ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Σχεδιάστε αναλογικό ανωπερατό Butterworth τάξης 3 και συχνότητας αποκοπής Ωc. Προτείνετε κύκλωμα υλοποίησης του. Μετατροπή του αναλογικού σε ψηφιακό με χρήση διγραμμικού μετασχηματισμού.

Ένα Butterworth έχει γενικό τύπο $H(s)=\dfrac{\Omega_c^L}{(s-s_1)\ldots(s-s_L)}$. $s_i=e^{j\left(\frac{1}{2}+\frac{2n+1}{2L}\right)\pi}$ n=0…L-1. Για μετατροπή σε ανωπερατό θέτουμε **s'=1/s και Ω'c=1/Ωc**. Γράφουμε τον αρχικό τύπο με s' και Ω'c και μετά εκτελουμε αντικαταστάσεις. Για μετατροπή σε ψηφιακό με χρήση διγραμμικού έχουμε αντικατάσταση του s με $\boxed{\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$. Η συχνότητα συνδέεται με τη σχέση **Ω = tan(ω/2)**. Το κύκλωμα του αναλογικού σχεδιάζεται με χρήση αντιστάσεων και πηνίων, με συνδεσμολογία RL.

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός αιτιατού IIR δίνεται από τη σχέση $H(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}$. Με μέθοδο αμετάβλητης κρουστικής να γίνει ψηφιακό. Είναι ευσταθές;

Από την $H(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}$ έχουμε $H(s)=\dfrac{s+1}{(s+2)(s+3)}$ και οι ρίζες s_0= -2 και s_1= -3. Με παραγοντοποίηση έχουμε $H(s)=\dfrac{A}{s-s_0}+\dfrac{B}{s-s_1}$ απ'όπου βρίσκουμε A = -1 και B = 2. Με αντίστροφο **M.L.** βρίσκουμε την κρουστική απόκριση $h(t)=(Ae^{s_0t}+Be^{s_1t})*u(t)$. Με δειγματοληψία της h(t) ανά $\mathbf{T_s}$ έχουμε $h_n=Ae^{s_0nT_s}+Be^{s_1nT_s}$. Με μετασχηματισμό Z έχουμε $H(Z)=\dfrac{A}{1-z^{-1}e^{S_0T_s}}+\dfrac{B}{1-z^{-1}e^{S_1T_s}}$. Η αναλογία αναλογικών και ψηφιακών συχνοτήτων είναι **Ω = ω / T_s**. Μπορούμε να επιλέξουμε όμως **T_s = 1**. Οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι $z_k = e^{Sk}$. Επειδή $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$, αν $\sigma_k < 0$ τότε $|z_k| < 1$, άρα το φίλτρο είναι ευσταθές.

Ένα αναλογικό σήμα X(t) έχει συγκεντρωμένη την ενέργειά του στη συχνοτική ζώνη [8 10] KHz. Βρείτε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας, η οποία επιτρέπει την ακριβή ανακατασκευή του.

Σύμφωνα με το Γενικό Θεώρημα Δειγματοληψίας, ένα σήμα χ(τ) συνεχούς χρόνου που περιέχει συχνότητες στο διάστημα [f_{m1} f_{m2}] μπορεί να ανακατασκευαστεί ακριβώς από τα δείγματα $X_n = x_a(nT_s)$, εαν η συχνότητα δειγματοληψίας ικανοποιεί $f_s \in \left[\dfrac{2f_{m2}}{n_0+1}\ \dfrac{2f_{m1}}{n_0}\right] \cup \ldots \cup \left[\dfrac{2f_{m2}}{2}\ \dfrac{2f_{m1}}{1}\right] \cup [2f_{m2}\ \infty]$, με $n_0=\left[\dfrac{f_{m1}}{f_{m2}-f_{m1}}\right]$

Υποθέστε ότι γνωρίζετε DFT του σήματος χ[n] = {1,-2,-1,5,0,0}. Χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες του DFT βρείτε σε ποιο διακριτού χρόνου σήμα αντιστοιχεί ο DFT $e^{-j4k\pi/3}X[k]$

Από την ιδιότητα κυκλικής μετατόπισης στο χρόνο (ολίσθησης) γνωρίζουμε ότι αν η πεπερασμένη ακολουθία x_n έχει μήκος L τότε : $\boxed{x_{<n-n0>L} \leftrightarrow e^{-j2k\pi n_0/L}X[k]}$. Εδώ έχουμε L = 6, άρα n_0 = 4. Άρα το σήμα διακριτού χρόνου θα είναι η ακολουθία {-1,5,0,0,1,-2}.

Βρείτε την κρουστική απόκριση ενός FIR φίλτρου γραμμικής φάσης και μήκους 5, που προσεγγίζει βέλτιστα με την min-max έννοια το παρακάτω φίλτρο εγκοπής. ΔΕΣ ΤΟ!!!

