$\mu = E(x)$.
$\sigma^2 = E[(x-\mu)^2]$.

1. Υπολογίστε τη διασπορά και την ακολουθία αυτοσυσχέτισης μιας AR (*auto-regressive*) διαδικασίας τάξης *p*

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y(n-k) + w(n)$$

όπου $w(n)$ λευκός θόρυβος με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ_w^2 και a_k πραγματικοί συντελεστές.

Στο πεδίο των συχνοτήτων, η συνάρτηση μεταφοράς του all-pole IIR φίλτρου μπορεί να γραφεί ως εξής

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}$$

Αν θεωρήσουμε ότι το φίλτρο είναι ευσταθές, τότε διοχετεύοντας στην είσοδο λευκό θόρυβο με μέση τιμή μηδέν, στην έξοδο έχουμε μια στάσιμη διαδικασία με μέση τιμή επίσης μηδέν, δηλαδή

$$E\{y(n)\} = \bar{y} = 0 \quad //$$

Η διασπορά του σήματος y(n), εφόσον είναι μηδενικής μέσης τιμής θα δίνεται από τη σχέση

$$E\{(y(n) - \bar{y})^2\} = E\{(y(n))^2\} = r_y(0)$$

όπου $r_y(l)$ η ακολουθία αυτοσυσχέτισης του σήματος $y(n)$. Προφανώς, αν υπολογίσουμε τη συνάρτηση $r_y(l)$, μπορούμε να υπολογίσουμε και τη διασπορά σ_y^2. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση διαφορών με $y(n-l)$ και παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή έχουμε ότι

$$E\{y(n)y(n-l)\} = -\sum_{k=1}^{P} a_k E\{y(n-k)y(n-l)\} + E\{w(n)y(n-l)\}$$

ή

$$r_y(l) = -\sum_{k=1}^{p} a_k r_y(l-k) + \underbrace{E\{w(n)y(n-l)\}}_{r_{wy}(l)} \to 0$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή του $E\{w(n)y(n-l)\}$ κάνουμε τον εξής συλλογισμό.

Σύμφωνα με το AR μοντέλο που μας δίνεται, η τιμή y(n-l) εξαρτάται από την τιμή εισόδου *w(n-l)* και από προηγούμενες τιμές της εξόδου *y(n-l-1)*, *y(n-l-2)* … . Οι τιμές αυτές της εξόδου επηρεάζονται από τις τιμές της εισόδου *w(n-l-1)*, *w(n-l-2)* … κ.ο.κ. Δηλαδή, οποιαδήποτε τιμή της εξόδου *y(n)*, μπορούμε να πούμε ότι είναι συνάρτηση των τιμών της εισόδου, *w(n)* και έμμεσα, όλων των προηγούμενων τιμών *w(n-1)*, *w(n-2)*, … Συνεπώς, αφού το σήμα *w(n)* είναι λευκός θόρυβος και τα δείγματα μεταξύ τους είναι στατιστικά ανεξάρτητα, η τιμή του $E\{w(n)y(n-l)\}$, όταν $l \neq 0$, θα είναι ίση με μηδέν. Στην περίπτωση που $l = 0$, τότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E\{w(n)y(n)\} &= E\{w(n)(w(n) - a_1 y(n-1) - \ldots - a_p y(n-p))\} \\ &= E\{w(n)^2 - a_1 w(n)y(n-1) - \ldots - a_p w(n)y(n-p)\} \\ &= E\{w(n)^2\} \\ &= \sigma_w^2 \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t=0 \\ 0 & \text{αν } t \neq 0. \end{cases}$$

$$r_{wy}(l) = E\{w(n)y(n-l)\} = \sigma_w^2 \delta(l)$$

Επομένως, η ακολουθία αυτοσυσχέτισης θα δίνεται από τη σχέση

$$r_y(l) = -\sum_{k=1}^{p} a_k r_y(l-k) + \sigma_w^2 \delta(l)$$

και η τιμή της διασποράς θα είναι

$$\sigma_y^2 = r_y(0)$$

$$= -\sum_{k=1}^{p} a_k r_y(k) + \sigma_w^2$$

---

2 Υπολογίστε τη διασπορά και την ακολουθία αυτοσυσχέτισης μιας MA (*moving average*) διαδικασίας τάξης *q*

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q} b_k w(n-k)$$

όπου $w(n)$ λευκός θόρυβος με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ_w^2 και b_k πραγματικοί συντελεστές με $b_0=1$.

