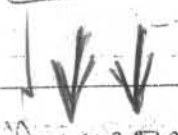


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Δειγματοληψία και ανακατασκευή σημάτων



2.0

①

Άσκηση 1: Έστω $x_n = \cos(2\pi \frac{k}{m} n)$ όπου k, m πρώτοι μεταξύ τους. Να βρεθεί η συνθήκη που εξασφαλίζει την περιοδικότητα του σήματος x_n .

Λύση: Ένα σήμα είναι περιοδικό με περίοδο N όταν ισχύει $x_{n+N} = x_n$.

Άρα θα πρέπει:

$$\cos(2\pi \frac{k}{m} (n+N)) = \cos(2\pi \frac{k}{m} n). \text{ Όπως ισχύει } \cos x = \cos y \text{ αν}$$

και μόνο αν $x = 2l\pi + y$ από όπου έχουμε: $2\pi \frac{k}{m} (n+N) = (2l\pi + 2\pi \frac{k}{m} n)$

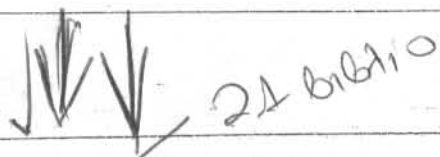
• Περίπτωση "+": $2\pi \frac{k}{m} (n+N) = 2l\pi + 2\pi \frac{k}{m} n \Rightarrow 2\pi \frac{k}{m} N = 2l\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{k}{m} N = l$. Όπως ο l είναι ακέραιος και αφού το k δεν διαιρεί το m (k, m πρώτοι μεταξύ τους) θα είναι και $\frac{N}{m}$ ακέραιος. Οπότε $N = l \cdot m$ όπου l ακέραιος, δηλαδή ο μικρότερος ακέραιος N που είναι σε θέση να ικανοποιήσει την παραπάνω εξίσωση αντιστοιχεί στην περίπτωση $l=1 \Rightarrow \boxed{N=m}$.

• Περίπτωση "-": $2\pi \frac{k}{m} (n+N) = 2l\pi - 2\pi \frac{k}{m} n \Rightarrow 4\pi \frac{k}{m} n + 2\pi \frac{k}{m} N =$

$= 2l\pi \Rightarrow \frac{k}{m} (2n+N) = l$. Απορρίπτεται γιατί δεν είναι δυνατόν το m να διαιρεί το $2n+N$ για όλες τις τιμές του n .

νατόν το m να διαιρεί το $2n+N$ για όλες τις τιμές του n .



Άσκηση 2: Δώστε παράδειγμα δείγματοληψίας περιοδικού αναλογικού σήματος, το οποίο δεν καταλήγει σε περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου. (2.1 άσκηση, σελ. 24 βιβλίο) - (ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ)

Έστω σήμα $x_a(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Το δείγματοληπτούμε με περίοδο δείγματοληψίας T_s . Τότε για $t = nT_s$ θα έχουμε:
 $x_n = x_a(nT_s) = \cos(2\pi f_0 T_s n) = \cos(2\pi \frac{f_0}{f_s} n)$, όπου $f_s = \frac{1}{T_s}$ η συχνότητα δείγματοληψίας.

Για να είναι το δείγματοληπτούμενο σήμα περιοδικό πρέπει:
 $x_{n+N} = x_n \Rightarrow \cos(2\pi \frac{f_0}{f_s} (n+N)) = \cos(2\pi \frac{f_0}{f_s} n)$

1ος τρόπος: για να είναι $\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm y$. Άρα πρέπει $2\pi \frac{f_0}{f_s} n + 2\pi \frac{f_0}{f_s} N = 2k\pi \pm 2\pi \frac{f_0}{f_s} n$

- Περίπτωση "+": $2\pi \frac{f_0}{f_s} n + 2\pi \frac{f_0}{f_s} N = 2k\pi + 2\pi \frac{f_0}{f_s} n \Rightarrow \frac{f_0}{f_s} = \frac{k}{N}$ (εντός)

- Περίπτωση "-": $2\pi \frac{f_0}{f_s} n + 2\pi \frac{f_0}{f_s} N = 2k\pi - 2\pi \frac{f_0}{f_s} n \Rightarrow \frac{f_0}{f_s} = \frac{k}{2n+N}$ (εντός)

Οπότε συμπεραίνουμε ότι για άρρητο δεν είναι δυνατόν να ισχύει περιοδικότητα. Για παράδειγμα σήμα της μορφής $\cos 2\pi\sqrt{2}t$ είναι μη περιοδικό.

2ος τρόπος: $\cos(2\pi \frac{f_0}{f_s} (n+N)) = \cos(2\pi \frac{f_0}{f_s} n) \cdot \cos(2\pi \frac{f_0}{f_s} N) - \sin(2\pi \frac{f_0}{f_s} n) \cdot \sin(2\pi \frac{f_0}{f_s} N)$

• $\sin(2\pi \frac{f_0}{f_s} N)$. Επειδή όμως πρέπει: $\cos(2\pi \frac{f_0}{f_s} (n+N)) = \cos(2\pi \frac{f_0}{f_s} n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(2\pi \frac{f_0}{f_s} N) = 0 \\ \cos(2\pi \frac{f_0}{f_s} N) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2\pi \frac{f_0}{f_s} N = 2k\pi \Rightarrow \frac{f_0}{f_s} = \frac{k}{N} \text{ (εντός)}$$

Άρα για να μην έχω περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου θα πρέπει $\frac{f_0}{f_s} = \frac{k}{N}$

23 βιβλίο

3

Άσκηση 3: Έστω το $x_a(t) = \cos(2\pi 0.2t) + \sin(2\pi 1.2t)$ α) Είναι το σήμα περιόδικο; Αν ναι, ποιά η βασική του συχνότητα και ποιές αρμονικές; β) Αν x_n η δειγματοληψία του $x_a(t)$ με $T_s=1$, εξετάστε κατά πόσο το x_n είναι περιόδικο και υπολογίστε τη βασική συχνότητα και τις αρμονικές της. (2.3 άσκηση, σελ. 25 βιβλίο)

α) Μετά από παρατήρηση διαπιστώνουμε την περιodicότητα του σήματος. Η βασική συχνότητα είναι η $f_1=0.2$ ενώ η $f_2=1.2=6 \cdot 0.2=6 \cdot f_1$ αποτελεί την 6η αρμονική.

β) Δειγματοληπτούμε το $x_a(t)$ με $T_s=1$ Τότε:

$$x_n = x_a(nT_s) = \cos(2\pi 0.2nT_s) + \sin(2\pi 1.2nT_s) \stackrel{T_s=1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x_n = \cos(2\pi \cdot 0.2n) + \sin(2\pi \cdot 1.2n)$$

Μεχω ανεπίδρασης οι συχνότητες μετ' τη δειγματοληψία δεν πρέπει να υπερβαίνουν το ήμισυ της συχνότητας δειγματοληψίας $f_s = \frac{1}{T_s} = 1$. Άρα πρέπει να βρίσκονται στο διάστημα $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ επί

Γέως παρατηρούμε τα εξής: $1.2 \rightarrow (1.2-1) = 0.2$
 $0.2 \rightarrow 0.2$

Οπότε το σήμα γράφεται: $x_n = \cos(2\pi \cdot 0.2n) + \sin(2\pi \cdot 0.2n)$, από

που συμπεραίνουμε ότι η βασική συχνότητα είναι 0.2 και ότι δεν υπάρχει καμία αρμονική.



(4)

Άσκηση 4: Έστω ψηφιακό σήμα που προήλθε από δειματοληψία αναλογικού σήματος, το οποίο είναι γραμμικός συνδυασμός ζυγίων κών σήματων με συχνότητες 0.15, 0.2, 0.4. α) Αν η $f_s = 8 \text{ kHz}$ να βρεθεί σε ποιές αναλογικές συχνότητες αντιστοιχούν οι παραπάνω ζυγιοκρατές. β) Αν το ψηφιακό σήμα ανακατασκευαστεί με περίοδο ανακατασκευής $T_r = 0.1 \text{ msec}$, σε ποιές αναλογικές συχνότητες θα αντιστοιχούν στην περίπτωση αυτή οι ζυγιοκρατές (2.4 άσκηση, σελ. 25 βιβλίο)

Το ψηφιακό σήμα έχει συχνότητες $\lambda_1 = 0.15$, $\lambda_2 = 0.2$, $\lambda_3 = 0.4$. Οι ψηφιοκρατές αντιστοιχίζονται σε μια αναλογική f με αυ της σχέσης:

$$f = \lambda \cdot f_s$$

α) Αν λοιπόν είναι $f_s = 8 \text{ kHz}$ τότε οι $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ αντιστοιχίζονται στις $f_1 = 1.2 \text{ kHz}$, $f_2 = 1.6 \text{ kHz}$, $f_3 = 3.2 \text{ kHz}$.

β) Αν το σήμα (ψηφιακό) ανακατασκευαστεί με $T_r = 0.1 \text{ msec}$, δηλαδή $f_s = \frac{1}{T_r} = 10 \text{ kHz}$, τότε η λ_1 αντιστοιχίζεται στην $f_1 =$

$$= \lambda_1 \cdot f_s = 1500 \text{ Hz}, \text{ η } \lambda_2 \text{ στην } f_2 = 2 \text{ kHz} \text{ και η } \lambda_3 \text{ στην } f_3 = 4 \text{ kHz}$$

δηλαδή αν οι $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ αντιστοιχισθούν στη συχνότητα του αναλογικού σήματος απ' το οποίο έγινε η δειματοληψία τότε είναι οι πρώτες τιμές, ενώ εάν αντιστοιχισθούν στο ανακατασκευασμένο σήμα τότε είναι οι δεύτερες τιμές.



5

Άσκηση 5: Έστω γραμμικό, αιτιατό, χρονικά σταθερό σύστημα συνεχούς χρόνου, με κρουστική απόκριση $h(t)$ και συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$. Έστω h_n η δειγματισμένη της $h(t)$ με συχνότητα δειγματισμού f_s και $H(z)$ ο μετασχηματισμός z της h_n .

α) Αν $H(s)$ λόγος πολυωνύμων του s , τότε δείξτε ότι και η $H(z)$ είναι λόγος πολυωνύμων του z .

β) Βρείτε ποιά είναι η σχέση μεταξύ των πόλων των συναρτήσεων $H(s)$ και $H(z)$.

(2.11 άσκηση, σελ. 26 βιβλίο) - (ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ) *

α) Αφού η $H(s)$ είναι λόγος πολυωνύμων πρέπει να γράψουμε:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{L-1} s^{L-1}}{1 + a_1 s + \dots + a_k s^k} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \dots + \frac{A_k}{s - s_k} = \sum_k \frac{A_k}{s - s_k}$$

δηλαδή η $H(s)$ πρέπει να αναλυθεί σε απλά κλάσματα, όπου s_1, s_2, \dots, s_k είναι οι πόλοι (ρίζες του παρονομαστή). Τότε θα έχουμε για το μετασχηματισμό Laplace:

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} \Rightarrow h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_k \frac{A_k}{s - s_k}\right\} = \sum_k A_k \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - s_k}\right\} = \sum_k A_k e^{s_k t} \cdot u(t), \text{ όπου } u(t) \text{ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση. Εάν σου ανέχεται δειγματιστείς τότε:}$$

$$h_n = h(nT_s) = \sum_k A_k e^{s_k n T_s} u_n \text{ όπου } u_n \text{ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση διακριτού χρόνου. Υπολογίζουμε τώρα το μετασχηματισμό } z \text{ της } h_n \text{ Οπότε:}$$

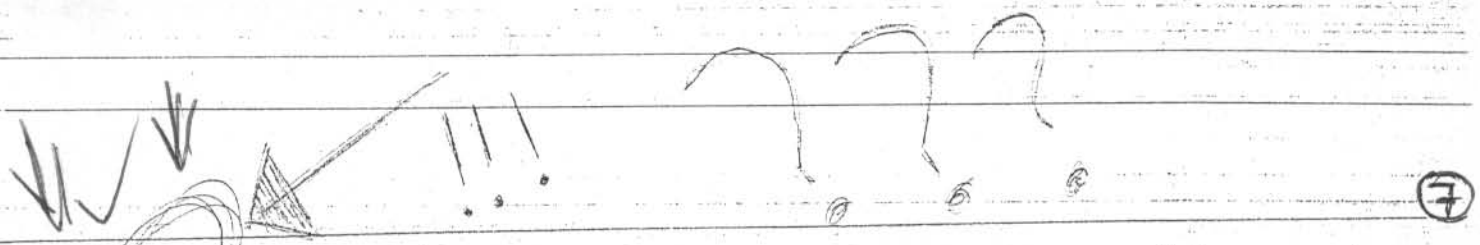
$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k A_k e^{s_k n T_s} u_n \cdot z^{-n} = \sum_k A_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{s_k T_s} z^{-1})^n =$$

$$= \sum_k A_k \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - e^{kT_s} z^{-1}}}_{\text{λόγος ποδιωνίων του } z}$$

β) Οι πόλοι μιας μιγαδικής συνάρτησης $H(z)$ είναι τα σημεία z στα οποία αυτή απειρίζεται. Οπότε για την $H(z)$ θα έχουμε:

$$1 - e^{kT_s} z^{-1} = 0 \Rightarrow z = e^{kT_s}$$

Οι πόλοι της $H(z)$ είναι τα σημεία $z = e^{kT_s}$ για όλα τα k . Οπότε η σχέση που συνδέει τους πόλους των ζωνοειδών είναι: $z_k = e^{kT_s}$ για όλα τα k .