$D(e^{j\omega})=\begin{cases}1, [0-0.45\pi]\cup[0.55\pi-\pi]\\ 0, 0.5\pi\end{cases}$ **Ποια η τιμή μέγιστου σφάλματος;**

Αποδείξτε ότι ορίζοντας κατάλληλα την ιδανική απόκριση συχνότητας στις περιοχές μετάβασης οι βέλτιστες λύσεις απ'τη μέθοδο ζωνών αδιαφορίας και ελαχίστων τετραγώνων ταυτίζονται.

16

α) Πρόκειται για πραγματική συνάρτηση η D(), άρα θα την προσεγγίσουμε με ένα πραγματικό συμμετρικό FIR τάξης 5. Η κρουστική απόκριση έχει συντελεστές $[h_0\ h_1\ h_2\ h_3\ h_4]$, με $h_0 = h_4 = a_2$, $h_1 = h_3 = a_1$ και $h_2 = a_0$. Άρα $R_r() = a_0 + 2a_1*\cos(\omega) + 2a_2*\cos(2\omega)$. Χρειαζόμαστε 4 σημεία για να βρούμε τους συντελεστές και δ_{max}. Όμως έχουμε τις εξής ιδιότητες:

1. $R(0.5\pi) = 0$
2. $R'(0.5\pi) = 0$

Άρα από την 1 έχουμε : $0 = a_0 + 2a_1*\cos(0.5\pi) + 2a_2*\cos(\pi) \Rightarrow 0 = a_0 - 2a_2 \Rightarrow a_0 = 2a_2$

Από την 2 έχουμε ότι : $0 = -2a_1*\sin(0.5\pi) - 4a_2*\sin(\pi) \Rightarrow -2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

Άρα $R(\omega) = 2a_2 + 2a_2*\cos(2\omega) = 4a_2*\cos^2\omega$ και $\varepsilon(\omega) = 1 - R(\omega) = 1 - 4a_2*\cos^2\omega$

Με παραγώγιση της ε(ω) και παρατήρηση ης μονοτονίας έχουμε ότι η ε(ω) είναι γνησίως φθίνουσα από 0-0.45π και γνησίως αύξουσα από 0.55π – π. Χρειαζόμαστε 2 σημεία οπότε **επιλέγουμε τα 0 και 0.45π**, όπου παρουσιάζουν εναλλαγή προσήμου και αποτελούν ακρότατα (ίδιες ακριβώς ιδιότητες παρουσιάζουν τα 0.55π και π). Άρα:

$1 - 2a_2*\cos^2 0 = -\delta_{max}$

$1 - 2a_2*\cos^2(0.45\pi) = \delta_{max}$

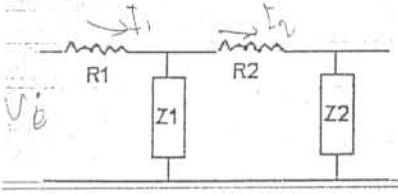
Από τις παραπάνω εξισώσεις βρίσκουμε το a_2. Οι συντελεστές είναι $h_n = [a_2\ 0\ 2a_2\ 0\ a_2]$. Η γραμμική φάση $\varphi(\omega) = -2\omega$.

β) Θα δείξουμε ότι η μέθοδος ζωνών αδιαφορίας προκύπτει από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων αν ορίσουμε **στις περιοχές μετάβασης την ιδανική απόκριση συχνότητας ίση με την απόκριση συχνότητας του φίλτρου.** Θα είναι:

$E^2(w) = \int_{-\pi}^{\pi} |D(w) - H(w)|^2 dw$ όπου το E(w) η συνάρτηση σφάλματος που ελαχιστοποιούμε για να πάρουμε τους βέλτιστους συντελεστές. Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να διασπαστεί ως:

$E^2(w) = \int_{R1} |D(w) - H(w)|^2 dw + \int_{R2} |D(w) - H(w)|^2 dw$, όπου οι περιοχές R1 = [0 0.45π] U [0.55π π] U 0.5π και R2= (0.45π 0.55π) ορίζουν τις περιοχές διάβασης/αποκοπής και μετάβασης αντίστοιχα (η περιοχή ολοκλήρωσης είναι στο [0 π] αφού το φίλτρο είναι συμμετρικό). Στη μέθοδο ζωνών αδιαφορίας ολοκληρώνουμε στις περιοχές ενδιαφέροντος (διάβασης / αποκοπής). Επομένως όταν δεν υπάρχει το ολοκλήρωμα στην περιοχή R2 τότε η μέθοδος ζωνών αδιαφορίας συμπίπτει με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Θα πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε την ιδανική απόκριση συχνότητας D(w) να είναι ίση με την απόκριση H(w) του φίλτρου στην περιοχή μετάβασης.

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του ηλεκτρικού κυκλώματος και επιλέξτε τα Z_i, ώστε να υλοποιεί κατωπερατό φίλτρο. Βρείτε τις τιμές των στοιχείων (αν υπάρχουν), ώστε να υλοποιεί Butterworth με Ωc = 5 kHz.