Στο πεδίο των συχνοτήτων, η συνάρτηση μεταφοράς του all-zero FIR φίλτρου μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$H(z) = \sum_{\kappa=0}^{q} b_k z^{-k}$$

Είναι γνωστό ότι μια MA διαδικασία προκύπτει αν φιλτράρουμε με ένα FIR φίλτρο ένα σήμα λευκού θορύβου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση επειδή ο θόρυβος είναι μέσης τιμής μηδέν, έπεται ότι και η έξοδος θα έχει μέση τιμή μηδέν δηλαδή

$$E\{y(n)\} = \bar{y} = 0$$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η διασπορά του σήματος εξόδου θα δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_y^2 = E\{(y(n) - \bar{y})^2\} = E\{(y(n))^2\} = r_y(0)$$

Στην περίπτωση του MA μοντέλου, μπορούμε βέβαια να υπολογίσουμε και κατευθείαν τη διασπορά αντικαθιστώντας το *y(n)*, δηλαδή

$$\sigma_y^2 = E\{(w(n) + b_1 w(n-1) + \ldots + b_q w(n-q))^2\}$$

Επειδή το σήμα w(n) είναι λευκός θόρυβος, όλα τα μερικά γινόμενα από το παραπάνω ανάπτυγμα θα είναι μηδέν, οπότε η σχέση γράφεται

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= E\{w(n)^2 + b_1 w(n-1)^2 + \ldots + b_q w(n-q)^2\} = \\ &= E\{w(n)^2\} + b_1^2 E\{w(n-1)^2\} + \ldots + b_q^2 E\{w(n-q)^2\} = \\ &= \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q} b_k^2\end{aligned}$$

Θεωρώντας τη γενική περίπτωση, αυτό που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι το $E\{y(n)y(n-l)\}$. Προφανώς, τα *y(n)* και *y(n-l)* είναι οι έξοδοι του συστήματος με διαφορά *l* χρονικές στιγμές. Οποιαδήποτε έξοδος *y(n)* του MA φίλτρου, εξαρτάται από τις τιμές της εισόδου *w(n-q)* ως *w(n)*. Γίνεται φανερό ότι αν το *l>q* τότε τα *y(n)* και *y(n-l)* δεν εξαρτώνται από κοινά δείγματα της εισόδου και επομένως θα είναι ασυσχέτιστά. Στην περίπτωση όμως που *l≤q*, τότε τα *y(n)* και *y(n-l)* είναι συσχετισμένα. Συγκεκριμένα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}y(n) &= w(n) + b_1 w(n-1) + \ldots + b_q w(n-q) \\ y(n-l) &= w(n-l) + b_1 w(n-l-1) + \ldots + b_q w(n-l-q)\end{aligned}$$

Αν $l \le q$ τότε για παράδειγμα, το $w(n-l)$ που επηρεάζει την τιμή του $y(n-l)$, θα βρίσκεται σίγουρα μεταξύ των $w(n)...w(n-q)$ που επηρεάζουν την τιμή του $y(n)$. Συνεπώς, τα κοινά δείγματα της εισόδου που επηρεάζουν και τις δύο εξόδους θα είναι τα $w(n-l)$, $w(n-l-1),...w(n-q)$. Πολλαπλασιάζοντας τις δύο σχέσεις με $y(n-l)$ και παίρνοντας την ~~αναμενόμενη~~ r-ζυμ η τιμή, έχουμε ότι

$$r_y(l) = E\{y(n)y(n-l)\} = \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-|l|} b_{k+|l|} b_k$$

από την οποία μπορούμε να πάρουμε και την τιμή της διασποράς για $l = 0$

---

3 Αποδείξτε ότι στην περίπτωση που το σήμα πληροφορίας κι ο θόρυβος είναι ασυσχέτιστα και δεν έχουν επικαλυπτόμενες συχνοτικές ζώνες (στην πυκνότητα φάσματος), το μη αιτιατό φίλτρο Wiener έχει απόκριση συχνότητας που είναι της κλασικής μορφής *0-1*.

