηση Gram-Schmidt

$\phi_i(t)$ οι ορθοκανονικές κυματομορφές (output)
$s_i(t)$ οι κυματομορφές σήματος (input)

1) $\phi_1(t) = s_1(t)/\sqrt{E_1}$,

όπου $E_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1^2(t)\,dt$ η ενέργεια του $s_1(t)$

2) Υπολογίζω το εσωτερικό γινόμενο $c_{21} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t)\phi_1(t)\,dt$

Αφαιρώ την προβολή του S_2 στο ϕ_1 $d_2(t) = s_2(t) - c_{21}\,\phi_1(t)$

Κανονικοποιώ $\phi_2(t) = \dfrac{d_2(t)}{\sqrt{E_2}}$

⋮

k) $\phi_k(t) = \dfrac{d_k(t)}{\sqrt{E_k}}$, όπου $d_k(t) = s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki}\,\phi_i(t)$

και $c_{ki} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_k(t)\phi_i(t)\,dt$

Υπολογίσαμε ορθοκανονική βάση → Δεν είναι μοναδική

Έτσι μπορούμε τώρα να γράψουμε κάθε κυματομορφή σήματος $s_m(t)$ μπορεί να γραφεί ως διάνυσμα $s_m = [s_{m1}, \dots, s_{mN}]$, $\in R^n$ που ορίσαμε. Έτσι έχω τις αντιστοιχίες.

Σήμα: $s_m(t) \longrightarrow s_m = [s_{m1}, \dots, s_{mN}]$

Ενέργεια $E_m = \int_{-\infty}^{+\infty} s_m^2(t)\,dt \longrightarrow E_m = \sum_{i=1}^{N} s_{mi}^2$

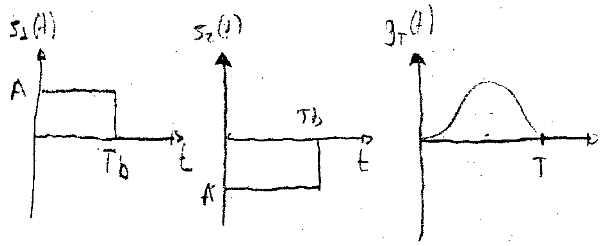
Εσωτερικό Γινόμενο $\int_{-\infty}^{+\infty} s_m(t)s_n(t)\,dt \longrightarrow s_m^T s_n$

Διαμόρφωση Παλμών Κατά Πλάτος (PAM)

*Δουλεύω $\overset{\text{Σήμα}}{s_m(t)} \rightarrow \overset{\text{Διάνυσμα}}{s_m}$

Χρησιμοποιείται μία βασική κυματομορφή και η πληροφορία μεταφέρεται/αποτυπώνω στο πλάτος του.

→ Δυαδικό PAM βασικής ζώνης



Το 1 αντιστοιχίζεται σε παλμό πλάτους +A
Το 0 " " " −A

Αν Tb η διάρκεια του παλμού τότε μεταφέρω με ρυθμό $R_b = \frac{1}{T_b}$ bits/sec

Κάθε παλμός έχει ίση ενέργεια $E = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\,dt = \int_{0}^{T_b} s_i^2(t)\,dt$

→ Μ-αδικό PAM βασικής ζώνης

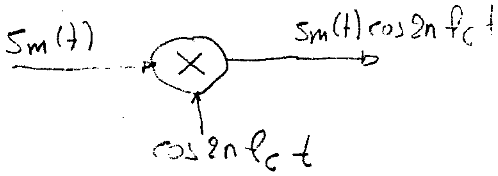
Όταν η πληροφορία χωρίζεται σε blocks των k bits τότε έχω $M = 2^k$ διαφορετικά σύμβ. Άρα πρέπει να χρησιμοποιήσω M διαφορετικά πλάτη → ισαπέχοντα για να έχουν ίδιο Perror.

Άρα οι M κυματομορφές θα έχουν $s_m(t) = A_m g_T(t)$, $m = 1, \dots, M$
και θα έχουν διαφορετική ενέργεια! $E_m = \int_{-\infty \to 0}^{+\infty \to T_s} A_m g_T(t)\,dt = A_m^2 \int_{0}^{T_s} g_T(t)\,dt = A_m^2 E_g$

?[illegible] [illegible] E_b
[illegible] E_b

→ Ζωνοπερατό PAM

Εδώ το διαθέσιμο BW δεν συμπεριλαμβάνει την $f=0$. Άρα για να μεταδοθούν, οι κυματομορφές που χρησιμοποιούσαμε πριν, πολλαπλασιάζονται με ημιτονοειδές φέρον (διαμόρφωση) και έχω ως προκύπτουσες κυματομορφές τις μορφής:

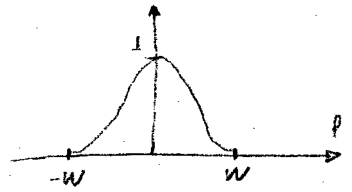


$$u_m(t) = s_m(t)\cos 2\pi f_c t = A_m g_T(t)\cos 2\pi f_c t \quad , m = 1,\dots,M$$

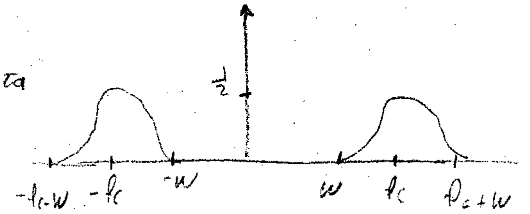
, που είναι ένα DSB-SC AM σήμα

και f_c την κεντρική συχνότητα

Πριν



Μετα



! Πριν την διαμόρφωση το BW που χρειαζόταν ήταν W
Μετά καταλαμβάνεται $BW' = 2W$

! Η ενέργεια του ζωνοπερατού είναι η μισή αυτού βασικής ζώνης,

$$E_m' = \frac{A_m^2}{2}E_g = \frac{E_m}{2}$$

→ Μεταλλαγή Ολίσθησης Πλάτους (ASK)

Όταν χρησιμοποιείται ορθογώνιος παλμός ενέργειας E_g, και μορφής $g_T(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{E_g}{T}}, 0 \\ 0 \quad αλλι \end{cases}$

→ Γεωμετρική Αναπαράσταση Σημάτων PAM Βασικής Ζώνης

Είναι ανά 2 γραμμικά εξαρτημένα και άρα μπορούν να παρασταθούν σε ευθεία.

Επιλέγω ανύσμα βάσης $\phi(t) = \frac{g_T(t)}{\sqrt{E}}$, $0 \le T \le T$: μοναδιαίο και άρα κάθε κυματομορφή εκφράζεται ως $s_m(t) = s_m\phi(t)$

όπου $s_m = \sqrt{E_g}\,A_m$

* Ευκλείδια απόσταση μεταξύ σημάτων: $d_{mn} = \sqrt{|s_m - s_n|^2}$ άρα εδώ $d_{mn} = \sqrt{E_g}(A_m$

! Επιλέγω συμμετρική τοποθέτηση των σημείων ως προς το 0 → λόγω μείωσης ενέργειας και ίση μεταξύ τους απόσταση d → για να έχω ίδιο Perror αφού έχω AWGN θόρυβο

Άρα η ενέργεια συμβόλου θα είναι $E_m = s_m^2 = A_m^2 E_g$ και για ισοπίθανα σύμβολα θα έχω

μέση ενέργεια $= E_{avg} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} E_m = \frac{E_g}{M}\sum_{m=1}^{M} A_m^2$

→ <u>Γεωμετρική Αναπαράσταση Ζωνοπερατού PAM</u>

Πάλι $v_m(t) = s_m \psi(t)$, αλλά με $\psi(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}}\, g_T(t)\cos 2\pi f_c t$

και $s_m = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}}\, A_m$

! Έτσι για τα 2 προηγούμενα, τα σημεία που γράφουμε είναι τα $\underline{s_m}$

Δισδιάστατες Κυματομορφές Σήματος

→ <u>Βασικής Ζώνης 2D</u>

Γενικά, επιλέγω συναρτήσεις βάσης $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$

εκφράζω κάθε κυματομορφή σήματος $s_i(t) = s_{i1}\psi_1(t) + s_{i2}\psi_2(t)$

Σε διανυσματική αναπαράσταση θα είναι $s_i = (s_{i1}, s_{i2})$

! Κάθε s_i θα έχει: ενέργεια $\mathcal{E}_i = \|s_i\|^2 = s_{i1}^2 + s_{i2}^2$

! Τα s_i, s_j θα έχουν ευκλείδια απόσταση

$$d_{i,j} = \sqrt{\|s_i - s_j\|^2}$$

* Περισσότερα σελ. 392 − 396

Ανάλογα με το πόσα bits πληροφορίας θέλω να μεταδώσω (k)

θα κατασκευάσω $M = 2^k$ κυματομορφές

! Μπορώ να <u>μην</u> επιλέξω όλες οι κυματομορφές να έχουν ίση ενέργεια

→ <u>Ζωνοπερατό 2D</u>

Από M σήματα βασικής ζώνης παράγουμε M ζωνοπερατά κατά τα γνωστά, $v_m = s_m(t)\cos 2\pi f_c t$

Αν θεωρήσουμε πως όλα θα έχουν ίση ενέργεια (άρα θα βρίσκονται σε κύκλο στο 2D)

τότε $\mathcal{E}_m = \int_0^T s_m^2(t)\cos^2 2\pi f_c t\, dt \xleftrightarrow{f_c \gg W} \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\int_0^T s_m^2(t) = \mathcal{E}_s$

<u>Ολίσθηση στην φάση φέροντος</u>

Τότε όλα τα M μπορούν να προκύψουν από ένα αρχικό σήμα, που περιστρέφεται κατά κάποια γωνία → εδώ η πληροφορία αποτυπώνεται στην φάση του φέροντος.

Άρα για M σήματα $v_m(t) = g_T(t)\cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi m}{M}\right)$, $m = 0, \dots, M-1$

↳ πλάτος βασικής ζώνης [illegible]

→ Phase Shift Key (PSK)

Όταν στην προηγούμενη, ο $g_T(t)$ είναι ορθογώνιος παλμός $g_T(t)=\sqrt{\frac{2E_s}{T}}$, $0\leq$

τότε οι αντίστοιχες μεταδιδόμενες κυματομορφές σήματος θα είναι

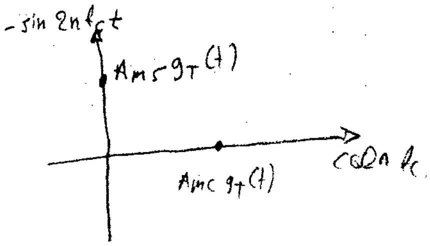
$$u_m(t)=\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\cos\left(2\pi f_c t+\frac{2\pi m}{M}\right)$$, τα οποία

i) έχουν σταθερή περιβάλλουσα
ii) η φάση του φέροντος αλλάζει απότομα στην αρχή κάθε σήματος.

μπορεί να γραφεί αναλυτικά ως:

$$u_m(t)=g_T(t)A_{mc}\cos(2\pi f_c t)-g_T(t)\sin(2\pi f_c t)$$, με $A_{mc}=\cos(2\pi m/M$
$A_{ms}=\sin(2\pi m/M$.

Άρα ένα σήμα διαμορφωμένο κατά φάση μπορεί να θεωρηθεί ως δύο ορθογώνια διαμορφωμένα κατά πλάτος φέροντα



Άρα ένα σήμα διαμορφωμένο στη φάση μπορεί να αναπαρασταθεί γεωμετρικά στο 2-D διάνυσμα $s_m=\begin{bmatrix}A_{mc}\\A_{ms}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{E_s}\cos 2\pi m/M\\\sqrt{E_s}\sin 2\pi m/M\end{bmatrix}$

και στην περίπτωση αυτή οι ορθοκανονικές συναρτήσεις βάσης θα είναι οι $\psi_1=\sqrt{\frac{2}{E_g}}\,g_T(t)\cos(2\pi f_c t)$, $\psi_2=\sqrt{\frac{2}{E_g}}\,g_T(t)\sin(2\pi f_c t)$

→ Αστερισμοί PSK

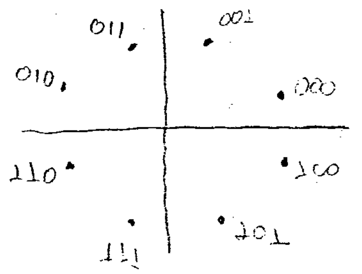
Ευκλείδια απόσταση μεταξύ δύο σημάτων PSK $d_{mn}=\sqrt{\|s_m-s_n\|^2}=\sqrt{2E_s\left(1-\cos\frac{2\pi(m-n}{M}\right.}$

Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει είναι $d_{min}=\sqrt{2E_s\left(1-\cos\frac{2\pi}{M}\right)}$

↳ επηρεάζει την απόδοση αστερισμού ως προς τα σφάλματα

! Κωδικοποίηση Gray

Γειτονικά σύμβολα διαφέρουν μόνο κατά 1 bit π.χ



Τότε αν έχουμε λάθος, π.χ. κάνουμε

1 λάθος σύμβολο, αποτελεσματικά κάνουμε

1 bit λάθος (κατά μέσο όρο λόγω AWGN)

2D Ζωνοπερατά – QAM (Ορθογώνια Διαμόρφωση κατά Πλάτος)

Συνδυασμός διαμόρφωσης, και κατά πλάτος, και κατά φάση

Και εδώ οι κυματομορφές μπορούν να εκφραστούν με 2 τρόπους:

i) $u_m(t) = A_{mc}\, g_T(t) \cos 2\pi f_c t + A_{ms}\, g_T(t) \sin 2\pi f_c t$, $m=1,\dots,M$

όπου τα $\{A_{mc}\}, m=1,\dots,M$ και $\{A_{ms}\}, m=1,\dots,M$ είναι τα σύνολα των τιμών πλάτων που λαμβάνονται από την αντιστοίχιση k bits σε πλάτη σήματος

Και εδώ κάθε σύμβολο αναπαρίσταται γεωμετρικά ως $s_m = \begin{bmatrix} A_{mc} \\ A_{ms} \end{bmatrix} = \left[\begin{matrix} \sqrt{E_s}\, A_{n} \\ \sqrt{E_s}\, A_{m} \end{matrix}\right.$

ή

ii) $u_{mn}(t) = A_m\, g_T(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_n)$, $m = 1,\dots,M_1$
$n = 1,\dots,M_2$

όπου $M_1 = 2^{k_1}$ και $M_2 = 2^{k_2}$

Άρα μπορώ να μεταφέρω ταυτόχρονα $k_1 + k_2$ bits με ρυθμό συμβόλων $R_b/(k_1+k_2)$

Και εδώ έχω ευκλείδεια απόσταση $d_{mn} = \sqrt{\|s_m - s_n\|^2}$

και μέση ενέργεια για ισοπίθανα σύμβολα $E_{avg} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \|s_i\|^2$

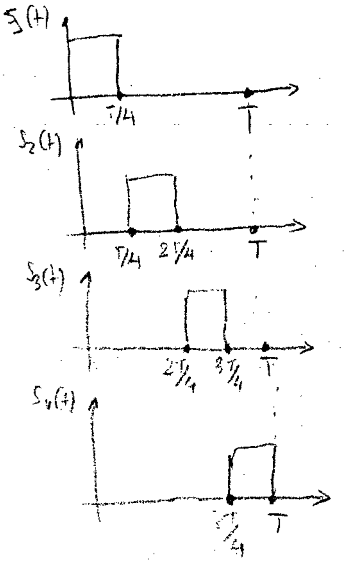
Πολυδιάστατες κυματομορφές Σήματος

Μπορούμενα κατασκευάσουμε διάφορων ειδών N-D διάστατες ορθογώνιες κυματομορφές βασικής μορφής χρονικά επικαλυπτόμενες ή όχι, ίσης ενέργειας ή όχι, κτλ.