Δεν υπάρχει!!!

Η συνάρτηση μεταφοράς θα υπολογιστεί, θεωρώντας ότι χρησιμοποιούμε πυκνωτές στη θέση των στοιχείων Z_i. $Z_k = 1/sC_k$. Από την ανάλυση του κυκλώματος έχουμε ότι

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + (R_1R_2C_1C_2)s^2}$$

Γνωρίζουμε ότι ένα φίλτρο Butterworth, βαθμού 2 και συχνότητας αποκοπής Ω_c = 5 kHz έχει συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \dfrac{1}{\dfrac{s^2}{\Omega_c^2} + \dfrac{\sqrt{2}s}{\Omega_c} + 1}$. Εξισώνουμε τα $R_1R_2C_1C_2 = \Omega_c^{-2}$ και $R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2 = \sqrt{2}/\Omega_c$. Αν θέσουμε $x = R_1C_1$ και $y = R_2C_2$ τότε το άθροισμα x + y παίρνει τη μικρότερη τιμή του **όταν $x=y=\Omega_c^{-1}$**. Τότε $x+y=2\Omega_c^{-1}$, συνεπώς η δεύτερη σχέση δεν ικανοποιείται για καμία επιλογή x,y. Άρα δεν υπάρχουν πυκνωτές ή αντιστάσεις που να υλοποιούν το Butterworth. Αν είχαμε ανωπερατό τότε **$Z_k = sL_k$ και $x = R_1/L_1$**.

Σας διατίθεται αναλογικό σήμα x(t) το οποίο περιέχει σήμα φωνής με θόρυβο. Σας διατίθεται και ένας μετατροπέας αναλογικού σε ψηφιακό, με μέγιστη συχνότητα δειγματοληψίας 20kHz. Τι άλλο χρειάζεστε και με ποιες προδιαγραφές, προκειμένου να φιλτράρετε ψηφιακά το σήμα και μετά να το ακούσετε;

Για να ακούσουμε επεξεργασμένο ψηφιακό σήμα πρέπει να γίνει ανακατασκευή του. Για καλύτερη ποιότητα ανακατασκευής πρέπει να δειγματοληπτήσουμε στη μεγαλύτερη συχνότητα, δηλαδή 20kHz. Επομένως θα υπάρχει αναδίπλωση των συχνοτήτων πάνω από 10KHz. Το σήμα περιέχει πληροφορία φωνής στο διάστημα [0 5] kHz και θόρυβο σε όλες τις υπόλοιπες. Θα πρέπει όλες τις συχνότητες πάνω από 10KHz να τις φιλτράρουμε με ένα αναλογικό κατωπερατό φίλτρο αντιαναδίπλωσης, με προδιαγραφές [0 5] kHz ζώνη διάβασης, [5 10] kHz ζώνη μετάβασης και [10 ∞] kHz ζώνη αποκοπής. Μπορούμε να επιλέξουμε μεγαλύτερη ζώνη μετάβασης [5 15] kHz και ζώνη αποκοπής [15 ∞] kHz, ώστε να μπορεί να υλοποιηθεί με χαμηλότερης τάξης φίλτρο, αλλά θα παρουσιάζει αναδίπλωση στη ζώνη θορύβου.
Μετά το φιλτράρισμα εκτελούμε δειγματοληψία και το ψηφιακό σήμα θα έχει πληροφορία φωνής στη ζώνη [0 0.5π] και στις συχνότητες (0.5π π] θόρυβο. Αυτόν θα τον απομακρύνουμε με ένα ψηφιακό κατωπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 0.5π. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε FIR ή IIR αφού δεν μας ενδιαφέρει γραμμική φάση. Το ψηφιακό φίλτρο θα είναι πιο απότομο από το αναλογικό, αρκεί να επιλέξουμε μεγάλο μήκος. Μετά την ψηφιακή επεξεργασία θα χρειαστούμε ένα μετατροπέα ψηφιακού σε αναλογικό και μετά ένα αναλογικό κατωπερατό φίλτρο ανακατασκευής με συχνότητα αποκοπής 5kHz, που θα εξομαλύνει το κλιμακωτό αναλογικό σήμα του ΜΨΑ.

Έστω ότι θέλετε να σχεδιάσετε ένα FIR φίλτρο γραμμικής φάσης που να έχει μήκος ίσο με 5. Θέλετε το φίλτρο αυτό να προσεγγίζει κατά την min-max έννοια την παρακάτω συμμετρική συνάρτηση:

$$D(w) \begin{cases} 0 & 0 < \omega < 0.2\pi \\ 1 & 0.2\pi < \omega < 0.7\pi \\ 0 & 0.8\pi < \omega < \pi \end{cases}$$

βρείτε το πάλι: 0,2π → 0,3π

Βρείτε τις εξισώσεις που ορίζουν τους βέλτιστους συντελεστές.