Άσκηση 6: Έστω σήμα διακριτού χρόνου x_n και $X(z)$ ο αντίστοιχος Μ.Ζ. Αν $\hat{x}_a(t)$ η ανακατασκευή του σήματος στον αναδομημένο χρόνο, να υπολογιστεί ο Μ.Λ. του $\hat{x}_a(t)$ συναρτήσει του $X(z)$ και της περιόδου ανακατασκευής T_r , όταν α) χρησιμοποιείται κλιμακωτή και β) τριγωνική ανακατασκευή.

(2.16 άσκηση, σελ. 26 βιβλίου)

Η ανακατασκευή $\hat{x}_a(t)$ συναρτήσει των δειγμάτων x_n φαίνεται

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \varphi\left(\frac{t}{T_r} - n\right)$$

Για τη συνάρτηση $\varphi(\tau)$ έχουμε:

$$\Phi(s) = \mathcal{L}\{\varphi(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(s) &= \mathcal{L}\{\hat{x}_a(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{t}{T_r} - n\right) e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n T_r e^{-sT_r n} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-(sT_r)\tau} d\tau = T_r \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{sT_r n} \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-(sT_r)\tau} d\tau \right) \\ &= T_r \cdot H(e^{sT_r}) \cdot \Phi(sT_r) \end{aligned}$$

Θέσω και $z = e^{sT_r} \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{X}_a(s) = T_r \cdot H(z) \cdot \Phi(sT_r)$ όπου $H(z)$ ο μετασχηματισμός z του αμοδεδυθιάς x_n και $\Phi(s)$ ο Μ.Λ. της $\varphi(\tau)$.

α) Κλιμακωτή ανακατασκευή: $\varphi(\tau) = 1, |\tau| \leq 0.5$ Οπότε:

$$\Phi(s) = \int_{-0.5}^{0.5} 1 \cdot e^{-s\tau} d\tau = \frac{2}{s} \sinh(0.5s)$$

β) Τριγωνική ανακατασκευή: (Γραμμική παρεμβολή μεταξύ διαδοχικών δειγμάτων)

$$\text{Γίνεται: } \Phi(s) = \int_{-1}^0 (1+\tau) e^{-s\tau} d\tau + \int_0^1 (1-\tau) e^{-s\tau} d\tau = -\frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} (\cosh(s) - 1)$$

γιατί $\varphi(\tau) = (1-|\tau|), -1 \leq \tau \leq 1$

8

Άσκηση 7: Έστω αναλογικό σήμα $x_a(t) = 1.2 \cos(3.2\pi t + 0.2\pi) + 0.8 \sin(6.2\pi t + 0.7\pi)$. Να υπολογιστεί το σήμα διακριτού χρόνου που προκύπτει μετά από δειματοληψία με $T_s = 1 \text{ msec}$, καθώς και οι συχνότητες που διηλεκτρώνονται αν το διακριτό σήμα ανακατασκευαστεί με περίοδο $T_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ msec}$. (2.5 άσκηση, σελ. 25 βιβλίο).

Φέρνουμε το αναλογικό σήμα στην παρακάτω μορφή:

αρχικό σήμα: $x_a(t) = 1.2 \cos(3.2\pi t + 0.2\pi) + 0.8 \sin(6.2\pi t + 0.7\pi) \rightarrow$
 $\rightarrow x_a(t) = 1.2 \cos(2\pi \cdot 1.6 t + 0.2\pi) + 0.8 \sin(2\pi \cdot 3.1 t + 0.7\pi)$

Όποτε δειματοληψώντας το $x_a(t)$ με $T_s = 10^{-3} \text{ sec}$ ή $f_s = 1000 \text{ Hz}$ θα έχουμε:

$$x_n = x_a(nT_s) = 1.2 \cos(2\pi \cdot 1.6 n T_s + 0.2\pi) + 0.8 \sin(2\pi \cdot 3.1 n T_s + 0.7\pi) \Rightarrow x_n = 1.2 \cos(2\pi \cdot \underbrace{\frac{1.6}{1000}}_{\lambda_1} n + 0.2\pi) + 0.8 \sin(2\pi \cdot \underbrace{\frac{3.1}{1000}}_{\lambda_2} n + 0.7\pi)$$

Όποτε οι ψηφιακές συχνότητες θα είναι οι $\lambda_1 = 1.6 \cdot 10^{-3}$, $\lambda_2 = 3.1 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$

Τώρα, οι συχνότητες που θα προκύψουν αν ανακατασκευαστεί το διακριτό x_n με $T_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-3} \text{ sec}$ θα είναι:

$$f_1 = \lambda_1 \cdot f_s \Rightarrow f_1 = 1.6 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{2} \cdot 10^3 = 1.2\sqrt{2} \text{ Hz}$$

$$f_2 = \lambda_2 \cdot f_s \Rightarrow f_2 = 3.1 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{2} \cdot 10^3 = 3.1\sqrt{2} \text{ Hz}$$

$$\frac{3.2\pi}{2\pi} = \underline{1.6}$$

$$\frac{6.2\pi}{2\pi} = \underline{3.1}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Παραθέρωση δεδομένων

①

Άσκηση 1: Υπολογίστε αναλυτικά τον Μ.Ε. του τετραγωνικού πα-
ραθέρου και δείξτε ότι, όσο μεγαλύτερος μήκος παραθέρου και να επιδέ-
ξετε, υπάρχει πάντοτε συχνότητα στην οποία ο κυματισμός είναι α-
μείωτος. Υπόδειξη: επιδείξτε μια συχνότητα που να τείνει στο 0-ο-
συνάρτηση του μήκους του παραθέρου και για την οποία η τιμή του
Μ.Ε. να τείνει σε μια αρνητική σταθερά

(3.1 άσκηση, σελ. 34 βιβλίο) - (ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ)

⊗

Το τετραγωνικό παράθυρο είναι η ακολουθία:

$$a_n = \begin{cases} 1, & n=0,1,\dots,L-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}, \text{ όπου } L \text{ είναι το μήκος του παραθέρου}$$

Εξαφρότισε Μ.Ε.: $F\{a_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} 1 \cdot e^{-j\omega n}$ (αθροισμα

δου ν γεωμετρικής πρόοδου) $= \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega L/2} (e^{j\omega L/2} - e^{-j\omega L/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}$

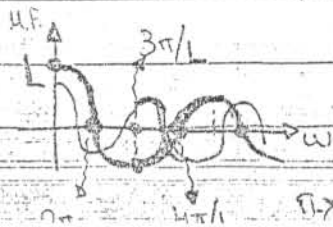
$$= e^{-j\omega(L-1)/2} \cdot \frac{\sin(\frac{L\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} = \underbrace{L}_{\text{πολλαπλασιασμός διαστάσεων}} \cdot \underbrace{e^{-j\omega(L-1)/2} \cdot \frac{\sin(\frac{L\omega}{2})}{L \sin(\frac{\omega}{2})}}_{\text{Μ.Ε. τετραγωνικού παραθέρου}}$$

Παρατηρούμε ότι: $|F\{a_n\}| = \left| \frac{\sin(\frac{L\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right|$. Όπως είναι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(Lx)}{\sin x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{L \cos(Lx)}{\cos x} = L, \text{ οπότε όταν η συχνότητα } \omega \rightarrow 0 \text{ θα είναι:}$$

$$|F\{a_n\}| = L. \text{ Επίσης, παρατηρούμε ότι: } \sin(\frac{L\omega}{2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{L\omega}{2} = k\pi \Leftrightarrow$$

$\omega = \frac{2k\pi}{L}$. Αυτά τα σημεία είναι τα γραμμικά κενά (σημεία μηδενισμού) του πλάτους (π.χ. $k=1 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{L}$, $k=2 \Rightarrow \omega = \frac{4\pi}{L}$)



→ Το πλάτος των δευτερευόντων λοβών είναι αμείωτο

π.χ. για $\omega = \frac{3\pi}{L}$ είναι: $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|F\{a_n\}|}{L} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{L\omega}{2})}{L \sin(\frac{\omega}{2})} = \frac{2 \sin(\frac{3\pi}{2})}{3\pi} = -0.21$

②

Άσκηση 2: Κάνετε την προηγούμενη διαδικασία (όχι τον) αλλά για παράδειγμα Bartlett (μέρος άσκησης 3.2, σελ 34 βιβλίο).

Το τριγωνικό (Bartlett) παράδειγμα έχει Η.Φ. τον πολλαπλασιασμό των Η.Φ. δύο τετραγωνικών παραδειγμάτων, αφού προκύπτει απ' τη συνέλιξη δύο τετραγωνικών παραδειγμάτων μήκους $K = L/2$. Οπότε:

Η.Φ. τετραγωνικού παραδείγματος: $H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{K-1}{2}\omega} \frac{\sin(\frac{K\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$

όπου K το μήκος του τετραγωνικού παραδείγματος. Άρα:

Η.Φ. τριγωνικού παραδείγματος: $H_{tr}(e^{j\omega}) = \left(e^{-j\frac{L/2-1}{2}\omega} \frac{\sin(\frac{L}{2} \frac{\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right)^2$

Για το μέτρο, παρατηρούμε ότι: $|H_{tr}(e^{j\omega})| = \left[\frac{\sin(\frac{L}{2} \frac{\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right]^2$ και

όταν $\omega \rightarrow 0$ έχουμε $|H_{tr}(e^{j0})| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(\frac{L}{2} \frac{\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right]^2 = \left(\lim_{\omega \rightarrow 0} (...) \right)^2 =$

$= \frac{L^2}{4}$. Αν επιλέξουμε ένα σημείο ενδιαφέροντος των σημείων μηδενισμού, π.χ. $\omega_1 = \frac{3\pi}{L}$, (αυτά σημεία μηδενισμού είναι

όταν $\sin(\frac{L}{2} \frac{\omega}{2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{L\omega}{4} = k\pi \Leftrightarrow \omega = \frac{4k\pi}{L}$, για $k=1 \Rightarrow \omega = \frac{4\pi}{L}$ και για $k=2 \Rightarrow \omega = \frac{8\pi}{L}$, θα έχουμε:

$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|H_{tr}(e^{j\omega_1})|}{\frac{L^2}{4}} = \dots = \left(\frac{\sin(3\pi/2)}{3\pi/2} \right)^2 = 0.044 (= 0.212 \cdot 0.212)$

όπου βλέπουμε, λοιπόν, αμέσως καθαριότα, οτιδήποτε είναι μικρότερο του τετραγωνικού παραδείγματος.