Γνωρίζουμε ότι το μη αιτιατό φίλτρο Wiener δίνεται από τη σχέση

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\Phi_{xs}(e^{j\omega})}{\Phi_x(e^{j\omega})}$$

Αν γράψουμε το σήμα που παρατηρούμε *xn*, ως άθροισμα του επιθυμητού σήματος *sn* και του θορύβου *wn*

$$x_n = s_n + w_n$$

όπου τα σήματα *sn*, *wn* είναι ασυσχέτιστα, τότε

$$r_{xs}(l) = E\{x_n s_{n-l}\} = E\{(s_n + w_n)s_{n-l}\} = E\{s_n s_{n-l}\} + \cancel{E\{w_n s_{n-l}\}} = r_s(l)$$

0.

και

$$
\begin{aligned}
r_x(l) &= E\{x_n x_{n-l}\} = E\{(s_n + w_n)(s_{n-l} + w_{n-l})\} \\
&= E\{s_n s_{n-l}\} + E\{w_n w_{n-l}\} \\
&= r_s(l) + r_w(l)
\end{aligned}
$$

Επομένως

$$\Phi_{xs}(e^{j\omega}) = F\{r_{xs}(l)\} = F\{r_s(l)\} = \Phi_s(e^{j\omega})$$

και

$$\Phi_x(e^{j\omega}) = F\{r_x(l)\} = F\{r_s(l)\} + F\{r_w(l)\} = \Phi_s(e^{j\omega}) + \Phi_w(e^{j\omega})$$

δηλαδή το φίλτρο Wiener γράφεται

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\Phi_s(e^{j\omega})}{\Phi_x(e^{j\omega}) + \Phi_w(e^{j\omega})}$$

Αν υπολογίσουμε την πυκνότητα φάσματος ισχύος της εξόδου, τότε

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\hat{s}}(e^{j\omega}) &= \left(H(e^{j\omega})\right)^2 \Phi_x(e^{j\omega}) = \\
&= \left(\frac{\Phi_s(e^{j\omega})}{\Phi_s(e^{j\omega}) + \Phi_w(e^{j\omega})}\right)^2 \Phi_x(e^{j\omega})
\end{aligned}
$$

Στην περίπτωση λοιπόν που το σήμα πληροφορίας και ο θόρυβος δεν έχουν επικαλυπτόμενες συχνοτικές ζώνες, έπεται ότι για οποιαδήποτε συχνότητα, κάποιο από τα θα είναι ίσο με μηδέν (ή και τα δύο).

Αν κάποια συχνότητα ω_w ανήκει στις συχνότητες του θορύβου, τότε

$$\Phi_s(e^{j\omega_w}) = 0$$

όποτε η πυκνότητα φάσματος ισχύος της εξόδου θα είναι κι αυτή ίση με 0. Αν κάποια συχνότητα ω_s ανήκει στις συχνότητες του σήματος πληροφορίας, τότε

$$\Phi_w(e^{j\omega_s}) = 0$$

όποτε η πυκνότητα φάσματος ισχύος της εξόδου $\Phi_{\hat{s}}(e^{j\omega_s})$ θα είναι ίση με $\Phi_x(e^{j\omega_s}) = \Phi_s(e^{j\omega_s})$. Δηλαδή για τις συχνότητες του σήματος πληροφορίας, το φίλτρο θα συμπεριφέρεται σαν ένα φίλτρο διάβασης, ενώ για τις συχνότητες του θορύβου σαν ένα φίλτρο αποκοπής.

4

Θεωρούμε την AR(1) διαδικασία $x(n)=ax(n-1)+z(n)$ με $|a|<1$ και $z(n)$ λευκό θόρυβο μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς σ^2. Βρείτε το βέλτιστο, με την έννοια του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, φίλτρο που εκτιμά την τιμή της χρονοσειράς τη χρονική στιγμή n, χρησιμοποιώντας τις τιμές της, τις χρονικές στιγμές $n-1$ και $n+1$.

Θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε την ζητούμενη τιμή χρησιμοποιώντας ένα γραμμικό εκτιμητή της μορφής

$$\boxed{\hat{x}(n) = b_2 x(n+1) + b_1 x(n-1)}$$

και με βάση τη *Risk-function*

$$R = E[(x(n) - \hat{x}(n))^2]$$

αφού ζητούμε βέλτιστη εκτίμηση με την έννοια του μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Ζητούμε δηλαδή τους συντελεστές b_1, b_2 έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η συνάρτηση R. Άρα θέλουμε την μερική παράγωγο της R, ως προς b_i, να είναι 0. Συνεπώς προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial R}{\partial b_1} = 0 \Leftrightarrow E[(x(n) - b_1 x(n-1) - b_2 x(n+1))x(n-1)] = 0 \qquad (4.1)$$

$$\frac{\partial R}{\partial b_2} = 0 \Leftrightarrow E[(x(n) - b_1 x(n-1) - b_2 x(n+1))x(n+1)] = 0 \qquad (4.2)$$

οπότε έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(2) \\ R_x(2) & R_x(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x(1) \\ R_x(1) \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x(0) \cdot b_1 + R_x(2) b_2 = R_x(1) \\ R_x(2) b_1 + R_x(0) b_2 = R_x(1) \end{array} \right.$$

Για την επίλυση του συστήματος, πρέπει προφανώς να υπολογίσουμε τις τιμές $R_x(0)$, $R_x(1)$, $R_x(2)$. Η μέση τιμή της διαδικασίας $x(n)$ είναι ίση με 0, αφού

$$E\{x(n)\}=\alpha E\{x(n-1)\}+E\{z(n)\} \Leftrightarrow$$

$$m_x=\alpha m_x+m_z$$

και εφόσον η $z(n)$ είναι λευκός θόρυβος με μέση τιμή 0 και $|\alpha|<1$, τότε $m_x=0$. Για να υπολογίσουμε τα $R_x(0)$, $R_x(1)$, $R_x(2)$, πρέπει να υπολογίσουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $x(n)$. Έτσι λοιπόν, για $k=0$ έχουμε

$$R_x(0)=E\{x^2(n)\}=E\{(\alpha x(n-1)+z(n))^2\}=\alpha^2E\{x^2(n-1)\}+E\{z^2(n)\}+2\alpha E\{x(n-1)z(n)\} \Leftrightarrow$$

$$R_x(0)=\alpha^2 R_x(0)+\sigma_z^2+2\alpha E\{x(n-1)z(n)\} \qquad (4.3)$$

Από την εξίσωση διαφορών, προκύπτει ότι η τιμή της $x(n-1)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές $z(n-1), z(n-2)\ldots$, χωρίς να εξαρτάται από την τιμή $z(n)$. Επίσης, λόγω της λευκότητας του θορύβου, η τιμή του $z(n)$ είναι ασυσχέτιστη με τα $z(n-1), z(n-2), \ldots$ Άρα, και η τιμή $x(n-1)$ θα είναι ασυσχέτιστη με την $z(n)$. Δηλαδή,

$E\{x(n-1).z(n)\}-E(x(n-1)).E(z(n))=0$

$$\Rightarrow E\{x(n-1)z(n)\}=E\{x(n-1)\}E\{z(n)\}=m_x\, m_z=0^1 \text{ (βλ. στο τέλος)}$$

Έτσι, η (4.3) γίνεται

$$R_x(0)=\frac{\sigma_z^2}{1-a^2}$$

Για $\kappa=1$, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι

$$R_x(1)=E\{x(n)x(n+1)\}=E\{x(n)[\alpha x(n)+z(n+1)]\}=\alpha R_x(0)=\alpha\frac{\sigma_z^2}{1-a^2}$$

και αναγωγικά καταλήγουμε ότι

$$R_x(k)=\alpha^k R_x(0),$$

οπότε

$$R_x(2)= a^2 \frac{\sigma_z^2}{1-a^2}.$$

Αφού γνωρίζουμε πλέον τις τιμές $R_x(0)$, $R_x(1)$, $R_x(2)$, μπορούμε να επιλύσουμε το σύστημα. Με αφαίρεση της πρώτης σειράς από τη δεύτερη παίρνουμε $b1=b2$ και αντικαθιστώντας σε μια από τις δύο, έχουμε

$$b_1 = b_2 = \frac{a}{1+a^2}.$$

Συνεπώς, ο γραμμικός εκτιμητής που προκύπτει είναι ο εξής:

$$\hat{x}(n) = \frac{a}{1+a^2}x(n+1) + \frac{a}{1+a^2}x(n-1)$$

και το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα θα είναι

$$E_{min}=E\{(\hat{x}(n)-x(n))^2\}.$$

Κάνοντας τις πράξεις στην παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι

$$E_{min}=R_x(0)\frac{1-a^4}{(1+a^2)^2} = \frac{\sigma_z^2}{1-a^2}\frac{(1-a^2)(1+a^2)}{(1+a^2)^2} = \frac{\sigma_z^2}{1+a^2}$$

Δηλαδή

$$E_{\min} = \frac{\sigma_z^2}{1+a^2}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι το τετραγωνικό σφάλμα που προκύπτει είναι συνάρτηση της παραμέτρου a, και ελαχιστοποιείται ακόμα περισσότερο, όσο το a τείνει στη μονάδα, αφού $|a|<1$.