Αφού πρόκειται για πραγματικό φίλτρο, οι συντελεστές θα παρουσιάζουν άρτια συμμετρία ($\beta_n = 0$) και επομένως θα είναι $h_0 = h_4 = a_2$, $h_1 = h_3 = a_1$, $h_2 = a_0$. Την ιδανική απόκριση θα την προσεγγίσουμε μέσω της $R(e^{jw}) = a_0 + a_1\cos w + a_2\cos 2w$. Πρέπει να βρούμε 4 συχνότητες $w_1 < w_2 < w_3 < w_4$, στις ζώνες διάβασης/αποκοπής όπου:

$D(w_1) - R(w_1) = -(D(w_2) - R(w_2)) = D(w_3) - R(w_3) = -(D(w_4) - R(w_4))$

Και $\max_w | D(w) - R(w) | = | D(w_i) - R(w_i) |$, $i = 1,\ldots,4$

Παρατηρούμε ότι η $R'(w) = -2h_1\sin w - 4h_0\sin 2w$ έχει σταθερό πρόσημο στο [0 0.5π]. Οπότε η συνάρτηση σφάλματος θα είναι στο ίδιο διάστημα γνησίως μονότονη(αύξουσα) αφού η D(w) στο [0 0.5π] θα είναι σταθερή ανά διαστήματα (0 για [0 0.2π] και 1 για [0.3π 0.5π]) Τα υποψήφια **w_i είναι 0, 0.2π, 0.3π, 0.5π**. Για την εναλλαγή προσήμου:

I=1 $D(w_1) - R(w_1) = D(0) - R(0) = \delta_{max}$

I=2 .....

.

.

Επιλύουμε το σύστημα και βρίσκουμε τους συντελεστές και δ_{max}. Με αυτούς τους συντελεστές κάνουμε επαλήθευση στα σημεία 0.7π 0.8π και π.

Υποθέστε ότι η ιδανική απόκριση πλάτους ενός ψηφιακού φίλτρου δίνεται από τη σχέση $D(w) = \sum_{n=0}^{N+1} d_n \cos(nw)$ Βρείτε την κρουστική απόκριση του βέλτιστου φίλτρου μήκους 2N+1 γραμμικής φάσης FIR φίλτρου

A) Με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων.

B) Με την έννοια ελαχιστομέγιστου.

Σχολιάστε τα αποτελέσματα σας.

Β) Για την απόκριση συχνότητας του βέλτιστου φίλτρου μήκους 2N+1 FIR, γραμμικής φάσης θα ισχύει :

$H_{2N+1}(e^{jw}) = e^{-jNw}\sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nw)$ με $R_r = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nw)$ (επειδή η D(w) είναι πραγματική, όλοι οι φανταστικοί συντελεστές $\beta_n = 0$). Η βέλτιστη λύση με την έννοια του ελαχιστομέγιστου θα βρίσκεται όταν και μόνο όταν η

συνάρτηση σφάλματος $E(w) = | D(e^{jw}) - H(e^{jw}) | = | D(w) - H(w) | = | d_{n+1}\cos(N+1)w |$ εμφανίζει τοπικά ακρότατα σε K+1 σημεία (αφού K = N+1 θέλουμε N+2 σημεία) με εναλλασσόμενο πρόσημο και ίδιο μέτρο κατ'απόλυτη τιμή. Για τα N+2 σημεία ισχύει:

$E(w) = d_{N+1}\cos(N+1)w$
$E(w) = \max$ για βέλτιστους συντελεστές
$(N+1)w_k = k\pi \Rightarrow w_k = k\pi / (N+1)$. Οπότε το $\max E(w) = d_{n+1}$, γιατί το $\cos(N+1)w$ παίρνει ακρότατες τιμές +-1.
Επομένως οι βέλτιστοι συντελεστές της κρουστικής απόκρισης θα είναι $a_0 = d_0$, $a_i = d_i /2$ δηλαδή
$[d_N /2 \ldots d_0 \ldots d_N / 2]$

A) Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων. Τότε οι βέλτιστοι συντελεστές του φίλτρου, αφού έχουμε περιττό μήκος 2N+1 και D(w) πραγματική, θα δίνονται από τη σχέση:

$$a_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{N+1} d_n \cos(nw)\right)\cos(lw)dw = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{N+1} d_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nw)\cos(lw)dw$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nw)\cos(lw)dw$ έχουμε τις περιπτώσεις:

$n \neq l,\ n*l \neq 0$ $\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nw)\cos(lw)dw = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(n+l)w]dw + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(n-l)w]dw =$

$$\frac{\sin(n+l)w}{2(n+l)}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n-l)w}{2(n-l)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$n = l,\ n*l \neq 0$ $\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nw)\cos(lw)dw = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[(\cos(2lw)+1]dw = \pi$

$n = l = 0$ $\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nw)\cos(lw)dw = 2\pi$

Επομένως οι βέλτιστοι συντελεστές θα είναι $\alpha_0 = d_0$, $a_i = d_i /2$ δηλαδή $[d_N /2 \ldots d_0 \ldots d_N / 2]$
Παρατηρούμε ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση οι συντελεστές είναι ίδιοι με πριν.