Κεφάλαιο 4: DFT και συνεκτικα αθροίσματα



①

Άσκηση 1: Έστω πεπερασμένη ακολουθία x_n , $n=0, \dots, L-1$ μήκους L και X_k , $k=0, \dots, L-1$, ο DFT της α) Αν $L=2N$ και η ακολουθία είναι συμμετρική, δηλαδή $x_n = x_{L-1-n}$, τότε δείξτε ότι $X_{L/2} = 0$, β) αν η ακολουθία είναι αντισυμμετρική, δηλαδή $x_n = -x_{L-1-n}$, τότε δείξτε ότι $X_0 = 0$ (4.2 άσκηση, σελ 63 βιβλίο)

α) Για $L=2N$ και $x_n = x_{L-1-n}$ για $n=0$ έως $L-1$ δηλαδή $x_0 = x_{L-1}$, $x_1 = x_{L-2}$, $x_2 = x_{L-3}$, εφαρμόζουμε DFT στη x_n και έχουμε:

$$X_k = \sum_{l=0}^{L-1} x_l e^{-j\frac{2\pi}{L}kl} = \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_l e^{-j\frac{2\pi}{L}kl} + \sum_{l=\frac{L}{2}}^{L-1} x_l e^{-j\frac{2\pi}{L}kl} =$$
$$= \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_l e^{-j\frac{2\pi}{L}kl} + \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_{L-1-l} e^{-j\frac{2\pi}{L}k(L-1-l)} = \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_l \left[e^{-j\frac{2\pi}{L}kl} + e^{-j\frac{2\pi}{L}k(L-1-l)} \right]$$

$$\text{Για } k=L/2 \text{ είναι: } X_{L/2} = \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_l \left[e^{-j\frac{2\pi}{L} \cdot \frac{L}{2} \cdot l} + e^{-j\frac{2\pi}{L} \cdot \frac{L}{2} \cdot (L-1-l)} \right] =$$

$$= \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_l \left(e^{-j\pi l} + e^{-j\pi(L-1-l)} \right) = \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_l \left(e^{-j\pi l} - e^{j\pi l} \right) \text{ αφού } e^{-j\pi(L-1-l)} =$$

$$= e^{-j\pi(2N-1)} = e^{j\pi} = -1. \text{ Οπότε:}$$

$$X_{L/2} = \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_l \cdot (2j) \cdot \frac{e^{-j\pi l} - e^{j\pi l}}{(2j)} = - \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} (2j) \cdot x_l \cdot \sin(l\pi) = 0 \text{ αφού}$$

για κάθε ακέραιο l είναι $\sin(l\pi) = 0$

$$\beta) \text{ Αφού } x_n = -x_{L-1-n} \text{ θα έχω: } X_0 = \sum_{l=0}^{L-1} x_l \cdot e^0 = \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} (x_l + x_{L-1-l}) = 0$$

⊕

Άσκηση 2: Έστω x_n πραγματική ακολουθία μήκους L α) δείξτε ότι η ανθική $X_k = X_{L-k}^*$ είναι κωνή και αναγκαία, ώστε το X_k να είναι DFT πραγματικής ακολουθίας, β) δείξτε ότι X_0 είναι πραγματικός αριθμός, γ) αν L άρτιος δείξτε ότι $X_{L/2}$ πραγματικός.

(4.6 άσκηση, σελ. 64 βιβλίο)

α) Αν x_0, x_1, \dots, x_{L-1} πραγματικοί τότε $X_k = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{L}nk}$ και επιπλέον

$$X_{L-k} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{L}n(L-k)} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{j\frac{2\pi}{L}nk} \cdot \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{L}nL}}_1 = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{j\frac{2\pi}{L}nk}$$

Αν πάρουμε το μιγαδικό συζυγή του X_{L-k} θα έχουμε: $X_{L-k}^* =$

$$= \sum_{n=0}^{L-1} x_n^* (e^{j\frac{2\pi}{L}nk})^* = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{L}nk} = X_k, \text{ αφού } x_n = x_n^* \text{ (η } x_n \text{ είναι}$$

πραγματική ακολουθία). Άρα αν x_n πραγματικοί $\Rightarrow X_k = X_{L-k}^*$ ή το αντίστροφο θα έχουμε:

$$x_n = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} X_{L-l} e^{j\frac{2\pi}{L}n(L-l)} = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} X_{L-l} e^{-j\frac{2\pi}{L}nl} \cdot \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{L}nL}}_1 \text{ οπότε α-}$$

ποία καταλήξαμε όταν πάρουμε τον IDFT της x_n ($x_n = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{L}nk}$) και αντικαταστήσουμε $\text{κ} = L-l$ σχέση (1)

Οπότε:

$$x_n = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} X_{L-l} e^{j\frac{2\pi}{L}nl} = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X_{L-k} e^{-j\frac{2\pi}{L}nk}$$

$$= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X_k^* e^{-j\frac{2\pi}{L}nk} \text{ (αφού } X_{L-k}^* = X_k \text{)}. \text{ Οπότε προβέχουμε}$$

σχέση (2)

τις (1) και (2) και θα έχουμε: $2x_n = \sum_{k=0}^{L-1} (X_k e^{j\frac{2\pi}{L}nk} + X_k^* e^{-j\frac{2\pi}{L}nk})$

$$= \sum_{k=0}^{L-1} [(X_k e^{j\frac{2\pi}{L}nk}) + (X_k e^{-j\frac{2\pi}{L}nk})^*] = \sum_{k=0}^{L-1} 2\text{Re}\{X_k e^{j\frac{2\pi}{L}nk}\} \text{ που}$$

είναι πραγματική ακολουθία.

β) Θα ισχύει: $X_0 = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{j0} = x_0 + x_1 + \dots + x_{L-1}$ που είναι πραγματικός ως άθροισμα πραγματικών όρων.

γ) Είναι: $X_{L/2} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{L} \cdot n \cdot (\frac{L}{2})} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\pi n} = x_0 (-1)^0 + x_1 (-1)^1 + \dots + (-1)^{L-1} x_{L-1} = x_0 - x_1 + x_2 - \dots - x_{L-1} \Rightarrow$ πραγματική παράσταση

Άσκηση 3: Έστω x_n πεπερασμένη ακολουθία μήκους $L=2N$ και δείξτε τον DFT των ακολουθιών α) $x_n + x_{n-\frac{L}{2}}$, β) $x_n - x_{n-\frac{L}{2}}$, γ) $(-1)^n \cdot x_n$ (4.4 άσκηση, σελ 64 βιβλίου).

α) Είναι: $x_n + x_{n-\frac{L}{2}} \xrightarrow{\text{DFT}} X_k + e^{-j\frac{2\pi}{L} k (\frac{L}{2})} \cdot X_k = X_k + e^{-j\pi k} X_k =$
 $= \begin{cases} 0, & \text{για } k \text{ περιζω} \\ 2X_k, & \text{για } k \text{ άρτιο} \end{cases}$

β) Είναι: $x_n - x_{n-\frac{L}{2}} \xrightarrow{\text{DFT}} X_k - e^{-j\frac{2\pi}{L} k (\frac{L}{2})} \cdot X_k = X_k - e^{-j\pi k} X_k =$
 $= \begin{cases} 2X_k, & \text{για } k \text{ περιζω} \\ 0, & \text{για } k \text{ άρτιο} \end{cases}$

γ) Ισχύει: $(-1)^n = e^{-j\pi n} = e^{j\frac{2\pi}{L} n \cdot (\frac{L}{2})}$. Άρα: $(-1)^n \cdot x_n = e^{j\frac{2\pi}{L} n \cdot (\frac{L}{2})} \cdot x_n$

$\xrightarrow{\text{DFT}} X_{\langle k-k_0 \rangle_L}$ όπου $k_0 = -\frac{L}{2} = -\frac{2N}{2} \Rightarrow k_0 = -N$ Οπότε 0

DFT θα είναι 0 $X_{\langle k+N \rangle_L}$



4.7 βιβλίου

④

Άσκηση 4: Δείξτε ότι ο Η.Ε. $X(e^{j\omega})$ πεπερασμένη ακολουθίας x είναι δυνατό να υπολογιστεί ακριβώς απ' τα δείγματα X_k του DFT α ίδιας ακολουθίας με το παρακάτω σχήμα παρεμβολής:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X_k \cdot \frac{1 - e^{-jL\omega}}{1 - e^{-j(\omega - \frac{2\pi k}{L})}}$$

Δείξτε ότι στην παραπάνω σχέση ισχύει $X(e^{j\frac{2\pi k}{L}}) = X_k$ (4.7 άσκηση, σελ 64 βιβλίου)

Έστω x_0, x_1, \dots, x_{L-1} η ακολουθία μήκους L . Τότε ισχύει:

$$X_k = \sum_{l=0}^{L-1} x_l \cdot e^{-j\frac{2\pi}{L}lk} \quad \text{και} \quad x_n = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{L}nk} \quad (\text{DFT και IDFT})$$

x_n αντιστοιχεί) Επίσης: $F\{x_n\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\omega n}$ Οπότε:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} \left(\frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{L}nk} \right) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{L} X_k \cdot e^{j(\frac{2\pi}{L}k - \omega)n} =$$

$$= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X_k \cdot \sum_{n=0}^{L-1} e^{j(\frac{2\pi}{L}k - \omega)n} = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X_k \cdot \frac{1 - e^{j(\frac{2\pi}{L}k - \omega)L}}{1 - e^{j(\frac{2\pi}{L}k - \omega)}}$$

αυτή είναι $\sum_{n=0}^{L-1} e^{j(\frac{2\pi}{L}k - \omega)n} \rightarrow$ γεωμετρική πρόοδος της μορφής

$$\sum_{n=0}^{L-1} a^n = \frac{1-a^L}{1-a} \quad \text{Επίσης: } e^{j(\frac{2\pi}{L}k - \omega)L} = e^{j(2\pi k - \omega L)} = e^{-j\omega L} \cdot \underbrace{e^{j2\pi k}}_1$$

Άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο. Πρέπει επίσης να δείξουμε ότι:

$$\lim_{\omega \rightarrow \frac{2\pi l}{L}} X(e^{j\omega}) = X_l \quad \text{Όπως:}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \frac{2\pi l}{L}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X_k \cdot \lim_{\omega \rightarrow \frac{2\pi l}{L}} \frac{1 - e^{-jL\omega}}{1 - e^{-j(\omega - \frac{2\pi k}{L})L}}$$

Φ είναι για $k \neq l$ είναι μορφή $\frac{0}{0}$. Με εφαρμογή κανόνα Hospital θα είναι $\lim_{\omega \rightarrow \frac{2\pi l}{L}} \dots = 0$ Οπότε για όλες τις περιπτώσεις θα είναι:

$$\lim_{\omega \rightarrow \frac{2\pi l}{L}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X_k \cdot (L \delta_{kl}) = X_l$$

Άσκηση 5: Εκφράστε τον Μ.Φ. πεπερασμένης ακολουθίας x_n , $n=0, \dots, N-1$ συναρτήσει των στοιχείων X_k , $k=0, \dots, N-1$ του ΔΦ

Επιπρόσθετα αρχικά IDFT για να υπολογίσουμε την πεπερασμένη ακολουθία x_n και στη συνέχεια τον ΜΦ έστω x_0, \dots, x_{N-1} ακολουθία μήκους N . Τότε ισχύει:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad \text{και} \quad x_n = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (\text{DFT και IDFT})$$

της x_n αντιστοίχως). Οπότε: $F\{x_n\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\omega n} =$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \right) \cdot e^{-j\omega n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j \left(\frac{2\pi}{N} k - \omega \right) n} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} e^{j \left(\frac{2\pi}{N} k - \omega \right) n}}_{\text{Γεωμετρική πρόοδος}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \frac{1 - e^{j \left(\frac{2\pi}{N} k - \omega \right) N}}{1 - e^{j \left(\frac{2\pi}{N} k - \omega \right)}}$$

αυτού το $\sum_{n=0}^{N-1} e^{j \left(\frac{2\pi}{N} k - \omega \right) n}$ είναι της μορφής $\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$ Άρα

$$e^{j \left(\frac{2\pi}{N} k - \omega \right) N} = e^{j(2\pi k)} \cdot e^{-j\omega N} = e^{-j\omega N} \quad \text{θα είναι και}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j \left(\omega - \frac{2\pi k}{N} \right)}}$$

ως γνωστόν ο ΔΦ αποτελεί δείγματα της ΜΦ στα σημεία $\omega_n = \frac{2\pi}{N} \cdot n$, $n=0, \dots, N-1$. Με την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπο-

λογίσουμε την τιμή του ΜΦ σε οποιοδήποτε άλλο σημείο ω και τυχόν μας ενδιαφέρει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: FIR ΦΙΛΤΡΑ