Το παραπάνω συμπέρασμα δικαιολογείται αν δούμε την διαδικασία ως ένα IIR φίλτρο του οποίου η είσοδος είναι ο λευκός θόρυβος. Η κρουστική απόκριση αυτού του φίλτρου είναι η $h(n)=\{1,a,a^2,a^3,....\}$. Συνεπώς, όσο το a αυξάνει, αυξάνει η «μνήμη» του φίλτρου και επομένως αυξάνει και η συσχέτιση που έχουν τα διαδοχικά δείγματα μεταξύ τους.

---

[1] Προσοχή!

Όταν δύο σήματα (τυχαίες μεταβλητές) είναι **ασυσχέτιστα**, σημαίνει ότι η ακολουθία συνδιασποράς (cross-covariance) είναι ίση με 0 κι όχι η ακολουθία ετεροσυσχέτισης (cross-correlation). Δηλαδή έστω δύο σήματα $x_n(\theta)$, $y_n(\theta)$. Τότε αν αυτά είναι ασυσχέτιστα (uncorrelated) σημαίνει ότι

$$E\big((x_n - m_x)(y_n - m_y)\big) = 0.$$

όπου m_x , m_y η μέση τιμή του x_n και y_n αντίστοιχα. Γνωρίζουμε όμως ότι

$$E\big((x_n - m_x)(y_n - m_y)\big) = E(x_n y_n) - E(x_n)E(y_n) = E(x_n y_n) - m_x m_y$$

Αν λοιπόν είναι ασυσχέτιστα το οποίο θα σημαίνει ότι

$$E(x_n y_n) - m_x m_y = 0 \;\Rightarrow\; E(x_n y_n) = E(x_n)E(y_n) = m_x m_y$$

και επιπλέον, έστω ένα από τα δύο έχει μέση τιμή 0, έπεται ότι και

$$E(x_n y_n) = 0$$

Αν η ακολουθία ετερο-συσχέτισης δύο σημάτων είναι ίση με 0, δηλαδή

$$E(x_n y_n) = 0$$

τότε τα σήματα λέγονται **ορθογώνια**.

Αν δύο σήματα είναι **ανεξάρτητα**, τότε σημαίνει ότι

$$f_{xy}(x,y) = f_x(x) f_y(y) \qquad (1)$$

όπου f_x, f_y, οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των x, y *και* f_{xy} η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των x, y. Από τη σχέση αυτή μπορούμε να πάρουμε ότι

$$E(x_n y_n) = E(x_n)E(y_n). \qquad (2)$$

~~Προφανώς, όταν είναι~~ ανεξάρτητα, από την παραπάνω σχέση κι επειδή ισχύει ότι

$$E\big((x_n - m_x)(y_n - m_y)\big) = E(x_n y_n) - E(x_n)E(y_n)$$

προκύπτει ότι

$$E\big((x_n - m_x)(y_n - m_y)\big) = 0$$

δηλαδή προκύπτει ότι θα είναι και ασυσχέτιστα. Δεν συμβαίνει όμως το αντίθετο, δηλαδή αν είναι ασυσχέτιστα, ΔΕΝ σημαίνει ότι είναι και ανεξάρτητα. (Αν είναι ασυσχέτιστα, τότε ισχύει η (2) αλλά δεν μπορούμε από τη (2) να πάμε ΠΑΝΤΑ στην (1), οπότε να ισχυριστούμε ότι είναι και ανεξάρτητα)

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ

[redacted]

Βέλτιστα Φίλτρα Wiener

Άσκηση Γ1. Το σήμα $x(n)$ είναι το άθροισμα του επιθυμητού σήματος $s(n)$ και του θορύβου $w(n)$. Τα σήματα $s(n)$, $w(n)$ έχουνε μέση τιμή ίση με μηδέν και είνα ασυσχέτιστα. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης είναι:

$$R_{ss}(n) = \sigma_s^2 \alpha^{|n|}, \quad R_{ww}(n) = \sigma_w^2 \delta(n)$$

όπου $|\alpha < 1$ και θόρυβος, όπως παρατηρούμε, είναι λευκός.

α) Προσδιορίστε το βέλτιστο μη αιτιατό φίλτρο Wiener.

β) Προσδιορίστε το βέλτιστο αιτιατό FIR φίλτρο Wiener μήκους N.

Λύση. Για την επίλυση των δύο ερωτημάτων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απ ευθείας τα αποτελέσματα των σημειώσεων. Συγκεκριμένα για μεν το α) ερώτημα το βέλτιστο μη αιτιατό φίλτρο Wiener ξέρουμε ότι έχει απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \frac{S_{xs}(e^{j\omega})}{S_{xx}(e^{j\omega})} = \frac{S_{ss}(e^{j\omega})}{S_{ss}(e^{j\omega}) + S_{ww}(e^{j\omega})}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή τα δύο σήματα $s(n)$, $w(n)$ είναι ασυσχέτιστα. Πρέπει επομένως να υπολογίσουμε τις δύο συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος. Γνωρίζουμε ότι $S_{ss}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}(R_{ss}(n))$ και $S_{ww}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}(R_{ww}(n))$. Επομένως

$$\begin{aligned} S_{ss}(e^{j\omega}) &= \sigma_s^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{|n|} e^{-jn\omega} = \sigma_s^2 \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^{-n} e^{-jn\omega} + \sigma_s^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-jn\omega} \\ &= \sigma_s^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n e^{jn\omega} + \sigma_s^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-jn\omega} = \sigma_s^2 \frac{\alpha e^{j\omega}}{1-\alpha e^{j\omega}} + \sigma_s^2 \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} \\ &= \sigma_s^2 \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega)} \end{aligned}$$

$H_F(\delta) = 1$

Οσον αφορά το θόρυβο, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $S_{ww}(e^{j\omega}) = \sigma_w^2$, εκατί επομένως το βέλτιστο φίλτρο γίνεται

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_s^2(1-\alpha^2)}{\sigma_s^2(1-\alpha^2) + \sigma_w^2(1+\alpha^2 - 2\alpha\cos(\omega))}$$

Για το δεύτερο ερώτημα έχουμε από τις σημειώσεις ότι η λύση δίνεται με το παρακάτω Toeplitz σύστημα εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} R_{xs}(0) \\ R_{xs}(1) \\ \vdots \\ R_{xs}(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \cdots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(N-1) & \cdots & R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix}$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε $R_{xs}(n) = R_{ss}(n) = \sigma_s^2 \alpha^{|n|}$ και $R_{xx}(n) = R_{ss}(n) + R_{ww}(n)$, επομένως $R_{xx}(0) = \sigma_s^2 + \sigma_w^2$, $R_{xx}(n) = \sigma_s^2 \alpha^{|n|}$ για $n \neq 0$. Το σύστημα δηλαδή πέρνει τη μορφή

$$\sigma_s^2 \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha^{N-1} \end{bmatrix} = \left(\sigma_s^2 \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{N-1} \\ \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha^{N-1} & \cdots & \alpha & 1 \end{bmatrix} + \sigma_w^2 I_N \right) \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix}$$

όπου I_N είναι ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων $N \times N$.

Άσκηση Γ2. Έστω τα σήματα $x(n), s(n), w(n)$ όπως στην Άσκηση Γ1 με $\sigma_s^2 = \sigma_w^2 = 1$ και $\alpha = 0.8$. Σχεδιάστε ένα αιτιατό φίλτρο **γραμμικής φάσης**, μήκους 3, το οποίο να επεξεργάζεται το σήμα $x(n)$ και να εκτιμά το $s(n)$ βέλτιστα κατά την έννοια του μέσου τετραγωνικού σφάλματος.

Λύση. Αφού το φίλτρο είναι γραμμικής φάσης οι συντελεστές του είναι συμμετρικοί της μορφής h_1, h_0, h_1. Η εκτίμηση που θα δημιουργεί το φίλτρο θα είναι $\hat{s}(n) = h_1 x(n) + h_0 x(n-1) + h_1 x(n-2)$. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα γράφεται

$$\mathcal{E}(h_0, h_1) = E\Big\{\Big(s(n) - h_1 x(n) - h_0 x(n-1) - h_1 x(n-2)\Big)^2\Big\}$$

Παίρνοντας τις μερικές παραγώγους ως προς h_0, h_1 και εξισώνοντάς τες με μηδέν προκύπτουν για μεν τη μερική ως προς h_0

$$E\Big\{\Big(s(n) - h_1 x(n) - h_0 x(n-1) - h_1 x(n-2)\Big) x(n-1)\Big\} = 0$$

για δε τη μερική ως προς h_1

$$E\Big\{\Big(s(n) - h_1 x(n) - h_0 x(n-1) - h_1 x(n-2)\Big)\Big(x(n) + x(n-2)\Big)\Big\} = 0$$

Από όπου έχουμε

$$\begin{aligned} R_{sx}(-1) &= R_{xx}(0) h_0 + 2 R_{xx}(1) h_1 \\ R_{sx}(0) + R_{sx}(-2) &= 2 R_{xx}(1) h_0 + 2(R_{xx}(0) + R_{xx}(2)) h_1 \end{aligned}$$

Αφού $s(n), w(n)$ είναι ασυσχέτιστα συμπεραίνουμε ότι $R_{sx}(n) = R_{ss}(n)$ και $R_{xx}(n) = R_{ss}(n) + R_{ww}(n)$. Το σύστημα που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε είναι

$$\sigma_s^2 \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 + \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 + \sigma_w^2 & 2\sigma_s^2 \alpha \\ 2\sigma_s^2 \alpha & 2(\sigma_s^2 + \sigma_w^2 + \sigma_s^2 \alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix}$$

και η λύση του συστήματος να αντικαταστήσουμε τις αριθμητικές τιμές των παραμέτρων είναι $h_0 = 0.5882$, $h_1 = 0.1324$.

Άσκηση Γ3. Έστω τα σήματα $x(n), s(n), w(n)$ όπως στην Άσκηση Γ1 με $\sigma_s^2 = \sigma_w^2 = 1$ και $\alpha = 0.8$. Σχεδιάστε ένα αιτιατό φίλτρο, μήκους 3, το οποίο να επεξεργάζεται το σήμα $x(n)$ και να εκτιμά το $s(n)$ βέλτιστα κατά την έννοια του μέσου τετραγωνικού σφάλματος αλλά συγχρόνως να έχει τη δυνατότητα να εξαφανίζει τελείως τη συχνότητα $\omega_0 = .2\pi$.

Λύση. Έστω οι συντελεστές του φίλτρου ότι είναι h_0, h_1, h_2. Η απόκριση συχνότητας είναι ως γνωστόν

$$H(e^{j\omega}) = h_0 + h_1 e^{-j\omega} + h_2 e^{-j2\omega}$$

$e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$

και επιθυμούμε για $\omega = 0.2\pi$ η απόκριση αυτή να είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει οτι θα πρέπει συγχρόνως και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος να είναι μηδέν. Από τις δύο αυτές εξισώσεις, εκφράζοντας τα h_1, h_2 συναρτήσει του h_0 προκύπτει $h_2 = h_0$ και $h_1 = -2\cos(\omega_0)h_0 = -1.618h_0$.

Το πρόβλημα τώρα που καλούμαστε να λύσουμε είναι να προσδιορίσουμε με βέλτιστο τρόπο την παράμετρο h_0. Η εκτίμηση που κάνει το φίλτρο μας είναι

$$\hat{s}(n) = h_0 x(n) + h_1 x(n-1) + h_2 x(n-2) = h_0(x(n) - 1.618x(n-1) + x(n-2))$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα γίνεται

$$\mathcal{E}(h_0) = E\{[s(n) - h_0(x(n) - 1.618x(n-1) + x(n-2))]^2\}$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον μοναδικό άγνωστο και εξισώνοντας με μηδέν σχηματίζεται η εξίσωση

$$\mathrm{E}\{[s(n) - h_0(x(n) - 1.618x(n-1) + x(n-2))](x(n) - 1.618x(n-1) + x(n-2))\} = 0$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$h_0 = \frac{R_{sx}(0) - 1.618R_{sx}(-1) + R_{sx}(-2)}{4.6179R_{xx}(0) - 3.236R_{xx}(1) + R_{xx}(2)} = 0.0474$$

Επομένως $h_0 = h_2 = 0.0474$ και $h_1 = -1.618h_0 = -0.0767$.