Υποθέστε ότι έχουμε N δείγματα διακριτού χρόνου του σήματος χ_n, n=0,…,N-1. Επιθυμούμε να υπολογίσουμε τις τιμές του Μετασχηματισμού Z του σήματος στα σημεία $Z_\kappa = re^{j(\theta o+2\pi k/N)}$, k=0,…,M-1 του μιγαδικού επιπέδου, όπου r,θο γνωστ ς ποσότητες, N=RM και R ακέραιος με R>=2. Βρείτε αλγόριθμο που θα υπολογίζει τις επιθυμητές τιμές χρησιμοποιώντας DFT μήκους M. Ποια η πολυπλοκότητα του αλγόριθμου όταν N,M δυνάμεις του 2; Να συγκριθεί με την πολυπλοκότητα του FFT N-σημείων.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το Μετασχηματισμό Z στα σημεία Z_κ. Γενικά θα ισχύει (για τα N δείγματα του διακριτού x_n)

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n z^{-n} \Rightarrow X(Z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n\left[re^{j(\theta o+2\pi k/N)}\right]^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n r^{-n} e^{-j\theta on} e^{-j2\pi kn/N}$$

Όμως από τα N δείγματα θέλουμε να κρατήσουμε τα M (αριθμός των σημείων Z_k) Δηλαδή απ'τον DFT του x_n θέλουμε τα $X(Z_0), X(Z_1)\ldots X(Z_{M-1})$. Θέλουμε να υπολογίσουμε μετασχηματισμούς μήκους M. Γράφουμε **n = R*l + q**, όπου **0<= q <= R-1 και 0<= l <= M-1**. Οπότε θα έχουμε

$$X(Z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n (re^{j\theta o})^{-n} e^{-j2\pi kn/N}$$ Θέτουμε $\overline{x_n} = x_n(re^{j\theta o})^{-n}$ οπότε $X(Z_k) = \sum_{n=0}^{N-1}\overline{x_n} e^{-j2\pi k/N}$

$$= \sum_q\sum_l \overline{x_{Rl+q}} e^{-j2\pi(Rl+q)k/N} = \sum_q e^{-j2\pi qk/N}\sum_l \overline{x_{Rl+q}} e^{-j2\pi lk/M}$$ Το δεύτερο Σ_l είναι ένας DFT M σημείων, δηλαδή για κάθε διαφορετική τιμή του q έχουμε και έναν διαφορετικό DFT M σημείων. Επομένως υπολογίζουμε R μετασχηματισμούς των M σημείων.

Για ένα DFT M σημείων απαιτούνται συνολικά **$M/2*\log_2 M$** πολ/μοι. Για τους R DFTs M σημείων θα απαιτούνται **$N/2\log_2 M$** πολ/μοι, αλλά επειδή έχω M τέτοια σημεία και για ένα σημείο από τα Z_k έχω R

πολ/μους, θα είναι τελικά **N/2 $\log_2$M + N** (τα παραπάνω ισχύουν και για N,M δυνάμεις του 2). Για να έχουμε κέρδος από τον FFT N σημείων πρέπει

$$\frac{N}{2}\log_2 M + N < \frac{N}{2}\log_2 N \Rightarrow \log_2 M + 2 < \log_2 R + \log_2 M \Rightarrow \log_2 R > 2 \Rightarrow R > 4$$

Υποθέστε ότι η ιδανική απόκριση ενός ψηφιακού φίλτρου δίνεται από τη σχέση $D(w) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos(3^n w)$ Βρείτε το βέλτιστο μήκους 2*3^N + 1 γραμμικής φάσης FIR φίλτρο με την έννοια min-max και με την έννοια ελαχίστων τετραγώνων.

Με τη min-max : Η απόκριση συχνότητας για το φίλτρο θα είναι της μορφής $H(e^{jw}) = e^{-jNw}\sum_{n=0}^{3^N} a_n \cos(nw)$, αφού το μήκος 2*3^N + 1 είναι περιττός και η ιδανική απόκριση είναι πραγματική συνάρτηση (όλοι οι όροι β_n = 0). Η βέλτιστη λύση βρίσκεται αν και μόνο αν η συνάρτηση σφάλματος E(w) =| D(w) – H(w) | εμφανίζει ακρότατα σε K+1 σημεία (K=N+1), με εναλλασόμενο πρόσημο και ίδιο μέτρο κατ'απόλυτη τιμή. Θα έχουμε :