Άσκηση 1: Εστω ότι επιθυμείτε να προσεγγίσετε τις ιδανικές χαμητοπαστικές κατωπερατού φίλτρου με ένα FIR μήκους $L=5$ και συμμετρικές συσφαιρικούς ως προς τον κεντρικό όρο. Ορίστε κατάλληλες συναρτήσεις $R(e^{j\omega})$ και $\varphi(\omega)$ για την εν λόγω περίπτωση. Τι παρατηρείτε για την $\varphi(\omega)$; (ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ)

Αφού το μήκος του φίλτρου είναι $L=5$ θα έχω 5 συσφαιρικούς ως εξής:

$$\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \text{όπως} \quad \alpha_3 = \alpha_1 \quad \text{και} \quad \alpha_4 = \alpha_0 \quad \text{αφού}$$

είναι συμμετρικοί ως προς τον κεντρικό όρο. Τότε η συνάρτηση μετασχηματισμός z της κρουστικής απόκρισης θα είναι

$$H(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \alpha_1 z^{-3} + \alpha_0 z^{-4} \quad \text{ενώ η απόκριση συχνότητας}$$

$$\text{θα είναι: } H(e^{j\omega}) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-j\omega} + \alpha_2 e^{-2j\omega} + \alpha_1 e^{-3j\omega} + \alpha_0 e^{-4j\omega}$$

(Θέτω όπου $z = e^{j\omega}$)

$$\text{Οπότε: } H(e^{j\omega}) = e^{-2j\omega} (\alpha_2 + \alpha_0 (e^{-2j\omega} + e^{2j\omega}) + \alpha_1 (e^{j\omega} + e^{-j\omega}))$$

↑
τις του φίλτρου

$$= e^{-2j\omega} (\alpha_2 + \alpha_0 \cdot 2\cos(2\omega) + \alpha_1 \cdot 2\cos\omega) = e^{j\varphi(\omega)} \cdot R(e^{j\omega})$$

• Αν είχαμε περίπτωση συμμετρίας $\alpha_2=0, \alpha_3=-\alpha_1, \alpha_4=-\alpha_0$ (όταν θέλουμε να προσεγγίσουμε φανταστικές συναρτήσεις) *

• Παρατηρούμε ότι $\varphi(\omega) = -2\omega \Rightarrow$ γραμμική φάση (για FIR $\varphi(\omega) = -\frac{L-1}{2}\omega$ για φίλτρα μήκους L)

* Στην περίπτωση ασυμμετρίας θα είναι: $H(e^{j\omega}) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-j\omega} - \alpha_1 e^{-3j\omega} - \alpha_0 e^{-4j\omega}$

$$\cdot e^{-4j\omega} = \dots = e^{-2j\omega} \cdot 2j (\alpha_1 \sin(2\omega) + \alpha_0 \sin\omega)$$

↓ ↓ ↓
Άσκηση 2: Με τη χρήση τετραγωνικού παραθύρου σχεδιάστε κωπτεράτο FIR φίλτρο γραμμικής φάσης μήκους $L=2N+1$ με περιοχή διαβάσεως $[0, 0.3\pi]$ και αποκλισης $[0.4\pi, \pi]$. Θέλουμε η ιδανική απόκριση να μεταβάλλεται γραμμικά απ' την τιμή 1 στη θ στην περιοχή μετάβασης (ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ) - (Παράδειγμα 6.1 βιβλίο) (6.2 άσκηση, σελ. 120)

Η ιδανική απόκριση συχνότητας $D(e^{j\omega})$ που επιθυμούμε να προσεγγίσουμε είναι ως εξής:

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 0.3\pi \\ 4 - \frac{10}{\pi}|\omega| & 0.3\pi \leq |\omega| \leq 0.4\pi \\ 0 & 0.4\pi \leq |\omega| \end{cases}$$

Αφού πρόκειται για πραγματική συμμετρική συνάρτηση, οι συντελεστές τα

FIR θα έχουν άρτια συμμετρία ενώ οι συντελεστές $b_n = 0$. Ο τύπος που θα μας δώσει τους συντελεστές του FIR είναι ο:

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega}) e^{-j(n-N)\omega} d\omega, \quad 0 \leq n \leq 2N$$

Αντί να εφαρμόσουμε απ' ευθείας τον τύπο κάνουμε το εξής: αν $A(\omega)$ περιοδική συνάρτηση περιόδου 2π τότε οι a_n όροι της τριώνυμης σειράς Φουριέ θα είναι:

Αντί να εφαρμόσουμε απ' ευθείας τον τύπο κάνουμε το εξής: αν $A(\omega)$ περιοδική συνάρτηση περιόδου 2π τότε οι a_n όροι της τριώνυμης σειράς Φουριέ θα είναι:

$$A(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega} \Rightarrow A'(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{(jn) a_n}_{b_n} e^{jn\omega} \Rightarrow A''(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{(jn)^2 a_n}_{\gamma_n} e^{jn\omega}$$

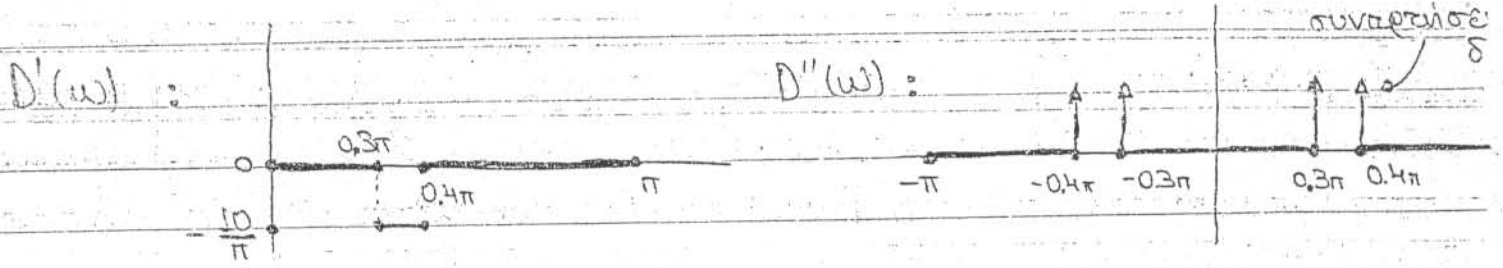
Η σχέση των όρων της σειράς Φουριέ της περιοδικής $A(\omega)$ με τους όρους της σειράς της $A''(\omega)$ έχουν σχέση ως εξής:

$$a_n = -\frac{\gamma_n}{n^2}, \quad n \neq 0$$

Με αντιστρόφο μ.φ. όπως στις σειρές $A(\omega)$

και $A''(\omega)$ παίρνουμε: $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\omega) e^{-jn\omega} d\omega$ $\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A''(\omega) e^{-jn\omega} d\omega$

Αν τώρα στη θέση της $A(\omega)$ βάλουμε την ιδανική $D(\omega)$ (πραγματική) θα έχουμε:



οπότε $D''(e^{j\omega}) = D''(\omega) = \frac{10}{\pi} \cdot [\delta(\omega + 0.4\pi) + \delta(\omega - 0.4\pi) - \delta(\omega + 0.3\pi) - \delta(\omega - 0.3\pi)]$

Για τη σειρά $D''(\omega)$ είναι εύκολο να υπολογίσουμε τους όρους της

$$y_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D''(\omega) e^{-jn\omega} d\omega = \frac{10}{\pi^2} [\cos(0.4\pi n) - \cos(0.3\pi n)]$$

Οπότε αφού ο αρχικός τύπος των συντελεστών είναι:

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega}) e^{-j(n-N)\omega} d\omega \quad 0 \leq n \leq 2N \quad \text{θα είναι ίσοι με τους}$$

όρους αν που υπολογίσατε νωρίτερα, όπως άρα αφού είναι μετατοπισμένοι κατά N , θα είναι ίσοι με τους όρους a_{n-N} . Οπότε:

$$h_n = a_{n-N} = -\frac{1}{(n-N)^2}, \text{ όπου } n-N \neq 0 \Rightarrow n \neq N$$

δηλαδή: $h_n = -\frac{1}{(n-N)^2} \cdot \frac{10}{\pi^2} [\cos(0.4\pi(n-N)) - \cos(0.3\pi(n-N))]$, όπου

εδώ $n = 0, \dots, 2N-1$

Για $n=N$ ο κεντρικός συντελεστής h_N δεν υπολογίζεται απ' τον προηγούμενο τύπο (απροσδιοριστία) αλλά απ' τη μέση τιμή της $D(e^{j\omega})$

δηλαδή: $h_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega}) \cdot 1 d\omega = \dots = 0.85$



Άσκηση 3: Σχεδιάστε κατωπέρατο FIR φίλτρο γραμμικής φάσης μήκους $L=3$ με ζώνη διαβάσεως $[0, 0.3\pi]$, ζώνη αποκλισης $[0.4\pi, \pi]$ και ζώνη μετάβασης $[0.3\pi, 0.4\pi]$, με συνάρτηση βάρους $W(\omega)=1$ + χρήση των ζωνών αδιαφορίας (ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ) - (6.3 έκδοση, σελ 120)

Αφού πρόκειται για φίλτρο γραμμικής φάσης και η ιδανική απόκριση συχνότητας είναι πραγματική, οι συντελεστές θα είναι οι εξής:

$$\left. \begin{matrix} h_0 & h_1 & h_2 \\ \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ a_1 & a_0 & a_1 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{Οπότε θα προσεγγίσουμε την ιδανική Νε} \\ \text{με την } D(e^{j\omega}) = a_0 + 2a_1 \cos \omega \end{matrix}$$

Γραμμικά θα είναι: $D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 0.3\pi \\ 0 & |\omega| \geq 0.4\pi \end{cases}$

Με τη μέθοδο των ζωνών αδιαφορίας θα προκύψει το παρακάτω γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

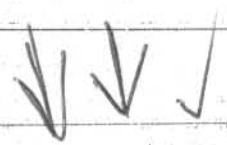
$$\int_T W^2(\omega) D_r(e^{j\omega}) \cos(n\omega) d\omega = a_0 \int_T W^2(\omega) \cos(n\omega) d\omega + 2a_1 \int_T W^2(\omega) \cos \omega \cos(n\omega) d\omega$$

$$\xrightarrow[\substack{D_r(e^{j\omega}) = D(e^{j\omega}) \\ T = [0, 0.3\pi] \cup [0.4\pi, \pi] \\ W(\omega) = 1}]{\cdot d\omega} \int_T D(e^{j\omega}) \cos(n\omega) d\omega = a_0 \int_T \cos(n\omega) d\omega + 2a_1 \int_T \cos \omega \cos(n\omega) d\omega$$

όπου $n=0, \dots, N$, όπως $L=2N+1=3 \Leftrightarrow N=1$. Άρα: $n=0, 1$

Οπότε έχω σύστημα εξισώσεων με 2 αγνώστους και βγαίνω:

$a_0 = 0.3621$ και $a_1 = 0.2860$



Άσκηση 4: Σχεδιάστε ισοκυματικό mini-max καταπερατό FIR φίλτρο γραμμικής φάσης, μήκους $L=3$, με T στη διάβαση $[0, 0.3\pi]$, T στη αποκοπή $[0.4\pi, \pi]$, T στη μετάβαση $[0.3\pi, 0.4\pi]$ και μοναδιαία συνάρτηση βάρους ($W(\omega)=1$) (ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ) - (Παράδειγμα 6.5 βιβλ (6.4 άσκηση, σελ. 120))

Αρα πρόκειται για φίλτρο γραμμικής φάσης πραγματικό, οι συντελεστές θα είναι:

$$\left. \begin{matrix} h_0 & h_1 & h_2 \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ a_1 & a_0 & a_1 \end{matrix} \right\} \text{ Προσεγγίστε την } D(e^{j\omega}) \text{ με την } R(e^{j\omega}) = a_0 + 2a_1 \cos \omega$$

Με βάση το Θεώρημα Εναλλαγής πρέπει να βρείτε 3 συχνότητες στις T νες διάβασης/αποκοπής $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ (όσο και οι συντελεστές μαζί με την τιμή σφάλματος $\Rightarrow a_0, a_1, \delta_{\max} \Rightarrow 3$ συχνότητες) έτσι ώστε:

- $D(\omega_1) - R(\omega_1) = -[D(\omega_2) - R(\omega_2)] = D(\omega_3) - R(\omega_3)$ (σημείωση 1)
- $|D(\omega_i) - R(\omega_i)| = \max_{\omega} |D(\omega) - R(\omega)|$ για $i=1, 2, 3$. (σημείωση 2)

$$\text{αρα } |E(\omega_i, c_1, c_2)| = \max_{\omega \in T} |E(\omega, c_1, c_2)| = \max_{\omega \in T} |W(\omega) - [D(\omega) - R(\omega)]|$$

Θα προσπαθήσουμε να επιλέξουμε τα $\omega_i, i=1, 2, 3$ ώστε να ικανοποιούνται οι παραπάνω 2 συνθήκες. Είναι: $R(\omega) = a_0 + 2a_1 \cos \omega \Rightarrow R'(\omega) = -2a_1 \sin \omega$ που έχει σταθερό πρόσημο στο $[0, \pi]$. Αρα η $R(\omega)$ θα είναι γνήσια και μέγιστα ρθίνουσα (από τιμές κοντά στο 1 σε τιμές κοντά στο 0 για ω από 0 \rightarrow π αντίστροφα, αρα η $D(e^{j\omega})$ είναι σταθερή και η συνάρτηση σφάλματος θα είναι αύξουσα στα διαστήματα ενδιαφέροντος $[0, 0.3\pi]$ και $[0.4\pi, \pi]$. Αρα τα σημεία 0, 0.3π , 0.4π , π θα είναι ακρότατα σημεία, οπότε θα εστιάσουμε για τα ω_i .

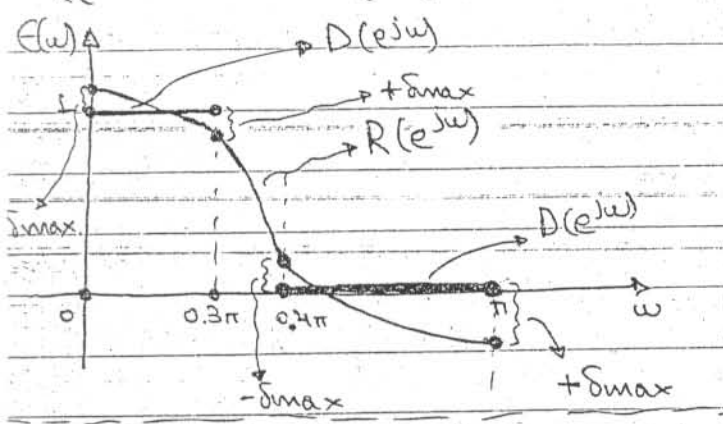
Μόνο οι 3-δες $(0, 0.3\pi, 0.4\pi)$ και $(0.3\pi, 0.4\pi, \pi)$ θα παρουν να ικανοποιήσουν και τις 2 συνθήκες αρα έχουν σωστή εναλλαγή προσημίων στα σημεία:

- $(0, 0.3\pi, 0.4\pi) \rightarrow (-\delta_{\max}, \delta_{\max}, -\delta_{\max})$
- $(0.3\pi, 0.4\pi, \pi) \rightarrow (\delta_{\max}, -\delta_{\max}, \delta_{\max})$

Ενώ οι 3-δες $(0, 0.3\pi, \pi) \rightarrow (-\delta_{\max}, \delta_{\max}, \delta_{\max})$ και $(0, 0.4\pi, \pi) \rightarrow$

απορρίπτεται
 → αφού δεν ικανοποιείται η 1^η συνθήκη (6)

→ $(-\delta_{max}, -\delta_{max}, \delta_{max})$ δεν εμφανίζονται σωστά αναπαραστάση προσημω και απορρίπτονται. Γραφικά θα έχουμε:



• Άρα για την 3-δα $(0, 0.3\pi, 0.4\pi)$ θα έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} D(\omega_1) - R(\omega_1) &= -\delta_{max} \\ D(\omega_2) - R(\omega_2) &= +\delta_{max} \\ D(\omega_3) - R(\omega_3) &= -\delta_{max} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 - a_0 - 2a_1 = -\delta_{max} \\ 1 - a_0 - 2a_1 \cos(0.3\pi) = +\delta_{max} \\ 0 - a_0 - 2a_1 \cos(0.4\pi) = -\delta_{max} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -0.1489 \\ a_1 = 0.7236 \\ \delta_{max} = 0.2983 \end{cases}$$

Πρέπει να ικανοποιείται και η 2^η συνθήκη. Άρα παίρνω ένα απ' τα υποψήφια σημεία εκτός των $0, 0.3\pi, 0.4\pi$, δηλαδή το π . Στο σημείο π θα έχω τότε: $0 - a_0 - 2a_1 \cos \pi = \dots = 1.5961$, που είναι μεγαλύτερο από το υποδορισμένο $\delta_{max} = 0.2983$. Ομοίως και η 3-δα $(0, 0.3\pi, 0.4\pi)$ απορρίπτεται.

Για την 3-δα $(0.3\pi, 0.4\pi, \pi)$ έχουμε:

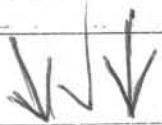
$$\begin{cases} 1 - a_0 - 2a_1 \cos(0.3\pi) = +\delta_{max} \\ 0 - a_0 - 2a_1 \cos(0.4\pi) = -\delta_{max} \\ 0 - a_0 + 2a_1 = +\delta_{max} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_0 = 0.2176 \\ a_1 = 0.3149 \\ \delta_{max} = 0.4122 \end{cases}$$

Για να ικανοποιείται και η 2^η συνθήκη υπολογίζω με το σφάλμα στο σημείο 0 (εκτός των $0.3\pi, 0.4\pi$) και έχουμε:

$$D - R = 1 - a_0 - 2a_1 = 0.1526 < 0.4122 \Rightarrow \text{ικανοποιείται και η 2^η συνθήκη}$$

Επομένως, αυτή θα είναι και η βέλτιστη λύση στο πρόβλημά μας $(h_0 = a_1 = 0.3149, h_1 = a_0 = 0.2176, h_2 = a_1 - h_0)$.



Άσκηση 5: Έστω ότι έχετε FIR φίλτρο μήκους $L=3$ και εφαρμόζεται σαν είσοδο την ακολουθία $u(n) = (\frac{1}{2})^n$. Αν τα 3 πρώτα δείγματα της αντιστοιχίας είναι 1, 0, 3 να βρεθεί η συνολική έξοδος του φίλτρου για κάθε $n \geq 0$. Θεωρείστε μηδενικές αρχικές συνθήκες.
(ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ) - (6. Θέση, σελ 120 βιβλίο).

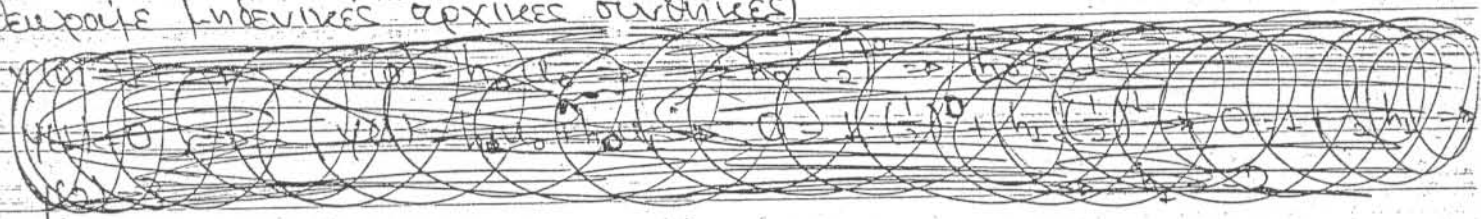
(*)

Αφού το μήκος του φίλτρου είναι $L=3$ η κρουστική απόκριση θα είναι πεπερασμένη (FIR φίλτρο) δηλαδή θα είναι της μορφής h_1, h_2 . Τότε η έξοδος του φίλτρου θα είναι η συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης με την ακολουθία εισόδου $u(n)$. Οπότε:

$$y(n) = \sum_{m=0}^2 h_m u_{n-m} = \sum_{m=0}^2 h_m \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} = \sum_{m=0}^2 h_m \frac{1}{2^n} \cdot 2^m = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^2 h_m \cdot 2^m$$

για κάθε $n \geq 0$

Για να βρούμε τα h_0, h_1, h_2 έχουμε για τα 3 πρώτα δείγματα:
(θεωρούμε μηδενικές αρχικές συνθήκες)



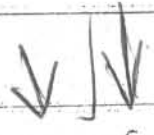
1^ο δείγμα: $\begin{matrix} \xrightarrow{u(0)} \\ h_0 | h_1 | h_2 \end{matrix} \rightarrow$ Έξοδος: $y(0) = h_0 u(0) \Rightarrow 1 = h_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow \boxed{h_0 = 1}$

2^ο δείγμα: $\begin{matrix} \xrightarrow{u(1) \ u(0)} \\ h_0 | h_1 | h_2 \end{matrix} \rightarrow$ Έξοδος: $y(1) = h_0 u(1) + h_1 u(0) \Rightarrow 0 = 1 \cdot \frac{1}{2} + h_1 \cdot 1$
 $\Rightarrow \boxed{h_1 = -\frac{1}{2}}$

3^ο δείγμα: $\begin{matrix} \xrightarrow{u(2) \ u(1) \ u(0)} \\ h_0 | h_1 | h_2 \end{matrix} \rightarrow$ Έξοδος: $y(2) = h_0 u(2) + h_1 u(1) + h_2 u(0) \Rightarrow 3 = 1 \cdot \frac{1}{4} + (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} + h_2 \cdot 1 \Rightarrow \boxed{h_2 = 3}$

Πότε η έξοδος του φίλτρου για κάθε $n \geq 0$ θα είναι:

$$y(n) = \frac{1}{2^n} [h_0 \cdot 2^0 + h_1 \cdot 2 + h_2 \cdot 2^2] = \frac{1}{2^n} [1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 4 \cdot 3] = \frac{12}{2^n} = \left(\frac{3}{2^{n-2}}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1, & \text{για } n=0 \\ 0, & \text{για } n=1 \\ 3, & \text{για } n \geq 2 \end{cases}$$



Άσκηση 6: Με τη βοήθεια τριγωνικών παραθύρας σχεδιάστε κατωτέρω το FIR φίλτρο γραμμικής φάσης μήκους $L=7$, που να έχει συχνότητα αποκομής $\omega_c = 0.3\pi$. (βλ. άσκηση, σελ. 119 βιβλίου)

Αφού η ιδανική απόκριση συχνότητας είναι πραγματική θα είναι $b=0$. Οπότε λόγω και της συμμετρίας θα έχουμε:

$$\left. \begin{matrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{Οι βέλτιστοι συντελεστές με χρήση παραθύρας} \\ \text{θα είναι:} \end{matrix}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_2(e^{j\omega}) \cos n\omega d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-0.3\pi}^{0.3\pi} 1 \cdot \cos(n\omega) d\omega, \quad n=0, \dots, N \quad \text{και } L=2N+1=7 \Rightarrow N=3$$

Γίνοντας το ολοκλήρωμα θα έχουμε:

$$a_0 = 0.3 \quad \text{και} \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin(n\omega)}{n} \Big|_{-0.3\pi}^{0.3\pi} = \frac{\sin(0.3\pi n)}{n\pi}, \quad n \neq 0$$

και για $n=1, 2, 3$ έχουμε $a_1 = 0.2579$, $a_2 = 0.1574$, $a_3 = 0.0328$

Για την τριγωνική, τύρα, παραθυρική αποθυσία θα είναι:

$$h_n^0 = h_n \cdot a_n \quad \text{όπου} \quad \omega_n = 1 - \frac{|n-N|}{N+1}, \quad 0 \leq n \leq L-1 \quad \text{για } L=2N+1 \quad (N=3)$$

- Αρα $n=0: h_0^0 = a_3 \cdot (1 - \frac{3}{4}) = 0.0082$
- $n=1: h_1^0 = a_2 \cdot (1 - \frac{2}{4}) = 0.0757$
- $n=2: h_2^0 = a_1 \cdot (1 - \frac{1}{4}) = 0.1931$
- $n=3: h_3^0 = a_0 \cdot 1 = 0.3$
- $n=4: h_4^0 = a_1 \cdot (1 - \frac{1}{4}) - h_2^0 = 0.1931$
- $n=5: h_5^0 = h_1^0 = 0.0757$
- $n=6: h_6^0 = h_0^0 = 0.0082$

