# Φροντιστήριο 1

## Άσκηση 1

Μια πηγή έχει αλφάβητο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ κ καθε σύμβολο έχει πιθανότητα εμφάνισης $\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$

A: Πόση είναι η εντροπία της πηγής?

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{4} p(a_i) \log_2(p(a_i)) \quad \text{ή}$$

$$H(A) = \sum_{i=1}^{4} p(a_i) \log_2\left(\frac{1}{p(a_i)}\right)$$

Τελικά, $H(A) = 0.1 \log_2\left(\frac{1}{0.1}\right) + 0.2 \log_2\left(\frac{1}{0.2}\right) + 0.3 \log_2\left(\frac{1}{0.3}\right) + 0.4 \log_2\left(\frac{1}{0.4}\right)$

$= 1,8464$ bits/είσοδο

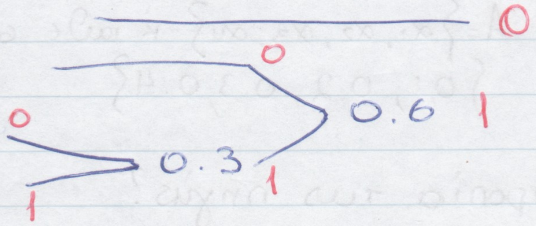
Παρατηρήσεις
- Βάζω $\log_2$ γιατί θέλω κωδικοποίηση σε bits
- Η πηγή μπορεί να κωδικοποιηθεί χωρίς απώλειες όσο λέει η εντροπία

B. Πόσο είναι το ελάχιστο μήκος κωδικής λέξης που απαιτείται για να αναπαράγω την πηγή αυτή με δυνατότητα ανακατασκευής χωρίς σφάλματα?

Όσο ορίζει η εντροπία, $H(A)$

Γ1 Σχεδιάστε κωδικοποίηση Huffman για την πηγή κ' συγκρίνετε το μέσο μήκος της κωδικής του λέξης με την εντροπία της πηγής

| | |
|---|---|
| $\alpha_4$ | 0.4 |
| $\alpha_3$ | 0.3 |
| $\alpha_2$ | 0.2 |
| $\alpha_1$ | 0.1 |




$\alpha_4 \rightarrow 0$
$\alpha_3 \rightarrow 10$
$\alpha_2 \rightarrow 110$
$\alpha_1 \rightarrow 111$

Μέσο μήκος κωδικοποίησης (ή κωδικής λέξης)

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{4} l(a_i) \cdot p(\alpha_i)$$

$$= 1\times0.4 + 2\times0.3 + 3\times0.2 + 3\times0.1 = 1.9 \text{ bits/έξοδο}$$

Αποδοτικότητα $\eta = \dfrac{H(A)}{\bar{L}} = 0.972$

Παρατηρήσεις

- Στη σύνθεση πιθανοτήτων το προκύπτον 0.6 εμφανίζεται στο τέλος άρα δεν χρειάζεται να κάναμε αναδιάταξη
- Τα 0, 1 θα μπορούσαν να μπουν κ' αντίστροφα
- Η αποδοτικότητα είναι πάντα ≤1. Όσο πιο κοντά στο 1 τόσο πιο καλή

Γ2. Σχεδιάστε κωδικοποίηση Huffman για τη $2^η$ επέκταση της πηγής

i) ποιο είναι το μέσο μήκος κωδικής λέξης?

ii) ποιος είναι ο απαιτούμενος μέσος αριθμός bits/γράμμα πηγής (σύμβολο εξόδου)

$$A^2 = \left\{ \{\alpha_1, \alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}, \ldots, \{\alpha_4, \alpha_4\} \right\}$$ όλα τα σύμβολα μεταξύ τους σε ζεύγη

→ πιθανότητες εμφάνισης για κάθε ζεύγος

$\{\alpha_1, \alpha_1\} = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01$

$\{\alpha_1, \alpha_2\} = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02$

$\{\alpha_1, \alpha_3\} = 0.1 \times 0.3 = 0.03$

$\{\alpha_1, \alpha_4\} = 0.4 \times 0.4 = 0.04$

$\{\alpha_2, \alpha_1\} = 0.02$

$\{\alpha_2, \alpha_2\} = 0.04$

$\{\alpha_2, \alpha_3\} = 0.06$

$\{\alpha_2, \alpha_4\} = 0.08$

$\{\alpha_3, \alpha_1\} = 0.03$

$\{\alpha_3, \alpha_2\} = 0.06$

$\{\alpha_3, \alpha_3\} = 0.09$

$\{\alpha_3, \alpha_4\} = 0.12$

$\{\alpha_4, \alpha_1\} = 0.04$

$\{\alpha_4, \alpha_2\} = 0.08$

$\{\alpha_4, \alpha_3\} = 0.12$

$\{\alpha_4, \alpha_4\} = 0.16$

→ κωδικοποίηση Huffman

| | | |
|---|---|---|
| $\{\alpha_4,\alpha_4\}$ | : 0,16 | 000 |
| $\{\alpha_4,\alpha_3\}$ | : 0,12 | 010 |
| $\{\alpha_3,\alpha_4\}$ | : 0,12 | 100 |
| $\{\alpha_3,\alpha_3\}$ | : 0.09 | 110 |
| $\{\alpha_4,\alpha_2\}$ | = 0.08 | 0010 |
| $\{\alpha_2,\alpha_4\}$ | = 0.08 | 0011 |
| $\{\alpha_3,\alpha_2\}$ | = 0.06 | 0110 |
| $\{\alpha_2,\alpha_3\}$ | : 0.06 | 1010 |
| $\{\alpha_4,\alpha_1\}$ | : 0.04 | 1110 |
| $\{\alpha_2,\alpha_2\}$ | : 0.04 | 01110 |
| $\{\alpha_1,\alpha_4\}$ | : 0.04 | 01111 |
| $\{\alpha_3,\alpha_1\}$ | = 0,03 | 10110 |
| $\{\alpha_1,\alpha_3\}$ | : 0.03 | 10111 |
| $\{\alpha_2,\alpha_1\}$ | : 0,02 | 11110 |
| $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ | : 0.02 | 111110 |
| $\{\alpha_1,\alpha_1\}$ | : 0,01 | 111111 |

Τελικά, οι κωδικές λέξεις (κόκκινη στήλη)

> 0.6 κ.ο.κ.

> 0.5

> 0,03

~~Τελικά~~

→ Μέσο μήκος κωδικής λέξης

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{16} l(\alpha_i)\cdot p(\alpha_i) = 1{,}865 \text{ bits/έξοδο}$$

→ Αποδοτικότητα

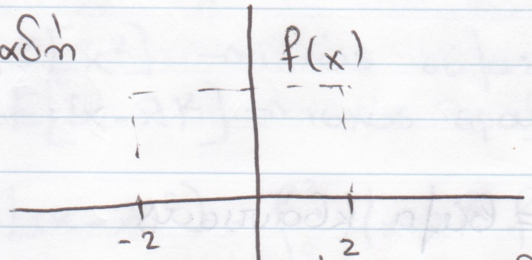
$$n = \frac{H(A)}{\bar{L}} = 0.99$$

Παρατήρηση: η εντροπία μένει η ίδια, δεν αλλάζει!

Άσκηση 2 (κβαντιστές)

Έστω αναλογική πηγή που θέλω να κβαντίσω. Τα δείγματα της ~~κα~~ πηγής ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο (-2,2)

Δηλαδή



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & αν\ a \le x \le b \\ 0, & αλλού \end{cases}$$

Όλοι οι αριθμοί στο (-2,2) έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης

Στην προκειμένη περίπτωση θα είναι: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -2 \le x \le 2 \\ 0, & αλλού \end{cases}$

A. Ποια είναι η ισχύς του σήματος εισόδου στον κβαντιστή?

→ Η ενέργεια του σήματος ισούται με το σήμα στο τετράγωνο

→ Η ισχύς είναι η μέση τιμή της ενέργειας

$$Ισχύς = \int_{-2}^{2} x^2 f_X(x)\, dx = \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{4}\, dx = \frac{1}{3 \cdot 4}\left[x^3\right]_{-2}^{2} = \frac{4}{3} = E(x^2)$$

→ E: τελεστής αναμενόμενης τιμής → τυχαία μεταβλητή (για υπολογισμό μέσου όρου όπως στις διακριτές περιπτώσεις)

Β. Σχεδιάστε ομοιόμορφο κβαντιστή 2 bits (4 σταθμών)

→ $N = 2^2 = 4$ στάθμες

→ παίρνει το διάστημα που έχω κ' το σπάει σε ίσα διαστήματα

→ χρειάζομαι εύρος, κ' Δ

εύρος: $R = 2-(-2) = 4$

• $\Delta = \dfrac{R}{N} = \dfrac{4}{4} = 1$ = βήμα κβάντισης

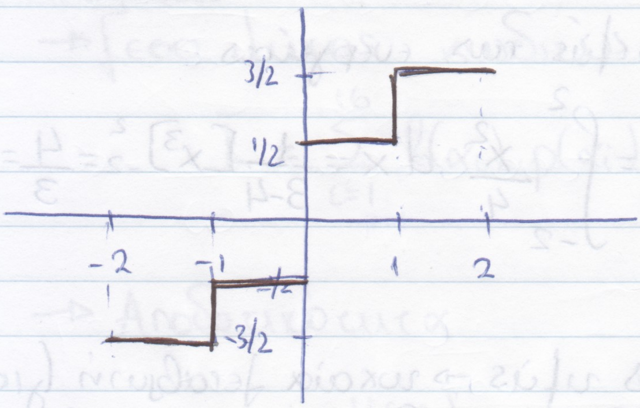
Επομένως ξεκινάω με $x_0 = -2$ κ' μετά, εφόσον $\Delta = 1$

$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2$

Δηλ., $x_i = x_{i-1} + \Delta$

Μετά ορίζω τα κέντρα $m_i = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$, κ' έτσι έχω

$m_0 = -3/2, \; m_1 = -1/2, \; m_2 = 1/2, \; m_3 = 3/2$



Γ. Ποιο είναι το SQNR στην έξοδο του κβαντιστή?

→ Το SQNR κοιτάει την ενέργεια της διαφορετικής κβάντισης κ υπολογίζει πόσο χάνω απ' την κβάντιση

- $E[x^2]$ → ισχύς σήματος
- $E[(x-\hat{x})^2]$ → ισχύς σφάλματος κβάντισης

$$E[(x-\hat{x})^2] = \int_{-2}^{2} (x-\hat{x})^2 f_X(x)\, dx = \sum_{i=1}^{4} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-w_i)^2 f_X(x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{-1} (x+3/2)^2 dx + \int_{-1}^{0} (x+1/2)^2 dx + \int_{0}^{1} (x-1/2)^2 dx + \int_{1}^{2} (x-3/2)^2 dx\right] =$$

$$= \frac{1}{4\cdot 3} \cdot (4 \times 0.25) = \frac{1}{12}$$

Άρα, $SQNR = \frac{E[x^2]}{E[(x-\hat{x})^2]} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{12}} = 16$

↳ $10\log_{10}(16) = 12,0412\,dB$

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- $\int_{\alpha}^{b} (x+\alpha)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x+\alpha)^3\right]_{\alpha}^{b}$

- $SQNR = \frac{E[x^2]}{E[(x-\hat{x})^2]} = \frac{P}{N_q}$

## Άσκηση 3

Έστω έξοδος έγχρωμης ψηφιακής κάμερας με ανάλυση 500x400 pixels η οποία κωδικοποιείται με χρήση παλέτας 256 χρωμάτων. Αν υποθέσαμε πως οι τιμές γειτονικών pixels είναι μεταξύ τους στατιστικά ανεξάρτητες κ πως σε κάθε pixel τα 256 χρώματα εμφανίζονται με τις εξής πιθανότητες:

| 0-99 | 100-149 | 150-209 | 210-255 |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.5 | 0.3 | 0.1 |

σε κάθε περίπτωση ισοπίθανα.

A: ποιο το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο κάθε pixel (εντροπία)

$p_0 = \frac{1}{100} \cdot 0.1 = 0.001$

$p_1 = \frac{1}{50} \cdot 0.5 = 0.01$

$p_2 = \frac{1}{60} \cdot 0,3 = 0,005$

$p_3 = \frac{1}{46} \cdot 0,1 = \frac{0,1}{46}$

$$H(x) = -\sum_{i=0}^{255} p_i(x)\log_2 p_i(x_i) = -\sum_{i=0}^{99} p_0 \log_2 p_0 - \sum_{i=100}^{149} p_1 \log_2 p_1 =$$

$$- \sum_{i=150}^{209} p_2 \log_2 p_2 - \sum_{i=210}^{250} p_3 \log_2 p_3 = 7.496 \text{ bits/pixels}$$

B. Ποιο το ολικό περιεχόμενο μιας εικόνας;

$$H_{ol} = (500 \times 400) \times 7.496 = 1,4992 \times 10^5 \text{ bits/frame}$$

Γ. Ποιος ο μέσος ρυθμός πληροφορίας στην έξοδο της κάμερας αν γνωρίζουμε πως $r = 25$ frames/sec

$$R = H_{ol} \cdot r = 1,4999 \times 10^5 \times 25 = 3.748 \cdot 10^5 \text{ bits/sec.}$$

# Φροντιστήριο 2

## Θεωρία - Τύποι

### Χωρητικότητα

$X \longrightarrow \boxed{\phantom{xx}} \longrightarrow Ψ$ μετάδοση συμβόλων από X (πηγή)
→ μέσου (κανάλι)

• τα κανάλια μεταδίδουν μέχρι ενα ρυθμό, πάνω απ' αυτό έχω σφάλματα

Χωρητικότητα: $\boxed{C = \max_{p(x)} I(X,Y)}$

Αμοιβαία πληροφορία: $\boxed{I(X,Y) = H(X) - H(X|Y)}$

• Κανάλια Gaussian θορύβου

$X \longrightarrow \oplus \longrightarrow y$, $n$ (θόρυβος)

$y = x + n$
$N(\mu, \sigma^2)$

Χωρητικότητα: $\boxed{C = B \log_2(1+SNR)}$

οπου B: εύρος ζώνης καναλιού

κ' $\boxed{SNR = \frac{P}{N_0}}$ $\to$ ισχύς μεταδιδόμενου σήματος ($P$), $\to$ πυκνότητα ισχύος θορύβου ($N_0$)

$$\boxed{SNR = 10\log_{10}\frac{P}{N_0}}$$

$\boxed{H(x)\cdot r_s \le C}$ για μετάδοση χωρίς σφάλματα

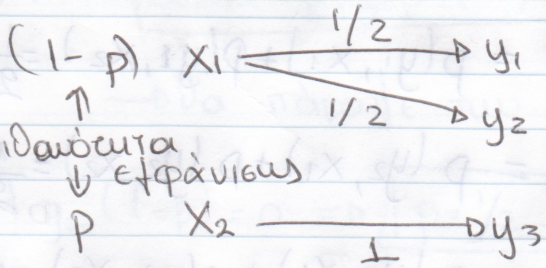
όπου $r_s \to$ ρυθμός συμβόλων

$$\boxed{H(X|Y) = \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} p(x_j, y_k)\log_2\left(\frac{1}{p(x_j|y_k)}\right)}$$

## Άσκηση 1

Έστω πηγή 2 συμβόλων $x_1, x_2$, τα οποία μεταδίδονται μέσω καναλιού που αντιστοιχίζει το $x_1$ στο $y_1$ κ' στο $y_2$ με πιθανότητα $1/2$ κ' το $x_2$ στο $y_3$ με πιθανότητα $1$. Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού.

Διακριτό κανάλι




1) Εντροπία

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i)\log_2(p(x_i)) = -(1-p)\log_2(1-p) - p\log_2(p)$$

Θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τις πιθανότητες που απαιτούνται για τον υπολογισμό της εντροπίας.

- $\boxed{p(x_j, y_k) = p(x_j | y_k) \cdot p(y_k) = p(y_k | x_j) \cdot p(x_j)}$ ①

→ $p(x_1, y_1) = p(y_1 | x_1) \cdot p(x_1) = \frac{1}{2} \cdot (1-p)$

→ $p(x_1, y_2) = p(y_2 | x_1) \cdot p(x_1) = \frac{1}{2} (1-p)$

→ $p(x_1, y_3) = p(y_3 | x_1) \cdot p(x_1) = 0 \cdot (1-p) = 0$

→ $p(x_2, y_1) = 0$

→ $p(x_2, y_2) = 0$

→ $p(x_2, y_3) = p(y_3 | x_2) \cdot p(x_2) = 1 \cdot p = p$

- $\boxed{p(y_k) = \sum_{j=1}^{2} p(y_k, x_j)}$ $\forall \; 1 \leq k \leq 3$

→ $p(y_1) = p(y_1, x_1) + p(y_1, x_2) = \frac{1}{2}(1-p) + 0 = \frac{1}{2}(1-p)$

→ $p(y_2) = p(y_2, x_1) + p(y_2, x_2) = \frac{1}{2}(1-p) + 0 = \frac{1}{2}(1-p)$

→ $p(y_3) = p(y_3, x_1) + p(y_3, x_2) = 0 + p = p$

→ $p(x_1 | y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{1/2\,(1-p)}{1/2\,(1-p)} = 1$

$\rightarrow p(x_1|y_2) = \dfrac{p(x_1,y_2)}{p(y_2)} = 1$

$\rightarrow p(x_1|y_3) = 0$

$\rightarrow p(x_2|y_1) = 0$

$\rightarrow p(x_2|y_2) = 0$

$\rightarrow p(x_2|y_3) = \dfrac{p}{p} = 1$

$$\rightarrow H(X|Y) = -p(x_1,y_1)\log_2(p(x_1|y_1)) - p(x_1,y_2)\log_2(p(x_1|y_2)) - p(x_1,y_3)\log_2(p(x_1|y_3)) - p(x_2,y_1)\log_2(p(x_2|y_1)) - p(x_2,y_2)\log_2(p(x_2|y_2)) - p(x_2,y_3)\log_2(p(x_2|y_3)) = 0$$

Παρατήρηση: σύμβαση $\longrightarrow \log_2 0 = 0$

Άρα

$\rightarrow I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = \boxed{H(x) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)}$

$\rightarrow C = \max_p I(X,Y)$ $\rightarrow$ θα πάρουμε την παράγωγο

$H'(p) = -\log_2 p + \log_2(1-p) = 0 \Rightarrow \boxed{p = 1/2}$

$H''(p) = -\dfrac{1}{p\ln 2} - \dfrac{1}{(1-p)\ln 2} \leq 0$ άρα το σημείο που βρήκα $(p = 1/2)$ είναι το μέγιστο

$\rightarrow$ Άρα $\boxed{C = H(1/2) = 1\,bit/symbol}$

## Άσκηση 2

Ένα τερματικό CRT χρησιμοποιείται για την αποστολή αλφαριθμητικών δεδομένων στον υπολογιστή. Το CRT είναι συνδεδεμένο με υπολογιστή με μια τηλεφωνική γραμμή που έχει εύρος ζώνης $B=3000Hz$ και SNR εξόδου 10dB. Δεχόμαστε πως το τερματικό έχει 128 χαρακτήρες $(N=128)$ κ' η αποστολή δεδομένων από το τερματικό αποτελείται από ακολουθίες ανεξάρτητων ισοπίθανων συμβόλων. Το κανάλι είναι προσθετικό gaussian θόρυβου

A) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού

$$\boxed{C = B\log_2(1+SNR)}$$

- το SNR είναι σε dB, πρέπει να το μετατρέψω σε καθαρό αριθμό

$$SNR=10\log_{10}\left(\frac{P}{N_0}\right) \Rightarrow 10=10\log_{10}\left(\frac{P}{N_0}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P}{N_0}=10}$$

- για gaussian: $N(0,\sigma^2)$ $\sigma^2=\frac{N_0}{2}$

Παρατήρηση: όσο πιο ισχυρό είναι το σήμα απ' το θόρυβο τόσο πιο υψηλό είναι το SNR κ' τόσο καλύτερη η ποιότητα της επικοινωνίας

Τελικά: $\boxed{C=3000\log_2(11)= 1037 \text{ bits/sec}}$

B) Βρείτε το μέγιστο θεωρητικό ρυθμό με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε δεδομένα από το τερματικό του υπολογιστή χωρίς σφάλματα

Shannon $\boxed{H(x)\cdot r_s \le C}$

Εφόσον τα σύμβολα είναι ισοπίθανα:

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{128} p(x_i)\log_2 p(x_i) \rightarrow p(x_i) = \frac{1}{128}$$

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{128} \frac{1}{128}\log_2 2^{-7} = 128\cdot\frac{1}{128}\cdot 7 = 7 \text{ bits/symbol}$$

Οποτε $H(x)\cdot r_s \le C \Rightarrow r_s \le \frac{C}{H(x)} = 1982$ symbols/sec

## Ασκηση 3

Τηλεοπτικό σήμα εύρους ζώνης $w = 10$ MHz οδηγείται σε κύκλωμα δειγματοληψίας που λειτουργεί με ρυθμό ίσο με 1,2 φορές το ρυθμό Nyquist. Τα δείγματα που προκύπτουν από τη δειγματοληψία υποθέτουμε πως είναι στατιστικά ανεξάρτητα κ κβαντίζονται με χρήση κβαντιστή 8 bits. Η δυαδική ακολουθία που προκύπτει μεταδίδεται μέσα από ένα κανάλι εύρους ζώνης $B = 30$ MHz κ προσθετικό θόρυβο με κατανομή Gauss με ισχύ τέτοια ώστε SNR = 20 dB. Είναι δυνατή η μετάδοση της δυαδικής ακολουθίας μέσα από το κανάλι χωρίς σφάλματα;

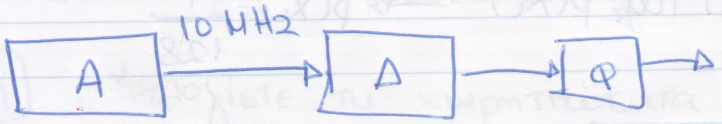
→ $C = B\log_2(1+SNR)$

→ $C > r_b$ → χωρίς σφάλμα

→ $C < r_b$ → με σφάλμα

→ $r_b$ → ρυθμός bits

Εφόσον έχω κβαντιστή 8 bits κ' τα δείγματα είναι στατιστικά ανεξάρτητα, η εντροπία θα είναι 8 bits/έξοδο.




• από Nyquist: $2\cdot w$

$\times 1,2 \rightarrow 2\times 1.2\times w = \boxed{24\,MHz}$

• $\boxed{r_b = 8\cdot 24\cdot 10^6 = 192\cdot 10^6 \text{ bits/sec}}$

• Θα πρέπει να μετατρέψουμε το SNR από dB σε καθαρό αριθμό

$$10\log_{10}\left(\frac{P}{N_0}\right) = 20 \Rightarrow \boxed{\frac{P}{N_0} = 100}$$

Άρα: $C = 30\cdot 10^6 \log_2(101) = 199,75\cdot 10^6$ bits/sec

<u>Τελικά</u> $C > r_b$ → άρα έχω μετάδοση χωρίς σφάλματα