$E(w) = \left|\sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos(3^n w) - \sum_{n=0}^{3^N} a_n \cos(nw)\right|$. Επιλέγουμε τα a_n να ικανοποιούν τη σχέση **$a_{3^n} = d_n$** και όλα τα υπόλοιπα a_n να είναι ίσα με 0. **Θα δείξουμε ότι για αυτή την περίπτωση έχουμε βέλτιστη λύση.** Το σφάλμα γίνεται $E(w) = \sum_{n=3^N+1}^{\infty} d_n \cos(3^n w)$. Για τον πρώτο όρο είναι $\cos(3^{3^N+1} w_k) = \pm 1$. Τα w_k που ικανοποιούν τη σχέση είναι τα $w_k = \frac{k\pi}{3^{3^N+1}}$ με k = 0,…,N+1. Παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε άλλο l>=3^N+2 ισχύει ότι :

$\cos(3^l w_k) = \cos(3^l \frac{k\pi}{3^{3^N+1}}) = \cos(3^{l-3^N-1}\pi)$ Όμως ο 3^β είναι πάντα περιττός, άρα είναι της **μορφής 2c + 1.** Άρα:

$\cos(3^l w_k) = \cos((2c+1)k\pi) = \cos(k\pi) = \pm 1$. Από την παράγωγο της συνάρτησης σφάλματος στα σημεία w_k έχουμε :

$E'(w) = \left[\sum_{n=3^N+1}^{\infty} d_n \cos(3^n w)\right]' = \sum_{n=3^N+1}^{\infty} d_n(-3^n)\sin(3^n \frac{k\pi}{3^{3^N+1}}) = 0$ (Πάλι 3^β->2c+1 και sin(kπ)=0). Αποδείξαμε δηλαδή ότι στα σημεία w_k έχουμε τοπικά ακρότατα και εναλλαγή προσήμου, άρα $\max E(w) = \sum_{n=3^N+1}^{\infty} d_n$. Στο ίδιο συμπέρασμα φτάνουμε και αν είχαμε 2c+1 αντί για 3.

Με ελάχιστα τετράγωνα : Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων. Τότε οι βέλτιστοι συντελεστές του φίλτρου, αφού έχουμε περιττό μήκος 2N+1 και D(w) πραγματική, θα δίνονται από τη σχέση:

$$a_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos(3^n w))\cos(lw)dw = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} d_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(3^n w)\cos(lw)dw$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(3^n w)\cos(lw)dw$ έχουμε τις περιπτώσεις:

$3^n \neq 1$ $\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos(3^n w)\cos(lw)dw = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(3^n + l)w]dw + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(3^n - l)w]dw =$

$$\frac{\sin(3^n + l)w}{2(3^n + l)}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(3^n - l)w}{2(3^n - l)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$3^n = 1$ $\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos(3^n w)\cos(lw)dw = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[(\cos(2lw) + 1]dw = \pi$

Επομένως οι βέλτιστοι συντελεστές θα είναι $a_n = d_n/2$. Παρατηρούμε ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση οι συντελεστές είναι ίδιοι με πριν.

Ψηφιακοί ολοκληρωτές :

Αν η συχνότητα w = 0 ανήκει σε ζώνη αποκοπής δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα και προσεγγίζουμε με οποια μέθοδο θέλουμε (με χρήση sin() αφού D(w) φανταστική). Αν η συχνότητα w = 0 ανήκει σε ζώνη διάβασης τότε εκφράζουμε το ολοκλήρωμα $y_n = y_{n-1} + \int_{(n-1)Ts}^{nTs} x(t)dt$. Η προτεινόμενη συνάρτηση μεταφοράς του ολοκληρωτή είναι $H(z) = \frac{h_0 + h_1 z^{-1} + \ldots + h_L z^{-(L-1)}}{1 - z^{-1}}$. Μπορούμε να σπάσουμε την ακολουθία h_n σε 2 ακολουθίες α_n (άρτια) και β_n (περιττή). Τελικά έχουμε $H(e^{jw}) = e^{-j(N-0.5)w} \frac{a_0 + \ldots + a_L \cos Lw}{2j \sin \frac{w}{2}}$

Συμπεριφορά των κανόνων αριθμητικής ολοκλήρωσης :

Κανόνας ορθογωνιού : το σήμα $x_a(t)$ προσεγγίζεται από μια συνάρτηση που είναι σταθερή σε κάθε διάστημα $[(n-1)T_s\ nT_s]$ και ίση προς το δείγμα της στιγμής $(n-1)T_s$. Αν y_n το ολοκλήρωμα της στιγμής nT_s τότε ο κανόνας προτείνει την ακόλουθη αναδρομή για το ολοκλήρωμα της στιγμής n $y_n = y_{n-1} + Ts * x_n$ (προσεγγίζει το ολοκλήρωμα με το εμβαδό ενός ορθογωνίου). Η συνάρτηση μεταφοράς (από μετ. Z) και η απόκριση συχνότητας είναι : $H(z) = \frac{Ts}{1 - z^{-1}}, H(e^{jw}) = e^{-jw/2} \frac{Ts}{2j \sin(w/2)}$. Η γραμμική φάση δηλώνει καθυστέρηση της εξόδου κατά μισό δείγμα. Το σχετικό σφάλμα είναι $E_1(w) = \left| \frac{\frac{Ts}{jw} - \frac{Ts}{2j \sin(w/2)}}{\frac{Ts}{jw}} \right|$. Το μέγιστο σφάλμα είναι στη συχνότητα π (56%).