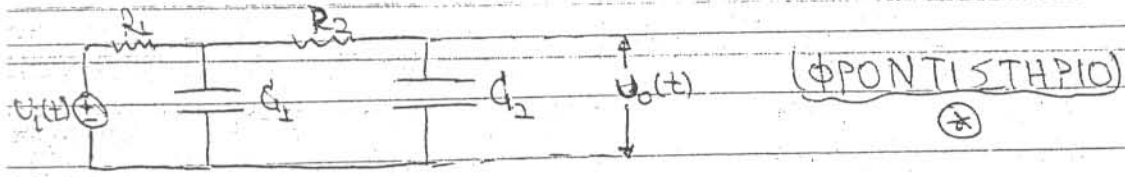
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: IIR ΦΙΛΤΡΑ



7A

①

Άσκηση 1: Έστω το κυκλώμα του παρακάτω σχήματος α) βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ εισόδου $v_i(t)$ και εξόδου $v_o(t)$ και β) εφέξαστε το κατά πόσο υπάρχει επιλογή των στοιχείων του κυκλώματος ώστε η συνάρτηση μεταφοράς του α) ερωτήματος να υλοποιεί αναβολικό φίλτρο Butterworth τάξης $L=2$ με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$



α) Στο πεδίο Laplace οι ισοδύναμες αντιστάσεις των στοιχείων γίνονται $R_1, R_2, 1/sC_1, 1/sC_2$. Η μέθοδος βρόχων για την επίλυση του κυκλώματος καταλήγει στις εξισώσεις:

$$\left. \begin{aligned} -V_i + R_1 I_1 + \frac{1}{sC_1} (I_1 - I_2) &= 0 & (1) \\ \frac{1}{sC_1} (I_2 - I_1) + (R_2 + \frac{1}{sC_2}) I_2 &= 0 & (2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Λίνακας τη (2) ως προς } I_2 \text{ και α} \\ &\text{καθιστώντας σαν (1) θα βρε} \\ &\text{με το } I_2. \text{ Οπώς } V_o(s) = I_2(s) \cdot \frac{1}{sC_2} \end{aligned}$$

άρα για τη ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ θα είναι:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) + 1}$$

β) Σχεδιάζουμε αρχικά καταπαρατό φίλτρο Butterworth με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 1$. Από τη θεωρία είναι:

$$H_B(s) = \frac{\omega_c^N}{(s - s_0)(s - s_1) \dots (s - s_{N-1})}, \text{ όπου } s_n = \omega_c \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2n+1)}{2L})} \text{ όπου } n=0, 2L-1$$

Οπώς $L=2$ άρα $n=0, 1, 2, 3$ και ~~οι ρίζες στο αριστερό ημιεπίπεδο~~ μας ενδιαφέρουν οι 1 ρίζες στο αριστερό ημιεπίπεδο s_0, s_{L-1} ή s_0, s_1 Άρα:

$$s_0 = 1 \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} = e^{j\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 + j) \text{ και } s_1 = 1 \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4})} = e^{j\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 - j)$$

2

Οπότε το κριτήριο με συχνότητα αποκομής $\omega_c = 1$ είναι: $H(s) = \frac{1}{s^2 + s\sqrt{2} + 1}$

Για να βρούμε τώρα το κριτήριο με συχνότητα αποκομής $\omega_c = 1000 \text{ Hz}$ βάζουμε $s \leftrightarrow \frac{s}{1000}$ και έχουμε:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 \cdot 10^{-6} + s\sqrt{2} \cdot 10^{-3} + 1}$$

Απ' την $H(s)$ παρατηρούμε ότι οι εξι-

σώσεις που καθορίζουν τις ρίζες των στοιχείων είναι:

$$R_1 R_2 C_1 C_2 = 10^{-6} \quad \text{και} \quad R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 = \sqrt{2} \cdot 10^{-3}$$

Αν θέσουμε $x = R_1 C_1$ και

$y = R_2 C_2$ τότε έχουμε $x \cdot y = 10^{-6}$. Επομένως το άθροισμα $x + y$ γίνεται ελάχιστο όταν $x = y = \sqrt{10^{-6}} = 10^{-3}$, δηλαδή $x + y \geq 2 \cdot 10^{-3}$. Όμως τότε η 2^η εξίσωση δεν ικανοποιείται για καμία επιλογή των τιμών των στοιχείων, αφού αυτές οι τιμές είναι όλες θετικές. Με άλλα λόγια δεν είναι δυνατόν να υλοποιήσουμε κριτήριο Butterworth τάξης 1-2 με το παραπάνω κωδικό. (επιτυχώς προορίζε να υλοποιήσουμε άλλα είδη κριτηρίων, π.χ. Chebyshev)

(3)



Άσκηση 2: Σχεδιάσε ψηφιακό κατωπερατό IIR φίλτρο Butterworth τάξης $L=2$ το οποίο να έχει $\omega_p = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.4\pi$ και $|W(\omega)|=1$ με κενό διγραμμικό μετασχηματισμού. (τμήρος 7.6 άσκησης, σελ. 154 βιβλίο)

Ο διγραμμικός μετασχηματισμός ορίζεται ως $s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ με την αντί-

στοιχική σχέση μεταξύ ψηφιακής και αναλογικής συχνότητας $\Omega = \tan \frac{\omega}{2}$

Για το κατωπερατό IIR αναλογικό φίλτρο Butterworth θα ισχύει

συνάρτηση μεταφοράς: $H(s) = \frac{\sigma_c^L}{(s-s_0) \dots (s-s_{L-1})}$, όπου $s_0 = \sigma_c e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+j)$ και

$s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-j)$ Οπότε: $H(s) = \frac{\sigma_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\sigma_c s + \sigma_c^2}$ Επειδή έχει ήδη καθορι-

στεί η τάξη L του φίλτρου για να υπολογίσουμε τα σ_c και δ_{max} θα χρειαστούμε τις σχέσεις:

$(\alpha-1)\delta_{max}^4 + 2(1-\alpha)W_p\delta_{max}^3 + (W_s^2 - W_p^2)\delta_{max}^2 - 2W_s^2\delta_{max} \cdot W_p + W_s^2W_p^2 = 0$ $\xrightarrow{W_s=W_p=1}$

$\alpha = \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_p}\right)^{2L} \rightarrow (\alpha-1)\delta_{max}^4 + 2(1-\alpha)\delta_{max}^3 - 2\delta_{max} + 1 = 0$ (1)

Θα ισχύει: $\sigma_p = \tan \frac{\omega_p}{2} = 0.5095$ και $\sigma_s = \tan \frac{\omega_s}{2} = 0.7265$ και τότε

$\alpha = \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_p}\right)^{2 \cdot 2} = 4.134$. Άρα η (1): $3.134\delta_{max}^4 - 6.268\delta_{max}^3 - 2\delta_{max} + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta_{max} = 0.3703$. Οπότε: $\sigma_c = \frac{\sigma_p}{\sqrt{\frac{1}{(\delta_{max} \cdot W_p)^2 - 1}}} = 0.4587$.

Επομένως: $H(s) =$ Με αντικατάσταση του διγραμμικού μετασχηματισμού υπολογίζουμε ότι το τελικό ψηφιακό φίλτρο έχει συνάρτηση

μεταφοράς $\left\{ H(z) = \frac{0.1132(1+z^{-1})^2}{1 - 0.4449z^{-1} + 0.6511z^{-2}} \right\}$ Υλοποιείται με το βοηθητικό φίλτρο $X(z)$



(4)

Άσκηση 3: Σχεδιάστε ψηφιακό κατωπερατό IIR φίλτρο Butterworth τάξης $L=2$ με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 0.3\pi$. (ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ)

Ο διγραμμικός μετασχηματισμός είναι $s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ με σχέση ψηφιακή και αναλογική συχνότητας $\omega = \tan \frac{\omega_c}{2}$

Για το κατωπερατό IIR αναλογικό φίλτρο Butterworth θα ισχύει:

$$H(s) = \frac{\omega_c^L}{(s-s_0) \dots (s-s_{L-1})} \Rightarrow H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2} s \omega_c + \omega_c^2} \quad (\text{δω όπως θα είναι}$$

είναι $\omega_c = \tan \frac{\omega_c}{2} = \tan 0.15\pi$. Οπότε θα είναι:

$$H(s) = \frac{(8.225 \cdot 10^{-3})^2}{s^2 + 8.225 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{2} s + (8.225 \cdot 10^{-3})^2} \quad \text{Με αντικατάσταση τα}$$

διγραμμικού μετασχηματισμού υπολογίζουμε ότι το τελικό φίλτρο (ψηφιακό) θα έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{(8.225 \cdot 10^{-3})^2}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 8.225 \cdot 10^{-3} \sqrt{2} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + (8.225 \cdot 10^{-3})^2}$$



Άσκηση 4: Σχεδιάστε ψηφιακό ανωπερατό IIR φίλτρο Butterworth τάξης $L=3$ με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 0.2\pi$. (ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ)

Για το κατωπερατό IIR αναλογικό είναι: $H(s) = \frac{\omega_c^3}{(s+\omega_c)(s^2 + s\omega_c + \omega_c^2)}$

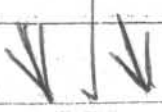
όπου για το ω_c : $\omega_c' = \tan \frac{\omega_c}{2} = \tan 0.1\pi \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\omega_c'} = \frac{1}{\tan 0.1\pi} = 182.35$

Οπότε μπαίνουμε σε αναλογικό ανωπερατό αν όπου s βάλουμε το $\frac{1}{s}$ και όπου $\omega_c' = \frac{1}{\omega_c}$

$$H_a(s) = \frac{(182.376)^3}{\left(\frac{1}{s} + 182.376\right) \left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} (182.376) + (182.376)^2\right]}$$

Τέλος, με $s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ πάμε σε ψηφιακό ανωπερατό: $H(z) =$

(διγραμμικός μετασχηματισμός)



5

Άσκηση 5: Σχεδιάστε ψηφιακό ανωπερατό IIR Butterworth τάξης $L=3$ με $\omega_p=0.4\pi$, $\omega_s=0.3\pi$ και $W(\omega)=1$ \approx στην ασκήσεων 2.4

Αρχικά σχεδιάσω το κατωπερατό αναλογικό φίλτρο, μετά το ανωπερατό (με $s' = \frac{1}{s}$) και μετά με διχραφτικό τεζ/οφό ($s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$) το ψηφιακό.

Για το κατωπερατό αναλογικό: $H_c(s) = \frac{\omega_c^3}{(s+\omega_c)(s^2+s\omega_c+\omega_c^2)}$

Επειδή έχει καθοριστεί η τάξη L του φίλτρου, για να βρούμε τα ω_c και ω_s χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$(a-1)\delta_{max}^4 + 2(1-a)\omega_p\delta_{max}^3 + (\omega_s^2 - \omega_p^2)\delta_{max}^2 - 2\omega_s\omega_p\delta_{max} + \omega_s^2 \cdot \omega_p^2 = 0$$

όπου $\omega_s = \omega_p = 1$ (αφού $W(\omega)=1$) και $a = \left(\frac{\omega_c}{\omega_p}\right)^{2L}$

Όπως εδώ για τα ω_p, ω_s θα είναι: $\omega_p' = \tan \frac{\omega_p}{2} = \tan 0.2\pi$ και

$$\omega_s' = \tan \frac{\omega_s}{2} = \tan 0.15\pi \rightarrow \frac{\omega_c}{\omega_p} = \frac{1}{\tan 0.2\pi} = 1.3765 \text{ και } \frac{\omega_c}{\omega_s} = \frac{1}{\tan 0.15\pi} = 1.96$$

Οπότε βρίσκουμε το δ_{max} και απ'τη σχέση $\omega_c = \frac{\omega_p}{\sqrt{\left(1 - \frac{\delta_{max}}{\omega_p}\right)^2 - 1}}$

βρίσκουμε το ω_c ($\delta_{max} = 0.3113$ και $\omega_c = 1.353$)

Έπεται, πηγαίνουμε στο αναλογικό ανωπερατό με την αλλαγή $s' = \frac{1}{s}$ και $\omega_c' = \frac{1}{\omega_c}$, άρα:

$H_a(s') = \dots$ και τέλος αντικαθιστώντας $s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ παίρνουμε

ψηφιακό ανωπερατό.



Άσκηση 6: Σχεδιάστε κατωπέρατο αναλογικό φίλτρο Butterworth τάξης $L=2$ με $\omega_p = 1\text{kHz}$, $\omega_s = 2\text{kHz}$ και $|W(0)|=1$ στη $j\omega$ διαβάση και $|W(j\omega)|=10$ στη $j\omega$ αποκωπή (7.1 άσκηση, σελ. 153 βιβλίο)

Ένα φίλτρο Butterworth έχει συνάρτηση μεταφοράς για $L=2$ τη εξής:

$$H_H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}$$

Επειδή όμως έχει καθοριστεί η τάξη L του φίλτρου ($L=2$) για να βρούμε τα ω_c και δ_{max} χρησιμοποιούμε τους παρακάτω τύπους:

Επιπλέον χρησιμοποιούμε τους παρακάτω τύπους:

$$(a-1)\delta_{max}^4 + 2(1-a)\omega_p \delta_{max}^3 + (\omega_s^2 - \omega_p^2)\delta_{max}^2 - 2\omega_s \omega_p \delta_{max} + \omega_s^2 \omega_p^2 = 0$$

όπου $a = \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^{2L}$ και $\omega_c = \frac{\omega_p}{\sqrt{\left(1 - \frac{\delta_{max}}{\omega_p}\right)^2 - 1}}$

Για $\omega_s = 2\text{kHz}$, $\omega_p = 1\text{kHz}$, $\omega_s = 10$, $\omega_p = 1$ έχουμε τελικά:

$\delta_{max} = 0.415$ και $\omega_c = 0.5381$ οπότε $H_H(s') = \frac{(0.5381)^2}{s'^2 + 0.759s' + 0.289}$



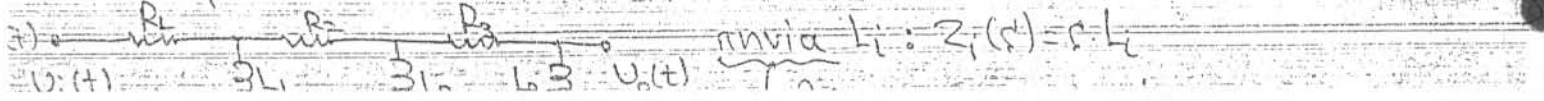
Άσκηση 7: Σχεδιάστε αναλογικό ανωπέρατο φίλτρο Butterworth τάξης $L=3$ και συχνότητας αποκωπής $\omega_c = \omega_p$. Προτείνετε αναλογικό κώδικα που είναι σε θέση να υλοποιήσει το φίλτρο αυτό.

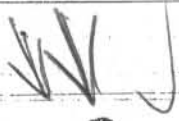
Αρχικά σχεδιάζω το κατωπέρατο αναλογικό φίλτρο και έπειτα το ανωπέρατο ($s' = \frac{1}{s}$). Για το κατωπέρατο τάξης $L=3$ θα είναι:

$$H_H(s') = \frac{(\omega_c')^3}{(s'+\omega_c')(s'^2 + s'\omega_c' + \omega_c'^2)}$$

όπου $\omega_c' = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{0.2\pi}$ Για το αναλογικό ανωπέρατο εφαρμόζω $s' = \frac{1}{s}$ και $\omega_c' = \frac{1}{\omega_c}$, οπότε: $H_A(s) = \frac{s^3}{(s+\omega_c)(s^2 + s\omega_c + \omega_c^2)}$

Το κώδικα υλοποιείται ως εξής: $L=3 \Rightarrow$ 3 φορές επανάληψη





Άσκηση 8: Σχεδιάστε ψηφιακό ανωπερατό φίλτρο Butterworth τάξης $L=3$ με συχνότητα αποκομής $\omega_c = \frac{\pi}{3}$. Υλοποιείστε τη συνάρτηση μεταφοράς που βρήκατε με χρήση του μικρότερου δυνατού αριθμού καθυσερητών. 4^η σειρά λύσεων

Αρχικά σχεδιάζω το κατωπερατό αναλογικό φίλτρο, μετά το ανωπερατό ($s' = \frac{1}{s}$) και τέλος το ψηφιακό με διακριτικό πεδίο ($s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$)

Για το κατωπερατό αναλογικό τάξης 3 θα είναι:

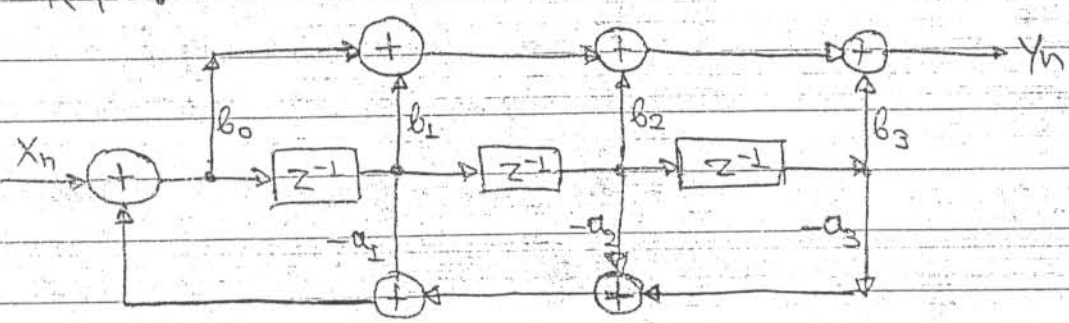
$H_c(s) = \frac{\omega_c^3}{(s+\omega_c)(s^2+s\omega_c+\omega_c^2)}$, όπου για το ω_c θα είναι: $\omega_c' = \tan^{-1} \sqrt{3} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\omega_c'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Οπότε μπαίναμε στο αναλογικό ανωπερατό με την αλλαγή $s' = \frac{1}{s}$ και $\omega_c' = \frac{1}{\omega_c}$, επομένως:

$H_a(s') = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\frac{1}{s'} + \sqrt{3})(\frac{1}{s'^2} + \frac{1}{s'}\sqrt{3} + 3)}$ Τέλος, όπου $s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ για να

παράμε το αντίστοιχο ψηφιακό. Οπότε θα είναι:

$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3}}$ το οποίο υλοποιείται όπως στο

παρακάτω σχήμα:



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΕΙΔΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΦΙΛΤΡΩΝ



①

Άσκηση 1: Αναλύστε κατά πόσο το γραμμικό σύστημα $y_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{T_s}$ προσεγγίζει τις χαρακτηριστικές του ιδανικού διακριτού. (Παράδειγμα 8.3, σελ. 165 βιβλίου)

Απ' τη θεωρία, ο ιδανικός διακριτός έχει απόκριση συχνότητας ίση με

$$D(e^{j\omega}) = j \cdot \frac{\omega}{T_s}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

Το γραμμικό σύστημα που προτείνεται για προσέγγιση του διακριτού είναι FIR μήκους $L=2$ και έχει συνάρτηση μεταφοράς που βρίσκεται μέσω του μετασχηματισμού z :

$$Y(z) = \frac{X(z) - z^{-1}X(z)}{T_s} \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{T_s}. \quad \text{Οπότε η}$$

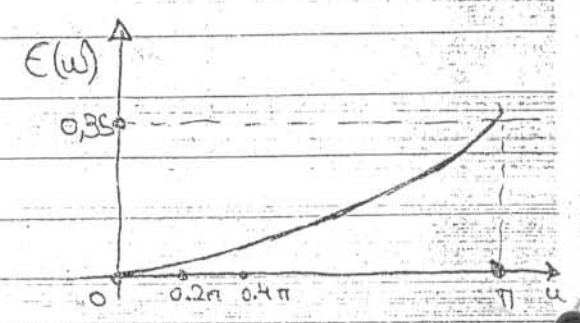
απόκριση συχνότητας του γραμμικού συστήματος θα είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{T_s} = e^{-j\omega/2} \cdot \frac{2j \sin \frac{\omega}{2}}{T_s}. \quad \text{Απ' το } e^{-j(\frac{1}{2}\omega)} \text{ συμπεραίνουμε}$$

ότι η φάση είναι γραμμική και μέγιστη ελάττωση καθυστέρησης της τάξης του μισού δείγματος σαν είσοδο με άλλα λόγια, αυτό που υλοποιούμε απ' την αρχική σχέση της y_n αντιστοιχεί σαν παράγωγο της χρονικής σαφούς $(n-0.5)T_s$ και όχι της (nT_s) , στο μέσο δηλαδή των διακριτών δειγματοληψίας $(n-1)T_s$ και nT_s όπου παίρνουμε τα δείγματα x_{n-1} , x_n .

Με παράβλεψη του όρου γραμμικής φάσης το σχετικό σφάλμα σταθμίσματος ιδανικού και προτεινόμενου διακριτού είναι:

$$\epsilon(\omega) = \left| \frac{D(e^{j\omega}) - \frac{2j \sin \frac{\omega}{2}}{T_s}}{D(e^{j\omega})} \right| = \left| 1 - \frac{2 \sin \frac{\omega}{2}}{\omega} \right|$$



Το μεγαλύτερο σφάλμα είναι στην $\omega = \pi$ (35%).



Άσκηση 2: Επιθυμείτε να συνδυάσουμε τον ιδανικό διαπεριστό με κατωπερατό φίλτρο συχνότητας αποκτομής ω_d .

α) Υπολογίστε τους βέλτιστους συντελεστές ενός FIR φίλτρου κατά τη έννοια του μέσου τετραγωνικού σφάλματος

β) Βρείτε το βέλτιστο FIR φίλτρο για $\omega_d = 0.6\pi$, $T_s = 1$ και για L με $L = 7, 11, 21$.

γ) Βρείτε τα βέλτιστα FIR φίλτρα του β) για παράδειγμα Hamming

α) Η ιδανική απόκριση συχνότητας του συστήματος θα είναι:

$$\bar{D}(e^{j\omega}) = j \cdot \frac{\omega}{T_s} \cdot D(e^{j\omega}) = \begin{cases} j \cdot \frac{\omega}{T_s}, & |\omega| \leq \omega_d \\ 0, & \omega_d < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \quad (\bar{D}(e^{j\omega}) = j \cdot D_i(e^{j\omega}))$$

Το φίλτρο που μας ενδιαφέρει είναι FIR γραμμικής φάσης με όρους κεντρικών απόκρισης που εμφανίζουν περίσσει σφαιρική χύρω απ' τον μηδενικό κεντρικό όρο:

$$b_N \cdot b_{N-1} \cdot b_{N-2} \cdot b_{N-3} \cdot \dots \cdot b_1 \cdot b_0 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_N \rightarrow \text{αν είναι } L = 2N + 1$$

Το φίλτρο αυτό θα έχει απόκριση συχνότητας:

$H(e^{j\omega}) = j \cdot e^{-jN\omega} \{ 2b_1 \sin\omega + 2b_2 \sin 2\omega + \dots + 2b_N \sin N\omega \}$ Ο όρος $e^{-jN\omega}$ αποτελεί γραμμική φάση και καθυστερεί την έξοδο κατά N χρονικές στιγμές ενώ με την $D_i(e^{j\omega}) = j \cdot (2b_1 \sin\omega + \dots + 2b_N \sin N\omega)$ θα προσεγγίσουμε την $\bar{D}(e^{j\omega})$. Οι βέλτιστοι συντελεστές b_n θα δίνονται απ' τη σχέση:

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d}^{\omega_d} \left(\frac{\omega}{T_s} \right) \cdot 1 \cdot \sin n\omega d\omega \quad \text{για } n=1, \dots, N \Rightarrow$$

$$b_n = -\frac{\omega_d \cos \omega_d}{\pi T_s \cdot n} + \frac{\sin(n\omega_d)}{\pi T_s n^2}, \quad n=1, \dots, N.$$

β) Αντικαθιστούμε $\omega_d = 0.6\pi$, $T_s = 1$ και $N = 3, 5, 10$ αντιστοίχα για $L = 7, 11, 21$

γ) Οι όροι b_n πολλαπλασιάζονται με τους όρους του παραδείγματος Hamming

$$\text{με } \omega_n = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi(n-N)}{2N+1}\right), \quad n=0, \dots, 2N$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: Ποσοτική Επεξεργασία

Άσκηση 1: Δίνονται οι παρακάτω συνδεσμολογίες:



Na δείξει ότι οι 2 συνδεσμολογίες είναι ίδιες

Λύση: (α) Θα είναι: $x_n = x_{nM}$ και $y_n = \sum_{i=0}^{L-1} h_i x_{n-i} = \sum_{i=0}^{L-1} h_i x_{(n-i)M}$

(β) Θα είναι: $y_n = w_{nM}$, $w_n = \sum_{i=0}^{L-1} h_i x_{n-iM}$ Τότε:

$$y_n = w_{nM} = \sum_{i=0}^{L-1} h_i x_{nM-iM} = \sum_{i=0}^{L-1} h_i x_{(n-i)M}$$

Άσκηση 2: Να δείξει ότι για τις 2 παραπάνω συνδεσμολογίες οι μετασχηματισμοί Φουριέ είναι ίδιοι.

Λύση: Γενικά είναι:

$x_n \rightarrow \downarrow M \rightarrow \bar{x}_n$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{M}k)})$$

και: $x_n \rightarrow \uparrow M \rightarrow \bar{x}_n$ } $\bar{X}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega M})$

Οπότε: (α) $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{M}k)})$

(β) $Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{M}k)}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{M}k)}) \cdot X(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{M}k)})$



②

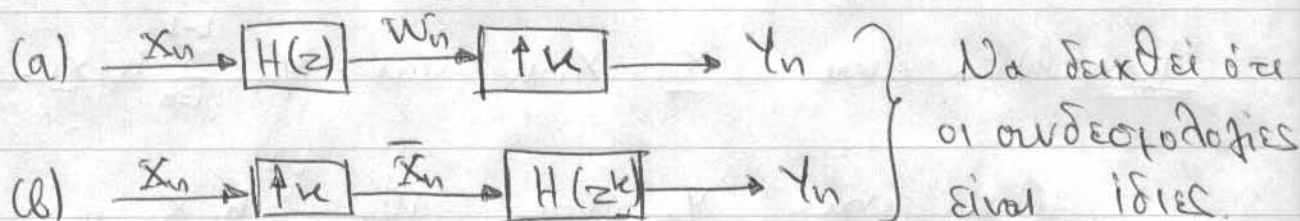
$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} H(e^{j\omega}) \cdot \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - \frac{2k\pi}{M})})$$

από το ίδιο

ότι: $W(z) = H(z^M) \cdot X(z) \Rightarrow W(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega M}) \cdot X(e^{j\omega})$

* $(H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega - 2k\pi)})) = H(e^{j\omega} \cdot e^{-j2k\pi}) = H(e^{j\omega})$ *

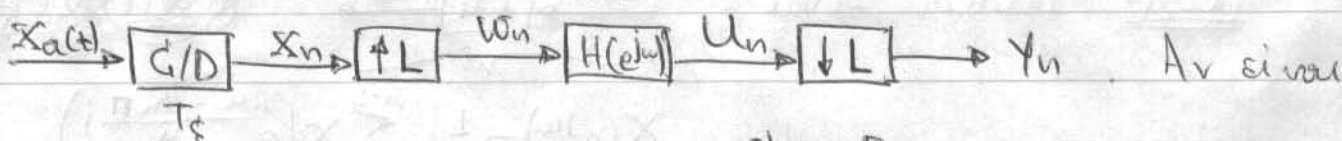
Άσκηση 3: Δίνονται οι παρακάτω συνδεσμολογίες:



Λύση: (a) $W_n = \sum_{i=0}^{L-1} h_i x_{n-i}$, $Y_n = W_{n/k} = \sum_{i=0}^{L-1} h_i x_{n/k-i}$

(b) Είναι: $Y_n = \sum_{i=0}^{L-1} h_i \bar{x}_{n-ik} = \sum_{i=0}^{L-1} h_i \cdot x_{\frac{n-ik}{k}} = \sum_{i=0}^{L-1} h_i x_{n/k-i}$

Άσκηση 4: Θεωρήστε το παρακάτω σύστημα:



$X_a(0) = \emptyset$, $|0| > \frac{\pi}{T_s}$ και $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{j\omega} & \omega > \frac{\pi}{L} \\ \emptyset & \frac{\pi}{L} < \omega \leq \pi \end{cases}$, να βρείτε

πώς συνδέεται η Y_n με την $X_a(t)$.

Λύση: Θα είναι: $X_n = X_a(nT_s)$, $W_n = X_{n/L} = X_a(\frac{nT_s}{L})$. Λόγω της μορφής του $H(e^{j\omega})$ θα είναι:

$$U_n = W(n-1) = \sum a^{(n-1) \cdot \frac{T_s}{L}} \quad \underline{\text{Τότε:}}$$

$$Y_n = U_n L = \sum a^{(nL-1) \cdot \frac{T_s}{L}} = \sum a^{(nT_s - \frac{T_s}{L})}$$



Άσκηση 5: Υπολογίστε τους μετασχηματισμούς z των πο-
δωρισμένων συνιστωσών του αιτιατού σήματος: $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$

Λύση: Για την ποδωρισμένη συνιστώσα θα είναι:

$$e_n^i = x_{nM+i}, \quad i=0, \dots, M-1 \quad \text{π.χ.} \quad x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

$$\text{για } M=2: e_n^0 = x_0, x_2, x_4, x_6$$

$$e_n^1 = x_1, x_3, x_5, x_7$$

$$\text{Θα είναι: } X(z) = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} \cdot E^i(z^M) \quad \text{κλασ έχει δοθεί: } X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$\frac{1}{X(z)}$ αντιστοίχος

$$\rightarrow a^n u(n) \quad \text{Οπότε θα είναι: } \underline{e_n^i = x_{nM+i} = a^{nM+i}} \quad \text{και}$$

$$\text{ζότε: } E^i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \cdot a^{kM+i} = a^i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \cdot a^{kM}$$

$$\text{Ζητάω τις } E^i(z^M) \Rightarrow E^i(z^M) = a^i \sum_{k=0}^{\infty} z^{-kM} \cdot a^{kM} = a^i \cdot$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (z^{-M} \cdot a^M)^k = \boxed{a^i \cdot \frac{1}{1-z^{-M} \cdot a^M}}$$



ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(Ερωτήματα)

①



4η σειρά ασκήσεων

SOS

Προβλημα 1: Έστω ότι έχουμε την άπειρη ακολουθία x_0, x_1, \dots που έδωσε να τη φιλτράρουμε με γ σταθερό φίλτρο.

- α) Αν το φίλτρο είναι FIR, ποιά η σχέση εισόδου/εξόδου και χρονικές αποκρίσεις για $n \geq L$ (L το μήκος της χρονικής απόκρισης).
- β) Αν στο παραπάνω φίλτρο εφαρμόσαμε μέθοδο επικάλυψης και αθροίσης, ποιά τα υπέρ για τον υπολογισμό της συνέλιξης σε σχέση με το α)
- γ) Αν το φίλτρο είναι IIR, ποιά η σχέση εισόδου/εξόδου στο πεδίο του χρόνου.
- δ) Στο γ) πέρασε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο επικάλυψης και αθροίσης για να υπολογίσουμε την έξοδο;

α) Η έξοδος είναι η συνέλιξη της εισόδου με την χρονική απόκριση:

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} \text{ και αφού η χρονική απόκριση έχει όρους από } h_0, \dots, h_{L-1} \text{ θα είναι:}$$

$$y_n = h_0 x_n + h_1 x_{n-1} + \dots + h_{L-1} x_{n-L+1}$$

β) Η μέθοδος επικάλυψης και αθροίσης υπολογίζει για κάθε παράδειγμα L δείγματα εισόδου L εξόδους με πολλαπλασιαστικά $L \log_2 L$. Δηλαδή ανά δείγμα εξόδου η πολ/τητα είναι $\log_2 L$. Η παραπάνω σχέση απαιτεί L πράξεις ανά δείγμα εξόδου, πολύ περισσότερες απ' της μεθόδου επικάλυψης και αθροίσης.

γ) Αν είναι το φίλτρο IIR τότε η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_K z^{-K}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_L z^{-L}} \text{ και η έξοδος: } y_n = -a_1 y_{n-1} - \dots - a_L y_{n-L} + b_0 x_n + \dots + b_K x_{n-K}$$

$$+ b_0 x_n + \dots + b_K x_{n-K}$$

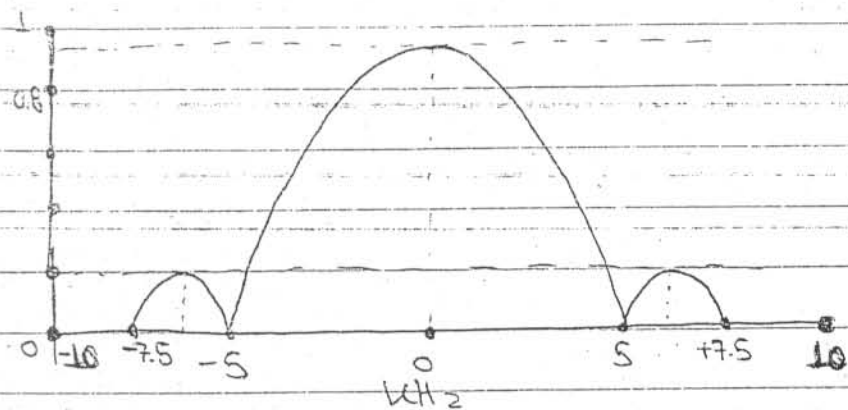
δ) Η μέθοδος ε. και α. χρησιμοποιεί L εισόδους για να υπολογίσει ουσιαστικά L εξόδους. Στο γ) για να υπολογιστεί μια έξοδος τη στιγμή n πρέπει να είναι γνωστές οι εξόδους των L προηγούμενων στιγμών.



4^η βελτίωση αβύσσων

2

Άσκηση 2: Δίνεται το παρακάτω συχνότητα περιεχόμενο ενός αναλογικού σήματος πεπερασμένου εύρους f_{max} .



α) Αν η πληροφορία είναι στο $[0, 5 \text{ kHz}]$ βρείτε τη μικρότερη συχνότητα δείγματοληψίας να μην αλλοιωθεί η πληροφορία.

β) Υπολογίστε τους συντελεστές φίλτρου FIR τύπου

$L=2N+1$ που να φιλτράρει το θόρυβο, με χρήση ζυγών και περιττών.

α) Αφού δε θέλουμε να αλλοιωθεί η πληροφορία, επιτρέπεται να έχουμε αναδίπλωση στις συχνότητες θορύβου. Άρα η μικρότερη συχνότητα δείγματοληψίας θα είναι αυτή για την οποία η αναδίπλωση γίνεται αριβώς στο όριο της συχνότητας περιοχής της πληροφορίας. Αφού η αναδίπλωση γίνει και κάτω απ' την $\frac{f_s}{2}$, δε πρέπει η $\frac{f_s}{2}$ να είναι στο f_c της συχνότητας περιοχής του θορύβου: $\frac{f_s}{2} = 5 + 7.5 \Rightarrow f_s = 12.5 \text{ kHz}$. (είναι: $f_m + f_m' < f_s < 2f_m'$, όπου $f_m = 5, f_m' = 7.5 \text{ kHz}$).

β) Στον ψηφιακό κόσμο η συχνότητα των 5 kHz του αναλογικού σήματος αντιστοιχεί στη συχνότητα αποκομής $\omega_d = \frac{1}{T_s} \cdot 2\pi = \frac{5}{12.5} \cdot 2\pi = 0.8\pi$.

Για $L=2N+1$ οι βέλτιστοι συντελεστές θα δίνονται απ' την παρακάτω σχέση:

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega}) \cdot e^{-(n-N)\omega} d\omega \Rightarrow h_n = \frac{\sin(n-N)\omega_d}{\pi(n-N)}, \quad \begin{matrix} n=0, \dots, 2N \\ n \neq N \end{matrix}$$

Για $n=N$: $h_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega}) d\omega = \frac{\omega_d}{\pi}$. Το τελικό φίλτρο με ζυγών

και περιττών θα έχει τότε συντελεστές: $h_n^o = h_n \cdot \omega_n$, όπου

$$\omega_n = 1 - \frac{|n-N|}{N+1}, \quad n=0, \dots, 2N$$