→ Διαμόρφωση Παλμών κατά Θέση (PPM)

Εδώ οι M κυματομορφές. Εδώ η πληροφορία αποτυπώνεται στη Θέση που βρίσκεται ο παλμός.

Είναι $s_m = A\, g_T\left(t - \frac{(m-1)T}{M}\right)$, όπου $g_T(t)$ παλμός με διάρκεια T/M



Για $M=4$

Όλες οι κυματομορφές έχουν ίδια ενέργεια ~~με την ενέργεια του $g_T(t)$~~ αν θεωρήσουμε ότι έχουν ίδιο A, ίση με $E_s = A^2 E_g = A^2 \int_0^{T/M} g_T(t)\,dt$

Γεωμετρική Αναπαράσταση PPM

Έχουμε M συναρτήσεις βάσης, $\phi_m(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{E_g}}\, g_T\left(t - \frac{(m-1)T}{M}\right), & \frac{(m-1)T}{M} \le t \le \frac{mT}{M} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

και άρα τα διανύσματα θα έχουν μορφή $s_1 = [A\sqrt{E_s}, 0, \ldots, 0]$

$\vdots$

$s_M = [0, 0, \ldots, A\sqrt{E_s}]$

Όλα τα διανύσματα είναι ορθογώνια και έχουν ίση απόσταση, $d_{mn} = \sqrt{\|s_m - s_n\|^2} = \sqrt{2E_s}$ για $m \ne n$

→ Ζωνοπερατές Κυματομορφές Ορθογώνιες σε N-D

Ανεβάζουμε με την $v_m(t) = s_m(t) \cos 2\pi f_c t$, $m = 1, \ldots, M$ και $0 \le t \le T$

Η ενέργεια κάθε μιας από τις ζωνοπερατές είναι η μισή της αντίστοιχης βασικής.

→ Frequency Shift Keying (FSK)

Τα M σήματα διαμορφωμένου φέροντος επιτυγχάνουν ορθογωνιότητα στο πεδίο των συχνοτήτων. Η αποστολή πληροφορίας στις συχνότητες βασίζεται διαμόρφωση κατά συχνότητα φέροντος. Η μεταλλαγή ολίσθησης συχνότητας (FSK) είναι αυτού του τύπου. Το πιο απλό της είδος είναι το δυαδικό FSK

Δυαδικό FSK

Χρησιμοποιούνται 2 φέροντα σήματα με συχνότητες f_1, $f_2 = f_1 + \Delta f$ για τη μετάδοση δυαδικής πληροφορίας. Οι κυματομορφές εκφράζονται →

$$u_1(t) = \sqrt{\frac{E_b}{T_b}} \cos 2\pi f_1 t \quad , \quad 0 \le t \le T_b$$

$$u_2(t) = \sqrt{\frac{E_b}{T}} \cos 2\pi f_2 t \quad , \quad 0 \le t = T_b$$

M-αδικό FSK

Χρησιμοποιούνται M φέροντα σήματα και άρα μεταδίδονται $k = \log_2 M$ bits/symb

Οι κυματομορφές εκφράζονται ως:

$$u_m = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos 2\pi(\overbrace{f_c + m\Delta f}^{f_m})\, t$$

για $m = 0, \ldots, M-1$ στο $0 \le t \le$

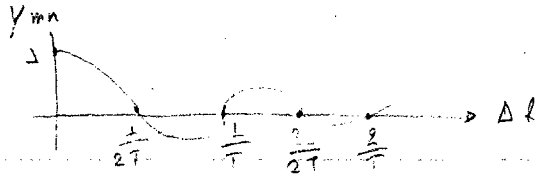
όπου
- $E_s = k \cdot E_b$ η ενέργεια συμβόλου
- $T = k \cdot T_b$ η περίοδος συμβόλου
- $\Delta f = f_m - f_{m-1}$ η συχνοτική απόσταση διαδοχικών συμβόλων

! Η απόσταση Δf καθορίζει το βαθμό που μπορούμε να διακρίνουμε τα μεταδιδόμενα σήματα

Συντελεστής Διασυσχέτισης

Είναι ένα μέτρο ομοιότητας δύο κυματομορφών σήματος. Είναι ο:

$$\gamma_{mn} = \frac{1}{E_s} \int_0^T u_m(t)\, u_n(t)\, dt = \frac{\sin 2\pi (m-n) \Delta f T}{2\pi (m-n) \Delta f T}$$



! Όταν $\gamma_{mn} = 0 \rightarrow \Delta f =$ πολλαπλάσιο του $\frac{1}{2T}$ τότε οι κυματομορφές είναι ορθογώνιες

Γεωμετρική Αναπαράσταση

$s_1 = (\sqrt{E_s}, 0, \ldots, 0)$

$\vdots$

$s_m = (0, 0, \ldots, \sqrt{E_s})$

και συναρτήσεις βάσης οι $\psi_m(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi(f_c + m\Delta f)t$

Επίσης η απόσταση μεταξύ οποιονδήποτε δύο σημείων είναι

$$d = \sqrt{2E_s} = d_{min}$$

Βέλτιστος Δέκτης σε AWGN κανάλι

και σε N-D χώρο

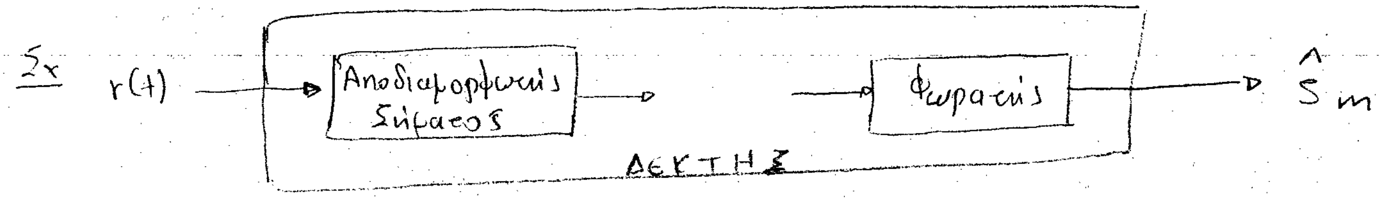
wait

Όπως είδαμε πριν αντιστοιχίζονται κυματομορφές σε σύμβολα.

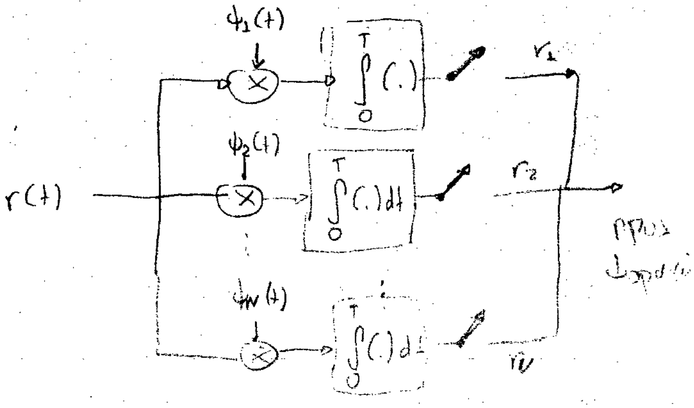
Το κανάλι AWGN εισάγει θόρυβο $n(t)$, με πυκνότητα φασματικής ισχύος $S_n(f)=\frac{N_0}{2}$

Άρα ο δέκτης λαμβάνει $r(t)=s_m(t)+n(t)$ και πρέπει να αποφασίσει ποιο σύμβολο στάλθηκε. Άρα θέλω βέλτιστο δέκτη που να ελαχιστοποιεί το Perror

Σχ



→ <u>Αποδιαμορφωτής Συσχέτισης</u> (1ο Μέρος)



Το πρώτο υπο-σχήμα του δέκτη.

Το λαμβανόμενο $r(t)$ $(=s_m(t)+n(t))$ προβάλλεται στις διαστάσεις του χώρου των κυματομορφών με N συσχετιστές (ολοκλήρωση δλδ του $r(t)$ με τις συναρτήσεις βάσεις των $s_m(t)$)

Άρα σε κάθε συσχετιστή έχω:

$$r_k=\int_0^T r(t)\psi_k(t)\,dt = s_{mk}+n_k$$

όπου $s_{mk}=\int_0^T s_m(t)\psi_k(t)\,dt$

$$n_k=\int_0^T n(t)\psi_k(t)\,dt$$

Τα στοιχεία του εξαρτώνται από ποιο σήμα μεταδόθηκε

όλα αυτά γράφονται διανυσματικά ως $r = s_m + n$ — τα στοιχεία του είναι Τ.Μ

<u>Επίδραση προβολών</u>

i) <u>Στο σήμα $s_m(t)$</u> Δεν χάνουμε ενέργεια κυματομορφής συμβόλου, αφού εκ κατασκευής ισχύει $s_m(t)=\sum_{n=1}^{M} s_{mn}\psi_n(t)$, αφού κάθε κυματομορφή μπορεί να γραφεί ως γραμ. συνδ. συναρτήσεων βάσης του χώρου

ii) <u>Στο θόρυβο $n(t)$</u> Το ίδιο δεν ισχύει για τον θόρυβο. Άρα με τις προβολές μπορεί να απορρίψουμε κάποια συνιστώσα του θορύβου → μείωση θορύβου! Μετά την προβολή, ο θόρυβος θα είναι $n'(t)=n(t)-\sum_{k=1}^{M} n_k\psi_k(t)$

Ανάλυση του $r = s_m + n$ (που προκύπτει μέσω του αποδιαμορφωτή συσχέτισης)

• Τα στοιχεία του s_m είναι ντετερμινιστικά αλλά τα στοιχεία του n είναι Gaussian T.M.

Η μέση τιμή των συνιστωσών του n είναι.

$$E[n_k] = \int_0^T E[n(t)]\,\psi_k(t)\,dt = 0. \text{ για κάθε } k$$

και η συνδιασπορά τους είναι

$$E[n_k n_m] = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & , m=k \\ 0 & , m\neq k \end{cases}$$

! Άρα οι συνιστώσες του θορύβου είναι ασυσχέτιστες Gaussian T.M με μηδενική μέση τιμή και διασποράς $\sigma_n^2 = N_0/2$

Άρα και οι συνιστώσες του λαμβανόμενου σήματος r θα είναι Gaussian T.M, ανεξάρτ και με μέση τιμή s_{mk} και ~~[illegible]~~ ίσης διασποράς $\sigma_n^2 = N_0/2$

Άρα η υπό συνθήκη PDF των T.M $r_1, r_2, .., r_M$ είναι:

$$f(r_k | s_{mk}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r_k - s_{mk})^2/N_0}$$

Και άρα η υπό συνθήκη PDF να λαμβάνει r δεδομένου ότι στάλθηκε s_m είναι:

$$f(r|s_m) = \prod_{i=1}^{N} f(r_k | s_{mk})$$

Και τελικά η υποσυνθήκη pdf για κάθε m είναι.

$$f(r|s_m) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N_0/2}} e^{-\|r - s_m\|^2/N_0}$$

Αποδιαμόρφωση με χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου

Μπορούμε και έτσι ;p

Ιδιότητα: Μεγιστοποίηση του SNR εξόδου ..

→ Βέλτιστος Φωρατής (2ο μέρος)

Παίρνει ως είσοδο το N-διάστατο διάνυσμα προβολών r και αποφασίζει για το σύμβολο που στάλθηκε. Για τον βέλτιστο φωρατή, θέλω να μεγιστοποιείται πιθανότητα σωστής απόφασης. Θεωρώ πως το σύστημα δεν έχει μνήμη μεταξύ συμβόλων.

Κριτήριο Maximum A-posteriory Probability (MAP)

Το κριτήριο της μέγιστης εκ των υστέρων πιθανότητας είναι ο βέλτιστος κανόνας απόφασης, δηλαδή μεγιστοποιεί την πιθανότητα σωστής λήψης → ελαχιστοποιεί το Perror.

- Επιλέγω το στοιχείο $\overset{s_m}{\text{εκείνο}}$ που έχει την μεγαλύτερη

$$P(s_m|r)$$ = πιθανότητα να έχει σταλεί s_m δεδομένου ότι ο φωρατής έχει πάρει r

! Αντίστοιχα αν δεν έχω r επιλέγω το σύμβολο εκείνο με μεγαλύτερο $P(s_m)$

Από τον κανόνα Bayes είναι:

$$P(s_m|r) = \frac{f(r|s_m)P(s_m)}{f(r)}$$

, όπου $f(r|s_m)$ η υπό συνθήκη pdf του διανύσματος r δεδομένου του s_m

$f(r) = \sum_{i=1}^{M} f(r|s_m))P(s_m)$

Απλοποίηση MAP σε ML (maximum likelihood)

Η περίπτωση που όλα τα σύμβολα είναι ισοπίθανα, τότε $P(s_m) = \frac{1}{M}$ $\forall m \in 1, \dots, M$

Τότε το $P(s_m)$ μπορεί να θεωρηθεί σταθερά ανεξάρτητη του συμβόλου, και

$P(s_m) = \frac{1}{M}$ Τότε η μεγιστοποίηση του $P(s_m|r)$ αντιστοιχεί σε μεγιστοποίηση του $f(r|s_m)$

δηλαδή $\max_{s_m} P(s_m|r) \Rightarrow \max_{s_m} f(r|s_m)$

Τελικά βλέπω πως το βέλτιστο σύμβολο είναι αυτό με την ελάχιστη ευκλείδια απόσταση από το r, δηλαδή $\min_{s_m} \|r - s_m\|^2$ (κανόνας φώρασης ελάχιστης απόστασης)

Άρα έχω ως εξής:

Φώραση Βέλτιστης Απόστασης

Ο φωρατής καλείται να υπολογίσει τις

$$D(r, s_m) = \|r - s_m\|^2 = \sum_{k=1}^{N} (r_k - s_{mk})^2$$

για κάθε s_m $m=1,\dots,M$ και να επιλέξει το $\min_{s_m} D(r, s_m)$

Φώραση Μέγιστης Συσχέτισης

Ο φωρατής καλείται να υπολογίσει τις

$$C(r, s_m) = 2r^T s_m - \|s_m\|^2$$

συσχέτιση συμβόλων-r

σταθμίζει την ενέργεια για να μην έχουν πλεονέκτημα σύμβολα μεγαλύτερης ενέργειας

για κάθε s_m, $m=1,\dots,M$ και επιλέγει το $\max_{s_m} C(r, s_m)$

! Αν τα σήματα είναι ίσης ενέργειας, τότε $C(r, s_m) = 2r^T s_m$

Φωρατής Μέγιστης πιθανοφάνειας (για μη ισοπίθανα σύμβολα, δες MAP)

Ο φωρατής υπολογίζει τις

$$PM(r, s_m) = f(r|s_m)P(s_m)$$

για κάθε s_m $m=1,\dots,M$ και επιλέγει το $\max_{s_m} PM(r, s_m)$

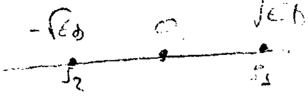
Πιθανότητα Σφάλματος για Δυαδική Διαμόρφωση

Ακόμα και ο βέλτιστος δέκτης κάνει σφάλματα απόφασης (λόγω του AWGN καναλιού)

Σφάλμα στο 2-PAM

(τα $s_1(t)$, $-s_1(t)$ λέγονται αντίποδα)

Έστω 2-PAM με $s_1(t) = g_T(t)$ και $s_2(t) = -g_T(t)$.



Ισχύει ενέργεια παλμού E_g = ενέργεια σήματος E_b

Η βάση είναι η $\psi(t) = g_T(t)/\sqrt{E_b}$, άρα $s_1 = \sqrt{E_b}$ $s_2 = -\sqrt{E_b}$

i) Αποδιαμόρφωση Έστω πως εκπέμπει το $s_1(t)$ και τα σύμβολα ισοπίθανα

Τότε το λαμβανόμενο, μετά την αποδιαμόρφωση ~~σήμα~~ διάνυσμα είναι το:

$$r = s_1 + n = \sqrt{E_b} + n$$

, με n την συνιστώσα του AW θορύβου, μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς $\sigma_n^2 = $

ii) Φώραση

Υπολογίζει τις αποστάσεις $D(r, s_1)$ και $D(r, s_2)$ και επιλέγει την min

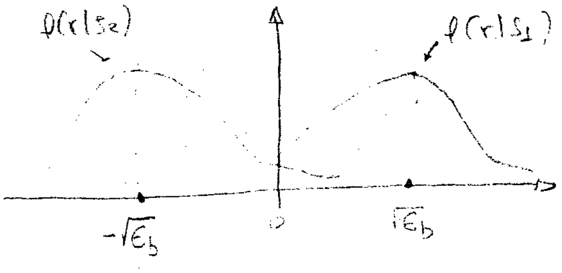
Λόγω του προβλήματος αντιστοιχεί $r > 0 \mapsto s_1$

$r < 0 \mapsto s_2$

Το r είναι Gaussian T.M., διασποράς $N_0/2$ και μέσης τιμής s_1 ή s_2 (ανάλογα)

Η υπο-συνθήκη pdf των λαμβανομένων σημάτων φαίνεται στο σχήμα

και είναι $f(r|s_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{\frac{(r+\sqrt{E_b})^2}{N_0}}$ $-\sqrt{E_b}$ $f(r|s_2)$



Άρα η πιθανότητα λάθους απόφασης αν έχει σταλεί π.χ. το s_1 είναι:

$$P(e|s_1) = P(r < 0|s_1) = \int_{-\infty}^{0} f(r|s_1)\,dr = \dots$$

$$\dots P(e|s_1) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$ όπου $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt$ και $Q(-\infty) = 1$, $Q(0) = 1/2$, $Q(+\infty) = 0$

Λόγω συμμετρίας $P(e|s_2) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$

Άρα η μέση $P_{λάθους} = P(s_1)P(e|s_1) + P(s_2)P(e|s_2) = \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$

$\Rightarrow P_{λάθους\,avg} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$ όπου $d(s_1, s_2) = \sqrt{E_b}$ $\rightarrow$ $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right)$ όπου [illegible]

→ **SNR** (signal to noise ratio)

Ορίζω $SNR = \frac{E_b}{N_0}$ τον λόγο του σήματος ως προς θόρυβο

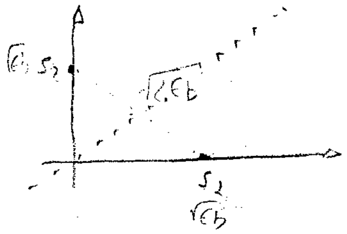
! Η P_e εξαρτάται μόνο από το SNR

Σφάλμα στο PPM

Εδώ τα σήματα είναι ορθογώνια στο 2D χώρο και $s_1 = [\sqrt{E_b} \quad 0]$

$s_2 = [0 \quad \sqrt{E_b}]$

$d_{12} = \sqrt{2E_b}$



Εδώ θα είναι $r = (\sqrt{E_b} + n_1, n_2)$ (αν έχει σταλεί s_1)

και $P(e|s_1) = P(\|r-s_1\|^2 > \|r-s_2\|^2 \mid s_1)$

$= P(C(r,s_2) > C(r,s_1) \mid s_1)$ μεγαλύτερη συσχέτιση

$= P(n_2 > \sqrt{E_b} + n_1)$ γεωμετρικά πάνω από την μεσοκάθετο

$= Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$

Και όπως και πριν, αφού s_1, s_2 ισοπίθανα $P_{\text{λαθ ολ}} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$

Σύγκριση Δυαδικών Σημάτων

Δυαδικά Αντίποδα	Δυαδικά Ορθογώνια
- 2-PAM	- 2-PPM
- 2-PSK	- 2-FSK
$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$	$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$

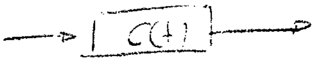
$Q\downarrow$

- Άρα το $P_{b,\text{αντίποδα}} < P_{b,\text{ορθογώνια}}$
- Τα ορθογώνια απαιτούν 2πλάσια ισχύ για ίδιο P_b → 3db διαφορά

Ψηφιακή Μετάδοση σε Ζωνοπεριορισμένο AWGN κανάλι

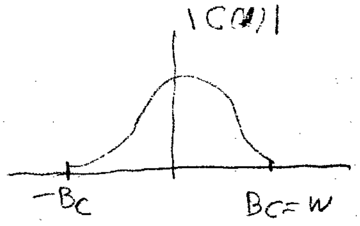
Πριν υποθέσαμε ότι είχαμε άπειρο εύρος ζώνης (ορθογώνιοι παλμοί g_T) όμως αυτό δεν ισχύει κτλ. Τα πιο πολλά κανάλια (ενσύρματα τηλεφωνικό, ασύρματα) είναι ζωνοπεριορισμένα. Άρα το εύρος ζώνης σήματος περιορίζεται από το εύρος ζώνης καναλιού.

→ Ζωνοπεριορισμένο Κανάλι



Μοντελοποιείται ως γραμμικό φίλτρο κρουστικής απόκρισης c(t)

Το κανάλι αναπαρίσταται [illegible] από την απόκριση συχνότητας $C(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(t) e^{-j2\pi f t} dt$



! Αν το σήμα εισόδου έχει συχνοτικές συνιστώσες $f > B_c$ τότε αυτές δεν θα μεταδοθούν!

Αν θέλει λοιπόν να μεταδοθεί παλμός βασικής ζώνης $g_T(t)$ — Fourier

τότε έξοδος $h(t) = c(t) * g_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau) g_T(t-\tau) d\tau$

και άρα μετά του AWGN θόρυβο $r(t) = c(t) * g_T(t) + n(t)$

→ Λήψη Δειγμάτων (∃ κάποια θεωρία πιο πριν, δεν την έχω γράψει)

Το ληφθέν είναι

$$y(m) = \underbrace{\alpha_m x(0)}_{\substack{\text{πληροφοριακό σύμβολο } \alpha_m \\ \text{πολλαπλασιασμένο κατά} \\ x(0) = E_h}} + \underbrace{\sum_{n \neq m} \alpha_n x(m-n)}_{\substack{\text{ISI} \\ \text{γραμμικός συνδυασμός} \\ \text{προηγούμενων και μελλοντικών} \\ \text{συμβόλων}}} + \underbrace{v(m)}_{\text{θόρυβος } v(m) = N(0, \sigma}$$

$$\sigma_v^2 = \frac{N_0 E_h}{2}$$

Δηλαδή το ISI αυξάνει το Pe, πιθανότητα λάθους απόφασης του φωρατή

η ISI οφείλεται στην συνολική κρουστική απόκριση

$$x(t) = g_T(t) * \underset{\substack{\downarrow \\ \text{το κανάλι είναι} \\ \text{δεδομένο}}}{c(t)} * g_R(t)$$

όμως πως μπορώ να σχεδιάσω τα φίλτρα πομπού και δέκτη ώστε ISI = 0;

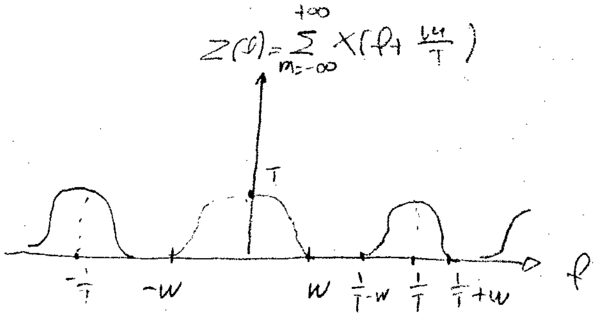
→ Σχεδιασμός για μηδενική ISI

Συνθήκη Nyquist για μηδενική ISI

Για να ισχύει $x(nT)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$, ικανή και αναγκαία συνθήκη

είναι να ισχύει $\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f+\frac{m}{T}) = T$

! Ορίζουμε εύρος ζώνης σήματος $B_T = \frac{1}{2T}$ και εύρος ζώνης καναλιού W. Τότε:



i) $B_T > W$ ⟺ $\frac{1}{2T} > W$

Δεν μπορώ να αποφύγω την ISI

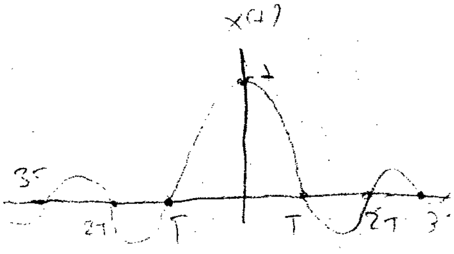
ii) $B_T = W$ ⟺ $\frac{1}{2T} = W$

θεωρητικά μόνο λόγω sinc

Τότε η συνθήκη ικανοποιείται μόνο αν η $X(f)$ είναι τετραγωνική συνάρτηση στο πεδίο συχνοτήτων → sinc συνάρτηση στο πεδίο χρόνου

$$X(f)=\begin{cases}T, & |f|<W\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

$x(t) = \text{sinc}(\frac{t}{T})$



iii) $B_T < W$ ⟺ $\frac{1}{2T} < W$

Τότε χρησιμοποιούμε παλμό raised cosine

$$X_{rc}(f)=\begin{cases}T, & 0\le |f| \le (1-\alpha)/2T\\ \frac{T}{2}\left[1+\cos\frac{\pi T}{\alpha}\left(|f|-\frac{1-\alpha}{2T}\right)\right], & \frac{1-\alpha}{2T}\le |f| \le \frac{1+\alpha}{2T}\\ 0, & |f| > \frac{1+\alpha}{2T}\end{cases}$$

* $\frac{1}{2T} = B_T$

* [illegible] Βλ. σελ. 41 διαφάνειες

→ το α είναι το rolloff factor

πόσο παραπάνω από το ελάχιστο εύρος ζώνης B_T θα χρησιμοποιήσει το σήμα

το απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι $W=(1+\alpha)B_T$ (πλεονάζον εύρος ζώνης αB_T)

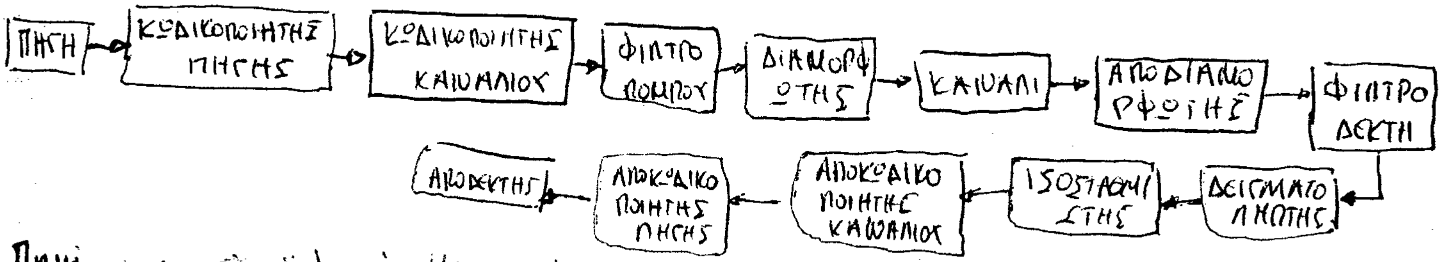
- $0\le\alpha\le 1$ • Αν $\alpha=0$ το $x_{rc}(t) \equiv \text{sinc}(t/T_s)$ • Αν $\alpha=1$ απαιτείται διπλάσιο από το εύρος ζώνης

Τηλ. Τηλεπικοινωνίες

*SOS $10\log_{10}(\frac{x}{y}) = k$ db

C.C

Γενική μορφή τηλεπικοινωνιακού Συστήματος



Πηγή αναλογική ή ψηφιακή. Μετατροπή αναλογ. → ψηφιακή με δειγματοληψία και κβαντισμό. Πεπερασμένο αλφ

(Απο)Κωδικοποίηση Πηγής Είσοδος: Ακολουθία συμβόλων
Έξοδος: Ακολουθία bits
Σκοπός: εξοικονόμηση bits

- Μπορεί να είναι lossy ή lossless

π.χ κώδικες Morse, Huffman, PCM, ADPCM, DM

(Απο)Κωδικοποίησης Καναλιού Είσοδος: Ακολουθία bits
Έξοδος: Ακολουθία bits
Σκοπός: Ανίχνευση ή/και διόρθωση σφαλμάτων

- Μπλοκ των k bits αντιστοιχίζουμε σε μπλοκ των $n=k+r$ bits, όπου r ο πλεονασμός. Τότε έχω ρυθμό κωδικοποίησης k/n

Φίλτρα Πομπού/Δέκτη Για μετάδοση στη βασική ζώνη. Σκοπός η κατάλληλη μορφοποίηση του συμβόλ ώστε να ~~αντι~~ μετωπίσουν οι ατέλειες του καναλιού βασικής ζώνης.
Επίσης ικανοποιείται το κριτήριο του Nyquist για μηδενική ISI

(Απο)Διαμόρφωση Για ζωνοπερατή μετάδοση Σκοπός τα μεταδιδόμενα σύμβολα αντιστοιχίζουμε σε κατάλληλο (ημιτονικές) σήματα, οι οποίες μπορούν να διέλθουν από το ζωνοπερατό κανάλι.
Η πληροφορία αποτυπώνεται στο πλάτος/φάση/συχνότητα του ημιτόνου. π.χ ASK, PSK, FSK

Ισοσταθμιστής ψηφιακό φίλτρο που προσπαθεί να αναιρέσει τις συνέπειες της μη-ιδανικότητας του καναλιού

Κανάλι περιορισμένο BW, παραμορφώσεις πλάτους/φάσης, θόρυβος (π.χ AWGN) κτλ.

Πληροφορία

Discrete Memoryless Source Διακριτή γιατί έχει πεπερασμένο αλφάβητο εξόδου. Χωρίς μνήμη γιατί παράγει στατιστικά ανεξάρτητα σύμβολα, δηλ η παρούσα έξοδος δεν εξαρτάται από τις προηγούμενες εξόδους

Συνάρτηση Πληροφορίας I όσο λιγότερο πιθανόν είναι να συμβεί ένα γεγονός, τόσο περισσότερη πληροφ. θα δίνει η πραγματοποίησή του. Έτσι αν ένα γεγονός s_k έχει πιθανότητα εμφάνισης p_k, τότε

$I(s_k) = \log_2(\frac{1}{p_k}) = -\log_2 p_k$ bits, όπου 1 bit $= I(s_k)$ αν $p_k = 1/2$

Εντροπία μιας πηγής αλφαβήτου Φ συμβολίζεται με $H(\Phi)$, και είναι η μέση πληροφορία που παράγει η πηγή Φ ανά σύμβολό της ή αλλιώς την μέση αβεβαιότητα που έχω για την πηγή.

Είναι $H(\Phi) = \sum_{i=1}^{N} p_i I(s_i) = \sum p_k \log_2(\frac{1}{p_k}) = -\sum p_k \log_2(p_k)$ bits/symbol

! Όσο μεγαλύτερη η εντροπία μιας πηγής τόσο περισσότερη πληροφορία φέρει και τόσο περισσότερα bits χρειάζονται για την κωδικοποίησή της

- Ισχύει $0 \leq H(\Phi) \leq \log_2 K$
  - 0 ~~[illegible]~~ αν υπάρχει $p_k = 1$
  - $\log_2 K$ αν $p_k = \frac{1}{K}$, δηλ τα σύμβολα της πηγής ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή

Διαφορική εντροπία $h(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) \log_2 f_x(x)\, dx$

? Για n-οστή επέκταση πηγής ισχύει $H(\Phi^n) = nH(\Phi)$

0.025

Κωδικοποίηση πηγής (mapping) αναπαράσταση συμβόλων πηγής με δυαδικές κωδικές λέξεις. Αν το μέσο μήκος λέξης κώδικα είναι $\bar{L}$ τότε ορίζω αποδοτικότητα κώδικα $\eta = \frac{L_{min}}{\bar{L}} = \frac{H(\Phi)}{\bar{L}}$

1ο Θεώρημα Shannon/Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής

Έστω πηγή με εντροπία H την οποία κωδικοποιώ με R bits/έξοδο πηγής (σύμβολο)

- Αν $R>H$ τότε μπορώ να κωδικοποιήσω με οσοδήποτε μικρό perror
- Αν $R<H$ τότε η πιθανότητα σφάλματος θα είναι πάντα μακριά από το 0

Κωδικοποίηση Huffman ⊕ Βέλτιστο $\bar{L}$ ⊖ Απαιτεί γνώση των $P(s_i)$

1) Ταξινομώ τα σύμβολα από το πιο πιθανό στο λιγότερο πιθανό ↓ 2) Στα δύο λιγότερο πιθανά αναθέτω το 0 κ 1 αντίστοιχα 3) Τα 2 αυτά σύμβολα συγχωνεύονται σε ένα με πιθανότητα το άθροισμα και τα ξαναταξινομώ 4) διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να μείνουν 2 σύμβολα που τους αναθέτω 0 και 1. Τελικά οι κωδικές λέξεις βρίσκονται ξεκινώντας από την τελευταία φάση και συλλέγοντας τα ψηφία μέχρι την αρχή!

! Στην εξίσωση αν το καινούργιο είναι ισοπίθανο με το παλιό, το βάζουμε πιο ψηλά θέση!

Discrete Memoryless Channel $\underset{\text{είσοδος}}{X} \rightarrow \boxed{p(y_k|x_j)} \rightarrow \underset{\text{έξοδος}}{Y}$

Διακριτό αν $|X|, |Y|$ πεπερασμένα σύνολα. Memoryless αν η τρέχουσα έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα εισ

$p(y_k|x_j)$ = η πιθανότητα να λάβω έξοδο y_k αν στείλει x_j

$$p(x_j,y_k) = p(x_j|y_k)\,p(y_k) = p(y_k|x_j)\,p(x_j)$$

Πιθανότητα λανθασμένης μετάδοσης όταν στέλνω x_j είναι $\sum_{k\neq j}^{K-1} p(y_k|x_j)$ Πιθανότητα λανθασμένης μετάδοσης για οποιοδήποτε x_j $\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k\neq j}^{K-1} p(x_j, y_k)$

Εντροπίες...

Η αβεβαιότητα που έχω για την είσοδο X είναι $H(X) = -\sum_{j=0}^{J-1} p(x_j)\log_2 p(x_j)$

Η από κοινού αβεβαιότητα για είσοδο και έξοδο είναι $H(X,Y) = -\sum_x \sum_y p(x,y)\log_2 p(x,y)$

Αν γνωρίζω την έξοδο Y τότε η αβεβαιότητα για την είσοδο X είναι $H(X|Y=y_k) = -\sum_{j=0}^{J-1} p(x_j|y_k)\log_2 p(x_j|y_k)$

Αν ξέρω την έξοδο τότε η αβεβαιότητα ← μέση τιμή για την είσοδο είναι η υποσυνθήκη εντροπία $H(X|Y) = \sum_{k=0}^{K-1} H(X|y_k)\,p(y_k)$

Αμοιβαία Πληροφορία $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j,y_k)\log_2\left[\frac{p(y_k|x_j)}{p(y_k)}\right]$

Είναι το ποσό πληροφορίας που εμάθα/δέχτηκα για την είσοδο παρατηρώντας την έξοδο

! Όσο μεγαλύτερη τόσο καλύτερο κανάλι

! Ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας μέσα από το κανάλι = ρυθμός συμβόλων * $I(X,Y)$

$= r_s * I(X,Y)$

Η πηγή θα παράγει πληροφορία με ρυθμό $H(\Phi) * r_s$

0.25

Χωρητικότητα Καναλιού

$C = \max_{\{p(x_j)\}} I(X;Y)$ = η μέγιστη τιμή της αμοιβαίας πληροφορίας $I(X;Y)$ ως προς όλες τις δυνατές κατανομές του αλφαβήτου εισόδου X

Άρα η χωρητικότητα εκφράζει το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης, δηλ. την μέγιστη πληροφορία που μπορεί να περάσει από το κανάλι ανά χρήση του καναλιού (bits/channel use , ισοδύναμα bits/περίοδο συμβόλου)

2ο Θεώρημα Shannon - Θεώρημα Χωρητικότητας Καναλιού

σύμβολα   εντροπία πηγής

Έστω κανάλι με χωρητικότητα C, από όπου επιθυμούμε να μεταδώσουμε με ρυθμό $R = r \cdot H$
τότε • αν $R<C$, ∃ κωδικοποιήσεις καναλιού που να πετυχαίνει πιθανότητα σφάλματος δ για
οσοδήποτε μικρό δ
• αν $R>C$ τότε για οποιονδήποτε κώδικα η πιθανότητα σφάλματος είναι μακριά από το 0

❗ Shannon-Hartley $C = B\log_2(1+\frac{P_S}{P_N})$

B = bandwidth
P_S = ισχύς σήματος
P_N = ισχύς θορύβου

Θεωρία Ρυθμού-Παραμόρφωσης

Ορίζω ως παραμόρφωση $d(x,\hat{x}) = (x-\hat{x})^2$ ανάμεσα στο σταλθέν x και στο ληφθέν $\hat{x}$

Αν έχω μπλοκ n δειγμάτων πηγής τότε $d(x^n,\hat{x}^n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_i,\hat{x}_i)$ - ο μέσος όρος

Θεώρημα Rate Distortion

Ο ελάχιστος αριθμός bits/έξοδο που χρειάζεται για να αναπαραχθεί μια DMS με παραμόρφωση $\le D$ ονομάζεται συνάρτηση ρυθμού-παραμόρφωσης και είναι $R(D) = \min_{p(\hat{x}|x):E[d(X,\hat{X})]\le D} I(X;\hat{X})$

Κωδικοποίηση Πηγής - Κβάντιση

Διαμερίζω το R σε N ξένα υποσύνολα. Για κάθε τέτοιο υποσύνολο R_k επιλέγεται αντιπροσωπευτικό σημείο $\hat{x}_k$. Η κβάντιση λοιπόν είναι η αντιστοίχιση $Q(x) = \hat{x}_k$

❗ Απαιτούνται $R = \log_2 N$ bits/έξοδο της πηγής

Όμως για κάθε τέτοια αντιστοίχιση εισάγεται παραμόρφωση $\tilde{x} = x - Q(x)$ που ονομάζω θόρυβο

Ορίζω Signal to Quantization Noise Ratio

$$SQNR = \frac{\text{ισχύς σήματος}}{\text{ισχύς θορύβου}} = \frac{E[X^2]}{E[\tilde{X}^2]} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-Q(x)) f_X(x)\,dx}$$

→ Βαθμωτή Κβάντιση

Διαχωρισμός σε περιοχές ίσου εύρους, και αντιπροσωπεύουσες τιμές κβάντισης
Βέλτιστη μόνο για ομοιόμορφη κατανομή

→ Μη ομοιόμορφη Κβάντιση (βέλτιστη)

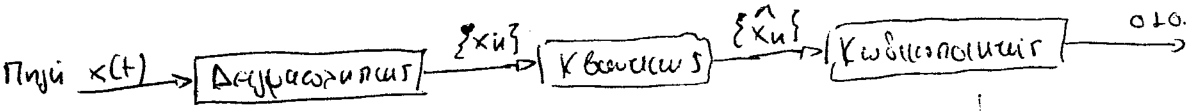
Οι περιοχές κβάντισης δεν χρειάζεται να έχουν το ίδιο εύρος.
Αλγόριθμος Lloyd-Max 1) επιλέγω τις περιοχές κβάντισης τυχαία ή ομοιόμορφα 2) τιμές κβάντισης ορίζονται τα κέντρα μάζας των περιοχών κβάντισης 3) Τα άκρα των περιοχών κβάντισης υπολογίζονται ως ο μέσος όρος των γειτονικών τιμών κβάντισης 4) Επανάληψη 3, 4

→ Διανυσματική κβάντιση: κβαντίζω μπλοκ εξόδων. Για N-μπλοκ χρειάζομαι $(K)^N$ περιοχές κβάντισης όσο K χρειαζόμουν στην βαθμωτή
αλλά ο ρυθμός παραμένει ίδιος όπως στη βαθμωτή
Κέρδος λόγω: 1) Μπορώ να μη φτιάχνω ορθογώνιες περιοχές
2) Πηγές με μνήμη! για να ενσωματώσω τη συσχέτιση μεταξύ των εξόδων της πηγής

(0.375)

ωδικοποίηση Κυματομορφής

PCM – Παλμοκωδική Διαμόρφωση



προδειγματοληπτικό φίλτρο ώστε να περιορίσω εύρος ζώνης σε W

υπερδειγματοληψία με $f_s \geq f_{nyquist}$

κωδικοποίηση των εξόδων του κβαντιστή αν έχει N στάθμες, τότε χρησιμοποιώ $\log_2 N$ bits

Ομοιόμορφο PCM Χρησιμοποιεί ομοιόμορφο κβαντιστή

Αν υποθέσω ομοιόμορφο σε κάθε διάστημα κβάντισης θόρυβο, τότε $E[\tilde{X}^2] = \frac{x_{max}^2}{3N^2}$

Αν θεωρήσω την κανονικοποίηση σήματος εισόδου $\breve{X} = \frac{X}{x_{max}}$ τότε $E[\breve{X}^2] = E[X^2]/x_{max}^2$

Άρα προκύπτει $SQNR = \frac{E[X^2]}{E[\tilde{X}^2]} = \dots = \underline{3*4^n E[\breve{X}^2]}$ αν χρησιμοποιούνται n bits

! Θα πρέπει να μεταδώσω με ρυθμό δεδομένων $f_s * n$ bits/sec → χρειάζεται εύρος ζώνης $BW \geq \frac{f_s * n}{2}$

και αφού $f_s = f_{nyq} \geq 2W \Rightarrow BW \geq nW$ → αύξηση του αρχικού BW κατά n

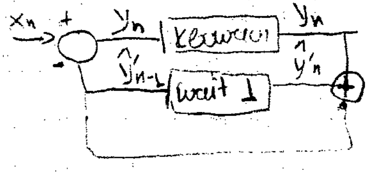
Μη ομοιόμορφο PCM με μη ομοιόμορφη κβάντιση, δίνονται καλύτερα διαστήματα όπως η σιγμοειδή

Συμπίεση επεκτείνω μείωση της δυναμικής περιοχής πριν το PCM, ώστε να επιτευχθεί μεγαλύτερο SQN

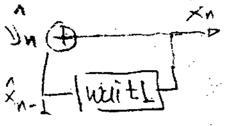
~~[illegible] μορφή αναπαράστασης~~

DPCM – Διαφορικό PCM

Κβαντίζω όχι το δείγμα αλλά την διαφορά μεταξύ διαδοχικών δειγμάτων. Όσο περισσότερη συσχέτιση έχουν, τόσο καλύτερα, αφού η διαφορά τους έχει μικρή δυναμική περιοχή → μπορώ να τη κβαντίσω χρησιμοποιώντας λιγότερα bits.



πομπός



ΔΕΚΤΗΣ

Προγνωστικός τάξης p χρησιμοποιώ τα p προηγούμενα δείγματα για να προβλέψω το επόμενο. Κβαντίζεται η διαφορά από την πρόβλεψη. ⊕ χρήση περισσότερων δειγμάτων για καλύτερη πρόγνωση → Θ καλύτερη πρόγνωση άρα μικρότερο σφάλμα πρόβλεψης και απαιτούνται λιγότερα bits κβάντισης

ADAPTIVE DPCM (ADPCM) όταν το σήμα έχει μεταβαλλόμενα χαρακτηριστικά, χρησιμοποιώ προσαρμοζόμενο γραμμικό προγνώστη και προσαρμοστικό βήμα κβάντισης

→ **Delta Modulation** εφαρμογή το DPCM με p=1 / χρησιμοποιώ μόνο του προηγουμένου δείγματος για πρόβλεψη, και 1 bit κβάντισης με 2 στάθμες, ±Δ

Πρέπει να δειγματοληπτώ με $f_s >> f_{nyq}$ αλλά αφού χρησιμοποιώ ένα bit μόνο, το τελικό rate είναι μικρότερο

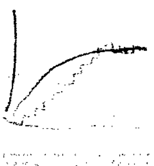
Η επιλογή του μεγέθους του Δ είναι μείζον πρόβλημα

Μεγάλο Δ – κοκκώδης θόρυβος

⊕ παρακολουθεί πιο γρήγορες μεταβολές του σήματος

⊖ μεγάλος θόρυβος κβάντισης σε αργές μεταβολές

→ ΛΥΣΗ



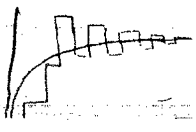
Το αντίθετο

⊖ Υπερφόρτωση κλίσης

Adaptive Delta Modulation

Το Δ προσαρμόζεται σύμφωνα $\Delta_n = \Delta_{n-1} \underset{\text{σταθερά}}{K}^{\overset{\text{προηγούμενες έξοδοι κβαντιστή}}{\varepsilon_n * \varepsilon_{n-1}}}$

- Αν οι έξοδοι του κβαντιστή είναι ομόσημες, υποδηλώνεται μεγάλη μεταβολή και το Δ αυξάνεται.
- Αλλιώς μειώνεται.



[illegible]

0.5

Γεωμετρική Αναπαράσταση

Για διανύσματα s_i, s_j : $s_i^T s_j = \begin{cases} 0, & i\neq j \\ 1, & i=j \end{cases}$

Χρειαζόμαστε ορθοκανονική βάση. Ορθοκανονικότητα – Για σήματα ψ_i, ψ_j : $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i(t)\psi_j(t)\,dt = \begin{cases} 0, & i\neq j \\ 1, & i=j \end{cases}$

Η ενέργεια κάθε σήματος είναι $E = \int \psi_i^2(t)$

Κατασκευή βάσης με Gram-Schmidt $s_i(t)$ οι κυματομορφές σήματος - input $\psi_i(t)$ οι ορθοκανονικές - output

1) $\psi_1(t) = s_1(t)/\sqrt{E_1}$ (κανονικοποίηση ώστε να έχει μοναδιαία ενέργεια) Η ψ_1 είναι η πρώτη ορθοκανονική κυματομορφή

2) Αφαιρώ από το s_2 την προβολή του s_2 στην ψ_1. Αυτή είναι $c_{21} = \int s_2(t)\psi_1(t)\,dt$

Άρα $d_2(t) = s_2(t) - c_{21}\psi_1(t)$. Και μετά κανονικοποιώ, $\psi_2(t) = d_2(t)/\sqrt{E_2(t)}$ $E_2(t) = \int d_2^2(t)$

⋮

i) Αφαιρώ από την s_i τις προβολές $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{i,i-1}$. Άρα $d_i(t) = s_i(t) - c_{i1}(t)\psi_1(t) - c_{i2}(t)\psi_2(t) - \dots$

Και κανονικοποιώ $\psi_i(t) = d_i(t)/\sqrt{E_i}$

Άρα πήραμε **N** ορθοκανονικές κυματομορφές (με $N \leq M$ όπου M ο αριθμός κυματομορφών εισόδου

! Πλέον μπορώ να εκφράσω κάθε κυματομορφή εισόδου ως γραμ. συνδυασμό των κυματομορφών βάσης

δηλαδή $s_m(t) = s_{m1}\psi_1(t) + s_{m2}\psi_2(t) + \dots + s_{mN}\psi_N(t)$

όπου s_{mn} η προβολή της $s_m(t)$ στην n-οστή κυματομορφή βάσης, $s_{mn} = \int s_m(t)\psi_n(t)$

Άρα αντιστοιχίζω την $s_m(t)$ $\xleftrightarrow{\text{σε}}$ $s_m = [s_{m1}, s_{m2}, \dots, s_{mN}]$

η ενέργεια $E_m = \int_{-\infty}^{+\infty} s_m^2(t) \longleftrightarrow E_m = \sum_{n=1}^{N} s_{mn}^2$

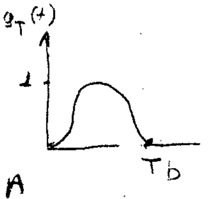
το εσ. γινόμενο $\int_{-\infty}^{+\infty} s_m(t)s_n(t) \longleftrightarrow s_m^T s_n^T$

PAM - Διαμόρφωση Παλμού κατά Πλάτος

Χρησιμοποιείται μόνο 1 παλμός ως κυματομορφή βάσης, άρα είναι μονοδιάστατες κυματομορφές σήματος

PAM Βασικής Ζώνης

Χρησιμοποιώ έναν παλμό βασικής ζώνης με περίοδο T_b.



→ Δυαδικό PAM Βασικής ζώνης

Έχω δυαδικό αλφάβητο → αντιστοιχίζω 1 → παλμός πλάτους +A 0 → παλμός πλάτους −A

Αν T_b είναι η περίοδος που μπορώ να στείλω ένα bit, τότε στέλνω με ρυθμό σηματοδοσίας (συμβόλων) $R_s = \frac{1}{T_b}$

→ M-αδικό PAM Βασικής ζώνης

Χρησιμοποιούμε M σύμβολα ψηφιακής πληροφορίας. Άρα μπορώ να ομαδοποιήσω $k = \log_2 M$ bits εισόδου

Κάθε k-άδα bits αποτελεί ένα από τα M σύμβολα

Αν ο ρυθμός που μπορώ να στείλω στο κανάλι είναι R_b (σταθερός) τότε στο M-PAM έχω νέα διάρκεια συμβόλων $T = kT_b$ άρα ρυθμό συμβόλου $R_s = \frac{R_b}{k}$

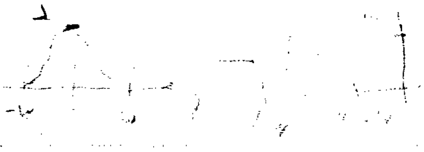
Εδώ θα διαμορφώσουμε την βασική κυματομορφή με M διαφορετικά πλάτη A_m, $m = 1, \dots, M$

Οι παλμοί δεν έχουν ίσες ενέργειες, αλλά $E_m = A_m^2 E_g$, όπου E_g η ενέργεια της κυματομορφής βάσης

→ Ζωνοπερατό PAM

Πολλαπλασιάζω το παλμό βασικής ζώνης $g_T(t)$ με φέρουσα

Το ζωνοπερατό PAM σε σχέση με το βασικής ζώνης
- καταλαμβάνει διπλάσιο εύρος ζώνης, 2W
- έχει την μισή ισχύ $E_m = \frac{A_m^2}{2} E_g$



ASK ειδική περίπτωση όπου

0.625

PAM - συνέχεια

Γεωμετρική αναπαράσταση   Μία κυματομορφή βάσης άρα 1D → αναπαρίστανται πάνω σε ευθεία

Συνάρτηση βάσης η $\phi(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{E}}$ ← κανονικοποίηση

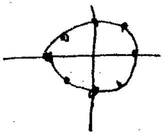
Άρα κάθε κυματομορφή εισόδου θα παριστάνεται ως μονοδιάστατο διάνυσμα μορφής $s_m = \sqrt{E_g}\, A_m$ για το βασικής ζώνης και $s_m = \sqrt{\frac{E_g}{2}}\, A_m$ για το ζωνοπερατό PAM

2-D Κυματομορφές Σήματος

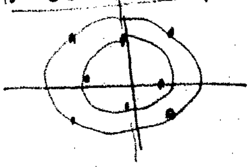
Πλέον δεν έχω 1 αλλά 2 συναρτήσεις βάσης, έστω $\phi_1(t), \phi_2(t)$ ορθοκανονικές

Άρα τα σήματα που θα διαμορφώνω μπορούν να γραφούν ως $s_m = [s_{m1}, s_{m2}]$

Υπάρχει περιορισμός ίσης ενέργειας



Αν δεν υπάρχει



PSK - Διαμόρφωση κατά φάση (2D)

$u_m(t) = s(t)\cos\left(2\pi f_c + \frac{2\pi m}{M}\right)$, $m = 0, \dots, N$

Η πληροφορία αποτυπώνεται στην φάση φέροντος

Άρα θα έχουμε και M-PSK όπως πριν

Γεωμετρική Αναπαράσταση   Μπορεί να θεωρηθεί πως $\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}}\, g_T(t)\cos 2\pi f_c t$

$\psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}}\, g_T(t)\sin 2\pi f_c t$

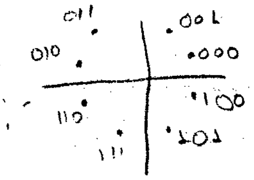
σήματα

Άρα τα σύμβολα αντιστοιχούν σε 2D-διανύσματα $s_m = \begin{bmatrix} A_{mc} \\ A_{ms} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{E_s}\cos 2\pi m/M \\ \sqrt{E_s}\sin 2\pi m/M \end{bmatrix}$

ή 8-PAM

! Κωδικοποίηση Gray

Γενικά σημαντικό στο PSK



Π.χ. εδώ στο 8-PSK αναγνωρίζουμε 3 bit κάθε φορά

Που κάναμε λάθος, κάνουμε μόνο 1

Αποστάσεις σημείων

$d_{min} = \sqrt{2E_s\left(1-\cos\frac{2\pi}{M}\right)}$

QAM - Ορθογώνια Διαμόρφωση κατά Πλάτος (2D)

$u_{mn}(t) = A_m g_T(t)\cos(2\pi f_c t + \theta_n)$

$m = 1, \dots, M_1$

$n = 1, \dots, M_2$

Συνδυασμός της διαμόρφωσης κατά πλάτος και κατά φάση.

Από τα k bits κάθε block που κωδικοποιούμε κυματομορφή,

τα k_1 χρησιμοποιούνται για διαμόρφωση πλάτους και

τα k_2 χρησιμοποιούνται για διαμόρφωση φάσης

(0.7

N-Διάστατες Κυματομορφές Σήματος

Υποθέτουμε M συναρτήσεις βάσεις για M κυματομορφές σήματος

PPM - Διαμόρφωση κατά θέση (N-D, ορθογώνια στο πεδίο του χρόνου)

η πληροφορία αποτυπώνεται στη θέση που βρίσκεται ο παλμός. Κυματομορφές βάσης $\phi_m(t) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{E_g}} g_T\left(\frac{t-(m-1)T}{M}\right) \\ 0, \text{αλλ.} \end{cases}$

Αναπαράσταση αυτών κυματομορφές συμβόλων $s_1 = [A\sqrt{E_s}, 0, 0, \ldots, 0]$

$s_M = [0, 0, 0, \ldots, A\sqrt{E_s}]$

Όλα θα έχουν ίση απόσταση $d_{mn} = \sqrt{2E_s}$

Όλα έχουν ίση ενέργεια, $E_s = A^2 E_g$

Ζωνοπερατό Αντίστοιχο, με μισή ενέργεια $E_s = A^2 \frac{E_g}{2}$

FSK - Διαμόρφωση κατά συχνότητα (N-D, διαμόρφωση στο πεδίο συχνοτήτων)

Υποθέτουμε και εδώ πως όλες οι κυματομορφές έχουν ίδια ενέργεια. Αποτυπώνω πληροφορία στην συχνότητα

Για ~~M~~-FSK

$u_m(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos 2\pi (f_c + m\Delta f) t \quad , m=0,\ldots,M-1$ και ;

$E_s = kE_b$ όπου $k = \log_2 M$, η ενέργεια του κάθε συμβόλου

$T = kT_b$ η περίοδος συμβόλου

$\Delta f = f_m - f_{m-1}$ η απόσταση μεταξύ διαδοχικών συχνοτήτων

Γεωμετρική Αναπαράσταση

$\phi_m(t) = \sqrt{2/T} \cos 2\pi (f_c + m\Delta f$

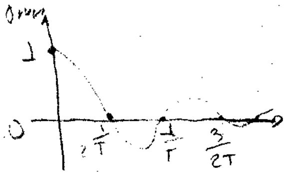
Άρα διανύσματα μορφής

$s_1 = [\sqrt{E_s}, 0, \ldots, 0]$

$s_M = [0, 0, \ldots, \sqrt{E_s}]$

και ίση απόσταση $d_{mn} = \sqrt{2E}$

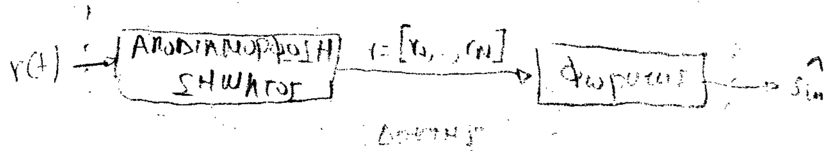
Συντελεστής Διασυσχέτισης $\gamma_{mn} = \frac{1}{E_s} \int_0^T u_m(t) u_n(t) dt$



Κάθε $\frac{1}{T}$ γίνεται 0 → ορθογώνιες κυματομορφές

Όμως για $\frac{1}{2T}$ ασυνεχείς στα όρια συμβόλων. Για $\frac{1}{T}$ όλα καλά → αλλά χρειαζόμαστε διπλάσιο BW

ΔΕΚΤΗΣ



μέγιστο SNR = $\frac{2E_s}{N_0}$

Αποδιαμορφωτής συσχέτισης

Το σήμα που λαμβάνεται είναι της μορφής $r(t) = \overset{\text{αυτό που στέλνω}}{s_m(t)} + \overset{\text{θόρυβος}}{n(t)}$. Προβάλλουμε το r(t) σε κάθε κυματομορφή βάσης; Έτσι: 1) δεν χάνουμε το σήμα μας 2) Απορρίπτουμε (μπορεί) κομμάτι συνιστώσα του θορύβου!

Βέλτιστος Φωρατής πρέπει δεδομένης παρατήρησης r (έξοδος) να μεγιστοποιείται η πιθανότητα σωστής απόφασης

Κριτήριο MAP - μέγιστης εκ των υστέρων πιθανότητας

Επιλέγουμε εκείνο το s_m το οποίο έχει την μεγαλύτερη $P(s_m|r)$ από όλα τα $m \in M$

- Αν δεν έχουμε καμία έξοδο διαλέγω σύμβολο με το μεγαλύτερο $p(s_m)$

→ Έτσι ελαχιστοποιείται η πιθανότητα λάθους απόφασης

Κριτήριο ML - μέγιστης πιθανοφάνειας

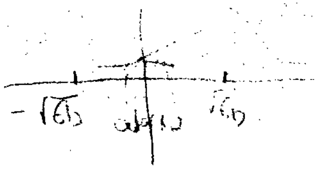
Ισχύει $P(s_m|r) = \frac{f(r|s_m)P(s_m)}{f(r)}$

Η αντίστοιχη, ο βέλτιστος φωρατής → max του $C(r, s_m) = 2r^T s_m - \|s_m\|^2$

Αν τα M σύμβολα είναι ισοπίθανα, τότε $\max_{s_m} P(s_m|r) \Rightarrow \max_{s_m} f(r|s_m)$ ← μπορώ να μεγιστοποιήσω αυτό

Το οποίο γίνεται: $\max_{s_m} \ln f(r|s_m) = \min_{s_m} \|r - s_m\|^2$ διαλέγω το s_m με την ελάχιστη ευκλείδια απόσταση από το r

0875



Σφάλματος

→ Στο 2-PAM $Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$ όπου $Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2/2}$

Και αφού τα σύμβολα ισοπίθανα $P_b = \frac{1}{2}P(e|s_1) + \frac{1}{2}P(e|s_2) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$

- εξαρτάται μόνο από το $\frac{E_b}{N_0} = SNR$ αφού $d_{12} = 2\sqrt{E_b}$, $P_b = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}}{2N_0}}\right)$

→ Στο 2-PSK όμοιως

→ Στα 2-FSK, 2-PPM $P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$

Άρα τα 2-PAM, 2-PSK είναι προτιμότερα και πετυχαίνουν την ίδια πιθανότητα σφάλματος με το μισό SNR

→ ISI διασυμβολική παρεμβολή: γραμμικός συνδυασμός προηγούμενων και επόμενων συμβόλων

οφείλεται στην συνεχή χρονική απόκριση

Συνθήκη Nyquist $x(nT) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$

Αν το κανάλι έχει εύρος ζώνης W. Ορίζω ως εύρος ζώνης [illegible] το $B_T = \frac{1}{2T}$

Για να ικανοποιείται πρέπει $W \geq \frac{R_b}{2}$

$$X_{rc}(f) = \begin{cases} \ldots & 0 \leq |f| \leq (1-\alpha)B_T \\ \ldots & (1-\alpha)B_T \leq |f| \leq (1+\alpha)B_T \\ \ldots & |f| \geq (1+\alpha)B_T \end{cases}$$

απαιτούμενο εύρος ζώνης $W = (1+\alpha)B_T$

Ψηφιακές 5.10.09

1 → Έστω πηγή με πιθανότητες να παράγει: $p(0) = 0.3$

$p(1) = 0.7$

Έστω πως η μετάδοση γίνεται μέσω καναλιού με πιθανότητα σφάλματος $P_e = 0.2$

i) Ποια η πιθανότητα να βρούμε 1 στην έξοδο

ii) Ποια η πιθανότητα να έχει σταλεί 1 και να παρατηρούμε 1 στην έξοδο

Απ:

i) $P(1 \text{ στην έξοδο}) = P\left(\begin{matrix}\text{έχω στείλει 1 και έχω} \\ \text{λάβει 1}\end{matrix}\right) + P\left(\begin{matrix}\text{έχω στείλει 0 και} \\ \text{έχω λάβει 1}\end{matrix}\right)$

$= 0.7 \times 0.8 + 0.3 \times 0.2$

$= 0.62$

ii) $P(1 \text{ στείλαμε} \mid 1 \text{ στην έξοδο}) = \dfrac{P(1 \text{ έξοδο}, 1 \text{ είσοδο})}{P(1 \text{ στην έξοδο})} = \dfrac{P(1 \text{ έξοδο} \mid 1 \text{ είσοδο})\, P(1 \text{ είσοδο})}{P(1 \text{ έξοδο})}$

$= \dfrac{0.8 \times 0{,}7}{0{,}62} = 0{,}931$

2 → Έστω DMS με αλφάβητο $\Phi = \{S_0, S_1, S_2\}$ και αντίστοιχες πιθανότητες εμφάνισης $p(S_0) = p_0 = 0.4$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.3$. Αν η πηγή παράγει σύμβολα με ρυθμό $r_s = 1000$ symbols/se

i) Να υπολογιστεί η εντροπία της πηγής ii) ο μέσος ρυθμός πληροφορίας στην έξοδο της πηγής

iii) Το lengthmin κωδικής λέξης ώστε να έχουμε αναπαράσταση χωρίς σφάλματα

i) $$H(\Phi) = \sum_{i=0}^{2} p_i \log\left(\frac{1}{p_i}\right) = 0.4 \log\left(\frac{1}{0.4}\right) + 0.3 \log\left(\frac{1}{0.3}\right) + 0.3 \log\left(\frac{1}{0.3}\right)$$

$= 1{,}571$ bits/symbol

ii) Ο μέσος ρυθμός πληροφορίας της πηγής είναι:

$$R_\Phi = H(\Phi)\, r_s = 1{,}571 * 1000 = 1571 \text{ bits/sec}$$

iii) Από το 1ο Θ. Shannon ξέρω πως το κάτω φράγμα είναι η εντροπία, άρα Lengthmin $= H(\Phi)$

② 15.10 **Ψηφιακές**

3 → Έστω κώδικας Morse όπου χρησιμοποιεί • και —. Η • παριστάνεται με παλμό 1 msec και η — με 3 msec. Ισχύει $p(\bullet) = 0,75$ $p(-) = 0,25$

i) Να υπολογιστεί το πληροφοριακό περιεχόμενο της τελείας και της παύλας

ii) Να υπολογιστεί η μέση πληροφορία του κώδικα

iii) Αν μεταξύ κάθε 2 συμβόλων παρεμβάλλεται ένα διάστημα σιγής 1 msec, να υπολογιστ… ο μέσος ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας

Απ: i) $I(\bullet) = \log\left(\frac{1}{0,75}\right) = 0,415$ bits/symbol

$I(-) = \log\left(\frac{1}{0.25}\right) = 2$ bits/symbol

ii) Μέση πληροφορία = εντροπία = $H(\Phi) = \dots = 0,811$ bits/symbol

iii) Έχουμε διάστημα παύσης 1 msec, άρα ο χρόνος που διαρκεί κάθε σύμβολο είναι $t_{\bullet} = 2$ msec $t_{-} = 4$ msec

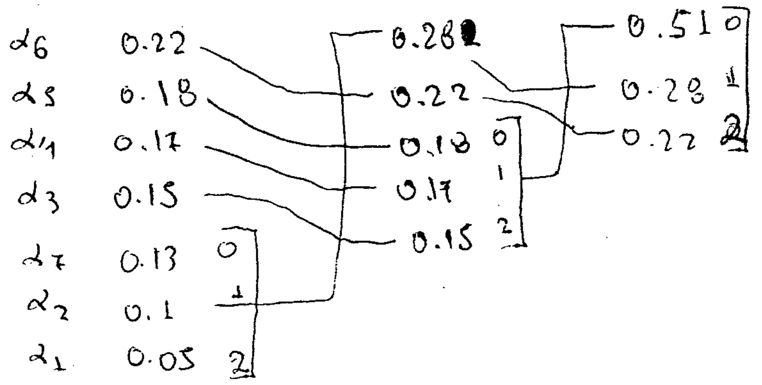
Ο μέσος χρόνος που διαρκεί ένα σύμβολο είναι $t_s = 0,75 * 2 + 0,25 * 4 = 2,5$ msec

Άρα στέλνουμε με (μέσο) ρυθμό συμβόλων $r_s = 400$ symbols/sec

Άρα ο (μέσος) ρυθμός πληροφορίας είναι $R = H(\Phi)\, r_s = 324,4$ bits/sec

4 → Έστω DMS με σύμβολα $\Phi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$ και αντίστοιχες πιθανότητες εμφάνισης 0,05, 0.1, 0.15, 0.17, 0.18, 0.22, 0.13. Να σχεδιαστεί τριαδικός Huffman

Απ:



Άρα $\alpha_6 \rightarrow 2$

$\alpha_5 \rightarrow 00$

$\alpha_4 \rightarrow 01$

$\alpha_3 \rightarrow 02$

$\alpha_7 \rightarrow 10$

$\alpha_2 \rightarrow 11$

$\alpha_1 \rightarrow 22$

Ψηφιακές 15.10

5 → Έστω η δεύτερης τάξης επέκταση της πηγής της ασκ. 2. Για την πηγή αυτή να υπολογιστούν i) σύμβολα κ' πιθανότητες εμφάνισης ii) Εντροπία iii) Μέσος ρυθμός πληροφορίας

Απ: i) Κάθε σύμβολο της νέας πηγής θα αποτελείται από 2 της παλιάς. Άρα η νέα πηγή θα έχει $|\Phi^2| = 3^2 = 9$ σύμβολα και συγκεκριμένα $\Phi^2 = \{ S_0S_0, S_0S_1, S_0S_2, S_1S_0, S_1$
$S_1S_2, S_2S_0, S_2S_1, S_2S_2 \}$

Καθένα από τα σύμβολα αυτά θα έχει πιθανότητα εμφάνισης $p(\overbrace{S_iS_j}^{\sigma_k}) = p(S_i)p(S_j$

Άρα

Φ^2	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8
	S_0S_0	S_0S_1	S_0S_2	S_1S_0	S_1S_1	S_1S_2	S_2S_0	S_2S_1	S_2S_2
P	0.16	0.12	0.12	0.12	0.09	0.09	0.12	0.09	0.09

ii) Η εντροπία κατά τα γνωστά $H(\Phi^2) = \sum_{s\in\Phi^2} p(s)\log\left(\frac{1}{p_s}\right) = \dots = 3.142$

Παρατηρώ πως $H(\Phi^2) = 2H(\Phi)$ και γενικά $H(\Phi^n) = nH(\Phi)$

*Λογικό αφού από 1 σύμβολο έπαιρνα πληροφορία $H(\Phi)$ τώρα από 2 σύμβολα θα παίρνω πληροφορία $2H(\Phi)$)

iii) Για την αρχική πηγή ίσχυε $r_s = 1000$ symbols/sec. Όμως εδώ κάθε σύμβολο της Φ^2 αντιστοιχεί σε 2 της Φ άρα $r_s' = 500$ symbols/sec

Άρα $R_{\Phi^2} = r_s' {}^{*} H(\Phi^2) = \dots = 3.142$ bits/sec $= R_\Phi$

Παρατηρώ πως $R_\Phi = R_{\Phi^2} = \dots = R_{\Phi^n}$, δηλαδή πως ο ρυθμός παραγωγής πληροφορίας δεν άλλαξε

④

19.11

Τερματικό CRT χρησιμοποιείται για αποστολή δεδομένων σε PC. Είναι συνδεδεμένο με τηλεφωνική γραμμή εύρους ζώνης 3 kHz και SNR εξόδου 10 db. Αν το τερματικό έχει 128 ισοπίθανους χαρακτήρες να υπολογιστεί:

i) Η χωρητικότητα του καναλιού

ii) Ο μέγιστος ρυθμός αποστολής δεδομένων χωρίς σφάλματα

Απ: i) Από το Θεώρημα Shannon-Hartley

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) = 3000\log_2 11 = 10.378 \text{ bits/sec}$$

$$SNR = 10\,db = 10\log_{10}\frac{S}{N} = 10 \Leftarrow \frac{S}{N} = 10$$

ii) Η εντροπία της πηγής είναι $H(\Phi) = \sum_{i=1}^{128} p_i \log\left(\frac{1}{p_i}\right) = \dots = 7$ bits/symbol

Από το θεώρημα κωδικοποίησης καναλιού του Shannon έχω

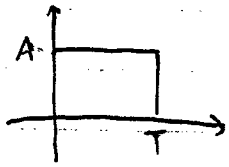
$$H(\Phi) * r_s \le C \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow r_s \le 1482 \text{ symbols/sec}$$

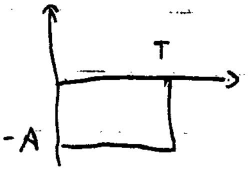
10.12

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Θα δούμε τώρα πως αυτά που έχουμε κωδικοποιήσει τα στέλνουμε στο δέκτη. Φτιάχνουμε κυματομορφές και τις αντιστοιχίζουμε στα σύμβολα.

π.χ. $s_1 : 0$
$s_2 : 1$

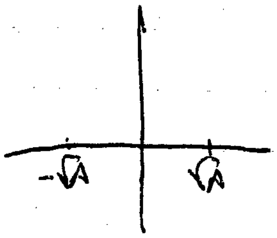




αντιστοιχίζω το 0 στην 1η και το 1 στη 2η

π.χ. $s_1 : 00$ $s_3 : 10$ Θέλω 4 κυματομορφές
$s_2 : 01$ $s_4 : 11$

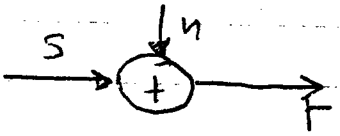
Αν έχω π.χ. s_1, s_2, s_3 βγάζω δύο βάσεις ψ_1, ψ_2 και φτιάχνω το χώρο. Εδώ διδιάστατος:



Μεγέθη που μας ενδιαφέρουν:

- ενέργεια: $\mathcal{E}_m = \int_0^T s_m^2(t)\,dt$
- εύρος ζώνης:

Μοντέλο μετάδοσης: Προσθετικού γκαουσιανού θορύβου.



$r = s + n$

γκαουσιανή μεταβλητή για θορ ακολουθεί: $N(0, \frac{N_0}{2})$
↑ διασπορά θορύβου ανάλογη την πιθανότητες να συμβεί σφάλμα.

Σχέση βέλτιστου φωρατή (δεδομένου ενός σήματος):

$$P(s_m | r) = \frac{f(r|s_m) \cdot P(s_m)}{f(r)}$$

Στην περίπτωση γκαουσιανού θορύβου: $\arg\min_{s_m} \sum_{k=1}^{N} (r_k - s_{mk})^2 = D(r, s_m)$

* αυτό εκφράζει την απόσταση του ληφθέντος συμβόλου από κάθε σύμβολο του αστερισμού. και διαλέγω αυτό με τη μικρότερη.

και αποδεικνύεται:

$$\arg\max_{s_m} \zeta(r-s_m)=2r\cdot s_m-\|s_m\|^2)$$

//προβολή ληφθέντος πάνω σ' όλα τ' άλλα

Πιθανότητα σφάλματος:

πιθανότητα σφάλματος δεδομένου ότι στάλθηκε s_m → $P(e|s_m)=\int_{R_m^c} f(r|s_m)\,dr$

// R_m: περιοχή απόφασης για m

π.χ. R_4: για το σύμβολο 4

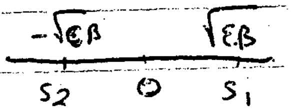
R_4^c: στην περιοχή R_1, R_2, R_3

άρα τελικά (εφόσον έχω ισοπίθανα σύμβολα):

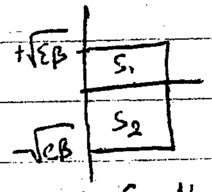
$$P(e)=\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{M}P(e|m)$$

Άσκηση:

Έστω 2 σύμβολα, το ένα στο 0 και το άλλο στο 1.



Θέλω να στείλω $0(s_2)$ ή $1(s_1)$ με τις κυματομορφές:



Έχω θόρυβο με $N(0, N_0/2)$ με συνάρτηση: $f(n)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\cdot e^{-n^2/N_0}$

Ποιά η πιθανότητα να λάβει ο δέκτης λάθος σύμβολο;

Απ: Απ' την πλευρά του δέκτη:

Υπόθεση 1η: H_1: $r=\sqrt{E_\beta}+n \Rightarrow n=r-\sqrt{E_\beta}$

Υπόθεση 2η: H_2: $r=-\sqrt{E_\beta}+n \Rightarrow n=r+\sqrt{E_\beta}$

Βρίσκω το λόγο $\frac{f(r|s_1)}{f(r|s_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$

άρα έχω: $f(r|s_1) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\, e^{-(r-\sqrt{E_B})^2/N_0}$

και $f(r|s_2) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\, e^{-(r+\sqrt{E_B})^2/N_0}$

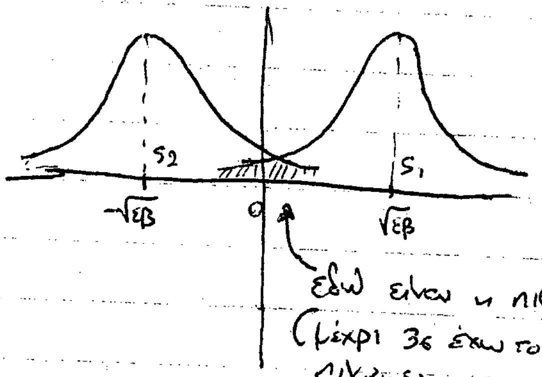
παίρνοντας το λόγο: $\dfrac{f(r|s_1)}{f(r|s_2)} = \dfrac{e^{-(r-\sqrt{E_B})^2/N_0}}{e^{-(r+\sqrt{E_B})^2/N_0}} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$

$$\Rightarrow e^{\frac{-(r-\sqrt{E_B})^2+(r+\sqrt{E_B})^2}{N_0}} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 \overset{\ln}{\Rightarrow} \frac{-(r-\sqrt{E_B})^2+(r+\sqrt{E_B})^2}{N_0} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow r \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

Άρα κοιτώντας το πρόσημο του r:

- αν $r>0$ υποθέτουμε (παίρνουμε απόφαση) ότι ο πομπός έστειλε s_1
- αν $r<0$ ... έστειλε s_2.

(Επειδή είναι μονοδιάστατο) μπορούμε να σχεδιάσουμε τις μεταβλητές που φτάνουν στο δέκτη:



Εδώ είναι η πιθανότητα σφάλματος (μέχρι 3σ έχω το 99,7% αλλά υπάρχουν πίνακες για υπολογισμό)

άρα $P(e|s_1) = \int_{-\infty}^{0} f(r|s_1)\,dr = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\, e^{-(r-\sqrt{E_B})^2/N_0}\,dr = \left[\int_{-\infty}^{-\sqrt{E_B/N_0}} e^{-x^2/2}\,dx\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2E_B/N_0}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = Q\left(\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}}\right)$$

όμοια: $P(e|s_2) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}}\right)$

// η Q έτοιμη συνάρτηση υπάρχει Matlab

άρα: $P(e) = \frac{1}{2}P(e|s_1) + \frac{1}{2}P(e|s_2) = \boxed{Q\left(\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}}\right)}$

↑ λόγος SNR

Πρακτικά: (για το λόγο SNR: $\sqrt{E_B}/N_0$)

- όσο ↑ΕΒ, απομακρύνονται οι κουκκίδες ⇒ ↓ σφάλμα
- όσο ↑ N_0 (θόρυβος) ⇒ ↑ σφάλμα

Ασκήσεις

① Τρία σήματα χρησιμοποιούνται για τη μετάδοση πληροφορίας μέσα από ένα κανάλι προσθετικού γκαουσιανού θορύβου με $N(0, N_0/2)$.

Τα σήματα είναι:

$$s_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \qquad s_2(t) = -s_3(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le T/2 \\ -1, & T/2 \le t \le T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Ποια είναι η διάσταση του χώρου των σημάτων;

Απ: • Επειδή τα 2 διανύσματα δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, η διάσταση είναι 2.

• Μαθηματικά:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\cdot s_2(t) = 0 \Rightarrow \text{γρ. ανεξ.} \quad \text{ομοίως } s_1 - s_3$$

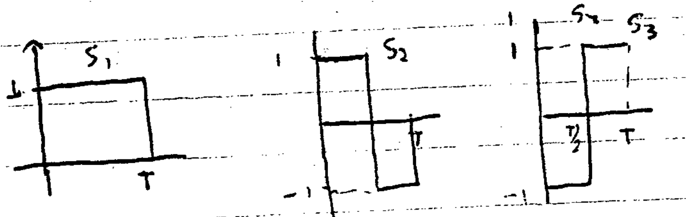
$$\text{αλλά } \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)\cdot s_3(t) \neq 0 \Rightarrow \text{ άρα είναι διάστασης 2.}$$

(β) Βρείτε μια κατάλληλη βάση για το χώρο αυτό.

Απ:

Έχω 2 κυματομορφές βάσης $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ (αφού διάσταση 2)

έχω:



άρα (βλέπω ότι) έχω: (έχοντας διαιρέσει με την ενέργεια)

$$\psi_1 = \begin{cases} 1/\sqrt{T}, & 0 \le t \le T \\ 0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \psi_2 = \begin{cases} 1/\sqrt{T}, & 0 \le t \le T/2 \\ -1/\sqrt{T}, & T/2 \le t \le T \\ 0 \end{cases}$$

Ιδιότητες:

$$s_m(t) = \sum_{n=1}^{2} s_{mn}\psi_n(t)$$

$$s_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)\cdot y_n(t)\cdot d$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i^2(t) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(t)\,\psi_j(t) = 0$$

Δηλ. παίρνω τις γρ. ανεξάρτητες κυματομορφές, διαιρώ με ενέργεια (για να έχω μοναδιαί ενέργειας) και έτσι βρίσκω εύκολα τη βάση.

Λείπουν οι συντελεστές. (μπορεί να χρησιμοποιήσω τ' ολοκλήρωμα)
ή πιο εύκολα:

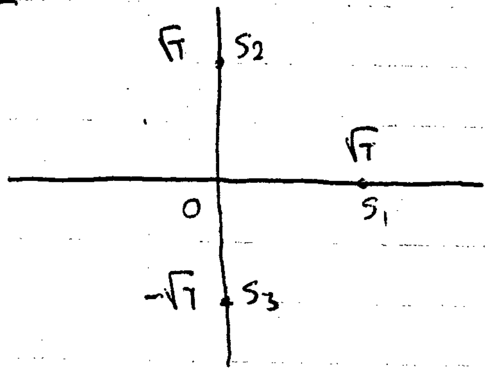
$$s_1 = [\sqrt{T}, 0] \qquad // \; s_1 = \sqrt{T}\cdot\psi_1(t) + 0\cdot\psi_2(t) \text{ κοκ...}$$

$$s_2 = [0, \sqrt{T}]$$

$$s_3 = [0, -\sqrt{T}]$$

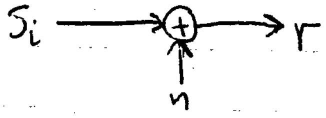
(γ) Σχεδιάστε τον αστερισμό των σημάτων του προβλήματος αυτού.

Απ:



(δ) Βρείτε τις βέλτιστες περιοχές απόφασης R_n (για σήμα s_n), δηλ. R_1, R_2, R_3.

Απ:



Επειδή είναι ισοπίθανα:

$$G(r, s_m) = 2r\,s_m - \|s_m\|^2 \qquad // \; \|s_m\|^2 = \sqrt{s_{m1}^2 + s_{m2}^2}$$

↑ ενέργεια σήματος

$$\Rightarrow G(r, s_m) = 2r\cdot s_m - \cancel{T}$$

(θέλουμε να το μεγιστοποιήσουμε)

$$G(r, s_m) = r\cdot s_m$$

// δεν μας ενδιαφέρει το T (που είναι ίδιο σε...

$$H_1: (r_1, r_2) = (\sqrt{T} + n_1, n_2)$$
$$H_2: (r_1, r_2) = (n_1, \sqrt{T} + n_2)$$
$$H_3: (r_1, r_2) = (n_1, -\sqrt{T} + n_2)$$

} αν δεν στείλουμε τπτ: (n_1, n_2)
↑ 2διάστατο σήμα θορύβου
άρα αν στείλω s_1: $(n_1, n_2) + s_1$ κοκ...

Για να αποφασίσουμε υπέρ του s_1 πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l}(r_1, r_2)\cdot(\sqrt{T}, 0) > (r_1, r_2)\cdot(0, \sqrt{T}) \\ (r_1, r_2)\cdot(\sqrt{T}, 0) > (r_1, r_2)\cdot(0, -\sqrt{T})\end{array}\right\} \text{και}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(\sqrt{T}+n_1, n_2)\cdot(\sqrt{T}, 0) > (n_1, \sqrt{T}+n_2)\cdot(0, \sqrt{T}) \\ (\sqrt{T}+n_1, n_2)\,(\sqrt{T}, 0) > (n_1, \sqrt{T}+n_2)\cdot(0, -\sqrt{T})\end{array}\right.\right] \Rightarrow \ldots \left\{\begin{array}{l} r_1\sqrt{T} > r_2\sqrt{T} \\ r_1\sqrt{T} > -r_2\sqrt{T}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r_1 > r_2 \\ r_1 > -r_2\end{array}\right. : R_1$$

Ομοίως για r_2: ⇒ $r_2>r_1$ και $r_2>0$: R_2
για r_3: ⇒ $r_2<0$ και $r_2<-r_1$: R_3

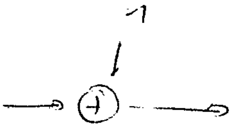
(ε) Ποιο από τα 3 σήματα είναι πιο ευάλωτο σε σφάλματα και γιατί;

Απ:

Τηλ

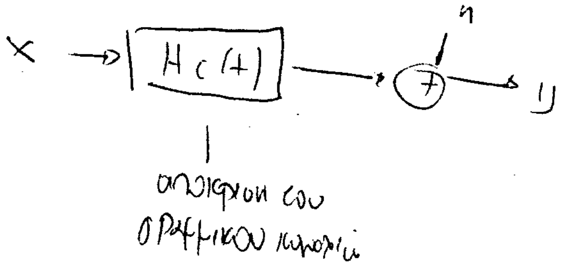
13.1 2005 (

Πριν Απλα AWGN θόρυβος



$y = x + n$

Τώρα

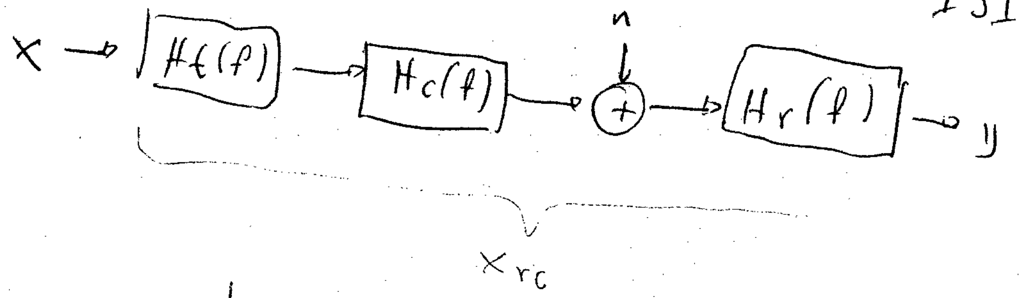


$$\overset{\text{συνέλιξη}}{y = h_c * x + n}$$

↓ την χρονική στιγμή m

$$y_m = x_0 a_m + \underbrace{\sum_{n \neq m} a_n x_{m-n} + n}_{ISI}$$

Πρέπει να σχεδιάσω φίλτρο πομπού και φίλτρο δέκτη έτσι ώστε $ISI = 0$



τότε $|X_{rc}| = |H_t(f)|\,|H_c(f)|\,|H_r(f)|$

$$\text{τότε } X_{rc} = \begin{cases} T & 0 \leq f \leq (1-\alpha)/2T \\ T/2\left[1+\cos\frac{\pi\tau}{\alpha}\left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T}\right)\right] & \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases}$$

!Αν η ακολουθία που στέλνω έχει BW W' και το κανάλι W τότε αν $W' \leq W$ τότε χρησιμοποιώντας το α στο raised cosine μπορώ να μηδενίσω το ISI με φίλτρα πομπού έτσι $|H_t| = |H_r| \sqrt{\frac{|X_{rc}|}{|H_c|}}$

②

Ασκ 19

Καθορίστε τα βέλτιστα φίλτρα πομπού και δέκτη

με 2-PAM μπορούμε 4800 bits/sec

Απ:

Ασκ

Ένα τηλεφ. κανάλι έχει χαρακτηριστική διέλευσης συχνοτήτων 300 < f < 3.000 δηλ. βγάζει όλες τις άλλες στο 0.

α) Επιλέξτε έναν ρυθμό συμβόλων κ' έναν αποτελεσματικό αποδοτικού μεγέθους από άποψη ισχύος προκειμένου να επιτευχθεί μετάδοση σήματος στα $R_b = 9.000$ bit/sec

Απ: $BW_{καναλιού} = 3000 - 300 = 2700$ bits

! Το κανάλι είναι ζωνοπερατό

↓

παρουσιάζονται απώλειες και στις 2 συχνότητες

↓

μπορεί να χρησιμοποιηθεί μέγιστο ρυθμό μετάδοσης $R_{max} = W = 2700$ symbols/se

Υποθέτουμε ότι θα υπάρχει M-PAM

! Ξέρω πως το symbols/sec $R = \frac{9600}{k}$ symbols/sec

όπου $k = \log_2 M$

12/2009

Άρα πρέπει $R \leq R_{max}$

$$\frac{9.600}{k} \leq 2700 \Leftarrow k = 4$$

και τότε $R = 2400$ sym/sec

Άρα για $k = 4 \to M = 16$ άρα 16-PAM

και θα έχω $R = \frac{9.600}{4} = 2400$ symbols/sec

b) Αν χρησιμοποιείται παλμός βάσεως τετραγωνικής ρίζας ανυψωμένου συνημιτόνου ως παλμός εκπομπής $g_T(t)$ επιλέξτε το rolloff factor α

Απ: Για να έχω βέλτιστη μετάδοση → πρέπει να χρησιμοποιώ όλο το [illegible], το επιτρεπόμενο εύρος ζώνης διαύλου

Ζωνοπερατό κανάλι, από πριν βρήκα $W_D = 2400$.

όπου $W = 2700$ Hz

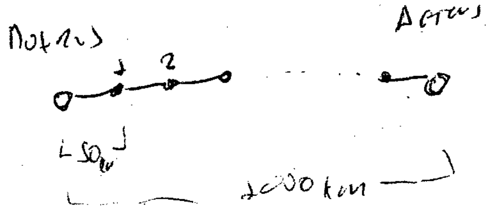
Άρα ισχύει $W_D(1+\alpha) = W \Leftrightarrow \ldots\ldots \alpha = 0,125$

④

Ασκ: Ένα συρμάτινο κανάλι με $\overset{\text{μήκος}}{\ell} = 1000$ km ✗m
χρησιμοποιείται για μετάδοση με διαμόρφωση 2-PAM
Αναγεννητικοί επαναλήπτες τοποθετούνται ανά 50 km ✗r
Κάθε τμήμα του καναλιού έχει ιδανική (σταθερή) απόκριση συχνότητας
στην ζώνη συχνοτήτων $0 \leq f \leq 1200$, και εξασθένηση 1db/km
Ο θόρυβος του καναλιού είναι AWGN

α) Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός bit που μπορεί να μεταδοθεί χωρίς ISI

Απ:



Μέχρι τον 1ο αναγεννητή έχω
μείωση ισχύος 50db

Εύρος ζώνης κάθε τμήματος W = 1200 Hz

Επειδή περιορίζουμε το 0 → βασικής μετάδοσης → μπορώ να μεταδώσω με μέγιστο ISI με $R_b = 2400$ bits/sec

[2-PAM 1 symbol = 1 b

$R_b = 2400$ symbols/sec

β) Προσδιορίστε το απαιτούμενο ~~SNR~~ $\frac{E_b}{N_0}$ = $\frac{\text{ισχύς ανά bit}}{\text{φασματική πυκνότητα θορύβου}}$ = $\frac{\text{μέση ενέργεια / bit}}{\text{ισχύς σημάτων}}$

Ξέρω $SNR = 10\log_{10}\frac{E_b}{N_0}$ για να επιτευχθεί πιθανότητα σφάλματος bit $P_c = 1$
για κάθε επαναλήπτη, στο 2-PAM $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$ δίνεται $Q^{-1}(10^{-7}) = 5$

Για $P_e = 10^{-7} \leftarrow Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-7} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = Q^{-1}(10^{-7})$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 5,2 \Leftrightarrow \frac{E_b}{N_0} = 13,52 \xrightarrow{\text{σε db}} 11,30$ db / Watt

4ηφ

γ) Υπολογίστε την ισχύ εκπομπής σε κάθε επαναλήπτη για να επιτύχετε τον επιθυμητό λόγο $\frac{E_b}{N_o}$ εάν ισχύει $N_o = 4,1 * 10^{-21}$ W/Hz

Λσ: Μας δίνεται το N_o σε W/Hz

Άρα πρέπει $$\frac{P_r}{N_o} = \left(\frac{E_b}{N_o}\right) * W \Rightarrow \dots$$

$$P_r = -161,77 \text{ db}$$

Όμως ∃ εξασθένιση ισχύος 1dB/km

Άρα συνολικά $P_L = 500 \text{ km} * 1 \text{ db/km} = 50 \text{ db}$

Άρα τελικά πρέπει να υπάρχει εκπεμπόμενη ισχύς

$$P_T = P_r + P_L = \dots = -111,77 \, dB_w$$

⑥

άρα BW = 3000 Hz

Άσκ: Τηλεφ. κανάλι επιτρέπει ζώνη συχνοτήτων $300 \leq f \leq 3.300$ Hz

Επιθυμώ να σχεδιάσω modem που να λειτουργεί με ρυθμό συμβόλων $R_s = 2400$ symbols/sec και με σκοπό επίτευξη ρυθμού διάδοσης $R_b = 9660$ bits/sec

Επιλέξτε κατάλληλο QAM, συχνότητα φέροντος f_c, και συντελεστή επέκτασης ενός παλμού με raised cosine φάσμα που χρησιμοποιεί την ακριβή BW.

Απ: Ζωνοπερατό κανάλι → $BW = 3.300 - 300 = 3000$ Hz

$$\underset{\text{αστερισμού}}{k} = \frac{R_b}{R_s} = \frac{9.600}{2400} = 4$$

Άρα $M = 2^4 = 16$ → αστερισμός 16-QAM

Η συχνότητα φέροντος είναι το μέσο της ζώνης διέλευσης

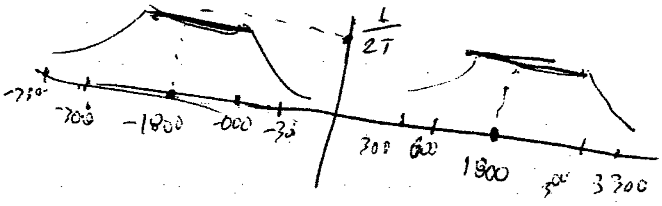
άρα $f_c = \frac{300 + 3.300}{2} = 1800$ Hz

Ζωνοπερατό κανάλι → το ελάχιστο εύρος ζώνης είναι $W_D = R_S$ =

$W_D = 2400$ Hz $< W$

Και άρα $2400(1+\alpha) = 300 \Rightarrow \alpha = 0.25$

↓ μοιάζει



Άσκ: Έστω αλφάβητο πηγής πληροφορίας έχει 20 ισοπίθανα σύμβολα και στατιστικά ανεξάρτητα

Αν ο ρυθμός συμβόλων πηγής $R_{sym} = 10.000$ symbols/sec και αν χρησιμοποιήσουμε M-PAM διαμόρφωση, τότε:

α) Να υπολογισθεί το απαιτούμενο ελάχιστο εύρος ζώνης καναλιού W ώστε να υπάρχει μηδενική ISI

b) Αν χρησιμοποιήσετε το καλύτερο δυαδικό κώδικα για την δυαδική αναπαράσταση συμβόλων, κ μεταδώσετε την προκύπτουσα ακολουθία bits χρησιμοποιώντας 2-PAM, τότε ποιο είναι το ελάχιστο απαιτούμενο εύρος ζώνης καναλιού;

Απ: α) Για την διαμόρφωση με M-PAM 20 συμβόλων

θα χρειαστώ $k = \lceil \log_2 20 \rceil \Leftarrow k = 5$ bits/~~sample~~ symbol

Άρα $R_b = 5 * 10.000 = 50000$ bits/sec

Άρα θα είναι $M = 2^5 \Rightarrow$ θα χρησιμοποιήσω 32-PAM

Αφού κανάλι βασικής ζώνης, $W = \frac{R_s}{2}$

b) Ο καλύτερος δυαδικός κώδικας έχει $\bar{L} = H(X) = -\sum_{i=1}^{20} p(s_i) \log(p(s_i))$

$= -\sum \frac{1}{20} \log\left(\frac{1}{20}\right)$

$= 4.32$ bits/symbol

$\Leftarrow$ Άρα $\bar{L} = 4,32$ bits/symbol

Άρα θα πάρω $R_b = 4,32 * 10,000 = 43.2000$ bits/sec

Στο 2-PAM αντιστοιχεί 1 bit σε κάθε σύμβολο, άρα τότε $R_s = R_b \Rightarrow$
$R_s = 43.200$ sym/sec

Άρα αφού κανάλι ζώνης βάσης $W = \frac{R_s}{2} = 21.600$ Hz

Ψηφ. Επ.

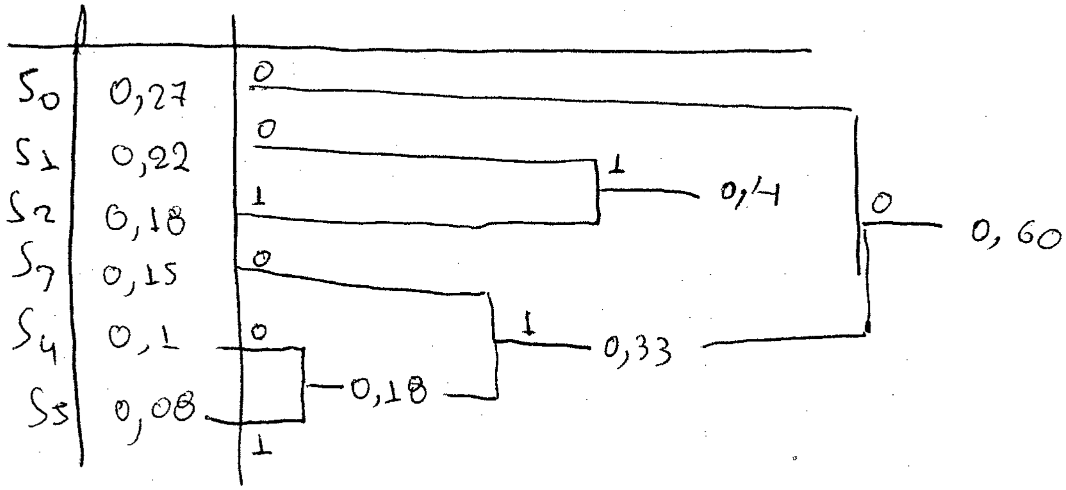
14.1.2009

Άσκ: Αλφάβητο DMS 6 συμβόλων με P εμφάνισης

Symbol	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
P	0,27	0,22	0,18	0,15	0,1	0,08

Να κωδικοποιηθεί η πηγή με Huffman και να υπολογιστεί η αποδοτικότητα της κωδικοποίησης

Απ: Διατάσσω κατά φθίνουσα



Άρα
s_0 : 00
s_1 : 10
s_2 : 11
S_3 : 010
S_4 : 0110
S_5 : 0111

$$\text{Αποδοτικότητα} = \frac{H(x)}{\overline{L}} = \frac{\text{εντροπία}}{\text{μέσο μήκος λέξης}} = \frac{-\sum_{i=1}^{5} p(s_i)\log_2 p(s_i) \ \text{bits/symbol}}{\sum_{i=0}^{5} L(s_i)\,P(s_i) \ \text{bits/symbol}} = \frac{2,47C}{2,51}$$

Άρα $n = 0,9841$

②

b) Έστω ότι η παραπάνω πηγή παράγει 1000 symbols/sec, που κωδικοποιούνται κατά Huffmann όπως πριν. Να βρεθεί η κατά μέσο χρονική διάρκεια κάθε bit στην έξοδο του κωδικοποιητή Huffmann. Στην συνέχεια η έξοδος μεταδίδεται με χρήση 8-PAM σε δίαυλο βασικής ζώνης. Να βρεθεί το minimum BW channel που απαιτείται για την μετάδοση των συμβόλων της πηγής.

Απ: Το μέσο μήκος λέξης είναι $\bar{L}$. Ο ρυθμός συμβόλων πηγής R_{sym}

Άρα παράγονται bits με $R_b = \bar{L} \cdot R_s = 2{,}51 \cdot 1000 = 25100$ bit/sec

Άρα κάθε bit έχει διάρκεια $t_b = \frac{1}{R_b} = \frac{1}{2510} = 3{,}984 \cdot 10^{-4}$ sec

Επειδή το κανάλι είναι βασικής ζώνης
το απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι:

$W_D = \frac{R_s}{2}$ όπου R_s ο ρυθμός που παράγει σύμβολα το 8PAM.

Όμως $M=8 \Rightarrow k=\log_2 8 \Rightarrow k=3$

Κωδικοποιούνται blocks των 8 bits

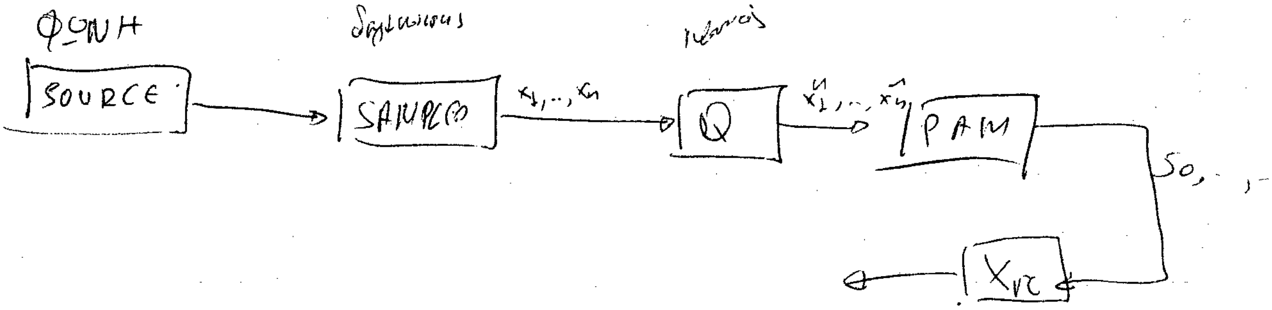
Άρα $R_s = \frac{R_{sym}}{3} = 836{,}666$ symbols/

Άρα $W_D = \frac{R_s}{2} = \frac{836{,}666}{2} = 418{,}333$

Ψηφ(ΔΙΚ) 14.2.2009

Ασκ: Σήμα φωνής με εύρος ζώνης 5kHz και δυναμική περιοχή τιμών την [-4V, 4V]. Δειγματοληπτείται κατάλληλα και τα δείγματα που προκύπτουν κβαντίζονται έτσι ώστε το μέγιστο σφάλμα κβαντισμού να είναι μικρότερο από το 1% της δυναμικής περιοχής. Οι κβαντισμένες τιμές κωδικοποιούνται και στη συνέχεια μεταδίδονται με 4PAM και παλμού raised cosine με rolloff factor α = 0,25. Να βρεθεί το min BWchannel που απαιτείται ώστε να γίνει μετάδοση σήματος

Απ:



- Δειγματοληπτούμε με Nyquist → 10kHz

Άρα παράγονται δείγματα με Rsym = 10.000 symbols/sec

Το μέγιστο σφάλμα Emax πρέπει να είναι 0,01 * $\overset{\text{εύρος δυναμικής περιοχής}}{8}$ = 0,08 V

Όμως το μέγιστο σφάλμα $E_{max} = \frac{\Delta}{2}$

Όμως $E_{max} = \frac{4}{2^{k-2}} \leq 0,08$ → q=7 bits/δείγμα

($E_{max} = \frac{X_{max}}{2^{k}}$ → μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το σήμα (των δυναμικής περιοχής)

④

Χρησιμοποιούμε 7 bits ανά δείγμα, άρα $R_b = 7 * 10000 = 70.000$ bits/sec

Όμως 4-PAM άρα $k = \log_2 4 \Rightarrow k = 2$

σε κάθε σύμβολο του 4-PAM αναθέτω 2 bits

Άρα $P_{syn\text{-}4PAM} = \frac{R_b}{2} = 35.000$ symbols/sec

Υποθέτω κανάλι βασικής ζώνης

Άρα απαιτούμενο εύρος ζώνης $W_p = \frac{R_s}{2} = 17,500$ Hz

Όμως $a = 0,25$

Ισχύει $W = (1 + 0,25)\, W_D \Rightarrow W = 21.795$ Hz

44.1ω

Έστω το αναλογικό σήμα προς μετάδοση, εύρους ζώνης 20 kHz
~~Κα~~ Δειγματοληπτείται με ρυθμό 1,5 * ρυθμού Nyquist και στη
συνέχεια τα δείγματα που προκύπτουν διέρχονται μέσω κβαντιστή M επιπέδων
όπου M = 65.536

Υποθέτω στατιστικά ανεξάρτητα δείγματα και πως τα M επίπεδα κβάντισης είναι ισοπίθανα
Να υπολογιστεί ο ρυθμός πληροφορίας της πηγής

$$p(s) = \frac{1}{M} = \frac{1}{65536}$$

Απ: Η εντροπία της πηγής κβαντισμένη είναι

$$-\sum_{s \in X} p(s) \log(p(s)) = -\sum \frac{1}{M} \log\left(\frac{1}{M}\right)$$

$$= \cdot = 16 \text{ bits/symbol}$$

Ο ρυθμός πληροφορίας είναι

$$I_s = R_{sam} H(x) = 60.000 * 16 = 960.000$$

R_{sam}: ρυθμός παραγωγής σημάτων
$H(x)$: bits/symbol

Κάνω δειγματοληψία με $1,5 R_{Nyq} = 1,5 * 2 * 20.000 = 60.000$ symbols/sec

b) Είναι δυνατή η χωρίς σφάλματα μετάδοση της παραπάνω πηγής μέσω διαύλου με εύρος ζώνης W = 60 kHz με AWGN θόρυβο με Gaussian κατανομή και ισχύ τέτοια ώστε SNR = 25 db

Πρέπει ρυθμός αποστολής δεδομένων < χωρητικότητα καναλιού.

Σε περίπτωση που έχω AWGN, $C = W \log_2\left(1 + \frac{S}{N_0}\right)$ bits/sec

1) Στέλνω με ρυθμό 60.000 symbols και ο κβαντιστής αναθέτει 16 bits σε κάθε σύμβολο
Άρα στέλνω με ρυθμό $R = 16 * 60.000 = 900.000$ bits/sec

b)

Έχω $SNR = 10 \log_{10}\left(\frac{S}{No}\right)$

$\Leftrightarrow 25 = 10\log_{10}\left(\frac{S}{No}\right) \Leftrightarrow \frac{S}{No} = 316,2278$

Άρα $C = 60.000 \cdot \log_2(1 + 316,2278) = 4,983 \cdot 10^5$ bits/sec

Άρα $R < C$ → μετάδοση χωρίς σφάλμα

c) Είναι δυνατή η μετάδοση που μπορείται να εκμεταλλευτείτε το επιπλέον εύρος ζώνης για καλύτερη μετάδοση της ίδιας πηγής

Χρησιμοποιώ μικρότερο βήμα κβαντισμού

Άρα προσθέτω περισσότερα bits ανά δείγμα πηγής

και μειώνω το σφάλμα κβαντισμού