Κανόνας τραπεζίου : η αναδρομή είναι $y_n = y_{n-1} + 0.5Ts(x_n + x_{n-1})$ (τραπέζιο εμβαδού $0.5T_s(x_n + x_{n-1})$). Η συνάρτηση μεταφοράς (από μετ. Z) και η απόκριση συχνότητας είναι : $H(z) = \frac{Ts}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}, H(e^{jw}) = \frac{Ts}{2j} \cot(w/2)$. Σημαντικό είναι το γεγονός ότι εδώ δεν υπάρχει συνάρτηση φάσης, ή η φάση είναι μηδενική (υπολογισμός του ολοκληρώματος στη στιγμή nT_s). Το σχετικό σφάλμα είναι $E_1(w) = \left| 1 - \frac{w/2}{\tan(w/2)} \right|$. Το σχετικό σφάλμα είναι παντού μεγαλύτερο από το προηγούμενο (ορθογωνίου).

Κανόνας Simpson : η αναδρομή είναι $y_n = y_{n-2} + \frac{Ts}{3}(x_n + 4x_{n-1} + x_{n-2})$. Η συνάρτηση μεταφοράς (από μετ. Z) είναι $H(z) = \frac{Ts}{3} \frac{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}$ και η απόκριση συχνότητας $H(e^{jw}) = \frac{Ts}{3} \frac{2 + \cos w}{j \sin w}$. Το σχετικό σφάλμα είναι $E_1(w) = \left| 1 - \frac{w}{\sin w} \frac{2 + \cos w}{3} \right|$. Πάλι λείπει η συνάρτηση φάσης, αλλά για συχνότητες κοντά στο π το σχετικό σφάλμα τείνει στο άπειρο. Όμως, για συχνότητες μέχρι π/2 το σχετικό σφάλμα είναι μικρότερο από τα άλλα 2. Μπορούμε λοιπόν να δειγματοληπτήσουμε με ρυθμό διπλάσιο του Nyquist, ώστε το σήμα μας να έχει συγκεντρωμένη την πληροφορία στη ζώνη [0 0.5π].

⊛ Υποθέστε ότι η ιδανική απόκριση ψηφιακού φίλτρου δίνεται από τη σχέση $D(\omega) = \sum_{n=0}^{N+1} \lambda_n \cos^n(\omega)$. Να προσεγγιστεί η σειρά και να βρεθεί το σφάλμα με βάση την αρχή του minmax.

<u>Λύση:</u> Για την περίπτωση της παραπάνω $D(\omega)$ έχουμε κλειστή μορφή της βέλτιστης λύσης. Θα είναι:

$$D(\omega) = \sum_{n=0}^{N+1} \lambda_n \cos^n(\omega) = \sum_{n=0}^{N+1} \lambda_n \cdot \cos(n\omega),$$ αφού ξέρουμε ότι

$\cos(2\omega) = 2\cos^2\omega - 1$ και, γενικότερα, $\boxed{\cos(n\omega) = \sum_{m=0}^{n} \lambda_m \cos^m(\omega)}$

Για την προσέγγιση θα χρησιμοποιήσουμε πολυώνυμα Chebyshev: $T_N(x) = 2x\,T_{N-1}(x) - T_{N-2}(x)$, όπου $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

Αν είναι $T_N(x) \equiv \cos(N\omega)$, θα είναι $x = \cos(\omega)$, αφού για

$N = 2$, θα είναι: $T_2(x)\left(\equiv \cos(2\omega)\right) = 2x\,T_1(x) - T_0(x) = 2x \cdot x - 1 =$

$= 2x^2 - 1$. Οπότε αν $x = \cos(\omega)$ ισχύει ότι $T_N(x) \equiv \cos(N\omega)$.

