Φροντιστήριο Ψηφιακές Τηλ. Κεφ. 8

Εισαγωγικά

$$
\begin{tikzcd}
 & n \arrow[d] & \\
x \arrow[r] & \oplus \arrow[r] & y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & & n \arrow[d] & \\
x \arrow[r] & \boxed{} \arrow[r] & \oplus \arrow[r] & y
\end{tikzcd}
$$

$$y = x + n \quad , \; n \sim N(0, \sigma^2) \qquad\qquad y = h_c * x + n$$

διακριτός χρόνος $\quad y_m = x_0 a_m + \sum_{n \neq m} a_n x_{m-n} + n_m$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \arrow[d] & & \\
x \arrow[r] & \boxed{H_t(f)} \arrow[r] & \boxed{H_c(f)} \arrow[r] & \oplus \arrow[r] & \boxed{H_r(f)} \arrow[r] & y
\end{tikzcd}
$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{X_{rc}}$$

Πρέπει να ισχύει: $\quad x_{rc}(t) = h_T(t) * h_c(t) * h_R(t)$

ισοδύναμα

συνθήκη Nyquist $\quad |X_{rc}(f)| = |H_T(f)| \cdot |H_c(f)| \cdot |H_R(f)| \; , \; |f| \leq W$

$$
X_{rc}(f) = \begin{cases} T & , \; 0 \leq |f| \leq \frac{1-a}{2T} \\ \frac{T}{2}\left[1 + \cos \frac{\pi T}{a}\left(|f| - \frac{1-a}{2T}\right)\right] & , \; \frac{1-a}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+a}{2T} \\ 0 & , \; |f| \geq \frac{1+a}{2T} \end{cases}
$$

$$\boxed{B_T = \frac{1}{2T}}$$
εύρος ζώνης σήματος

Βέλτιστα φίλτρα πομπού και δέκτη

$$|H_T(f)| = |H_R(f)| = \sqrt{\frac{|X_{rc}(f)|}{|H_c(f)|}}$$

Από διαφάνειες

$$|H_T(f)| = K_1 \sqrt{\frac{|X_{rc}(f)|}{|H_c(f)|}}$$

$$|H_R(f)| = K_2 \sqrt{\frac{|X_{rc}(f)|}{|H_c(f)|}}$$

Άσκηση 1

Καθορίστε τα βέλτιστα φίλτρα πομπού και δέκτη για ένα δυαδικό τηλ/κο σύστημα που μεταδίδει δεδομένα με 2-PAM με ρυθμό $R_b = 4800$ bits/sec σε ένα κανάλι με απόκριση συχνοτήτων $C(f)$, και εύρος ζώνης $W = 4800\ Hz$. Ο προσθετικός θόρυβος στο κανάλι είναι λευκός γκαουσιανός με μέση τιμή 0 (AWGN $\sim N(0, \sigma^2)$)

$$\boxed{|C(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{W}\right)^2}}}, \quad |f| \leq W$$

$$W_b = \frac{R_b}{2\text{bits}} = 2400\ Hz$$

περίοδος

$$T = \frac{1}{R}$$

συχνότητα

$$W_b(1+a) = W \Rightarrow a = 1$$

$$X_{rc} = \begin{cases} \frac{1}{9600}\left(1+\cos\frac{\pi|f|}{4800}\right), & |f| \leq 4800 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$|H_T(f)| = |H_R(f)| = \sqrt{\frac{X_{rc}(f)}{H_C(f)}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{C_1}{9600} + \cos\frac{\pi|f|}{4800}\right)^{1/2}}{\left(1+\left(\frac{f}{4800}\right)^2\right)^{1/4}}, \quad |f| \leq 4800\ Hz$$

$\boxed{H_c(f) = C(f)?}$

$\boxed{H_c(f) = \frac{1}{C(f)}?}$

Άσκηση 2

→ Ισοσκελές τραπέζιο ή τετράγωνο?

Ένα τηλεφωνικό κανάλι έχει χαρακτηριστική ζώνη διέλευσης συχνοτήτων $300 < f < 3000\ Hz$.

a) Επιλέξτε ένα αριθμό συμβόλων και ένα αστερισμό αποδοτικού μεγέθους από άποψη ισχύος προκειμένου να επιτευχθεί μετάδοση σήματος στα $R_b = 9600$ bits/sec

$[R]$ = symbol/sec
$[R_b]$ = bits/sec

Υπολογισμός Bandwidth
$W = 3000 - 300 = 2700\ Hz$

Άρα
$R_{max} = 2700$ symbols/sec

$\boxed{R_{max} = W}$

Αστερισμός: m-PAM

Για δημιουργ. αστερισμού: Πακετάρουμε bits σε σύμβολα. Για ποιό k το R πέφτει κάτω από R_{max}

$R = \frac{9600}{k}$ symbols/sec

$m = 2^k$

Για $k=4 \rightarrow R = 2400$ symbols/sec
άρα $m = 16$

b) Αν χρησιμοποιείται παλμός σήματος τετραγωνικής ρίζας ανυψωμένου συνημιτόνου ως παλμός πομπού $g_T(t)$, επιλέξτε το συντελεστή επέκτασης.

$W_D = 2400\ Hz$ (εύρος ζώνης δεδομένων)
$W = 2700\ Hz$ (-"- -"- καναλιού)

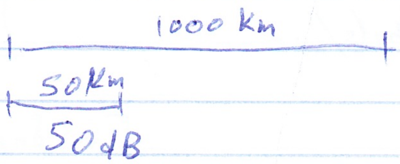
$W_D(1+a) = W$
$\Rightarrow a = 0,125$ συντελεστής επέκτασης

$\boxed{R_{max} = W}$

Άσκηση 3

Ένα ενσύρματο κανάλι μήκους 1000 Km χρησιμοποιείται για μετάδοση με τη βοήθεια δυαδικού PAM. Αναγεννητικοί επαναλήπτες τοποθετούνται ανά 50 Km στο σύστημα. Κάθε τμήμα του καναλιού έχει ιδανική (σταθερή) απόκριση συχνότητας με ζώνη συχνοτήτων $0 \leq f \leq 1200$ και εξασθένηση 1dB/Km ο θόρυβος του καναλιού είναι AWGN.

a) Ποιος είναι ο max ρυθμός bits που μπορεί να μεταδοθεί χωρίς διασυμβολική παρεμβολή.



εύρος ζώνης $W = 1200\,Hz$

$R_b = 2400$ symbols/sec ή bits/sec

στη συγκεκριμένη ρυθμός bits = = ρυθμός symbols

Eb: ισχύς bit
No: ισχύς θορύβου

β) Προσδιορίστε το απαιτούμενο $\frac{E_b}{N_0}$ (ή SNR) για να επιτευχθεί πιθανότητα σφάλματος bit $P_e = 10^{-7}$

$$\boxed{\frac{N_0}{2} = \sigma^2}$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-7}$$

δίνεται $Q^{-1}(10^{-7}) = 5{,}2$

$$\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = Q^{-1}(10^{-7}) = 5{,}2$$

Άρα: $\frac{E_b}{N_0} = 13{,}52 = 11{,}30\,dB$

γ) Υπολογίστε την ισχύ εκπομπής σε κάθε επαναλήπτη για να επιτύχουμε τον επιθυμητό λόγο $\frac{E_b}{N_0}$ έτσι ώστε $N_0 = 4{,}1 \cdot 10^{-21}\ W/Hz$

$$\frac{P_R}{N_0} = W \cdot \frac{E_b}{N_0}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} P_R = W \cdot E_b \\ \text{Watt} = \text{Joule/sec} \end{array}}$$

(ισχύς μετάδοσης?)

$$P_R = 4{,}1 \cdot 10^{-21} \cdot 1200 \cdot 13{,}52 = 6{,}6518 \cdot 10^{-17}$$

$$P_R = -161{,}77\,dB\ W$$

$$P_L = 50\,km \cdot 1\,dB/km = 50\,dB\ W$$

$\boxed{\text{Watt}}$

ισχύς εκπομπής

$$P_T = P_R + P_L = (-161{,}77\,dB + 50\,dB)\,W = -111{,}77\,dB\ W$$

αρνητικό?

καθαρό $P_T < 1$ Watt

Άσκηση 4

Ένα τηλεφωνικό κανάλι επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων στη ζώνη $300 \leq f \leq 3300\,Hz$. Επιθυμούμε να σχεδιάσουμε ένα modem που να μεταδίδει R_s με ρυθμό τη μεταβίβαση R_b. Επιλέξτε αστερισμό QAM, μια συχνότητα φέροντος και το συντελεστή επέκτασης ενός φίλτρου με φάσμα ανυψωμένου συνημιτόνου που χρησιμοποιεί τη συνολική ζώνη συχνοτήτων.

Δεδ: $R_s = 2400$ symbols/sec $\qquad R_b = 9600$ bits/sec

Ζητ.: αστερισμό QAM, f_c, a

$W = 3000\,Hz$

$K = \frac{R_b}{R_s} = 4$ $\qquad$ Άρα χρησιμοποιούμε τον αστερισμό 16-QAM

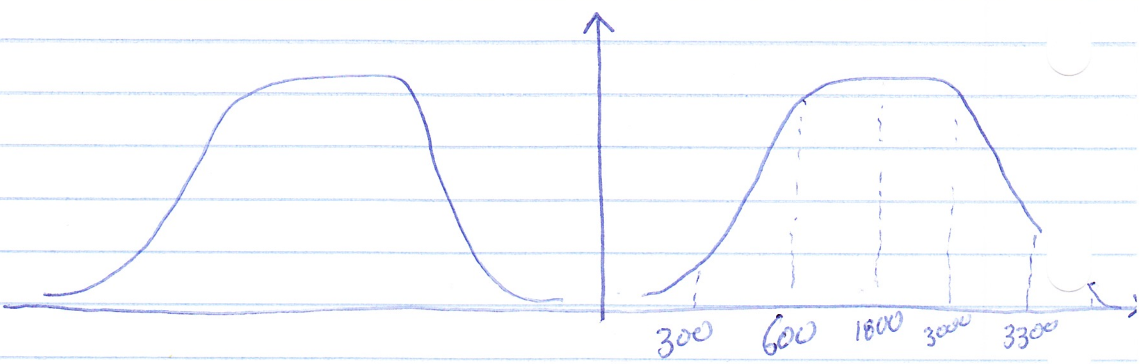
$f_c = 1800\,Hz$ $\qquad$ συχν. φέροντος: το μέσο της ζώνης

Για το a:

$W_D = R_s = 2400\,Hz < W$

$2400(1+a) = 3000$

$a = 0{,}25$



$$\boxed{W_D = R_s \ ?}$$

Φροντιστήριο Ψηφιακής Τηλ. (Εφ' όλης της ύλης)

Άσκηση 1

Έστω ότι το αλφάβητο μιας διακριτής πηγής πληροφορίας χωρίς μνήμη έχει 6 σύμβολα με πιθανότητες εμφάνισης που δίνονται. a) Να κωδικοποιηθεί η πηγή με Huffman και να υπολογιστεί η αποδοτικότητα.

a)

S_0	0,27
S_1	0,22
S_2	0,18
S_3	0,15
S_4	0,10
S_5	0,08

Κωδικοποίηση:

S_0:	00	S_3:	010
S_1:	10	S_4:	0110
S_2:	11	S_5:	0111

Αποδοτικότητα

$\eta = \frac{H(x)}{\bar{L}}$ όπου $\bar{L} = \sum_{i=0}^{5} p(S_i)\, l(S_i) = 2,51$ bits/symbol

$H(x) = -\sum_{i=0}^{5} p(S_i) \log_2 p(S_i) = 2,4701$ bits/symbol

Άρα $\eta = 0,9841$

β) Έστω ότι η παραπάνω πηγή παράγει 1000 symbols/sec τα οποία κωδικοποιούνται κατά Huffman. Να βρεθεί η χρονική διάρκεια του κάθε bit στην έξοδο του κωδικοποιητή Huffman. Στην συνέχεια η έξοδος αυτή μεταδίδεται μέσω σε 8-δικό PAM σε δίαυλο βασικής ζώνης. Να βρεθεί το ελάχιστο εύρος ζώνης που απαιτείται για τη μετάδοση της πηγής.

(πηγής) $R_{symbol} = 1000$ symb/sec

$$8\text{-PAM} \longrightarrow K = \log_2 8 = 3 \text{ (bits)}$$

~~R_s $\bar{L}$~~

$$\text{διάρκεια bit} = \frac{1}{\bar{L} \cdot R_{symbol}} = \frac{1}{2510 \text{ bits/sec}} = 3{,}984 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$$

(φορέού) $R_s = \dfrac{2510 \text{ bits/sec}}{3 \text{ bits/symb}} = 836{,}667$ symb/sec

$$W_D = \frac{R_s}{2} = 418{,}333 \text{ Hz}$$ απαιτούμενο εύρος ζώνης

$$\boxed{W_D = \frac{R_s}{2}}$$

Παρατήρηση να δούμε:
- Παίζει ρόλο αν είναι βασικής ζώνης ~~[illegible]~~ γύρω από 0 ή αν είναι ζωνοπερατό?

Άσκηση 2

√? Ένα σήμα φωνής με εύρος ζώνης $W=5KHz$ και δυναμική περιοχή τιμών $[-4V, 4V]$. Δειγματοληπτούμε κατάλληλα το σήμα αυτό και τα δείγματα που προκύπτουν τα κβαντίζουμε έτσι ώστε το max σφάλμα κβάντισης να είναι μικρότερο από το 1% της δυναμικής περιοχής τιμών. Οι κβαντισμένες τιμές κωδικοποιούνται και μεταδίδονται με χρήση 4-PAM και παλμό ανυψωμένου συνημιτόνου με συντελεστή επικάλυψης $a=0,25$. Να βρεθεί το ελάχιστο εύρος ζώνης καναλιού που απαιτείται για να γίνει με επιτυχία η μετάδοση.

$$\boxed{\text{source}} \rightarrow \boxed{\text{Sampler}} \xrightarrow{x_i} \boxed{\text{Quantizer}} \xrightarrow{\hat{x}_i} \boxed{\text{PAM}} \xrightarrow{S_i} \boxed{X_{rc}} \rightarrow$$

παλμός ανυψωμένου συνημιτόνου

? $\boxed{W_D = \frac{R_s}{2}}$

$$R_{symb.} = 2 \cdot 5000 = 10\,000 \text{ samples/sec}$$

$E = 4 - (-4) = 8$ (έκταση δυναμικής περιοχής τιμών)

$E_{max} \leq 0{,}01 \cdot 8 = 0{,}08$ (μέγιστο σφάλμα)

$$\left.\begin{aligned} E_{max} &= \frac{\Delta}{2} \\ \Delta &= \frac{X_{max}}{2^{k-1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_{max} = \frac{4}{2^k} \leq 0{,}08$$

Με $k=6$, πέφτουμε κάτω από το 0,08.

Αλλά ας πούμε ότι έχουμε $k=7$ bits/στάθμη

$R_b = 7 \cdot 10\,000 = 70\,000$ bits/sec $\qquad m = \log_2 4 = 2$ bits

Ρυθμός συμβόλων που εξέρχονται του διαμορφωτή

$$R_s = \frac{70\,000}{m \to 2} = 35\,000 \text{ symbols/sec}$$

$$W_D = \frac{R_s}{2} = 17{,}500 \text{ Hz}$$

$$W = 17{,}500(1+0{,}25) = 21875 \text{ Hz} \qquad \boxed{W = W_D(1+a)}$$

$\boxed{W_D = R_s/2 \ ?}$

Άσκηση 3

Έστω ότι το προς μετάδοση αναλογικό σήμα έχει εύρος ζώνης $W = 20KHz$. Το σήμα αυτό δειγμ/ται με ρυθμό 1,5 * συχνότητα Niquist και στη συνέχεια τα δείγματα που προκύπτουν περνάνε μέσα από ένα κβαντιστή m επιπέδων όπου m=65536. Υποθέτουμε ότι δείγματα είναι μεταξύ τους στατιστ. ανεξάρτητα και επίσης ότι τα m επίπεδα έχουν την ίδια ~~εμφα~~ πιθανότητα εμφάνισης. Να

a) υπολογιστεί ο ρυθμός πληροφορίας πηγής.

$$W = B_a = 20 \text{ kHz}$$
$$m = 65536$$

$$H(x) = -\sum p(s) \log_2 p(s) \Rightarrow$$

όπου $p(s) = \frac{1}{65536}$ $\Rightarrow H(x) = 16$ bit/symb

$$I_r = R_{samp} \cdot H(x)$$

$$R_{samp} = 1,5 \cdot \underbrace{2 \cdot W}_{\text{συχν. Niquist}} = 60\,000 \text{ symb/sec}$$

R_{source} $\quad I_r = 960\,000$ bits/sec

b) Είναι δυνατή η χωρίς σφάλμα μετάδοση της παραπάνω πηγής μέσα από ένα δίαυλο με $W = 60KHz$, AWGN και ισχύ θορύβου τέτοια ώστε το $SNR = 25dB$

Προσοχή: Δεν έχει να κάνει με διασυμβολική παρεμβολή. Εδώ θα υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του καναλιού.

*Η χωρητικότητα του καναλιού C πρέπει να είναι μεγαλύτερη.

$$C = W \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N_0}\right)$$

Hz Hz

bits/sec

Σημείωση: Ο ρυθμός βγαίνει ίσος με το πληροφοριακό περιεχόμενο επειδή είναι ισοπίθανα τα σύμβολα (worst case)

$$SNR = 10\log_{10}\left(\frac{S}{N_0}\right) = 25\ dB$$

Άρα $\frac{S}{N_0} = 316,2278$

και $C = 60\,000 \log_2\left(1+\frac{S}{N_0}\right) = 4,985 \cdot 10^5$ bits/sec

Ιr Παρατηρούμε ότι $R < C$ άρα η μετάδοση και μπορεί να γίνει χωρίς σφάλμα.

γ) Αν είναι δυνατή η μετάδοση όπως μπορείται να εκμεταλλευτείται το επιπλέον εύρος ζώνης για καλύτερη μετάδοση της ίδιας πηγής? (Αν δεν είναι πόσο περισσότερο εύρος ζώνης απαιτείται)

Κβαντισμός πηγής σε μικρότερα διαστήματα έτσι μικρότερο σφάλμα κβάντισης
(Περισσότερα bits ανα sec στην έξοδο του δειγματολήπτη)

Άσκηση 4

Έστω ότι το αλφάβητο μιας πηγής αποτελείται από 20 ισοπίθανα και στατιστ. ανεξ. μεταξύ τους σύμβολα. Εάν ο ρυθμός συμβόλων της πηγής είναι 10 000 symb/sec και εάν χρησιμοποιήσουμε m-δικό PAM σύστημα για τη μετάδοση, να υπολογιστεί το ελάχιστο εύρος του καναλιού για να επιτευχθεί χωρίς διασυμβολική παρεμβολή. Εάν χρησιμοποιήσουμε τον καλύτερο δυνατό κώδικα για τη δυαδική αναπαράσταση των συμβόλων και μεταδόσουμε χρησιμοποιώντας δυαδικό PAM τότε πόσο θα είναι το απαιτούμενο εύρος ζώνης καναλιού?

Α περίπτωση

$$k = \lceil \log_2 20 \rceil = 5 \text{ bits/symb.}$$

$$m = 2^5 = 32 \qquad (32\text{-PAM})$$

$$R_b = 5 \cdot 10\,000 = 50\,000 \text{ bits/sec}$$

$$R_s = R_b/k = R_b/5 = 10\,000 \text{ bits/sec}$$

$$W = \frac{R_s}{2} = 5000 \text{ Hz}$$

Β περίπτωση

$$H(x) = -\sum p(s) \log_2 p(s) = 4{,}32 \text{ bits/symb}$$

όπου $p(s) = \frac{1}{20}$

$$R_b = 4{,}32 \cdot 10\,000 = 43200 \text{ bits/sec}$$

$$R_s = R_b/k = R_b/1 \qquad (2\text{-PAM})$$

Άρα: $w = \frac{R_s}{2} = 21\,600 \text{ Hz}$

Φροντιστήριο Ψηφιακές Τηλ/νίες (ΚΕΦ. 7)

π.χ. 3 κυματομορφές: s_1, s_2, s_3

βρίσκουμε τη βάση τους π.χ. ψ_1, ψ_2

όπου π.χ. το s_3 εκφράζεται με γραμμικό συνδυασμό των ψ_1, ψ_2

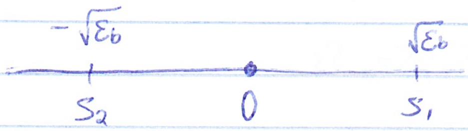
$$\mathcal{E}_m = \int_0^T s_m^2(t)\, dt$$

Δεδομένου της κυματομορφής $\mathbf{r}$ ποια η πιθανότητα να έχει σταλεί το s_m;

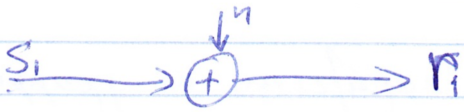
$$P(s_m \mid \mathbf{r}) = \frac{f(\mathbf{r} \mid s_m) \cdot P(s_m)}{f(\mathbf{r})} \qquad \text{Bayes}$$

απόσταση $\arg\min\limits_{s_m} \sum_{k=1}^{N} (r_k - s_{m,k})^2 = D(\mathbf{r}, s_m)$

□ $\arg\max\limits_{s_m}$



E_b: ενέργεια bit



$H_1: \ r = \sqrt{E_b} + n \Rightarrow n = r - \sqrt{E_b}$

$H_2: \ r = -\sqrt{E_b} + n \Rightarrow n = r + \sqrt{E_b}$

$$\frac{f(r|s_1)}{f(r|s_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

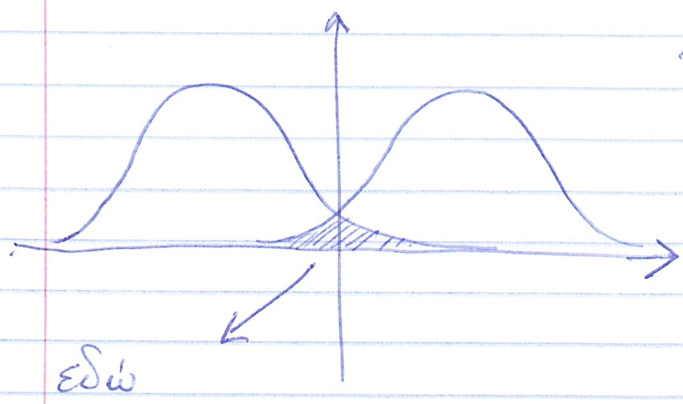
$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-n^2/N_0}$$

$$f(r|s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r-\sqrt{E_b})^2/N_0}$$

$$f(r|s_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r+\sqrt{E_b})^2/N_0}$$

□

Να υπολογίσω την πιθανότητα σφάλματος



Εδώ έχουμε σφάλματα

$$P(e|s_1) = \int_{-\infty}^{0} f(r|s_1)\, dr$$

αλλαγή μεταβλητή

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{E_b/N_0}} e^{-x^2/2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2E_b/N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx \sim$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$P(e|s_2) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

αν είναι ισοπίθανα στην αποστολή

Άσκηση 1

Τρία σήματα χρησιμοποιούνται για τη μετάδοση πληροφορίας μέσα από ένα κανάλι με AWGN θόρυβο $\sim N(0, \frac{N}{2})$

Σήματα:

$$S_1(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \le t \le T \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$S_2(t) = -S_3(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T/2 \\ -1 & T/2 \le t \le T \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

α) Ποιά η διάσταση του χώρου σημάτων?

Υπάρχει γραμμικός συνδιασμός μεταξύ S_2, S_3 γι' αυτό ο χώρος σημάτων έχει διάσταση 2.
Ουσιαστικά έχουμε 2 ανεξάρτητα : S_1, S_2
Συνθήκη ανεξαρτησίας: $\int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) \cdot S_2(t) = 0$

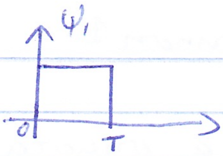
β) Ποιες οι συναρτήσεις βάσης

Διάσταση χώρου σημάτων $= 2$
Άρα 2 συναρτήσεις βάσης: $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$

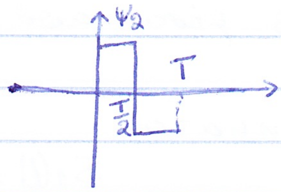
μοναδιαίας ενέργειας: $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i^2(t)\, dt = 1$

κάθετες και ανεξάρτητες $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)\, dt = 0$

$$S_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} S_m(t)\cdot \varphi_n(t)\,dt$$

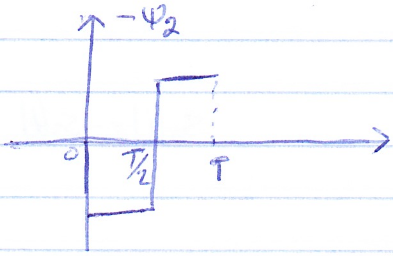


$$S_m(t) = \sum_{n=1}^{2} S_{mn}\,\varphi_n(t)$$



Κυματομορφές βάσης:

$$\varphi_1 = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & , 0 \le t \le T \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$



$$\varphi_2 = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & , 0 \le t \le T/2 \\ -1/\sqrt{T} & , T/2 \le t \le T \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

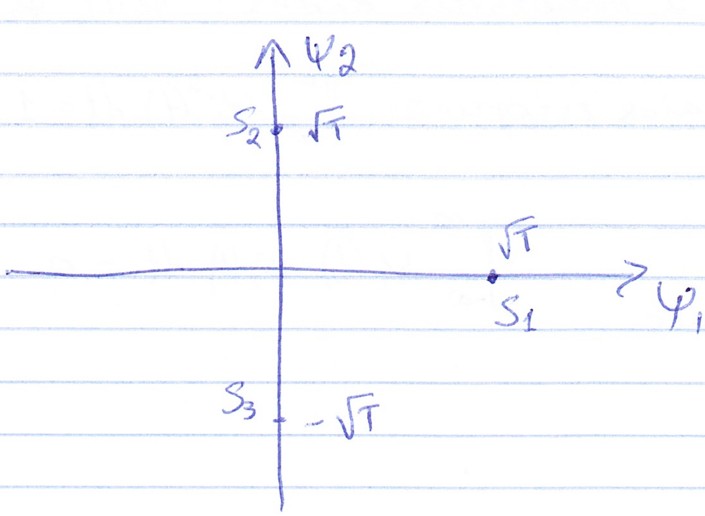
Άρα $\vec{S_1} = [\sqrt{T}, 0]$

$\vec{S_2} = [0, \sqrt{T}]$

$\vec{S_3} = [0, -\sqrt{T}]$

[,]
συντεταγμένες
για φ_1, φ_2

β) Σχεδιάστε τον αστερισμό



δ) Βρείτε τις βέλτιστες περιοχές απόφασης r_1, r_2, r_3

$$(C_r, S_m) = r \cdot S_m$$

$H_1: (r_1, r_2) = (\sqrt{T} + n_1, n_2)$

$H_2: (r_1, r_2) = (n_1, \sqrt{T} + n_2)$

$H_3: (r_1, r_2) = \underbrace{(n_1, -\sqrt{T} + n_2)}$

$\downarrow$ π.χ.

$(n_1, n_2) + (0, -\sqrt{T})$

Όλα έχουν το ίδιο μήκος T ή μετρικές?

Για να αποφασίσω υπέρ του S_1 πρέπει να ισχύουν:

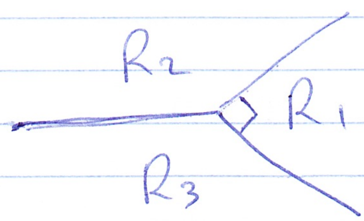
$$(r_1, r_2) \cdot (\sqrt{T}, 0) > (r_1, r_2) \cdot (0, \sqrt{T})$$

$$(r_1, r_2) \cdot (\sqrt{T}, 0) > (r_1, r_2) \cdot (0, -\sqrt{T})$$

Δηλ.

$$\left.\begin{array}{ll} r_1\sqrt{T} > r_2\sqrt{T} & \Rightarrow r_1 > r_2 \\ r_1\sqrt{T} > r_2(-\sqrt{T}) & \Rightarrow r_1 > -r_2 \end{array}\right] R_1$$

$$R_2 \left[\begin{array}{l} r_2 > r_1 \\ r_2 > 0 \end{array}\right. \qquad R_3 \left[\begin{array}{l} r_2 < 0 \\ r_2 < -r_1 \end{array}\right.$$



ε) Ποιο από τα 3 σήματα είναι πιο ευάλωτο σε σφάλματα?

Μήπως το R_1? (μικρότερη περιοχή)

Φροντιστήριο Ψηφιακές Τηλ/νίες (ΚΕΦ.7)

Ένα τερματικό στέλνει μέσω τηλ. γραμμής αλφαριθμητικά

$B = 3000\,Hz$

$SNR = 10\,dB$

$\boxed{CRT} \to \boxed{T} \to \boxed{PC}$

Το τερματικό έχει 128 χαρακτήρες και η αποστολή δεδομένων από το τερματικό αποτελείται από ακολουθία ανεξάρτητων ισοπίθανων συμβόλων.

α) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού

(Μοντελοποιούμε το κανάλι προσθετικού θορύβου)

$\boxed{\text{intro}}$ χωρητικότητα $C = B \cdot \log_2(1 + SNR)$

Μετατροπή των dB, το θέλουμε σε κανονική κλίμακα

$10\log_{10}(SNR) = 10\,dB$

$SNR = 10$

άρα $C = 10\ 378$ bits/sec

$$\boxed{T} \to \oplus \to \boxed{\Delta}, \quad n \downarrow \oplus$$

$y = x + n$

$N(0, \sigma^2)$

$\sigma^2 = \frac{N}{2}$

β) Βρείτε τον μέγιστο θεωρητικό ρυθμό με τον οποίο μπορούμε να μεταδόσουμε τα δεδομένα από το τερματικό χωρίς σφάλματα.

2° θεώρημα Sam? $R \leq C$

$R = H(x) \cdot r_s$

ισοπίθανα $P(S_i) = \frac{1}{128}$

$H(x) = 7$ bits/symbol

$R = 7$ bits/symb $\cdot\, r_s \le C$

$r_s \le 1482{,}57$ symbols/sec

Τηλεοπτικό σήμα με εύρος ζώνης W 10 MHz οδηγείται σε κύκλωμα δειγματοληψίας που λειτουργεί με ρυθμό $1{,}2 f_N$. Τα δείγματα που προκύπτουν υποθέτουμε ότι είναι στατιστικά ανεξάρτητα και κβαντίζονται με χρήση ενός κβαντιστή 8-bits. Η δυαδική ακολουθία που προκύπτει μεταδίδεται μέσα από ένα κανάλι με εύρος ζώνης 30MHz και προσθετικό θόρυβο με κατανομή Gauss και ισχύ τέτοια ώστε το SNR=20dB. Είναι δυνατή η μετάδοση δυαδικής ακολουθίας χωρίς σφάλματα μέσα από αυτό το κανάλι?

$f_N = 2 \cdot \overset{W}{10\,MHz} = 20\,MHz$

$f_s = 1.2 f_N = 24\,MHz$ samples/sec

$R = f_s \cdot \underset{bits}{8} = 192$ Mbits/sec

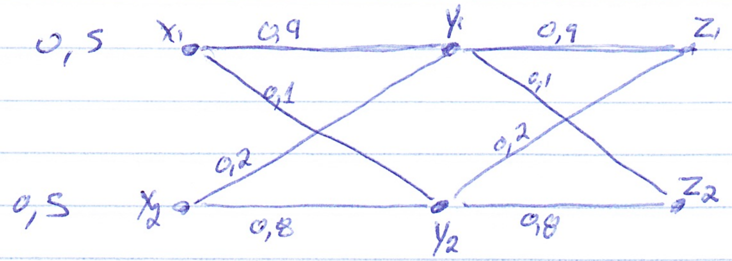
$C = B\log_2(1 + SNR)$

$10\log_{10} SNR = 20 \Rightarrow SNR = 100$

$C = (30\,MHz)\log_2 101 \approx 199{,}7$ Mbits/ses

$C \geq R$ άρα ναι γίνεται.

– Δυαδικά συμμετρικά κανάλια σε σειρά:



να υπολογιστεί ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας μέσα από το κανάλι αν η $p(x_1) = p(x_2) = 0{,}5$ και ο ρυθμός μετάδοσης δεδομένων είναι $r_s = 1000$ symbols/sec

$$p(z_1/x_1) = p(z_1/y_1)\,p(y_1/x_1) + p(z_1/y_2)\,p(y_2/x_1) = 0{,}83$$

$p(z_1/x_2) = 0{,}34$
$p(z_2/x_1) = 0{,}17$
$p(z_2/x_2) = 0{,}66$

1 bit/symbol (δυαδικό ισοπίθανο)

αμοιβαία πληροφορία : $\boxed{I(x;z) = H(x) - H(x/z)}$ (6.4.1)

υπό συνθήκη εντροπία $\boxed{H(x/z) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, z_j)\log_2\left(\frac{1}{p(x_i/z_j)}\right)}$

από κοινού πιθανότ. $p(x_i; z_j) = p(z_j/x_i)\,p(x_i)\left(= p(x_i/z_j)\cdot p(z_j)\right)$

$p(x_1; z_1) = (0{,}83)(0{,}5) = 0{,}415$
$p(x_1; z_2) = 0{,}085$
$p(x_2; z_1) = 0{,}17$
$p(x_2; z_2) = 0{,}33$

$$p(z_j) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i; z_j)$$

$p(z_1) = 0{,}585$
$p(z_2) = 0{,}415$

Άρα

$p(x_1/z_1) = 0{,}71$
$p(x_1/z_2) = 0{,}2$
$p(x_2/z_1) = 0{,}29$
$p(x_2/z_2) = 0{,}8$

$H(x/z) = 0{,}8123$ bits/έξοδο ή bits/symb

Άρα

$I(x;z) = 1 - 0{,}8123$
$= 0{,}1877$ bits/symb

$R = I(x;z)\cdot r_s$
$= 187{,}7$ bits/sec

Φροντιστήριο Ψηφ. Τηλ. (3 Κεφάλαιο)

Άσκηση

$S = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$

$P = \{1/4, 1/8, 1/4, 1/8, 1/4\}$

α) $H(X) = 2{,}250$ bits/έξοδο ΕΝΤΡΟΠΙΑ

β) Μπορεί να σχεδιαστεί κώδικ. ο οποίος να έχει bits/έξοδο μικρότερο της εντροπίας?
Η εντροπία μας πληροφορεί για το πληροφοριακό περιεχόμενο.
Ο κώδικας προσπαθεί να φτάσει την εντροπία. Αν πέσει κάτω από την εντροπία τότε έχουμε σφάλμα.

γ) Έξοδος κβαντιστή : $\{-A, 0, A\}$
Επιλέξτε τιμή για το α για να μεγιστοποιηθεί η εντροπία της κβαντισμένης πηγής.

$0 \le a < 3$

Λειτουργία κβαντιστή $= f(x) \begin{cases} -A & x < -a \\ 0 & -a \le x \le a \\ A & x > a \end{cases}$

Εντροπία κβαντισμένης πηγής:

$$H(X_2) = -p(x=-A)\log_2(p(x=-A)) - p(x=0)\log_2(p(x=0)) - p(X=A)\log_2(p(x=A))$$

μέγιστη απόδοση (μικρότερη εντροπία)
με $a=0$?

Αν $0 \le a < 1$:

$p(f(x) = -A) = 3/8$

$p(f(x) = 0) = 1/4$

$p(f(x) = A) = 3/8$

$H(x_2) = 1{,}56$

μεγαλύτερη αβεβαιότητα
μικρότερη απόδοση

$>$

Αν $1 \le a < 3$

$p(f(x) = -A) = 1/4$

$p(f(x) = 0) = 1/2$

$p(f(x) = A) = 1/4$

$H(x_2) = 1{,}5$

μικρότερη αβεβαιότητα
μεγαλύτερη απόδοση