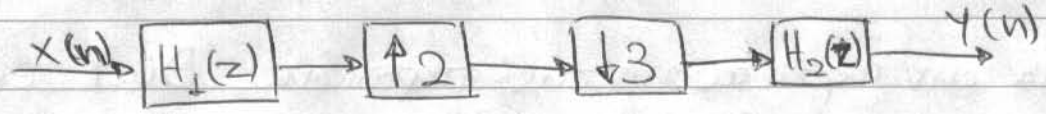
Επομένως, παίρνω για $n = 0, \dots, N+1$: $n=0$: $T_2(x) = 2x^2 - 1$

$\vdots$

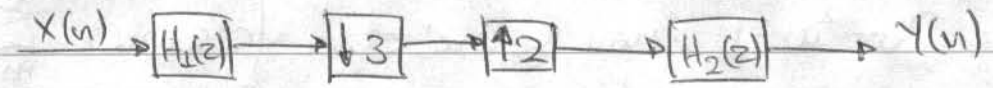
$n = N+1$: $T_{N+1}(x) = 2x\,T_N(x) - T_{N-1}(x)$

Δηλαδή: $\cos((N+1)\omega) = 2^{N+1}\cos^{N+1}(\omega) + \underbrace{\dots\dots}$ (όροι που προκύπτουν από χαμηλότερες τάξης πολυώνυμα). Λύνοντας ως προς το $\cos^{N+1}(\omega)$ προκύπτει ότι το σφάλμα είναι: $\underbrace{\epsilon(\omega) = \frac{\lambda_{N+1}}{2^{N+1}}}$

⊛ Χρησιμοποιώντας τις πολυφασικές αναπαραστάσεις ενός συστήματος και γνωστές ιδιότητες των πολυρυθμικών συστημάτων, βρείτε μια αποδοτική υλοποίηση του παρακάτω συστήματος:

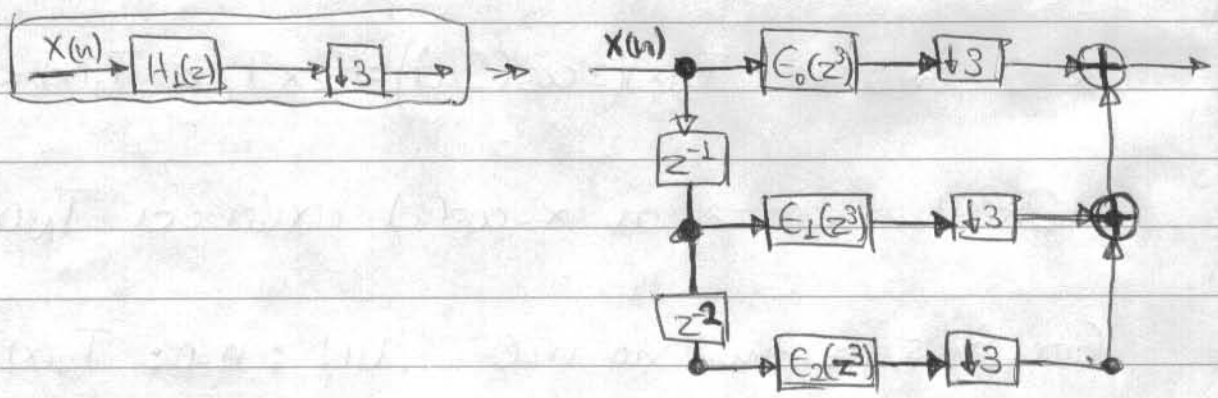


Λύση: Επειδή το 2 και το 3 είναι πρώτοι μεταξύ τους, θα είναι:

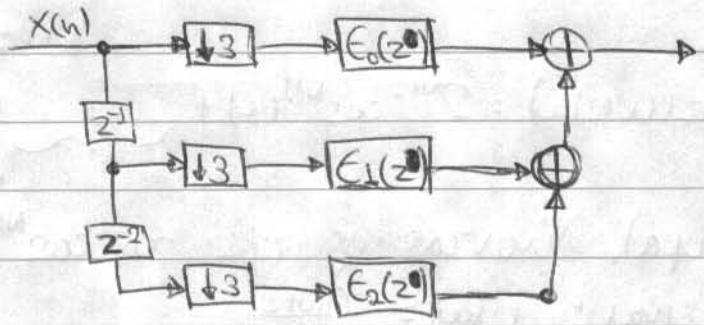


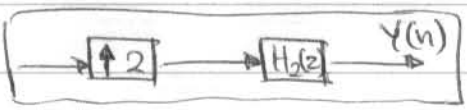
Θα είναι: $H_1(z) = \sum_{k=0}^{2} z^{-k} \cdot E_k(z^3)$ (πολυφασική αναπαράσταση κατά παράγοντα 3). και $H_2(z) = \sum_{k=0}^{1} z^{-k} \cdot E_k(z^2)$

Οπότε:

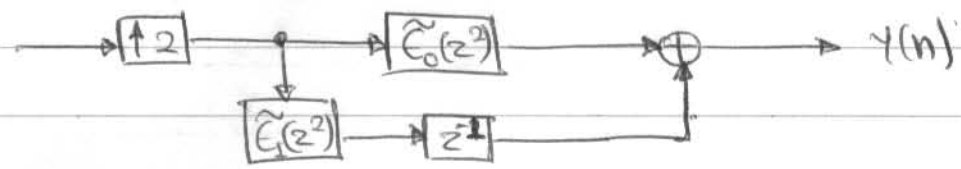


και επίσης:



Επομένως : 

θα είναι:



και επίσης: