

**Θεμελιώδεις Έννοιες
της
Επεξεργασίας Σημάτων**

James H. McClellan
Georgia Institute of Technology

Ronald W. Schafer
Georgia Institute of Technology

Mark A. Yoder
Rose-Hulman Institute of Technology

Μετάφραση-Επιστημονική Επιμέλεια
Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής Πανεπιστημίου Πάτρας

ΦΙΛΟΜΑΘΕΙΑ

Περιεχόμενα

Πρόλογος Μεταφραστή **xiii**

Πρόλογος Συγγραφέων **xv**

1 Εισαγωγή **1**

1-1	Μαθηματική Περιγραφή των Σημάτων	2
1-2	Μαθηματική Περιγραφή των Συστημάτων	4
1-3	Σκέψεις για τα Συστήματα	6
1-4	Το Επόμενο Βήμα	6

2 Ημιτονοειδή Σήματα **9**

2-1	Το Πείραμα του Διαπασών	10
2-2	Οι Συναρτήσεις Ημιτόνου και Συνημιτόνου	11
2-3	Συνημιτονοειδή Σήματα	13

2-3.1	Σχέση Συχνότητας και Περιόδου	14
2-3.2	Διαφορά Φάσης και Χρονική Ολίσθηση	16
2-4	Δειγματοληψία και Σχεδίαση Ημιτονοειδών	18
2-5	Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα και Φάσορες	20
2-5.1	Μιγαδικοί Αριθμοί	20
2-5.2	Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα	21
2-5.3	Ερμηνεία με τη Χρήση Περιστροφόμενου Φάσορα	22
2-5.4	Οι Αντίστροφες Σχέσεις του Euler	24
2-6	Πρόσθεση Φασόρων	25
2-6.1	Πρόσθεση Μιγαδικών Αριθμών	26
2-6.2	Πρόσθεση Φασόρων	26
2-6.3	Παράδειγμα Πρόσθεσης Φασόρων	27
2-6.4	Πρόσθεση Φασόρων στο MATLAB	28
2-6.5	Σύνοψη της Πρόσθεσης Φασόρων	28
2-7	Η Φυσική του Διαπασών	30
2-7.1	Εξισώσεις από Νόμους της Φυσικής	30
2-7.2	Γενική Λύση της Διαφορικής Εξίσωσης	32
2-7.3	Ακούγοντας Τόνους	33
2-8	Άλλα Ημιτονοειδή Χρονικά Σήματα	33
2-9	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι	34
2-10	Προβλήματα	35

3 Φάσμα Σήματος

39

3-1	Το Φάσμα Αθροίσματος Ημιτονοειδών	40
3-1.1	Αλλαγή Συμβολισμού	41
3-1.2	Γραφική Παράσταση Φάσματος	41
3-2	Διακροτήματα	42
3-2.1	Γινόμενο Ημιτονοειδών	42
3-2.2	Κυματομορφή Διακροτήματος	43
3-2.3	Διαμόρφωση Πλάτους	45
3-3	Περιοδικές Κυματομορφές	47
3-3.1	Συνθετικό Φωνήεν	47
3-3.2	Παράδειγμα ενός μη Περιοδικού Σήματος	49
3-4	Σειρές Fourier	51
3-4.1	Σειρές Fourier: Ανάλυση	52
3-4.2	Παραγωγή Σειρών Fourier	52
3-5	Το Φάσμα των Σειρών Fourier	54
3-6	Ανάλυση Fourier Περιοδικών Σημάτων	55

3-6.1	Το Τετραγωνικό Κύμα	56
3-6.1.1	Η Τιμή του Σταθερού Συντελεστή	57
3-6.2	Το Φάσμα ενός Τετραγωνικού Κύματος	58
3-6.3	Σύνθεση ενός Τετραγωνικού Κύματος	58
3-6.4	Τριγωνικό Κύμα	59
3-6.5	Σύνθεση Τριγωνικού Σήματος	60
3-6.6	Σύγκλιση της Σχέσης Σύνθεσης Fourier	61
3-7	Θεώρημα Parseval	61
3-8	Η Φύση της Προσέγγισης των Σειρών Fourier	63
3-8.1	Σύγκλιση Σειρών Fourier	63
3-9	Χρονο-Συχνотικό Φάσμα	65
3-9.1	Τμηματικά Σταθερή Συχνότητα	67
3-9.2	Ανάλυση Φασματογραφήματος	67
3-10	Διαμόρφωση Συχνότητας: Τερέτισμα	68
3-10.1	Τερέτισμα ή Σήμα Συχνότητας Γραμμικής Σάρωσης	68
3-10.2	Μια Κοντινότερη ματιά στη Στιγμαία Συχνότητα	70
3-11	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι	71
3-12	Προβλήματα	72

4 Δειγματοληψία και Ψευδώνυμα Συχνοτήτων

79

4-1	Δειγματοληψία	79
4-1.1	Δειγματοληψία Ημιτονοειδών Σημάτων	81
4-1.2	Τα Ψευδώνυμα των Συχνοτήτων	83
4-1.3	Φάσμα Σήματος Διακριτού Χρόνου	85
4-1.4	Το Θεώρημα Δειγματοληψίας	86
4-1.5	Ψευδώνυμα Συχνοτήτων	86
4-1.6	Αναδίπλωση	87
4-1.7	Ιδανική Ανακατασκευή	87
4-2	Φασματική Ερμηνεία Δειγματοληψίας και Ανακατασκευής	88
4-2.1	Φάσμα Σήματος Διακριτού Χρόνου που Προκύπτει από Δειγματοληψία	89
4-2.2	Υπερδειγματοληψία	89
4-2.3	Ψευδώνυμα από Υποδειγματοληψία	91
4-2.4	Αναδίπλωση από Υποδειγματοληψία	92
4-2.5	Μέγιστη Συχνότητα Ανακατασκευής	93
4-3	Επίδειξη Στροβοσκοπίου	94
4-3.1	Ερμηνεία με Χρήση του Φάσματος	97
4-4	Μετατροπή Διακριτού-σε-Συνεχές	99
4-4.1	Παρεμβολή με Παλμούς	99

4-4.2	Παρεμβολή Συγκράτησης Μηδενικής Τάξης	100
4-4.3	Γραμμική Παρεμβολή	100
4-4.4	Παρεμβολή Κυβικής Spline	101
4-4.5	Υπερδειγματοληψία και Παρεμβολή	102
4-4.6	Ιδανική Παρεμβολή Περιορισμένου Εύρους	103
4-5	Θεώρημα Δειγματοληψίας	104
4-6	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι	106
4-7	Προβλήματα	107

5 FIR Φίλτρα

113

5-1	Συστήματα Διακριτού Χρόνου	114
5-2	Φίλτρο Τρέχουσας Μέσης Τιμής	114
5-3	Το Γενικό FIR Φίλτρο	117
5-3.1	Ερμηνεία του FIR Φιльтраρίσματος	118
5-3.2	Η Μοναδιαία Κρουστική Απόκριση	120
5-3.2.1	Η Μοναδιαία Κρουστική Ακολουθία	120
5-3.2.2	Ακολουθία Μοναδιαίας Κρουστικής Απόκρισης	121
5-3.2.3	Το Σύστημα Μοναδιαίας Καθυστέρησης	122
5-3.3	Συνέλιξη και FIR Φίλτρα	122
5-3.3.1	Υπολογίζοντας την Έξοδο της Συνέλιξης	123
5-3.3.2	Η Συνέλιξη στο Περιβάλλον MATLAB	124
5-4	Υλοποίηση των FIR Φίλτρων	124
5-4.1	Δομικά Στοιχεία	125
5-4.1.1	Πολλαπλασιαστής	125
5-4.1.2	Άθροιστής	125
5-4.1.3	Μοναδιαία Καθυστέρηση	125
5-4.2	Σχηματικά Διαγράμματα	126
5-4.2.1	Άλλα Σχηματικά Διαγράμματα	127
5-4.2.2	Εσωτερικές Λεπτομέρειες Υλικού	128
5-5	Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα (ΓΧΑ) Συστήματα	129
5-5.1	Χρονική Αμεταβλητότητα	129
5-5.2	Γραμμικότητα	130
5-5.3	Η Περίπτωση του FIR Συστήματος	131
5-6	Συνέλιξη και ΓΧΑ Συστήματα	132
5-6.1	Συνελικτικό Άθροισμα	132
5-6.2	Μερικές Ιδιότητες των ΓΧΑ συστημάτων	133
5-6.2.1	Η Συνέλιξη ως Τελεστής	133
5-6.2.2	Αντιμεταθετική Ιδιότητα της Συνέλιξης	134

5-6.2.3 Προσεταιριστική Ιδιότητα της Συνέλιξης	135
5-7 ΓΧΑ Συστήματα σε Σειρά	135
5-8 Παράδειγμα FIR Φιλτραρίσματος	137
5-9 Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι	139
5-10 Προβλήματα	140

6 Απόκριση Συχνότητας FIR Φίλτρων 145

6-1 Απόκριση των FIR συστημάτων σε Ημιτονοειδής Διεγέρσεις	145
6-2 Υπέρθυση και Απόκριση Συχνότητας	147
6-3 Μεταβατική Απόκριση και Απόκριση Μόνιμης Κατάστασης	150
6-4 Ιδιότητες της Απόκρισης Συχνότητας	152
6-4.1 Σχέση της Κρουστικής Απόκρισης και της Εξίσωσης Διαφορών	152
6-4.2 Περιοδικότητα της $H(e^{j\omega})$	153
6-4.3 Συζυγής Συμμετρία	153
6-5 Γραφική Παράσταση της Απόκρισης Συχνότητας	154
6-5.1 Σύστημα Καθυστέρησης	154
6-5.2 Σύστημα Διαφορών Πρώτης Τάξης	155
6-5.3 Ένα Απλό Φίλτρο Διέλευσης χαμηλών Συχνοτήτων	157
6-6 ΓΧΑ Συστήματα Συνδεδεμένα σε Σειρά	159
6-7 Φίλτρο Τρέχουσας Μέσης Τιμής	160
6-7.1 Σχεδιάζοντας την Απόκριση Συχνότητας	161
6-7.2 Αποκρίσεις Μέτρου και Φάσης	163
6-7.3 Πείραμα: Εξομάλυνση Εικόνας	164
6-8 Φιτράροντας Δειγματοληπτημένα Σήματα Συνεχούς Χρόνου	167
6-8.1 Παράδειγμα: Κατωπερατό Φίλτρο Τρέχουσας Μέσης Τιμής	168
6-8.2 Ερμηνεία της Καθυστέρησης	170
6-9 Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι	172
6-10 Προβλήματα	172

7 Μετασχηματισμός-z 179

7-1 Ορισμός Μετασχηματισμού-z	180
7-2 Μετασχηματισμός-z και τα Γραμμικά Συστήματα	182
7-2.1 Ο Μετασχηματισμός-z ενός FIR Φίλτρου	182
7-3 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού-z	184
7-3.1 Η ιδιότητα της υπέρθεσης του Μετασχηματισμού-z	184
7-3.2 Η Ιδιότητα της Χρονικής Καθυστέρησης του Μετασχηματισμού-z	185

7-3.3	Ένας Γενικός Τύπος για τον Μετασχηματισμό- z	185
7-4	Ο Μετασχηματισμός- z ως Τελεστής	186
7-4.1	Τελεστής Μοναδιαίας Καθυστέρησης	186
7-4.2	Τελεστικός Συμβολισμός	186
7-4.3	Τελεστικός Συμβολισμός σε Σχηματικά Διαγράμματα	187
7-5	Συνέλιξη και Μετασχηματισμός- z	187
7-5.1	Σύνδεση Συστημάτων σε Σειρά	190
7-5.2	Παραγοντοποίηση Πολυωνύμων- z	191
7-5.3	Αποσυνέλιξη	192
7-6	Σχέση Ανάμεσα στο Πεδίο- z και το Πεδίο- ω	192
7-6.1	Το Επίπεδο- z και ο Μοναδιαίος Κύκλος	193
7-6.2	Τα Μηδενικά και οι Πόλοι της $H(z)$	194
7-6.3	Η Σημαντικότητα των Μηδενικών της $H(z)$	195
7-6.4	Φίλτρα Ακύρωσης	196
7-6.5	Γραφική Σχέση μεταξύ z και ω	197
7-7	Χρήσιμα Φίλτρα	198
7-7.1	Φίλτρο Τρέχουσας Μέσης Τιμής Μήκους L	199
7-7.2	Ένα Μιγαδικό Φίλτρο Διέλευσης Ζώνης Συχνοτήτων	201
7-7.3	Ένα Ζωνοπερατό Φίλτρο με Πραγματικούς Συντελεστές	203
7-8	Πρακτικός Σχεδιασμός Φίλτρου Διέλευσης Ζώνης Συχνοτήτων	204
7-9	Ιδιότητες Φίλτρων Γραμμικής Φάσης	207
7-9.1	Η συνθήκη Γραμμικής Φάσης	207
7-9.2	Θέσεις των Μηδενικών FIR Συστημάτων Γραμμικής Φάσης	208
7-10	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι	208
7-11	Προβλήματα	209

8 IIR Φίλτρα

215

8-1	Η Γενική Εξίσωση Διαφορών των IIR Συστημάτων	216
8-2	Απόκριση στο Πεδίο του Χρόνου	217
8-2.1	Η Γραμμικότητα και η Χρονική Αμεταβλητότητα των IIR Συστημάτων	219
8-2.2	Η Κρουστική Απόκριση IIR συστήματος Πρώτης Τάξης	219
8-2.3	Απόκριση σε Εισόδους Πεπερασμένου Μήκους	221
8-2.4	Βηματική Απόκριση ενός Αναδρομικού Συστήματος Πρώτης Τάξης	222
8-3	Η Συνάρτηση Μεταφοράς ενός IIR Φίλτρου	224
8-3.1	Η Γενική Περίπτωση Πρώτης Τάξης IIR Συστήματος	224
8-3.2	Η Συνάρτηση Μεταφοράς και Σχηματικά Διαγράμματα Δομών Υλοποίησης	225
8-3.2.1	Δομή Απευθείας Υλοποίησης Τύπου I	226
8-3.2.2	Δομή Απευθείας Υλοποίησης Τύπου II	227

8-3.2.3	Η Δομή Ανάστροφης Υλοποίησης	227
8-3.3	Η Σχέση με την Κρουστική Απόκριση	229
8-3.4	Σύνοψη της Μεθόδου	230
8-4	Πόλοι και Μηδενικά	230
8-4.1	Πόλοι και Μηδενικά στο Μηδέν και το Άπειρο	231
8-4.2	Θέσεις Πόλων και Ευστάθεια	231
8-5	Απόκριση Συχνότητας ενός IIR Φίλτρου	232
8-5.1	Απόκριση Συχνότητας χρησιμοποιώντας MATLAB	234
8-5.2	Γραφική Παράσταση Τριών Διαστάσεων της Συνάρτησης Μεταφοράς	235
8-6	Τα Τρία Πεδία	236
8-7	Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός- z και κάποιες Εφαρμογές	237
8-7.1	Επανεξέταση της Βηματικής Απόκρισης ενός Συστήματος Πρώτης Τάξης	237
8-7.2	Υπολογισμός του Αντίστροφου Μετασχηματισμού- z	239
8-8	Απόκριση Μόνιμης Κατάστασης και Ευστάθεια	241
8-9	Φίλτρα Δεύτερης Τάξης	244
8-9.1	Ο μετασχηματισμός- z των Δεύτερης Τάξης Φίλτρων	244
8-9.2	Δομές IIR Συστημάτων Δεύτερης Τάξης	245
8-9.3	Πόλοι και Μηδενικά	247
8-9.4	Κρουστική απόκριση ενός IIR Συστήματος Δεύτερης Τάξης	248
8-9.4.1	Πραγματικοί Πόλοι	249
8-9.5	Μιγαδικοί Πόλοι	250
8-10	Απόκριση συχνότητας IIR φίλτρων Δεύτερης Τάξης	253
8-10.1	Απόκριση Συχνότητας στο MATLAB	254
8-10.2	Εύρος Ζώνης (3-dB)	255
8-10.3	Τρισδιάστατη Γραφική Παράσταση Συναρτήσεων Μεταφοράς	256
8-11	Παράδειγμα Κατωπερατού IIR Φίλτρου	257
8-12	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι	260
8-13	Προβλήματα	261

9 Σήματα και ΓΧΑ-Συστήματα Συνεχούς-Χρόνου

269

9-1	Σήματα Συνεχούς-Χρόνου	270
9-1.1	Δίπλευρα Άπειρου Μήκους Σήματα	270
9-1.2	Μονόπλευρα Σήματα	271
9-1.3	Σήματα Πεπερασμένου Μήκους	272
9-2	Μοναδιαία Κρουστική Συνάρτηση	273
9-2.1	Δειγματοληψία και Κρουστικό Σήμα	275
9-2.2	Αυστηρός Μαθηματικός Ορισμός	277
9-2.3	Πραγματικότητα	277

9-2.4	Παράγωγος του Μοναδιαίου Βηματικού Σήματος	277
9-3	Συστήματα Συνεχούς Χρόνου	279
9-3.1	Μερικά Βασικά Συστήματα Συνεχούς Χρόνου	280
9-3.2	Συνεχούς Χρόνου Έξοδοι	280
9-3.3	Αντίστοιχα Συστήματα Διακριτού Χρόνου	280
9-4	Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα	281
9-4.1	Χρονική-Αμεταβλητότητα	281
9-4.2	Γραμμικότητα	282
9-4.3	Το Συνελικτικό Ολοκλήρωμα	283
9-4.4	Ιδιότητες της Συνέλιξης	285
9-5	Κρουστικές Αποκρίσεις Βασικών ΓΧΑ Συστημάτων	286
9-5.1	Ολοκληρωτής	286
9-5.2	Διαφοριστής	286
9-5.3	Ιδανική Καθυστέρηση	287
9-6	Συνέλιξη Κρουστικών Συναρτήσεων	287
9-7	Υπολογισμός Συνελικτικών Ολοκληρωμάτων	289
9-7.1	Χρονικά Καθυστερημένη Μοναδιαία Βηματική Είσοδος	289
9-7.2	Υπολογισμός Συνελικτικών Αθροισμάτων	293
9-7.3	Διέγερση Συστήματος από Τετραγωνικό Παλμό	295
9-7.4	Διέγερση Συστήματος από Βραχύβιο Τετραγωνικό Παλμό	296
9-7.5	Συζήτηση	296
9-8	Ιδιότητες των ΓΧΑ Συστημάτων	297
9-8.1	Συνδεσμολογίες Συστημάτων σε Σειρά και Παράλληλα	297
9-8.2	Διαφόριση και Ολοκλήρωση της Συνέλιξης	299
9-8.3	Ευστάθεια και Αιτιατότητα	301
9-9	Χρήση της Συνέλιξης για την Απομάκρυνση Παραμορφώσεων που Οφείλονται στην Πολυόδευση	304
9-10	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι	306
9-11	Προβλήματα	307

10 Απόκριση Συχνότητας

315

10-1	Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας των ΓΧΑ Συστημάτων	315
10-1.1	Σχεδιάζοντας την Απόκριση Συχνότητας	317
10-1.1.1	Λογαριθμική Κλίμακα	317
10-1.2	Αλλαγές Μέτρου και Φάσης	318
10-2	Απόκριση σε Πραγματικά Ημιτονοειδή Σήματα	320
10-2.1	Συνημιτονικοί Είσοδοι	320
10-2.2	Συμμετρία της $H(j\omega)$	321
10-2.3	Απόκριση σε Αθροισμα Ημιτονοειδών	322

10-2.4	Απόκριση ΓΧΑ Συστημάτων σε Περιοδικές Διεγέρσεις	324
10-3	Ιδανικά Φίλτρα	326
10-3.1	Ιδανικό Σύστημα Καθυστέρησης	326
10-3.2	Ιδανικό Κατωπερατό Φίλτρο	327
10-3.3	Ιδανικό Υψηπερατό Φίλτρο	327
10-3.4	Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο	328
10-4	Εφαρμογές των Ιδανικών Φίλτρων	329
10-5	Πεδίο Χρόνου ή Πεδίο Συχνότητας;	331
10-6	Ανακεφαλαίωση-Μελλοντικές Κατευθύνσεις	332
10-7	Προβλήματα	333

11 Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου

339

11-1	Ορισμός Μετασχηματισμού Fourier	340
11-2	Μετασχηματισμός Fourier και Φάσμα	342
11-2.1	Το Όριο της Σειράς Fourier	342
11-3	Ύπαρξη και Σύγκλιση του Μετασχηματισμού Fourier	344
11-4	Παραδείγματα Μετασχηματισμών Fourier	345
11-4.1	Πραγματικά Εγκυβερνητικά Σήματα Δεξιάς Επέκτασης	345
11-4.1.1	Εύρος Ζώνης και Ρυθμός Απόσβεσης	347
11-4.2	Σήματα Ορθογώνιου Παλμού	347
11-4.3	Σήματα Περιορισμένου Εύρους Ζώνης	349
11-4.4	Κρουστικά Σήματα στο Χρόνο και τη Συχνότητα	350
11-4.5	Ημιτονικά Σήματα	350
11-4.6	Περιοδικά Σήματα	352
11-5	Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier	354
11-5.1	Ιδιότητα Κλιμάκωσης	355
11-5.2	Συμμετρικές Μετασχηματισμού Fourier	357
11-6	Ιδιότητα Συνέλιξης	359
11-6.1	Απόκριση Συχνότητας	359
11-6.2	Μετασχηματισμός Fourier Συνέλιξης	360
11-6.3	Παραδείγματα Χρήσης της Ιδιότητας της Συνέλιξης	361
11-6.3.1	Συνέλιξη δυο Συναρτήσεων Περιορισμένου Εύρους Ζώνης	361
11-6.3.2	Γινόμενο δυο Συναρτήσεων Sinc	362
11-6.3.3	Μέθοδος Διάσπασης σε απλά κλάσματα	363
11-7	Βασικά ΓΧΑ συστήματα	365
11-7.1	Χρονική Καθυστέρηση	365
11-7.2	Διαφόριση	366
11-7.3	Συστήματα που περιγράφονται από Διαφορικές Εξισώσεις	367

11-8	Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού	368
11-8.1	Γενική Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού	369
11-8.2	Ιδιότητα Ολίσθησης στη Συχνότητα	370
11-9	Πίνακας Ιδιοτήτων και Ζευγών Μετασχηματισμού Fourier	371
11-10	Ο Μετασχηματισμός Fourier στην Ανάλυση της Πολυόδευσης	371
11-11	Ανακεφαλαίωση	374
11-12	Προβλήματα	374

12 Φιλτράρισμα, Διαμόρφωση και Δειγματοληψία 381

12-1	Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα	381
12-1.1	Σύνδεση Συστημάτων σε Σειρά και Παράλληλα	382
12-1.2	Ιδανικό Σύστημα Καθυστέρησης	383
12-1.3	Φίλτρα Διέλευσης Συχνοτήτων	386
12-1.3.1	Ιδανικό Φίλτρο Διέλευσης Χαμηλών Συχνοτήτων	387
12-1.3.2	Άλλα Ιδανικά Φίλτρα Διέλευσης Συχνοτήτων	389
12-1.4	Παράδειγμα Φιλτραρίσματος Στο Πεδίο της Συχνότητας	389
12-1.5	Αντιστάθμιση Επίδρασης ενός ΓΧΑ Φίλτρου	390
12-2	Ημιτονοειδής Διαμόρφωση Πλάτους	394
12-2.1	Διαμόρφωση Πλάτους Διπλής Πλευρικής Ζώνης	395
12-2.2	Σύστημα Διαμόρφωσης DSBAM με Μεταδιδόμενο Φέρον (DSBAM-TC)	399
12-2.3	Πολύπλεξη Διαίρεσης Συχνότητας	403
12-3	Δειγματοληψία και Ανακατασκευή	405
12-3.1	Το θεώρημα Δειγματοληψίας και το Φαινόμενο της Ψευδωνυμίας	405
12-3.2	Ανακατασκευή Σήματος Περιορισμένου Εύρους Ζώνης	407
12-3.3	Παρεμβολή Περιορισμένου Εύρους Ζώνης	410
12-3.4	Ιδανικοί Μετατροπείς Σ-σε-Δ και Δ-σε-Σ	411
12-3.5	Ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού-Χρόνου	412
12-3.6	Ο Αντίστροφος DTFT	414
12-3.7	Επεξεργασία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου με Συστήματα Διακριτού χρόνου	415
12-4	Ανακεφαλαίωση	418
12-5	Προβλήματα	419

13 Υπολογισμός Φάσματος 427

13-1	Πεπερασμένο Άθροισμα Fourier	428
13-2	Πολλοί Μετασχηματισμοί Fourier;	430
13-2.1	Σχέση του DTFT με τον CTFT	431

13-2.2	Σχέση του DFT με τον DTFT	431
13-2.3	Σχέση του DFT με τον CTFT	432
13-3	Χρονική Παραθύρωση	432
13-4	Ανάλυση Αθροίσματος Ημιτόνων	433
13-4.1	Ο DTFT ενός Παραθυρωμένου Ημιτονοειδούς Σήματος	438
13-5	Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier	439
13-5.1	Ο Αντίστροφος DFT	439
13-5.2	Σύνοψη της Παρουσίασης του DFT	440
13-5.3	Ο Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier (FFT)	441
13-5.4	Περιοδικά Σήματα και ο DFT	442
13-5.5	Οι Αρνητικές Συχνότητες και ο DFT	442
13-5.6	Παράδειγμα DFT	443
13-6	Φασματική Ανάλυση Σημάτων Πεπερασμένου Μήκους	445
13-7	Φασματική Ανάλυση Περιοδικών Σημάτων	447
13-8	Το Φασματογράφημα	448
13-8.1	Απεικόνιση Φασματογραφήματος	449
13-8.2	Φασματογραφήματα στο MATLAB	450
13-8.3	Φασματογράφημα Περιοδικού Δειγματοληπτημένου Σήματος	450
13-8.4	Διακριτική Ικανότητα	451
13-8.4.1	Πείραμα Διακριτικής Ικανότητας	452
13-8.5	Φασματογράφημα Μουσικής Κλίμακας	454
13-8.6	Φασματογράφημα Σήματος Ομιλίας	455
13-8.7	Φιλτραρισμένο Σήμα Ομιλίας	459
13-9	Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier	460
13-9.1	Παραγωγή του FFT	460
13-9.1.1	Υπολογιστικό Κόστος FFT	462
13-10	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι	464
13-11	Προβλήματα	465

A Μιγαδικοί Αριθμοί

469

A-1	Εισαγωγή	470
A-2	Συμβολισμός Μιγαδικών Αριθμών	470
A-2.1	Τετραγωνική Μορφή	471
A-2.2	Πολική Μορφή	471
A-2.3	Μετατροπές: Τετραγωνική και Πολική	472
A-2.4	Ιδιαιτερότητες Δεύτερου και Τρίτου Τεταρτημορίου	473
A-3	Ο Τύπος του Euler	474
A-3.1	Οι Αντίστροφες Σχέσεις του Euler	474

A-4	Αλγεβρικοί Κανόνες Μιγαδικών Αριθμών	475
	A-4.1 Ασκήσεις με Μιγαδικούς Αριθμούς	476
A-5	Γεωμετρική Ερμηνεία των Μιγαδικών Πράξεων	477
	A-5.1 Γεωμετρική Ερμηνεία της Πρόσθεσης	477
	A-5.2 Γεωμετρική Ερμηνεία της Αφαίρεσης	478
	A-5.3 Γεωμετρική Ερμηνεία του Πολλαπλασιασμού	480
	A-5.4 Γεωμετρική Ερμηνεία της Διαίρεσης	480
	A-5.5 Γεωμετρική Ερμηνεία του Αντίστροφου	480
	A-5.6 Γεωμετρική Ερμηνεία του Συζυγής, z^*	481
A-6	Δυνάμεις και Ρίζες	481
	A-6.1 Οι Ρίζες της Μονάδας	482
	A-6.1.1 Διαδικασία Εύρεσης Πολλαπλών Ριζών	482
A-7	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι	484
A-8	Προβλήματα	484

B Εργαστηριακές Ασκήσεις **487**

Ευρετήριο **489**

Πρόλογος Μεταφραστή

Αυτό το βιβλίο της επεξεργασίας σημάτων είναι, από πολλές απόψεις, ξεχωριστό. Εκτός από το γεγονός ότι είναι γραμμένο από επιστήμονες, που παρακολουθούν και, εν πολλοίς, καθορίζουν τις εξελίξεις σε πολλά πεδία της επεξεργασίας σημάτων, βασίζεται σε μια εντελώς διαφορετική φιλοσοφία και πρωτότυπη ιδέα των συγγραφέων. Συγκεκριμένα, η βασική ιδέα των συγγραφέων, η οποία ήδη έχει υλοποιηθεί σε ένα μεγάλο αριθμό Τμημάτων Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Πληροφορικής της Αμερικής, είναι ότι το αντικείμενο της Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων περιέχει όλα εκείνα τα στοιχεία που πρέπει να μάθουν σε μια πρώτη σειρά μαθημάτων οι μελλοντικοί Μηχανικοί. Με γνώμονα αυτόν της χρήσης των μαθηματικών ως γλώσσα έκφρασης και σκέψης για τα προβλήματα που απασχολούν ένα Μηχανικό, οι συγγραφείς επέλεξαν και δόμησαν προσεκτικά τα περιεχόμενα αυτού του βιβλίου. Σκοπός

τους είναι να αναδείξουν με ένα απλό και εισαγωγικό τρόπο αφενός την ομορφιά της επεξεργασίας σημάτων και αφετέρου την επιβεβλημένη χρήση της στις τεχνολογικές εφαρμογές. Αν και ο ελληνικός τίτλος του βιβλίου σίγουρα δεν αποδίδει αυτό που οι συγγραφείς επιδιώκουν με τον τίτλο του πρωτότυπου "*Signal Processing First*", πιστεύω ότι είναι σε πλήρη συμφωνία με τα περιεχόμενα του βιβλίου. Μια ματιά στον πίνακα περιεχομένων του βιβλίου αρκεί για να πειστεί κάποιος ότι το βιβλίο αρχίζει πολύ απλά, με μια εκτενή παρουσίαση των ημιτονοειδών σημάτων συνεχούς-χρόνου και την παράστασή τους με τη βοήθεια των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, και κορυφώνεται μ' έναν εντελώς φυσικό τρόπο με τον ορισμό του Μετασχηματισμού Fourier και την χρησιμοποίησή του στην παράσταση σημάτων συνεχούς-χρόνου, αφού αναλύσει μ' ένα μεστό τρόπο, θεμελιώδεις έννοιες της επεξεργασίας σημάτων όπως αυτής του φάσματος, της

δειγματοληψίας και της ανακατασκευής σημάτων, των FIR και IIR συστημάτων, της απόκρισης συχνότητας των συστημάτων και του μετασχηματισμού-z. Στα δύο τελευταία κεφάλαια του βιβλίου ουσιαστικά ο φοιτητής καλείται να εφαρμόσει τις γνώσεις που αποκόμισε από τα πρώτα κεφάλαια, σε πραγματικές και σύγχρονες εφαρμογές της ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων.

Μερικά από τα πολλά πλεονεκτήματα αυτού του βιβλίου, που μου επιτρέπει ο μικρός χώρος που επιβάλλει ένας πρόλογος να σημειώσω, είναι:

- Η απλότητα, η συνέχεια, η ισορροπία που υπάρχει μεταξύ της θεωρίας και των εφαρμογών, η ευκολία των αποδείξεων και η ευρύτητα του αναγνωστικού κοινού στο οποίο απευθύνεται.
- Ο μεγάλος αριθμός παρουσιάσεων-επιδείξεων που υπάρχουν στο CD που συνοδεύει το βιβλίο, βοηθούν στην κατανόηση των θεμελιωδών εννοιών της Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων, αλλά και στη σύνδεση της θεωρίας με τις εφαρμογές της.
- Ο μεγάλος αριθμός λυμένων ασκήσεων που περιέχονται στο CD εξασφαλίζει, στο φοιτητή, που πραγματικά ενδιαφέρεται για το αντικείμενο της ΨΕΣ, όχι μόνο σύγουρη επιτυχία στις εξετάσεις του αλλά παράλληλα διευρύνει τους ορίζοντές του για περαιτέρω ενασχόληση με το αντικείμενο.
- Η ύλη του βιβλίου έχει οργανωθεί έτσι ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους διδάσκοντες με πολλούς εναλλακτικούς τρόπους.

Από τη θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω για τη σημαντική βοήθεια που μου προσέφεραν σε αυτήν την προσπάθειά μου, τον Καθηγητή του Τμήματος Τηλεπικοινωνιών & Δικτύων του Πανεπιστημίου Βόλου Γεώργιο Μουστακίδη και τον Αναπληρωτή καθηγητή Τμήματος Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πάτρας Κωνσταντίνο Μπερμπερίδη για τις πολυάριθμες υποδείξεις των, που βελτίωσαν καθοριστικά την ποιότητα και την παρουσίαση του κειμένου αυτού του βιβλίου. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω για την πραγματικά μεγάλη και ουσιαστική βοήθειά τους, τους μεταπτυχιακούς φοιτητές του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πάτρας κ. Γεώργιο Ευαγγελίδη και κ. Βασίλειο Κεκάτο.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστώ τον εκδότη του βιβλίου κ. Άγγελο Γκότση για τη συνεχή υποστήριξη και ενθάρρυνσή του σε αυτή την προσπάθειά μου, καθώς και τον κ. Ιωάννη Πικραμένο για την προσοχή που επέδειξε κατά την εκτύπωση του βιβλίου.

Ελπίζω ότι με τη βοήθεια όλων παραδίδω σήμερα στους φοιτητές των ελληνικών πανεπιστημίων και τεχνολογικών ιδρυμάτων, αλλά και γενικά στους Έλληνες επιστήμονες, ένα χρήσιμο, από πολλές απόψεις, βιβλίο.

Ε. Ζ. Ψαράκης
Επίκουρος Καθηγητής
Τμήματος Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής
Πανεπιστημίου Πάτρας

Πρόλογος Συγγραφέων

Αυτό το βιβλίο μαζί με το συνοδευτικό CD είναι το αποτέλεσμα μιας προσπάθειας σχεδόν δέκα (10) έτων που προήλθε, και ήταν καθοδηγούμενη, από την σκέψη ότι η επεξεργασία σημάτων αποτελεί την καλύτερη αφετηρία για τις σπουδές των Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και των Μηχανικών Υπολογιστών. Το καλοκαίρι του 1993, δύο από μας (J. H. McClellan και R. W. Schafar) αρχίσαμε να αναπτύσσουμε ένα νέο τετραμηνιαίο μάθημα που θα αποτελούσε την πρώτη σειρά μαθημάτων των φοιτητών του Τμήματος Μηχανικών Υπολογιστών του Τεχνολογικού Ινστιτούτου της Georgia, οι οποίοι μέχρι εκείνη τη στιγμή ακολουθούσαν ένα επικαλυπτόμενο, αλλά κατά τα άλλα ξεχωριστό, πρόγραμμα σπουδών με τους φοιτητές του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών. Υποστηρίξαμε ότι το αντικείμενο της Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος (ΨΕΣ) περιείχε όλα εκείνα τα στοιχεία που θα θέλαμε να μάθουν σε μια πρώτη σειρά μαθημάτων οι μελλοντικοί

Μηχανικοί Υπολογιστών. Συγκεκριμένα, εισήγαγε τους φοιτητές στην χρήση των μαθηματικών ως μια γλώσσα έκφρασης και σκέψης για τα προβλήματα που απασχολούν ένα Μηχανικό, περιείχε όλες τις χρήσιμες προκαταρκτικές γνώσεις που αποτελούν τη βάση επόμενων μαθημάτων του προγράμματος σπουδών, ανεδείκνυε τον ψηφιακό υπολογισμό σαν το μέσο στην υλοποίηση Συστημάτων και τέλος προσέφερε τη δυνατότητα με την βοήθεια ενδιαφερουσών εφαρμογών να παρακινήσει τους πρωτοετείς Μηχανικούς να αφιερώσουν χρόνο και σκληρή δουλειά για τη σύνδεση των Μαθηματικών και του Υπολογισμού στην επίλυση προβλημάτων.

Δεν ήμαστε οι πρώτοι που είχαμε αυτήν την ιδέα. Ειδικότερα, άσκησαν σημαντική επίδραση στη σκέψη μας δύο βιβλία του καθηγητή Ken Steiglitz του Πανεπιστημίου του Princeton¹. Οι σημαντικότεροι λόγοι που έκαναν

¹*An Introduction to Discrete Systems*, John Wiley & Sons, 1972, and

εφικτή το 1993 την υλοποίηση αυτού που είναι γνωστό στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Georgia σαν προσέγγιση “DSP First” ήταν: (1) η δυνατότητα εύκολης πρόσβασης των όλο και ισχυρότερων, από άποψη υπολογιστικής ισχύος, προσωπικών υπολογιστών και (2) η διαθεσιμότητα του λογισμικού MATLAB, ενός ισχυρού και εύχρηστου λογισμικού περιβάλλοντος για αριθμητικούς υπολογισμούς. Θα πρέπει να παραδεχθούμε, ότι το βιβλίο του Steiglitz που εκδόθηκε το 1972 ήταν πολύ προχωρημένο για την εποχή του, αν πάρουμε υπόψη μας ότι η ΨΕΣ τότε είχε πολύ λίγες πρακτικές εφαρμογές και επιπλέον ότι ακόμη και οι πολύ απλές προσομοιώσεις στους διαθέσιμους υπολογιστές εκείνης της εποχής, απαιτούσαν πολύ μεγάλη προγραμματιστική προσπάθεια. Ωστόσο, από τις αρχές της δεκαετίας του 1990, εφαρμογές της ΨΕΣ όπως τα CD, τα modems υψηλών ταχυτήτων, η κινητή τηλεφωνία άρχισαν να εξαπλώνονται εξαιτίας της διαθεσιμότητας χαμηλού κόστους Ψηφιακών Επεξεργαστών Σήματος που μπορούσαν να εκτελέσουν υπολογισμούς σε “πραγματικό χρόνο.” Κατά συνέπεια, η τεχνολογία των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων ήταν η κατευθυντήρια δύναμη που παρείχε συγχρόνως τα μέσα και την δυνατότητα για μια κατάλληλη, βασισμένη στον Η/Υ, εργαστηριακή εμπειρία για την εκμάθηση της Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων και τη δημιουργία ενός κλίματος εφαρμογών που θα δρούσε ως κίνητρο για μελέτη.

Από την αρχή πιστεύαμε ότι “η πρακτική εμπειρία” με τα πραγματικά σήματα ήταν κρίσιμη. Η εμπειρία αυτή παρέχεται από ένα “εργαστήριο” βασισμένο στο MATLAB. Με τις εργαστηριακές ασκήσεις, οι φοιτητές κερδίζουν την άμεση επαφή με το άκουσμα και την απεικόνιση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από διαδικασίες φιλτραρίσματος, που αυτοί εφαρμόζουν σε σήματα ήχου και εικόνας. Συνθέτουν μουσική χρησιμοποιώντας ημιτονικά σήματα και βλέπουν ότι αυτά τα ίδια ημιτονικά σήματα αποτελούν τη βάση των modems που χρησιμοποιούν καθημερινά για την πρόσβασή τους στο διαδίκτυο. Διαπιστώσαμε, επίσης, ότι το

MATLAB κατέστησε δυνατή την εύκολη και γρήγορη ανάπτυξη προγραμμάτων επίδειξης για οπτική ερμηνεία και διευκρίνιση πολύπλοκων μαθηματικών εννοιών. Από το 1995, είχαμε γράψει σημειώσεις που κάλυπταν τα θέματα του μαθήματός μας και είχαμε συγκεντρώσει ένα μεγάλο αριθμό ενισχυτικού εργαστηριακού υλικού βασισμένο σε υπολογιστή. Ο Mark Yoder, ερχόμενος από το Rose-Hulman με εκπαιδευτική άδεια, είχε την ιδέα να ενσωματώσουμε όλο αυτό το υλικό σε μια μορφή που και άλλοι διδάσκοντες (και φοιτητές) θα μπορούσαν να έχουν εύκολη πρόσβαση σ’ αυτό. Η ιδέα αυτή οδήγησε στην δημιουργία ενός CD που περιείχε όλο το περιεχόμενο της ιστοσελίδας του μαθήματός μας. Περιελάμβανε επιδείξεις και δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται στην αίθουσα διδασκαλίας, εργαστηριακές ασκήσεις και βέβαια, πολλές λυμένες ασκήσεις. Ως διδάσκοντες, πιστεύουμε ότι αυτό το υλικό έχει αλλάξει τον τρόπο που παρουσιάζουμε τις ιδέες, επειδή προσφέρει νέους εναλλακτικούς τρόπους απεικόνισης μιας έννοιας, “ πέρα από τις εξισώσεις.” Με την πάροδο του χρόνου, η ιστοσελίδα μας συνεχώς εμπλουτίζεται. Προσδοκούμε ότι το φαινόμενο αυτό θα συνεχιστεί και ότι αυτοί που χρησιμοποιούν αυτό το υλικό θα εμπνευστούν και θα δημιουργήσουν πρόσθετες επιδείξεις και εργαστηριακές ασκήσεις. Το 1998, όλο αυτό το υλικό συσκευάστηκε μαζί με το βιβλίο, στο οποίο δώσαμε τον περιγραφικό τίτλο *DSP First: A Multimedia Approach*.

Με την ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας, στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Georgia, άλλαξε το πρόγραμμα σπουδών και τα μαθήματα από τετραμηνιαία έγιναν εξαμηνιαία και στο νέο μάθημα δώσαμε τον τίτλο “Signal Processing First,” το πρώτο μάθημα μιας σειράς σχετικών μαθημάτων για τους Μηχανικούς Υπολογιστών και τους Ηλεκτρολόγους Μηχανικούς. Ωστόσο, βρεθήκαμε με ένα βιβλίο του οποίου η ύλη κάλυπτε μόνο τα δύο-τρίτα της ύλης που χρειαζόμασταν για ένα εξαμηνιαίο υποχρεωτικό μάθημα στα σήματα και συστήματα². Το γεγονός αυτό μας οδήγησε σε μια καινούργια τετραετή προσπάθεια που

A Digital Signal Processing Primer: With Applications to Computer Music, Addison-Wesley Publishing Company, 1996.

²Το *DSP First*, το οποίο εξακολουθεί να εκδίδεται, είναι κατάλληλο για ένα τετραμηνιαίο μάθημα ή για ένα μάθημα “εισαγωγή στην επεξεργασία σημάτων” που δεν θα απευθύνεται σε φοιτητές τμημάτων Μηχανικών Υπολογιστών και Ηλεκτρολόγων Μηχανικών. Η ύλη αυτού του βιβλίου

είχε σαν αποτέλεσμα να συμπεριλάβουμε τέσσερα νέα κεφάλαια σχετικά με την επεξεργασία σημάτων συνεχούς χρόνου και το Μετασχηματισμό Fourier, πολλές νέες εργαστηριακές ασκήσεις με θέμα το φιλτράρισμα, τις σειρές Fourier, την αναλογική και ψηφιακή επικοινωνία, πολλές νέες επιδείξεις και οπτικοποιήσεις, εκατοντάδες προβλημάτων με τις λύσεις τους και την ενημέρωση πολλών παλαιών επιδείξεων.

Τα περιεχόμενα αυτού του βιβλίου αποτελούν το αποτέλεσμα της προσπάθειας που καταβάλαμε για να υλοποιήσουμε μία εκτεταμένη έκδοση της αρχικής μας βασικής φιλοσοφίας. Είναι ένα συμβατικό βιβλίο, αν και, όπως υποδηλώνει και ο τίτλος *Signal Processing First*, η διαφορετικότητα του βιβλίου (και του CD-ROM που το συνοδεύει) έγκειται στο γεγονός ότι παρουσιάζει την επεξεργασία σημάτων με ένα τρόπο κατάλληλο για ένα εισαγωγικό μάθημα, δηλαδή, το επίπεδο ενός δευτεροετή φοιτητή σε ένα τυπικό πανεπιστήμιο της Αμερικής. Σίγουρα τα θέματα που περιέχονται στο βιβλίο δεν είναι πρωτότυπα, αλλά δεδομένου ότι πρέπει να συνδυαστούν οι έννοιες της επεξεργασίας σήματος με μερικές εισαγωγικές ιδέες, η εξέλιξη των θεμάτων μπορεί να θεωρηθεί, από μερικούς δασκάλους, ακατάλληλη. Ένας λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι μέσα από το πρόγραμμα σπουδών των Ηλεκτρολόγων Μηχανικών, τα σήματα, τα συστήματα και η Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων παραδοσιακά αντιμετωπίζονται σαν κατώτερες και ανώτερες σειρές μαθημάτων, για τις οποίες ένα βασικό υπόβαθρο της θεωρίας των γραμμικών κυκλωμάτων και των γραμμικών συστημάτων θεωρείται σαν προαπαιτούμενο. Συνεχίζουμε να πιστεύουμε έντονα ότι υπάρχουν σοβαροί λόγοι για την αντιστροφή αυτής της σειράς, αφού η πρώιμη μελέτη της επεξεργασίας σημάτων δίνει τη δυνατότητα να παρουσιαστεί στους φοιτητές ότι τα μαθηματικά και ο ψηφιακός υπολογισμός μπορούν να αποτελέσουν το κλειδί για την κατανόηση γνωστών εφαρμογών. Επιπλέον, αυτή η προσέγγιση καθιστά το θέμα πιο προσιτό στους φοιτητές άλλων επιστημονικών περιοχών, όπως αυτής

της πληροφορικής, και άλλων τομέων της εφαρμοσμένης μηχανικής. Αυτό το σημείο είναι όλο και περισσότερο σημαντικό επειδή μη-ειδικοί αρχίζουν να χρησιμοποιούν τις τεχνικές της ΨΕΣ σε πολλούς τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας σε καθημερινή βάση.

Η ύλη του βιβλίου οργανώνεται με τέτοιο τρόπο για να κινηθεί από τα απλά ημιτονοειδή σήματα συνεχούς-χρόνου στα σήματα και συστήματα διακριτού-χρόνου, στην συνέχεια πίσω στον συνεχή-χρόνο και τελικά, ο διακριτός και συνεχής χρόνος αναμειγνύονται όπως συμβαίνει συχνά στα πραγματικά συστήματα. Μια ματιά στον πίνακα περιεχομένων του βιβλίου αρκεί για να πεισθεί κάποιος ότι το βιβλίο αρχίζει πολύ απλά (Κεφάλαιο 2) με μια εκτενή παρουσίαση/συζήτηση των ημιτονοειδών σημάτων συνεχούς-χρόνου και την παράστασή τους με την βοήθεια των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων. Παραδοσιακά, το θέμα αυτό παρουσιάζεται στο μάθημα των γραμμικών κυκλωμάτων. Στη συνέχεια προχωρούμε στην παρουσίαση της έννοιας του φάσματος (Κεφάλαιο 3) χρησιμοποιώντας αθροίσματα ημιτονικών σημάτων με μια σύντομη εισαγωγή στις σειρές Fourier. Στο σημείο αυτό μεταβαίνουμε στα σήματα διακριτού-χρόνου χρησιμοποιώντας δειγματοληπτημένα ημιτονοειδή σήματα (Κεφάλαιο 4). Αυτό μας επιτρέπει να παρουσιάσουμε σημαντικά ζητήματα που εμφανίζονται κατά την διαδικασία της δειγματοληψίας χωρίς την πολυπλοκότητα του Μετασχηματισμού Fourier. Μέχρι το σημείο αυτό έχουμε στηριχθεί μόνο στα απλά μαθηματικά που απαιτούν οι συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου. Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες των γραμμικών συστημάτων με την βοήθεια απλών FIR φίλτρων (Κεφάλαιο 5). Η βασική έννοια της απόκρισης συχνότητας παρουσιάζεται και ερμηνεύεται για τα FIR φίλτρα (Κεφάλαιο 6) και στην συνέχεια παρουσιάζεται ο Μετασχηματισμός- z (Κεφάλαιο 7) και τα IIR συστήματα (Κεφάλαιο 8). Η ύλη που περιέχουν τα πρώτα οκτώ κεφάλαια είναι παρόμοια με την ύλη που περιέχει το βιβλίο *DSP First*. Στο σημείο αυτό, επιστρέφουμε στα σήματα και συστήματα συνεχούς-χρόνου με την εισαγωγή των συνελκτικών ολοκληρωμάτων (Κεφάλαιο 9) και της

αναμορφώνεται ώστε να γίνει συμβατή με την ύλη που περιέχεται στα Κεφάλαια 1-8 του βιβλίου που έχετε στα χέρια σας.

απόκρισης συχνότητας των συστημάτων συνεχούς-χρόνου στη συνέχεια (Κεφάλαιο 10). Αυτό οδηγεί με φυσικό τρόπο σε μια συζήτηση για τον Μετασχηματισμό Fourier και τη χρήση του στην παράσταση σημάτων συνεχούς-χρόνου (Κεφάλαιο 11). Στα δύο τελευταία κεφάλαια του βιβλίου γίνεται εφαρμογή των εννοιών που συζητήθηκαν στα πρώτα κεφάλαια. Σε αυτή τη φάση, ένας φοιτητής ο οποίος έχει διαβάσει πιστά το κείμενο, απασχολήθηκε με τις προτεινόμενες εργασίες και εκτέλεσε τις εργαστηριακές ασκήσεις ανταμείβεται με τη δυνατότητα που αποκτά στο να κατανοεί και να εντοπίζει εφαρμογές που απαιτούν γραμμικό φιλτράρισμα, διαμόρφωση πλάτους, το θεώρημα δειγματοληψίας, το φιλτράρισμα διακριτού-χρόνου και την ανάλυση φάσματος.

Το μάθημα στο Ινστιτούτο Τεχνολογίας της Georgia, που είναι διάρκειας 15 εβδομάδων, καλύπτει την πλειοψηφία της ύλης που περιέχεται στα Κεφάλαια 2-12 με δύο ώρες διδασκαλίας, 1,5 ώρες φροντιστηρίου και 1,5 ώρες εργαστηρίου ανά εβδομάδα. Όπως ήδη αναφέραμε, δίνουμε ιδιαίτερη έμφαση στο θέμα του εργαστηρίου, επειδή πιστεύουμε ότι αυτό είναι ουσιαστικό στην δραστηριοποίηση των φοιτητών μας να μάθουν τα μαθηματικά που απαιτεί η επεξεργασία σημάτων και επειδή αυτό εισάγει τους φοιτητές μας στη χρήση ισχυρού λογισμικού, που είναι απαραίτητο στους μηχανικούς στην ανάλυση και σχεδίαση. Στο Rose-Hulman, χρησιμοποιούμε το βιβλίο στα πλαίσια ενός εισαγωγικού μαθήματος, διάρκειας 10 εβδομάδων, στο οποίο καλύπτονται τα Κεφάλαια 4-13 με 4 ώρες διδασκαλίας ανά εβδομάδα. Οι φοιτητές χρησιμοποιούν το MATLAB σ' όλη τη διάρκεια του μαθήματος, αλλά χωρίς την ύπαρξη φυσικού εργαστηρίου.

Όπως προκύπτει από την συζήτησή μας για την ύλη που περιέχεται σ' αυτό το βιβλίο, το *Signal Processing First* δεν αποτελεί ένα κλασσικό βιβλίο σημάτων και συστημάτων. Μία σημαντική διαφορά αποτελεί η ύλη που συμπεριλαμβάνεται στο βιβλίο για τα ημιτονικά σήματα και την χρήση των μιγαδικών φασόρων στην αναπαράστασή τους. Σε ένα κλασσικό πρόγραμμα σπουδών των Ηλεκτρολόγων Μηχανικών, οι βασικές

αυτές έννοιες καλύπτονται κάτω από την ομπρέλα της θεωρίας των γραμμικών κυκλωμάτων, η διδασκαλία της οποίας προηγείται αυτής των σημάτων και συστημάτων. Πραγματικά, η επιλογή του τίτλου αυτού του βιβλίου, όπως και του πρόγονού του, έχει σκοπό να υπογραμμίσει αυτήν την βασική διαφορά. Ένα επίσης σημαντικό σημείο είναι ότι αν προηγείται η διδασκαλία της επεξεργασίας σημάτων παρέχει την δυνατότητα νέων προσεγγίσεων στη διδασκαλία της θεωρίας των γραμμικών κυκλωμάτων, δεδομένου ότι υπάρχει το κατάλληλο υπόβαθρο για να χτίσει κάποιος και να δώσει διαφορετική έμφαση στο μάθημα των κυκλωμάτων. Εμείς, εκμεταλευόμενοι το γεγονός ότι οι φοιτητές μας είναι γνώστες βασικών εννοιών όπως αυτών του φάσους και της ημιτονικής απόκρισης μόνιμης κατάστασης, προχωράμε γρηγορότερα από τα παθητικά κυκλώματα στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος. Επιπλέον, οι φοιτητές έχουν δει τις σημαντικές έννοιες της απόκρισης συχνότητας, των πόλων και των μηδενικών πριν μελετήσουν τα γραμμικά κυκλώματα. Αυτό μας επιτρέπει να δώσουμε περισσότερη έμφαση στα κυκλώματα σαν γραμμικά συστήματα. Για Παράδειγμα, ο Μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιείται στην διδασκαλία του μαθήματος των κυκλωμάτων σαν ένα εργαλείο στην λύση των προβλημάτων που άπτονται των γραμμικών κυκλωμάτων. Αυτό οδήγησε σε ένα νέο βιβλίο συνοδευόμενο από ένα CD με συγγραφείς τους καθηγητές Russell Mersereau και Joel Jackson³.

Μία δεύτερη βασική διαφορά του βιβλίου από άλλα κλασσικά βιβλία σημάτων και συστημάτων, είναι ότι στο βιβλίο αυτό δίνεται έμφαση σε θέματα που σχετίζονται αποκλειστικά με έννοιες του "πεδίου συχνότητων". Αυτό σημαίνει ότι δεν περιέχονται θέματα όπως αυτά του Μετασχηματισμού Laplace, του χώρου κατάστασης και του έλεγχου ανατροφοδότησης. Στο Ινστιτούτο Τεχνολογίας της Georgia, αυτά τα θέματα καλύπτονται στο υποχρεωτικό μάθημα της θεωρίας των γραμμικών κυκλωμάτων και στο εισαγωγικό επιπέδου κατεπιλογής μαθήματος της

³R. M. Mersereau and J. R. Jackson, *Circuits: A Systems Perspective*, πρόκειται να εκδοθεί από την Pearson Prentice Hall, Pearson Education, Inc.

θεωρίας ελέγχου συστημάτων. Αν και το περιεχόμενο του βιβλίου έχει διαμορφωθεί σαφώς από μια συγκεκριμένη φιλοσοφία, αυτό δεν σημαίνει ότι αυτό και το CD που το συνοδεύει, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο με τον τρόπο που χρησιμοποιείται στο Ινστιτούτο Τεχνολογίας της Georgia. Για παράδειγμα, στο Rose-Hulman, η ύλη που αναφέρεται στα ημιτονικά σήματα και τους φάσους παραλείπεται, επειδή οι σπουδαστές γνωρίζουν αυτήν την ύλη από το μάθημα κυκλωμάτων. Αυτό μας επιτρέπει να καλύψουμε το υπόλοιπο μέρος της ύλης που περιέχεται στο βιβλίο σε τέσσερις μήνες. Πράγματι, με κατάλληλη επιλογή των θεμάτων, το βιβλίο μας μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε για ένα τετραμηνιαίο, είτε για ένα εξαμηνιαίο μάθημα σήματος και συστημάτων που δίνει έμφαση στις εφαρμογές της επεξεργασίας σημάτων και των επικοινωνιών από την άποψη του πεδίου της συχνότητας. Για τα περισσότερα προγράμματα σπουδών των Ηλεκτρολόγων Μηχανικών, θέματα που σχετίζονται με τον έλεγχο θα πρέπει να καλυφθούν από άλλα συγγράμματα. Σε προγράμματα σπουδών, όπως αυτά της Πληροφορικής και των Μηχανικών Υπολογιστών, το *Signal Processing First* δίνει έμφαση στα θέματα εκείνα που είναι πιο σχετικά με τα πολυμέσα. Τα θέματα που έχουν σχέση με τον έλεγχο, γενικά, δεν είναι προαπαιτούμενα του προγράμματος σπουδών. Αυτό είναι επίσης πολύ πιθανό να ισχύει και σε άλλους επιστημονικούς τομείς, στους οποίους η συλλογή δεδομένων και η ανάλυση στο πεδίο της συχνότητας επιφυλάσσει έναν προεξέχοντα ρόλο στην ανάλυση και την σχεδίαση⁴.

Το CD που συνοδεύει το βιβλίο περιέχει όλο το υλικό που χρησιμοποιούμε αυτή την στιγμή στη διδασκαλία ενός εξαμηνιαίου μαθήματος στους δευτεροετείς φοιτητές των Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και των Μηχανικών Υπολογιστών. Αυτός ο τύπος του υλικού έχει γίνει ένα κοινό συμπλήρωμα στη διδασκαλία σε μια εποχή που “οι υπολογιστές στην εκπαίδευση” είναι η κρίσιμη λέξη. Αυτοί οι νέοι τρόποι διδασκαλίας που βασίζονται

σε υπολογιστικά μέσα, παρέχουν ισχυρούς τρόπους στην έκφραση ιδεών, που παρακινούν τους φοιτητές μας στην εκπαίδευσή τους. Ως συγγραφείς, συνεχίζουμε να πειραματιζόμαστε με τους διαφορετικούς τρόπους παρουσίασης, όπως είναι οι αφηγήσεις και η προβολή ταινιών που περιέχονται στο συνοδευτικό CD, μαζί με το τεράστιο αρχείο των λυμένων προβλημάτων. Στο αρχικό CD που συνοδεύει το βιβλίο *DSP First* παρατηρήσαμε ότι ο εντοπισμός του υλικού ήταν μια πρόκληση. Έτσι σε αυτό το CD έχει συμπεριληφθεί μια μηχανή αναζήτησης προκειμένου κάποιος να μπορεί εύκολα να βρει το σχετικό υλικό με αναζητήσεις μέσω λέξεων κλειδιών. Τώρα, για παράδειγμα, αν θέλεις να ξέρεις γιατί το αρχείο `firfilt.m` είναι στο *SP-First Toolbox*, μπορείς απλά να ψάξεις για `firfilt.m` και να δεις όλα τα εργατήρια και τις εργασίες που το χρησιμοποιούν.

Αυτό το βιβλίο, και το CD που το συνοδεύει, αντιπροσωπεύει μια απίστευτη σε όγκο εργασία των τριών συγγραφέων, πολλών φοιτητών και συναδέλφων. Από τους πολλούς συμμετέχοντες, πέντε φοιτητές οι οποίοι χρησίμευσαν ως βοηθοί διδασκαλίας βοήθησαν ποικιλοτρόπως και ουσιαστικά για το υλικό που υπάρχει στο CD. Ο Jeff Schodorf ανέπτυξε τις αρχικές επιδείξεις-παραουσιάζεις για το φαινόμενο της ψευδωνυμίας-αναδίπλωσης και την ανακατασκευή για το Κεφάλαιο 4. Έκανε επίσης μαζί με τον Mark Yoder ένα μεγάλο μέρος της πρώτης οργάνωσης από όλες τις επιδείξεις που περιέχονται στο CD του βιβλίου *DSP First*. Ο David Anderson, τοποθετημένος σαν μαθητευόμενος δίπλα στον Jeff, πήρε στη συνέχεια πάνω του το μάθημα. Ο David συνεισέφερε με νέες εργαστηριακές ασκήσεις και επανασχεδίασε την διεπαφή που υπήρχε στο βιβλίο *DSP First* για εύκολη χρήση του CD. Ο Jordan Rosenthal ανέπτυξε μια μεθοδολογία για να δημιουργεί γραφικές διεπαφές χρήστη (GUIs), που τώρα χρησιμοποιείται σε όλες τις επιδείξεις μας. Πολλοί άλλοι φοιτητές έχουν ωφεληθεί από την εξαιρετική δεξιότητά του στο MATLAB. Ο Greg Krudysz έγραψε την επίδειξη `CON2DIS` και έχει αναλάβει τώρα πρωταγωνιστικό ρόλο στην ανάπτυξη των διεπαφών.

Επιπρόσθετα, πολλοί προπτυχιακοί φοιτητές έχουν υλο-

⁴ Παρατηρήστε ότι τα τελευταία κεφάλαια του βιβλίου απαιτούν ο φοιτητής να έχει υπόβαθρο στην μαθηματική ανάλυση, κάτι που δεν απαιτεί το βιβλίο *DSP First*.

ποιήσει στο MATLAB προγράμματα, γραφικές διεπαφές χρήστη και επιδείξεις-παρουσιάσεις, που αποτελούν ένα σημαντικό μέρος του CD. Ειδικότερα, ο Craig Ulmer ανέπτυξε το PeZ ένα πολύχρονο προπτυχιακό ερευνητικό πρόγραμμα και συνεισέφερε μερικά επιπλέον GUIs που χρησιμοποιούνται στα εργαστήρια. Ο Koon Kong επανεξέτασε το PeZ για την προσαρμογή του σε μεταγενέστερες εκδόσεις του MATLAB. Ο Joseph Stanley κατασκεύασε την πρώτη μας ταινία, την ταινία που αναφέρεται στο διαπασών. Ο Amer Abufadel ανέπτυξε τις επιδείξεις του Κεφαλαίου 6. Ο Emily Eaton έγραψε τον κώδικα του GUI για την Μουσική και παρείχε πολλά από τα μουσικά πεντάγραμματα και τις εκτελέσεις σε πιάνο που απαιτήθηκαν. Ο Rajbabu Velmurugan βελτίωσε το GUI Μουσικής και παρείχε τελικές μικρές αναπροσαρμογές για όλα τα GUIs των εργαστηριακών ασκήσεων. Ο Janak Patel έγραψε τα περισσότερα από τα αρχεία βοήθειας για τα GUIs. Ο Greg Slabaugh έγραψε τον κώδικα για την επίδειξη των σειρών Fourier σαν ένα JAVA applet και ο Mustayeen Nayeem τον μετέτρεψε σε μία επίδειξη που μπορεί να τρέξει στο MATLAB. Ο Budyanto Junus έγραψε την πρώτη επίδειξη για τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα (LTI). Ο Mehdi Javaramand ανέπτυξε τμήματα του GUI Phasor Races. Ο Sam Li έχει συμμετάσχει στην ανάπτυξη πολλών επιμέρους τμημάτων των εργαστηριακών ασκήσεων. Ο τελευταίος, ο Arthur Hinson και ο Ghassan Al-Regib επίσης ανέπτυξαν πολλές ερωτήσεις για τα προ-εργαστήρια και υποδείξεις. Ο Kathy Harrington δημιούργησε κατάλογους λέξεων κλειδιών για το ψάξιμο των εργασιών και δημιούργησε ένα εκτενές σύνολο ερωτήσεων, που γίνονται συχνά στα εργαστήρια. Ο Bob Paterno κατέγραψε έναν μεγάλο αριθμό διδακτικών ταινιών σχετικές με το MATLAB.

Κατά τη διάρκεια των προηγούμενων λίγων ετών, πολλοί καθηγητές έχουν συμμετάσχει στη διδασκαλία του μαθήματος ECE-2025 του Ινστιτούτο Τεχνολογίας της Georgia ως ομιλητές και ως διδάσκοντες όντας σε εκπαιδευτική άδεια. Πολλοί από αυτούς έχουν επίσης γράψει λύσεις προβλημάτων που συμπεριλαμβάνονται σε αυτό CD. Νοιώθουμε υποχρεωμένοι στους παρακάτω, οι οποίοι μας επέτρεψαν να συμπεριλάβουμε τις λύσεις τους:

στον Randy Abler, στον Yucel Altunbasak, στον John Bordelon, στον Giorgio Casinovi, στον Russ Callen, στην Kate Cummings, στον Richard Dansereau, στον Steve DeWeerth, στον Michael Fan, στον Bruno Frazier, στον Faramarz Fekri, στον Elias Glytsis, στον Monty Hayes, στον Bonnie Heck, στον Mary Ann Ingram, στον Paul Hasler, στον Chuanyi Ji, στον Aaron Lanterman, στον Russell Mersereau, στον Geofferey Li, στον Steve McLaughlin, στον Mohamed Moad, στον Bill Sayle, στον Mark Smith, στον Whit Smith, στον David Taylor, στον Erik Verriest, στον Doug Williams, στον Tony Yezzi και στον Tong Zhou.

Είμαστε επίσης υποχρεωμένοι στον Wayne Padgett και στον Bruce Black, που έχουν διδάξει το μάθημα ECE-280 στο Rose-Hulman και έχουν συμβάλει με πολλές καλές και πρωτότυπες ιδέες.

Θέλουμε επίσης να αναγνωρίσουμε την συνεισφορά του Εκδότη μας, Tom Robbins της Pearson Prentice Hall. Πίστεψε πολύ νωρίς στο *DSP First* μας υποστήριξε και μας ενθάρρυνε σε κάθε βήμα αυτής της προσπάθειας. Φρόντισε επίσης για τις αναθεωρήσεις και διορθώσεις του κειμένου και του CD από κάποιους πολύ σχολαστικούς και προσεκτικούς κριτικούς, στους οποίους συμπεριλαμβάνονται ο Filson Glantz, ο S. Hossein Mousavinezhad, ο Geoffrey Orsak, ο Mitch Wilkes, ο Robert Strum, ο James Kaiser, ο Victor DeBrunner, η Timothy Schultz και η Anna Baraniecki.

Τέλος, θέλουμε να αναγνωρίσουμε την κατανόηση και την υποστήριξη των συζύγων μας (Carolyn McClellan, Dorothy Schafer και Sarah Yoder). Η φωτογραφία της γάτας Percy της Carolyn, μετά από στοιχειώδη ψηφιακή επεξεργασία, εμφανίζεται στο εξώφυλλο του βιβλίου. Μας υποστήριξαν υπομονετικά σ' αυτή τη φαινομενικά ατέρμονη προσπάθεια που συνεχώς καταναλώνει ενέργεια και χρόνο. Πράγματι, η προσπάθεια αυτή θα συνεχιστεί πιο πέρα από το παρόν κείμενο και το CD, αφού υπάρχουν πάρα πολλές ιδέες οι οποίες θα πρέπει να εξερευνηθούν και να υλοποιηθούν.

J. H. McClellan.
R. W. Schafer.
M. A. Yoder.

Κ Ε Φ Α 1 Λ Α Ι Ο



Εισαγωγή

Στην εποχή των πολυμεσικών υπολογιστών, των ηχητικών και τηλεοπτικών συστημάτων ψυχαγωγίας και των ψηφιακών συστημάτων επικοινωνιών, είναι σχεδόν σίγουρο ότι έχετε διαμορφώσει κάποια άποψη για την έννοια των όρων *σήμα* και *σύστημα* και είναι πολύ πιθανό να χρησιμοποιείτε αυτούς τους όρους συχνά στην καθημερινή σας ζωή.

Είναι πολύ πιθανό η χρήση και η κατανόηση των παραπάνω όρων να είναι σωστή με την ευρεία έννοια. Για παράδειγμα, ίσως να σκέφτεστε ένα σήμα σαν “κάτι” που μεταφέρει πληροφορίες. Συνήθως, αυτό το κάτι είναι ένα πρότυπο μεταβολών μιας φυσικής ποσότητας που μπορεί να επεξεργαστεί, να αποθηκευτεί, ή να μεταδοθεί με φυσικές διαδικασίες. Μερικά παραδείγματα αποτελούν τα σήματα ομιλίας, τα ακουστικά σήματα, τα σήματα εικόνας και βίντεο, τα βιοϊατρικά σήματα, τα σήματα ραντάρ και τα σεισμικά σήματα. Είναι πολύ σημαντικό στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι τα σήματα μπορούν να

λάβουν πολλές ισοδύναμες μορφές ή αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, ένα σήμα ομιλίας παράγεται σαν ακουστικό σήμα, αλλά μπορεί να μετατραπεί σε ένα ηλεκτρικό σήμα από ένα μικρόφωνο, ή σε ένα πρότυπο μαγνήτισης κατά την καταγραφή του σε μια μαγνητική ταινία, ή ακόμα και σε μια σειρά αριθμών όπως συμβαίνει στην ψηφιακή καταγραφή των ακουστικών σημάτων.

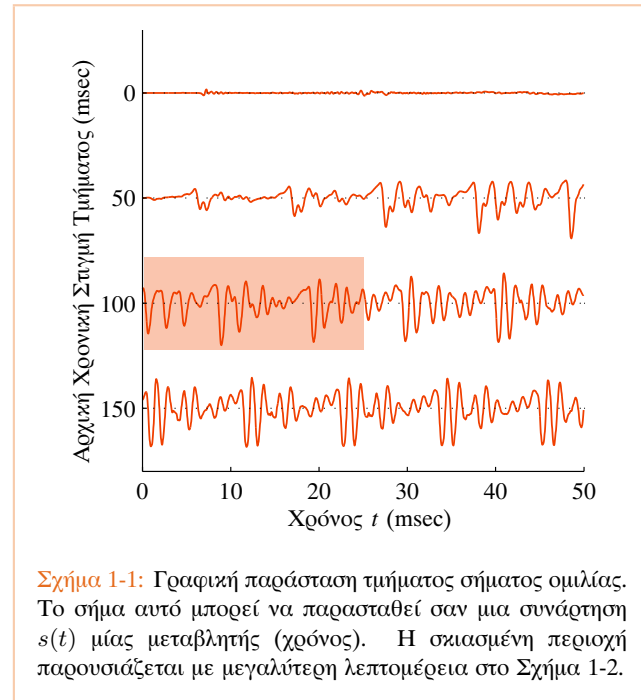
Ο όρος *σύστημα* είναι διαφορεμένος και επομένως επιδέχεται πολλών ερμηνειών. Για παράδειγμα, συχνά χρησιμοποιούμε τη λέξη “σύστημα” για να αναφερθούμε σε μια μεγάλη οργάνωση που διαχειρίζεται ή υλοποιεί διαδικασίες όπως είναι το “σύστημα κοινωνικής ασφάλισης” ή το “σύστημα των αεροπορικών μεταφορών.” Ωστόσο, στα πλαίσια αυτού του βιβλίου, ενδιαφερόμαστε να ορίσουμε με ένα αυστηρότερο τρόπο το σύστημα που συνδέεται πολύ στενά με τα σήματα. Πιο συγκεκριμένα, ένα σύστημα για τους σκοπούς μας, είναι κάτι που μπορεί να χειριστεί, να

τροποποιήσει, να καταγράψει, ή να μεταδώσει σήματα. Για παράδειγμα, κατά την καταγραφή ακουστικών σημάτων σε CD (compact disc) αποθηκεύεται ένα μουσικό σήμα σαν μια ακολουθία αριθμών. Ένα ηχητικό σύστημα αναπαραγωγής CD είναι ένα σύστημα που μετατρέπει αριθμούς, οι οποίοι είναι αποθηκευμένοι σε ένα CD (δηλαδή, η αριθμητική αναπαράσταση του σήματος), σε ένα ακουστικό σήμα το οποίο μπορούμε να το αντιληφθούμε με την ακοή μας. Γενικά, τα συστήματα είναι *τελεστές* που δρουν σε σήματα και παράγουν νέα σήματα ή νέες αναπαραστάσεις σημάτων.

Στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να αναπτύξουμε ένα πλαίσιο που θα μας επιτρέψει να ορίσουμε αυστηρά τα σήματα και τα συστήματα. Συγκεκριμένα, θέλουμε να δείξουμε ότι τα μαθηματικά είναι μια κατάλληλη γλώσσα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή και την κατανόηση των σημάτων και των συστημάτων. Θέλουμε επίσης να δείξουμε ότι η αναπαράσταση των σημάτων και των συστημάτων με μαθηματικές εξισώσεις μας επιτρέπει να καταλάβουμε τον τρόπο με τον οποίο τα σήματα και τα συστήματα αλληλεπιδρούν καθώς και τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να σχεδιάσουμε και να υλοποιήσουμε συστήματα που επιτελούν ένα συγκεκριμένο σκοπό.

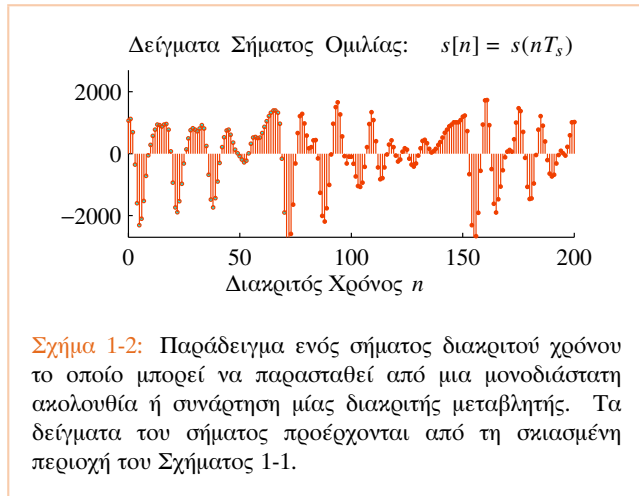
1-1 Μαθηματική Περιγραφή των Σημάτων

Τα σήματα είναι πρότυπα μεταβολών που αναπαριστούν ή κωδικοποιούν πληροφορία. Τα σήματα κατέχουν έναν κεντρικό ρόλο στη μέτρηση, στη συστηματική έρευνα και εξέταση φυσικών συστημάτων, στην ιατρική τεχνολογία και στις τηλεπικοινωνίες, για να ονομάσουμε μερικές περιοχές. Πολλά σήματα είναι φυσικό να θεωρηθούν σαν πρότυπα μεταβολών στο χρόνο. Ένα καλό παράδειγμα είναι ένα σήμα ομιλίας, το οποίο αρχικά προκύπτει σαν πρότυπο της μεταβαλλόμενης πίεσης του αέρα στο φάρυγγα. Αυτό το πρότυπο, φυσικά, εξελίσσεται στο χρόνο και δημιουργεί αυτό που συχνά ονομάζουμε *χρονική κυματομορφή*. Στο Σχήμα 1-1 φαίνεται η κυματομορφή ενός σήματος ομιλίας. Στη γραφική παράσταση, ο κατακόρυφος άξονας παριστάνει την πίεση του αέρα ή την τάση του μικροφώνου και ο οριζόντιος άξονας



Σχήμα 1-1: Γραφική παράσταση τιμήματος σήματος ομιλίας. Το σήμα αυτό μπορεί να παρασταθεί σαν μια συνάρτηση $s(t)$ μίας μεταβλητής (χρόνος). Η σκιασμένη περιοχή παρουσιάζεται με μεγαλύτερη λεπτομέρεια στο Σχήμα 1-2.

παριστάνει το χρόνο. Παρατηρήστε, ότι υπάρχουν τέσσερα χρονικά τμήματα του σήματος ομιλίας. Το δεύτερο τμήμα αποτελεί τη συνέχεια του πρώτου κ.ο.κ., και το μήκος κάθε τμήματος έχει χρονική διάρκεια 50 milliseconds (msec). Το σήμα ομιλίας στο Σχήμα 1-1 είναι ένα παράδειγμα ενός μονοδιάστατου *σήματος συνεχούς χρόνου*. Τέτοια σήματα μπορούν να παρασταθούν ως συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής, την οποία συμβολίζουμε με t . Αν και στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν μπορούμε να γράψουμε μια απλή εξίσωση η οποία θα περιγράφει τη γραφική παράσταση του Σχήματος 1-1, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στη γραφική παράσταση τη συνάρτηση $s(t)$. Πράγματι, η γραφική παράσταση από μόνη της μπορεί να θεωρηθεί σαν ορισμός μιας συνάρτησης η οποία εκχωρεί κάθε χρονική στιγμή (κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής t) έναν αριθμό $s(t)$. Πολλά



σήματα, αν όχι τα περισσότερα, είναι σήματα συνεχούς χρόνου. Εντούτοις, για διάφορους λόγους οι οποίοι καθώς θα προχωρούμε θα γίνονται όλο και περισσότερο προφανείς, είναι συχνά επιθυμητό να δημιουργήσουμε μια διακριτού χρόνου παράσταση του σήματος. Αυτό μπορεί να γίνει με τη **δειγματοληψία** του σήματος συνεχούς χρόνου σε συγκεκριμένες ισαπέχουσες χρονικές στιγμές. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι μια ακολουθία αριθμών η οποία μπορεί να παρασταθεί σαν μια συνάρτηση μίας μεταβλητής δείκτη η οποία παίρνει μόνο διακριτές τιμές. Η ακολουθία αυτή μπορεί να παρασταθεί μαθηματικά σαν $s[n] = s(nT_s)$, όπου n είναι ακέραιος, δηλαδή, $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ και T_s είναι η **περίοδος δειγματοληψίας**¹. Αυτό, φυσικά, είναι αυτό που κάνουμε όταν σχεδιάζουμε τις τιμές μιας συνάρτησης σε μια γραφική παράσταση στο τετράδιό μας ή στην οθόνη του υπολογιστή μας. Στην πραγματικότητα, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση σε κάθε δυνατή τιμή μιας συνεχούς μεταβλητής, αλλά μόνο σ' ένα σύνολο τιμών της. Διαισθητικά, ξέρουμε ότι όσο πιο κοντινά

¹Για την παράσταση των σημάτων συνεχούς χρόνου θα χρησιμοποιούνται οι παρενθέσεις () και οι αγκύλες για την παράσταση των σημάτων διακριτού χρόνου (ακολουθίες).

είναι τα σημεία αυτά, τόσο η προκύπτουσα ακολουθία διατηρεί τη μορφή του αρχικού σήματος συνεχούς χρόνου. Στο Σχήμα 1-2 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα ενός τμήματος σήματος διακριτού χρόνου που προήλθε από τη δειγματοληψία του σήματος ομιλίας του Σχήματος 1-1, με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 1/8$ msec. Στην περίπτωση αυτή η κατακόρυφη γραμμή με την τελεία στο τέλος της, δείχνει τη θέση και την τιμή της ακολουθίας.



Σχήμα 1-3: Παράδειγμα σήματος το οποίο μπορεί να παρασταθεί σαν μια συνάρτηση δύο χωρικών μεταβλητών.

Ενώ πολλά σήματα μπορούν να θεωρηθούν σαν πρότυπα εξελισσόμενα στο χρόνο, υπάρχει και μια πληθώρα σημάτων τα οποία δεν μπορούν να θεωρηθούν ως τέτοια. Για παράδειγμα, μια εικόνα αποτελεί ένα χωρικό πρότυπο και επομένως μια κατάλληλη μαθηματική περιγραφή της, προϋποθέτει τη χρήση δύο χωρικών μεταβλητών. Στη γενική περίπτωση, ένα τέτοιο σήμα μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών. Δηλαδή, μια εικόνα μπορούμε να τη συμβολίσουμε ως $p(x, y)$. Μια φωτογραφία αποτελεί ένα άλλο παράδειγμα, όπως η “εικόνα με διαβαθμίσεις του γκρι” που φαίνεται στο Σχήμα 1-3. Στην περίπτωση αυτή, η τιμή $p(x_0, y_0)$

παριστάνει την τιμή του γκρί στη θέση (x_0, y_0) της εικόνας. Εικόνες όπως αυτές του Σχήματος 1-3 μπορούν γενικά να θεωρηθούν ως σήματα δύο συνεχών μεταβλητών, αφού στη γενική περίπτωση θεωρούμε ότι ο χώρος είναι συνεχής. Οποσδήποτε, η δειγματοληψία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση αυτή για να πάρουμε ένα διακριτό σήμα δύο διαστάσεων. Το σήμα αυτό θα μπορούσε να παρασταθεί από μια ακολουθία δύο διαστάσεων, ή από ένα πίνακα αριθμών, και θα μπορούσε να παρασταθεί σαν $p[m, n] = p(m\Delta_x, n\Delta_y)$, όπου και οι δύο μεταβλητές m και n παίρνουν μόνο ακέραιες τιμές και Δ_x, Δ_y αποτελούν την οριζόντια και την κατακόρυφη περίοδο δειγματοληψίας αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις δύο μεταβλητών είναι κατάλληλες μαθηματικές παραστάσεις εικόνων οι οποίες δεν αλλάζουν με το χρόνο. Από την άλλη μεριά το σήμα του βίντεο είναι ένα σήμα δύο διαστάσεων εξελισσόμενο στο χρόνο το οποίο απαιτεί μια επιπλέον ανεξάρτητη μεταβλητή για την περιγραφή του, δηλαδή $v(x, y, t)$. Τα σήματα βίντεο είναι πραγματικά σήματα τριών μεταβλητών που εξαρτώνται από τον τύπο του συστήματος βίντεο και είναι δυνατόν οι δύο ή ακόμα και οι τρεις μεταβλητές να είναι διακριτές.

Ο σκοπός μας σε αυτήν την ενότητα ήταν απλά να εισάγουμε την ιδέα ότι τα σήματα μπορούν να παρασταθούν από μαθηματικές συναρτήσεις. Αν και σύντομα θα δούμε ότι πολλές γνωστές συναρτήσεις είναι πολύτιμες στη μελέτη των σημάτων και των συστημάτων, δεν έχουμε ακόμη ούτε καν προσπαθήσει να καταδείξουμε αυτό το γεγονός. Η προσπάθεια μας εστιάσθηκε στο να αναδειξουμε τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις συναρτήσεις και τα σήματα και, σε αυτό το σημείο, οι συναρτήσεις χρησιμεύουν απλά ως τα αφηρημένα σύμβολα για τα σήματα. Έτσι, για παράδειγμα, μπορούμε τώρα να αναφερόμαστε στο “σήμα ομιλίας $s(t)$ ” ή “στη δειγματοληπτημένη εικόνα $p[m, n]$.” Αν και αυτό μπορεί να μην φαίνεται ιδιαίτερα σημαντικό, στην επόμενη ενότητα θα δούμε ότι είναι πράγματι ένα πολύ σημαντικό βήμα προς το στόχο μας που είναι η συστηματική χρήση των μαθηματικών στην περιγραφή και παράσταση των σημάτων και των συστημάτων.

1-2 Μαθηματική Περιγραφή των Συστημάτων

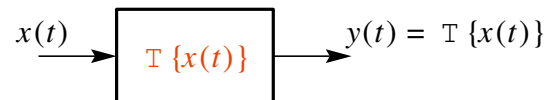
Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ένα σύστημα είναι κάτι που μετασχηματίζει σήματα σε νέα σήματα ή σε διαφορετικές αναπαραστάσεις σημάτων. Αν και αυτός είναι ένας μάλλον αφηρημένος ορισμός, είναι πολύ χρήσιμος σαν αφετηρία. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, θα λέμε ότι ένα μονοδιάστατο σύστημα συνεχούς-χρόνου δέχεται στην είσοδό του ένα σήμα εισόδου $x(t)$ και παράγει ένα αντίστοιχο σήμα εξόδου $y(t)$. Αυτό μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια των μαθηματικών ως εξής

$$y(t) = T\{x(t)\} \quad (1.1)$$

και σημαίνει ότι το σύστημα (που συμβολίζεται με τον τελεστή T) δρα στο σήμα εισόδου (κυματομορφή, εικόνα, κ.λ.π.) για να παραχθεί το σήμα εξόδου $y(t)$. Ενώ αυτό μπορεί να ακούγεται πολύ αφηρημένο, ένα απλό παράδειγμα θα μας δείξει ότι δεν είναι. Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα το οποίο παράγει στην έξοδό του το τετράγωνο του σήματος που εφαρμόζεται στην είσοδό του. Η μαθηματική περιγραφή αυτού του συστήματος δίνεται από την παρακάτω απλή σχέση

$$y(t) = [x(t)]^2 \quad (1.2)$$

η οποία πολύ απλά λέει ότι κάθε χρονική στιγμή η τιμή της εξόδου του συστήματος είναι ίση με το τετράγωνο της τιμής του σήματος εισόδου την ίδια χρονική στιγμή. Ένα τέτοιο σύστημα λογικά θα μπορούσε να ονομασθεί “σύστημα τετραγώνου”. Στο Σχήμα 1-5 έχει σχεδιαστεί η



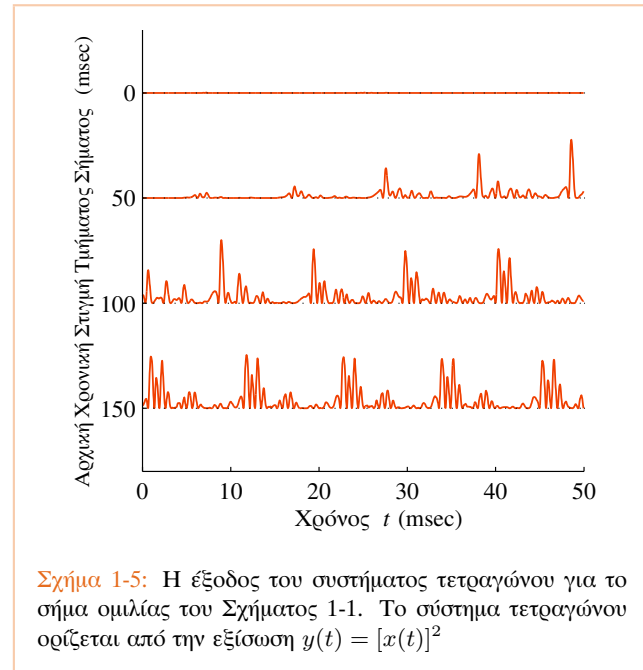
Σχήμα 1-4: Σχηματικό διάγραμμα ενός συστήματος συνεχούς χρόνου.

έξοδος του συστήματος για το σήμα εισόδου του Σχήματος 1-1. Όπως είναι αναμενόμενο από τις ιδιότητες του τετραγώνου, παρατηρούμε ότι το σήμα εξόδου είναι πάντα μη αρνητικό και ότι οι μεγάλες τιμές του σήματος εισόδου είναι περισσότερο ενισχυμένες από τις μικρές. Το σύστημα που ορίσαμε με τη Σχέση (1.2) αποτελεί ένα παράδειγμα ενός *συστήματος συνεχούς χρόνου*, δηλαδή, ενός συστήματος του οποίου η είσοδος και η έξοδος είναι σήματα συνεχούς χρόνου. Μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα φυσικό σύστημα το οποίο θα λειτουργεί όπως το σύστημα τετραγώνου; Η απάντηση είναι ότι το σύστημα της Σχέσης (1.2) μπορεί να προσεγγισθεί διασυνδέοντας κατάλληλα ηλεκτρονικά κυκλώματα. Από την άλλη μεριά, εάν η είσοδος και η έξοδος ενός συστήματος είναι σήματα διακριτού χρόνου (ακολουθίες αριθμών) που συνδέονται όπως δείχνει η σχέση που ακολουθεί

$$y[n] = (x[n])^2 \quad (1.3)$$

θα λέμε ότι είναι ένα *σύστημα διακριτού-χρόνου*. Η υλοποίηση του συστήματος διακριτού χρόνου είναι, μπορούμε να πούμε, τετριμμένη αφού απλά αρκεί να πολλαπλασιάσουμε κάθε τιμή του σήματος διακριτού χρόνου με τον εαυτό της.

Όταν μιλάμε για συστήματα, είναι πολύ χρήσιμο να έχουμε στο μυαλό μας μια οπτική παράσταση του συστήματος. Για το σκοπό αυτό, οι μηχανικοί χρησιμοποιούν *Σχηματικά διαγράμματα* για να παραστήσουν λειτουργίες οι οποίες εκτελούνται σε μια υλοποίηση ενός συστήματος και να παρουσιάσουν τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των πολλών σημάτων που μπορούν να συνυπάρξουν στην υλοποίηση ενός σύνθετου συστήματος. Ένα παράδειγμα σχηματικού διαγράμματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 1-4. Αυτό που παρουσιάζεται στο διάγραμμα είναι απλά ότι το σήμα $y(t)$ προκύπτει από το σήμα $x(t)$ και τον τελεστή $T\{\}$. Ένα άλλο παράδειγμα συστήματος προτάθηκε νωρίτερα όταν συζητήσαμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ ενός σήματος συνεχούς χρόνου και ενός σήματος διακριτού χρόνου. Επομένως, ορίζουμε το *δειγματολήπτη* ως ένα σύστημα του οποίου η είσοδος είναι ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ και του οποίου η έξοδος είναι η ακολουθία

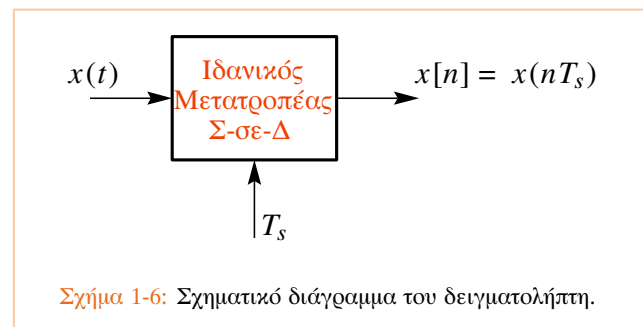


Σχήμα 1-5: Η έξοδος του συστήματος τετραγώνου για το σήμα ομιλίας του Σχήματος 1-1. Το σύστημα τετραγώνου ορίζεται από την εξίσωση $y(t) = [x(t)]^2$

δειγμάτων που ορίζεται από τη σχέση

$$x[n] = x(nT_s) \quad (1.4)$$

η οποία απλά δηλώνει ότι ο δειγματολήπτης “συλλαμβάνει



Σχήμα 1-6: Σχηματικό διάγραμμα του δειγματολήπτη.

στιγμιαία την τιμή” του σήματος συνεχούς χρόνου που εφαρμόζεται στην είσοδό του, κάθε T_s δευτερόλεπτα. Κατά συνέπεια, η διαδικασία της δειγματοληψίας ανταποκρίνεται στον ορισμό που δώσαμε για το σύστημα και μπορεί να παρασταθεί με το σχηματικό διάγραμμα του Σχήματος 1-6. Συχνά θα αναφέρουμε το σύστημα του δειγματολήπτη ως “ιδανικό μετατροπέα συνεχούς σε διακριτό” ή *ιδανικό μετατροπέα Σ-σε-Δ*. Σε αυτήν την περίπτωση, όπως στην περίπτωση του συστήματος του τετραγώνου, το όνομα που δίνουμε στο σύστημα είναι μια ακριβής περιγραφή της διαδικασίας που πραγματικά εκτελεί το σύστημα.

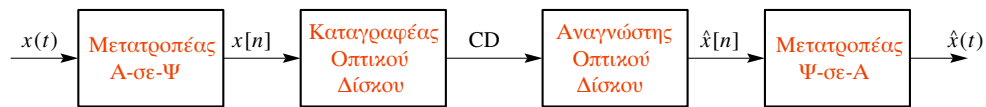
1-3 Σκέψεις για τα Συστήματα

Τα Σχηματικά διαγράμματα είναι πολύ χρήσιμα για την παράσταση σύνθετων συστημάτων με τη βοήθεια απλούστερων συστημάτων, τα οποία γίνονται ευκολότερα κατανοητά. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 1-7 φαίνεται ένα Σχηματικό διάγραμμα μίας διαδικασίας καταγραφής και αναπαραγωγής ενός CD. Σ’ αυτό το σχηματικό διάγραμμα το συνολικό σύστημα διαιρείται σε τέσσερα υποσυστήματα. Το πρώτο υποσύστημα περιγράφει ένα μετατροπέα από Αναλογικό-σε-Ψηφιακό. Ένας μετατροπέας Α-σε-Ψ παράγει στην έξοδό του αριθμούς πεπερασμένης ακρίβειας σαν δείγματα του σήματος εισόδου (κβαντισμένα σε ένα περιορισμένο αριθμό από bits), ενώ ο ιδανικός μετατροπέας Σ-σε-Δ παράγει δείγματα της εισόδου με άπειρη ακρίβεια. Για τον μετατροπέα Α-σε-Ψ υψηλής πιστότητας που χρησιμοποιούνται σε ακουστικά συστήματα υψηλής πιστότητας, η διαφορά που υπάρχει με τους ιδανικούς μετατροπέες Σ-σε-Δ είναι πολύ μικρή, αλλά η διάκρισή τους είναι πολύ σημαντική. Μόνο κβαντισμένες, πεπερασμένης-ακρίβειας, τιμές δειγμάτων μπορούν να αποθηκευτούν σε μια ψηφιακή μνήμη πεπερασμένου μεγέθους! Στο Σχήμα 1-7 φαίνεται ότι η έξοδος του μετατροπέα Α-σε-Ψ οδηγείται στην είσοδο ενός συστήματος που καταγράφει τους αριθμούς $x[n]$ πάνω σ’ ένα οπτικό δίσκο. Στην πραγματικότητα αυτή είναι μια πολύ σύνθετη διαδικασία, αλλά για το σκοπό μας είναι αρκετό να παρουσιαστεί απλά σαν μια ενιαία λειτουργία.

Για τον ίδιο λόγο, το σύνθετο μηχανικό/οπτικό σύστημα για την ανάγνωση των αριθμών από τον οπτικό δίσκο εμφανίζεται, κι αυτό, σαν μια ενιαία λειτουργία. Τέλος, η μετατροπή του διακριτού χρόνου σήματος σε συνεχούς χρόνου (ακουστική) μορφή εμφανίζεται σαν ένα σύστημα μετατροπέα από Ψ-σε-Α (Ψηφιακού-σε-Αναλογικό). Αυτό το σύστημα δέχεται σειριακά αριθμούς πεπερασμένης ακρίβειας και παρεμβάλλει τιμές μεταξύ των δειγμάτων. Το συνεχούς χρόνου σήμα που προκύπτει θα μπορούσε στη συνέχεια να οδηγηθεί στην είσοδο άλλων συστημάτων, όπως είναι οι ενισχυτές, τα μεγάφωνα και τα ακουστικά, για τη μετατροπή του σε ηχητικό σήμα. Συστήματα όπως το σύστημα καταγραφής και αναπαραγωγής CD υπάρχουν πολλά γύρω μας. Στις περισσότερες περιπτώσεις δεν υπάρχει λόγος να σκεφτούμε για το πώς λειτουργούν τέτοια συστήματα, αλλά αυτό το παράδειγμα εξηγεί το πόσο σημαντικό είναι να σκεφτόμαστε ένα σύνθετο σύστημα με ένα ιεραρχικό τρόπο. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε πρώτα να καταλάβουμε τα υποσυστήματα, στη συνέχεια τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των υποσυστημάτων, και τελικά ολόκληρο το σύστημα. Ακολουθώντας αυτήν τη διαδικασία στο σύστημα καταγραφής και αναπαραγωγής CD, βλέπουμε ότι ένα πολύ σημαντικό ζήτημα είναι η μετατροπή του σήματος συνεχούς χρόνου σε διακριτού χρόνου και ξανά σε συνεχούς χρόνου και βλέπουμε επίσης ότι είναι δυνατό να εξετάσουμε αυτές τις διαδικασίες χωριστά από τα υπόλοιπα υποσυστήματα από τα οποία απαρτίζεται το συνολικό σύστημα. Η επίδραση της διασύνδεσης των υποσυστημάτων είναι έπειτα σχετικά εύκολο να την κατανοήσουμε. Οι λεπτομέρειες μερικών υποσυστημάτων μπορούν να αφηθούν σε εμπειρογνώμονες άλλων τομέων οι οποίοι, για παράδειγμα, μπορούν να αναπτύξουν περισσότερο τα υποσυστήματα των οπτικών δίσκων.

1-4 Το Επόμενο Βήμα

Το σύστημα αναπαραγωγής CD αποτελεί ένα πολύ καλό παράδειγμα ενός συστήματος διακριτού χρόνου (discrete time system). Μέσα σε ένα τέτοιο σύστημα, όπως μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 1-7, περιλαμβάνονται πολλά



Σχήμα 1-7: Απλοποιημένο σχηματικό διάγραμμα συστήματος καταγραφής και αναπαραγωγής CD.

υποσυστήματα και σήματα διακριτού χρόνου. Στο βιβλίο αυτό σίγουρα δεν υποσχόμαστε ότι θα εξηγήσουμε όλες τις λεπτομέρειες ενός Συστήματος αναπαραγωγής CD ή οποιουδήποτε άλλου σύνθετου συστήματος, ελπίζουμε όμως να βάλουμε τα θεμέλια για την κατανόηση των σημάτων και συστημάτων συνεχούς και διακριτού χρόνου έτσι ώστε αυτή η γνώση να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση περισσότερο πολύπλοκων συστημάτων. Στο Κεφάλαιο 2, θα αρχίσουμε με πολύ απλές μαθηματικές έννοιες και θα αποδείξουμε ότι οι πολύ γνωστές τριγωνομετρικές συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου παίζουν έναν θεμελιώδη ρόλο στη θεωρία των σημάτων και των συστημάτων. Στη συνέχεια, θα δείξουμε πώς με τη χρησιμοποίηση των μιγαδικών αριθμών μπορούμε

να απλοποιήσουμε την άλγεβρα που υπεισέρχεται στη χρήση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Σε επόμενα κεφάλαια θα εισαγάγουμε την έννοια του φάσματος ενός σήματος και την έννοια του φιλτραρίσματος με ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα. Μέχρι το τέλος του βιβλίου, ο επιμελής αναγνώστης που θα απασχοληθεί με τα προτεινόμενα προβλήματα, θα δει τις πολυάριθμες παρουσιάσεις και θα κάνει όλες τις προτεινόμενες εργαστηριακές ασκήσεις, θα ανταμειφθεί με μια σε βάθος κατανόηση πολλών θεμελιωδών εννοιών που κρύβονται μέσα στα ψηφιακά πολυμεσικά πληροφοριακά συστήματα, που όπως διαφαίνεται αναπτύσσονται στις μέρες μας με γρήγορους ρυθμούς.

Ημιτονοειδή Σήματα

Αρχίζουμε τη συζήτησή μας εισάγοντας μια γενική κατηγορία σημάτων που συνήθως καλούνται *συνημιτονικά σήματα* ή, ισοδύναμα, *ημιτονικά σήματα*¹. Συλλογικά, τέτοια σήματα καλούνται *ημιτονοειδή σήματα* ή πιο συνοπτικά *ημιτονοειδή*. Αν και τα ημιτονοειδή σήματα έχουν απλές μαθηματικές αναπαραστάσεις, αποτελούν τα πιο βασικά σήματα στη θεωρία των σημάτων και των συστημάτων και επομένως είναι σημαντικό να γίνουν γνωστές οι ιδιότητές τους. Ο πιο γενικός μαθηματικός τύπος για ένα σήμα συνημιτόνου είναι

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (2.1)$$

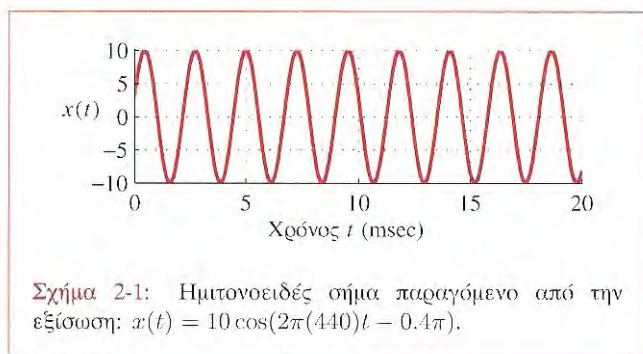
όπου $\cos(\cdot)$ συμβολίζει τη συνάρτηση συνημιτόνου η οποία είναι γνωστή από την τριγωνομετρία. Κατά τον ορισμό

¹Συχνά αναφερόμαστε στα συνημιτονικά ή ημιτονικά σήματα σαν κύματα συνημιτόνου ή ημιτόνου, ιδιαίτερα όταν αναφερόμαστε σε ακουστικά ή ηλεκτρικά σήματα.

ενός σήματος συνεχούς χρόνου, τυπικά, χρησιμοποιούμε μια συνάρτηση της οποίας η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η συνεχής μεταβλητή t που αντιπροσωπεύει το χρόνο. Από τη Σχέση (2.1) συνάγεται ότι το $x(t)$ είναι μια συνάρτηση στην οποία η γωνία της συνάρτησης συνημιτόνου είναι και αυτή με τη σειρά της, συνάρτηση της μεταβλητής t . Για ένα συγκεκριμένο συνημιτονικό σήμα, οι παράμετροι A , ω_0 και ϕ είναι σταθεροί αριθμοί. Συγκεκριμένα, το A ονομάζεται *πλάτος*, το ω_0 *γωνιακή συχνότητα* και η ϕ *διαφορά φάσης* του συνημιτονικού σήματος. Στο Σχήμα 2-1 φαίνεται η γραφική παράσταση του συνημιτονικού σήματος συνεχούς χρόνου

$$x(t) = 10 \cos(2\pi(440)t - 0.4\pi)$$

που προκύπτει από τη Σχέση (2.1) για $A = 10$, $\omega_0 = 2\pi(440)$, and $\phi = -0.4\pi$. Παρατηρήστε ότι το $x(t)$ ταλαντώνεται μεταξύ A και $-A$ και ότι επαναλαμβάνει το ίδιο πρότυπο των ταλαντώσεων κατά προσέγγιση



κάθε $1/440 = 0.00227$ sec. Αυτό το χρονικό διάστημα ονομάζεται *περίοδος* του ημιτονοειδούς. Αργότερα, σε αυτό το κεφάλαιο, θα δείξουμε ότι τα περισσότερα χαρακτηριστικά γνωρίσματα του ημιτονοειδούς σήματος εξαρτώνται άμεσα από την επιλογή των παραμέτρων A , ω_0 και ϕ .

2-1 Το Πείραμα του Διαπασών

Ένας από τους λόγους για τον οποίο τα συνημιτονικά κύματα είναι τόσο σημαντικά, είναι ότι πολλά φυσικά συστήματα παράγουν σήματα τα οποία μπορούν να μοντελοποιηθούν (δηλαδή μπορούν να αναπασταθούν μαθηματικά) σαν συναρτήσεις του ημιτόνου ή του συνημιτόνου σε σχέση με τον χρόνο. Ανάμεσα στα πιο διακεκριμένα από αυτά είναι τα ακουστικά σήματα που γίνονται αντιληπτά από τους ανθρώπους διά της ακοής. Οι τόνοι ή οι νότες που παράγονται από τα μουσικά όργανα γίνονται αντιληπτές ως διαφορετικοί τόνοι. Αν και εξισώνοντας τις νότες με ημιτονοειδή και τον βαθμό έντασης με την συχνότητα αποτελεί μια υπεραπλούστευση, τα μαθηματικά των ημιτονοειδών είναι ένα ουσιαστικό πρώτο βήμα στην κατανόηση των πολύπλοκων ηχητικών σημάτων. Για να υπάρχει κάποιο κίνητρο για τη μελέτη των ημιτονοειδών, θα αρχίσουμε με την εξέταση ενός πολύ απλού και γνωστού συστήματος για την παραγωγή ενός ημιτονοειδούς σήματος. Αυτό το σύστημα είναι το *διαπασών*, ένα παράδειγμα του οποίου παρουσιάζεται στο Σχήμα 2-2. Όταν χτυπήσουμε



Σχήμα 2-2: Πειραματική διάταξη διαπασών και μικροφώνου.

το διαπασών, τα σκέλη του δονούνται και εκπέμπουν έναν “καθαρό” τόνο. Αυτός ο τόνος είναι σε μία συγκεκριμένη συχνότητα, η οποία συνήθως αναγράφεται πάνω στο διαπασών. Είναι εύκολο να βρούμε ένα διαπασών “A-440”, επειδή η συχνότητα των 440 hertz (Hz) σε μια μουσική κλίμακα είναι η συχνότητα του A πάνω από το μεσαίο C και συχνά χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς για το συντονισμό ενός πιάνου ή άλλων μουσικών οργάνων. Εάν μπορείτε να αποκτήσετε ένα διαπασών, εκτελέστε το ακόλουθο πείραμα:

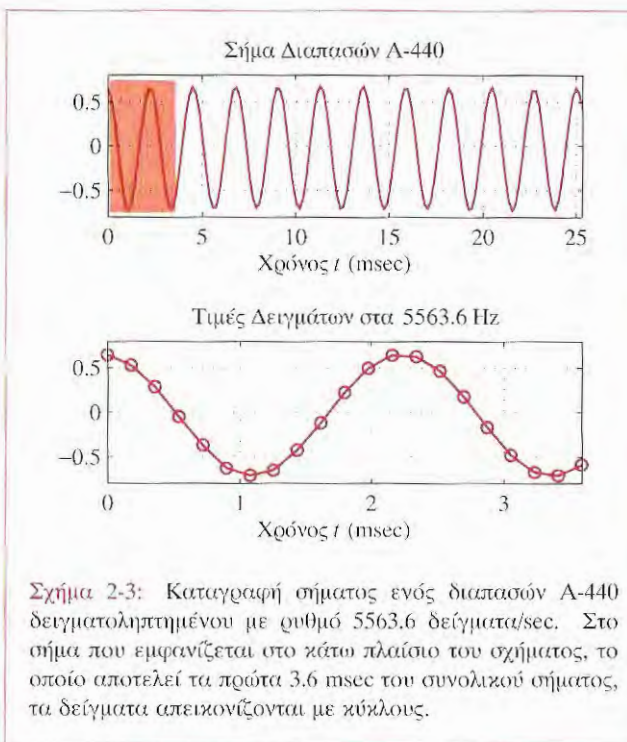
Χτυπήστε το διαπασών στο γόνατό σας, και έπειτα κρατήστε το κοντά στο αυτί σας. Θα ακούσετε έναν ευδιάκριτο “βόμβο” στην συχνότητα που δονείται το διαπασών. Ο ήχος θα διαρκέσει για αρκετό χρόνο εάν έχετε χτυπήσει το διαπασών κατάλληλα. Ωστόσο, είναι δύσκολο να γίνει αυτό το πείραμα με σωστό τρόπο. Εάν χτυπήσετε το διαπασών δυνατά σε μια σκληρή επιφάνεια όπως ένα τράπεζι, θα ακούσετε έναν υψηλού τόνου μεταλλικό “κουδούνισμα”. Αυτός δεν είναι ο χαρακτηριστικός ήχος που

επιδιώκετε. Αν κρατήσετε το διαπασών κοντά στο αυτί σας, θα ακούσετε δύο τόνους: Το υψηλής-συχνότητας “κουδούνισμα” το οποίο θα εξασθενίσει γρήγορα, και στη συνέχεια θα ακουστεί ο “βόμβος” χαμηλής-συχνότητας.



Επίδειξη: Διαπασών

Με ένα μικρόφωνο και έναν υπολογιστή εξοπλισμένο με μετατροπέα Α-σε-Ψ, μπορούμε να καταγράψουμε ψηφιακά το σήμα που παράγεται από το διαπασών. Το μικρόφωνο μετατρέπει τον ήχο σε ηλεκτρικό σήμα, το οποίο στη συνέχεια μετατρέπεται σε ακολουθία αριθμών που αποθηκεύονται στον υπολογιστή. Στην συνέχεια αυτοί οι αριθμοί μπορούν να παρασταθούν γραφικά στην οθόνη του υπολογιστή. Μια τέτοια χαρακτηριστική παράσταση παρουσιάζεται στο Σχήμα 2-3 για ένα διαπασών Α-440. Στην περίπτωση αυτή, ο μετατροπέας Α-σε-Ψ έχει δειγματοληπτήσει το σήμα εξόδου του μικροφώνου με ρυθμό 5563.6 δείγματα/sec. Η παραπάνω παράσταση κατασκευάστηκε με τη διασύνδεση των τιμών με ευθείες γραμμές. Φαίνεται ότι το σήμα που παράγει το διαπασών είναι παρόμοιο με το συνημιτονικό σήμα του Σχήματος 2-1. Ταλαντώνεται μεταξύ συμμετρικών ορίων του πλάτους και αυτό επαναλαμβάνεται περιοδικά, με περίοδο περίπου 2.27 msec (0.00227 sec). Όπως θα δούμε στην Ενότητα 2-3.1, η περίοδος είναι αντιστρόφως ανάλογη του ω_0 , δηλαδή, $2\pi / (2\pi(440)) \approx 0.00227$. Αυτό το πείραμα δείχνει ότι κοινά φυσικά συστήματα παράγουν σήματα των οποίων οι γραφικές παραστάσεις μοιάζουν πάρα πολύ με τα συνημιτονικά σήματα, δηλαδή μοιάζουν με τις γραφικές παραστάσεις των μαθηματικών συναρτήσεων που ορίστηκαν στην Σχέση (2.1). Αργότερα, στην Ενότητα 2-7, θα αναφέρουμε και άλλες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις που αφορούν το ημιτονοειδές μοντέλο του παραγόμενου ήχου από το διαπασών, αποδεικνύοντας ότι οι συναρτήσεις συνημιτόνου αποτελούν λύσεις της διαφορικής εξίσωσης η οποία περιγράφει την κίνηση των σκελών του. Ωστόσο, πριν εξετάσουμε την φυσική του διαπασών πρέπει να εξοικειωθούμε περισσότερο με τα ημιτονοειδή σήματα.



Σχήμα 2-3: Καταγραφή σήματος ενός διαπασών Α-440 δειγματοληπτημένου με ρυθμό 5563.6 δείγματα/sec. Στο σήμα που εμφανίζεται στο κάτω πλαίσιο του σχήματος, το οποίο αποτελεί τα πρώτα 3.6 msec του συνολικού σήματος, τα δείγματα απεικονίζονται με κύκλους.

2-2 Οι Συναρτήσεις Ημιτόνου και Συνημιτόνου

Τα ημιτονοειδή σήματα, όπως είδαμε, ορίζονται με τη βοήθεια των γνωστών τριγωνομετρικών συναρτήσεων του ημιτόνου και του συνημιτόνου. Μια περιληπτική αναφορά στις ιδιότητες αυτών των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι πολύ χρήσιμη, αφού αυτές οι ιδιότητες καθορίζουν και τις ιδιότητες των ημιτονοειδών σημάτων.

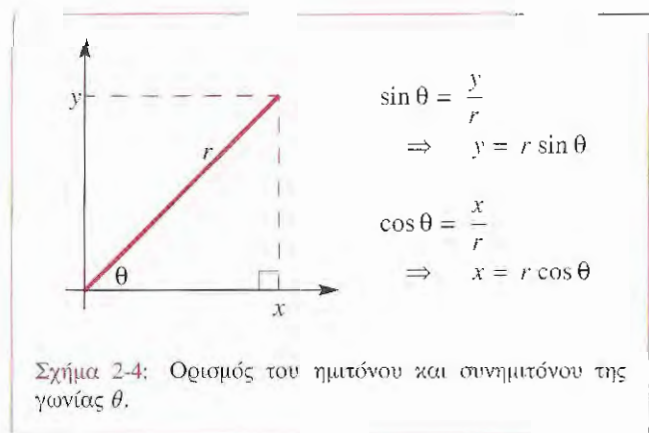
Οι συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου συχνά ορίζονται μέσω ενός διαγράμματος όπως αυτού του Σχήματος 2-4. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου παίρνουν ως όρισμά τους μια γωνία. Αν και συχνά τις μετράμε σε μοίρες, όταν αναφερόμαστε στις συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου, οι γωνίες θα πρέπει να είναι αδιάστατες. Επομένως οι

Πίνακας 2-1: Βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων συνημιτόνου και ημιτόνου.

Ιδιότητα	Ταυτότητα
Ισοδυναμία	$\sin \theta = \cos(\theta - \pi/2)$ or $\cos(\theta) = \sin(\theta + \pi/2)$
Περιοδικότητα	$\cos(\theta + 2\pi k) = \cos \theta$, k ακέραιος
Άρτια συμμετρία του συνημιτόνου	$\cos(-\theta) = \cos \theta$
Περιττή συμμετρία του ημιτόνου	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$
Μηδενισμοί του Ημιτόνου	$\sin(\pi k) = 0$, k ακέραιος
Μέγιστα του Συνημιτόνου	$\cos(2\pi k) = 1$, k ακέραιος.
Ελάχιστα του Συνημιτόνου	$\cos[2\pi(k + \frac{1}{2})] = -1$, k ακέραιος.

γωνίες εκφράζονται σε ακτίνια (rad). Εάν η γωνία θ είναι στο πρώτο τεταρτημόριο ($0 \leq \theta < \pi/2$ rad), τότε το ημίτονο της γωνίας θ είναι το μήκος y της πλευράς του τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από τη γωνία θ , προς το μήκος r της υποτεινουσας του τριγώνου. Ομοίως, το συνημίτονο της γωνίας θ είναι ίσο με το λόγο του μήκους της προσκείμενης πλευράς x προς το μήκος της υποτεινουσας.

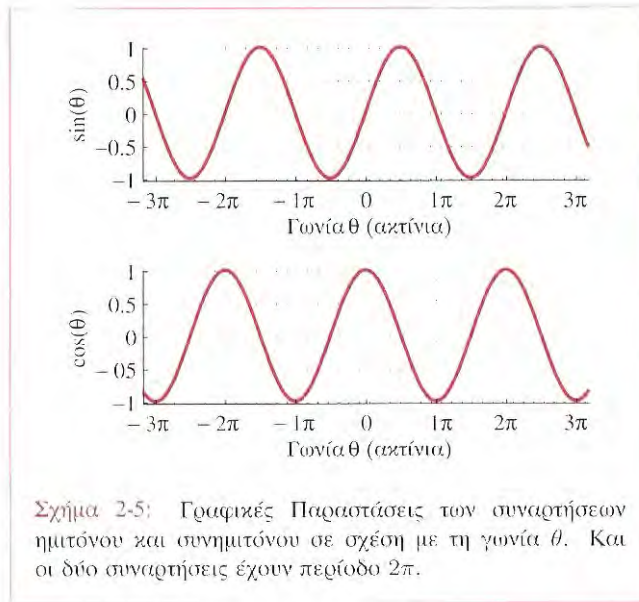
Παρατηρήστε ότι όσο η γωνία θ αυξάνεται από 0 σε



$\pi/2$, το $\cos \theta$ μειώνεται από 1 έως 0 και το $\sin \theta$ αυξάνεται από 0 έως 1. Όταν η γωνία είναι μεγαλύτερη από $\pi/2$

ακτίνια, μπαίνουν στο παιχνίδι τα αλγεβρικά πρόσημα των x και y . Συγκεκριμένα, το x είναι αρνητικό στο δεύτερο και τρίτο τεταρτημόριο ενώ το y στο τρίτο και τέταρτο τεταρτημόριο. Αυτό παρουσιάζεται ευκολότερα παριστάνοντας τις τιμές $\sin \theta$ και $\cos \theta$ συναρτήσει της θ , όπως στο Σχήμα 2-5². Διάφορα χαρακτηριστικά γνωρίσματα αυτών των παραστάσεων είναι αξιοσημείωτα. Οι δύο συναρτήσεις έχουν ακριβώς την ίδια μορφή. Πράγματι, η συνάρτηση ημιτόνου είναι μια συνάρτηση συνημιτόνου μετατοπισμένη δεξιά κατά $\pi/2$, δηλαδή, $\sin \theta = \cos(\theta - \pi/2)$. Και οι δύο συναρτήσεις ταλαντώνονται μεταξύ του +1 και του -1 και επαναλαμβάνουν το ίδιο πρότυπο περιοδικά με περίοδο 2π . Επιπλέον, η συνάρτηση ημιτόνου είναι μια περιττή συνάρτηση του ορίσματός της ενώ αυτή του συνημιτόνου είναι μια άρτια συνάρτηση. Αυτές, όπως και άλλες ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων, περιέχονται στον Πίνακα 2-1. Είναι προφανές, ότι οι συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου είναι πολύ στενά συνδεδεμένες μεταξύ τους. Αυτό οδηγεί συχνά στην απλοποίηση εκφράσεων που περιλαμβάνουν αυτές τις συναρτήσεις. Επιπλέον, για τις συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου, έχουμε την ενδιαφέρουσα ιδιότητα ότι η μια

²Μια καλή ιδέα είναι να απομνημονεύσετε τη μορφή αυτών των παραστάσεων και να είστε σε θέση να τις σχεδιάσετε με ακρίβεια.



Πίνακας 2-2: Μερικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Αριθμός	Ταυτότητα
1	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
2	$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
3	$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
4	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
5	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

είναι παράγωγος της άλλης:

$$\frac{d \sin \theta}{d\theta} = \cos \theta \quad \text{και} \quad \frac{d \cos \theta}{d\theta} = -\sin \theta$$

Δηλαδή, η συνάρτηση συνημιτόνου ισούται με την κλίση της συνάρτησης ημιτόνου και η συνάρτηση ημιτόνου ισούται με το αντίθετο της κλίσης της συνάρτησης του συνημιτόνου. Στην τριγωνομετρία, υπάρχουν πολλές γνωστές ταυτότητες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να απλοποιηθούν εκφράσεις που περιλαμβάνουν συνδυασμούς ημιτονοειδών

σημάτων. Ο Πίνακας 2-2 περιέχει, με συνοπτικό τρόπο, μερικές τριγωνομετρικές ταυτότητες που ίσως σας φανούν χρήσιμες. Θυμηθείτε από την τριγωνομετρία ότι οι ταυτότητες αυτές δεν είναι ανεξάρτητες. Για παράδειγμα, η Ταυτότητα 3 μπορεί να προκύψει από την Ταυτότητα 4 με την αντικατάσταση: $\alpha = \beta = \theta$. Επίσης, οι ταυτότητες αυτές μπορούν να συνδυαστούν για την παραγωγή άλλων χρήσιμων ταυτοτήτων. Έτσι, συνδυάζοντας την Ταυτότητα 1 με την Ταυτότητα 2 προκύπτουν οι ακόλουθες ταυτότητες

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

Πίνακες τριγωνομετρικών ταυτοτήτων μπορείτε να βρείτε σε οποιοδήποτε βιβλίο τριγωνομετρίας.



Άσκηση 2.1: Χρησιμοποιώντας την Ταυτότητα 5 εκφράστε το $\cos 8\theta$ συναρτήσει των $\cos 9\theta$, $\cos 7\theta$ και $\cos \theta$.



Υπόδειξη: Οι λύσεις υπάρχουν στο CD

2-3 Συνημιτονοειδή Σήματα

Για μια ημιτονοειδή συνάρτηση του χρόνου ο γενικότερος μαθηματικός τύπος επιτυγχάνεται αν κάνουμε το όρισμα (τη γωνία) της συνάρτησης του συνημιτόνου να είναι μια συνάρτηση του t . Η εξίσωση που ακολουθεί δίνει δύο ισοδύναμες μορφές:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (2.2)$$

Οι δύο παραπάνω μορφές ταυτίζονται αν ορίσουμε $\omega_0 = 2\pi f_0$. Σε καθεμία από τις μορφές που δίνονται στη Σχέση (2.2), υπάρχουν τρεις ανεξάρτητες παράμετροι. Οι ονομασίες, καθώς και η σημασία αυτών των παραμέτρων, δίνονται στη συνέχεια:

- (i) Το A ονομάζεται **πλάτος**. Το πλάτος είναι ένας παράγοντας κλίμακας που καθορίζει πόσο μεγάλο θα

είναι το σήμα του συνημιτόνου. Εφόσον η συνάρτηση $\cos \theta$ ταλαντώνεται μεταξύ του $+1$ και του -1 , το σήμα $x(t)$ της Σχέσης (2.2) θα ταλαντώνεται μεταξύ του $+A$ και του $-A$.

- (ii) Η ϕ ονομάζεται **διαφορά φάσης**. Δεδομένου ότι το όρισμα του συνημιτόνου είναι σε ακτίνια, οι μονάδες της διαφοράς φάσης πρέπει να είναι ακτίνια. Γενικότερα, στον καθορισμό της διαφοράς φάσης είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση συνημιτόνου. Αν έχουμε μια σχέση που περιέχει το ημίτονο, π.χ., $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi')$, τότε μπορούμε να την ξαναγράψουμε με τη βοήθεια του συνημιτόνου χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ισοδυναμίας του Πίνακα 2-1. Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι το ακόλουθο:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi') = A \cos(\omega_0 t + \phi' - \pi/2)$$

Επομένως στη Σχέση (2.2) ορίζουμε τη διαφορά φάσης να είναι $\phi = \phi' - \pi/2$. Συχνά, για απλότητα και για αποφυγή σφαλμάτων, αποφεύγουμε να χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση του ημιτόνου.

- (iii) Η ω_0 ονομάζεται **γωνιακή συχνότητα**. Εφόσον το όρισμα της συνάρτησης του συνημιτόνου πρέπει να είναι σε ακτίνια, κάτι το οποίο είναι αδιάστατο, η ποσότητα $\omega_0 t$ πρέπει επίσης να είναι αδιάστατη. Κατά συνέπεια, αν το t έχει μονάδες sec η ω_0 θα πρέπει να έχει μονάδες rad/sec. Παρομοίως, η $f_0 = \omega_0/2\pi$ ονομάζεται **κυκλική συχνότητα** και έχει ως μονάδα το sec^{-1} .



Παράδειγμα 2-1: Ημιτονοειδή Σήματα

Στο Σχήμα 2-6 φαίνεται η γραφική παράσταση του σήματος

$$x(t) = 20 \cos(2\pi(40)t - 0.4\pi) \quad (2.3)$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς μας, οι παράμετροι του σήματος είναι $A = 20$, $\omega_0 = 2\pi(40)$, $f_0 = 40$, και

$\phi = -0.4\pi$. Ο τρόπος με τον οποίο το σήμα εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου A είναι προφανής. Οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές είναι $+20$ και -20 , αντίστοιχα. Οι μέγιστες τιμές εμφανίζονται τις χρονικές στιγμές

$$t = \dots, -0.02, 0.005, 0.03, \dots$$

και οι ελάχιστες τιμές τις χρονικές στιγμές

$$\dots, -0.0325, -0.0075, 0.0175, \dots$$

Το χρονικό διάστημα που παρεμβάλλεται μεταξύ δύο διαδοχικών μέγιστων τιμών του σήματος είναι $1/f_0 = 0.025$ sec. Για να κατανοήσουμε γιατί το σήμα έχει αυτές οι ιδιότητες, θα πρέπει να κάνουμε κάποια ανάλυση. ■



Επίδειξη: Ημιτονοειδή Σήματα

2-3.1 Σχέση Συχνότητας και Περιόδου

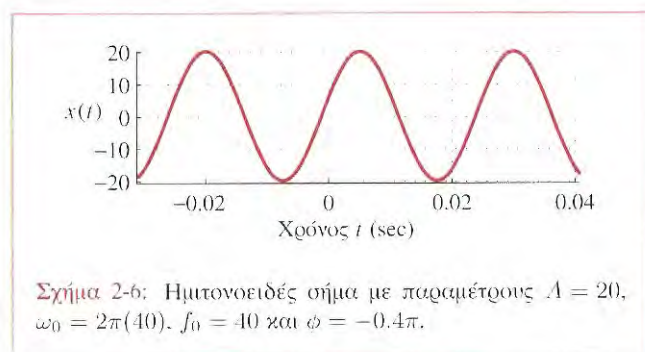
Το ημιτονοειδές στο Σχήμα 2-6 είναι προφανώς ένα περιοδικό σήμα. Η **περίοδος** του ημιτονοειδούς, που συμβολίζεται με T_0 , είναι το μήκος ενός κύκλου του ημιτονοειδούς. Γενικότερα, η συχνότητα του ημιτονοειδούς καθορίζει την περίοδο του και η σχέση που υπάρχει μεταξύ τους μπορεί να προσδιοριστεί με την εξέταση των ακόλουθων εξισώσεων:

$$\begin{aligned} x(t + T_0) &= x(t) \\ A \cos(\omega_0(t + T_0) + \phi) &= A \cos(\omega_0 t + \phi) \\ \cos(\omega_0 t + \omega_0 T_0 + \phi) &= \cos(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

Αφού η συνάρτηση συνημιτόνου έχει περίοδο 2π , η παραπάνω ισότητα ισχύει για όλες τις τιμές του t , αν

$$\begin{aligned} \omega_0 T_0 = 2\pi &\implies T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \\ (2\pi f_0) T_0 = 2\pi &\implies T_0 = \frac{1}{f_0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Εφόσον T_0 είναι η περίοδος του σήματος, η $f_0 = 1/T_0$



εκφράζει τον αριθμό των περιόδων (κύκλων) ανά δευτερόλεπτο. Επομένως, οι κύκλοι ανά δευτερόλεπτο είναι μια κατάλληλη μονάδα για την f_0 , η οποία και ήταν σε γενική χρήση μέχρι το 1960³. Όταν μιλάμε για την ω_0 , η μονάδα της γωνιακής συχνότητας είναι rad/sec. Για τα ημιτονοειδή σήματα οι μονάδες της κυκλικής συχνότητας f_0 είναι συχνά καταλληλότερες, επειδή κύκλοι ανά δευτερόλεπτο ορίζουν με ένα φυσικό τρόπο την περίοδο.



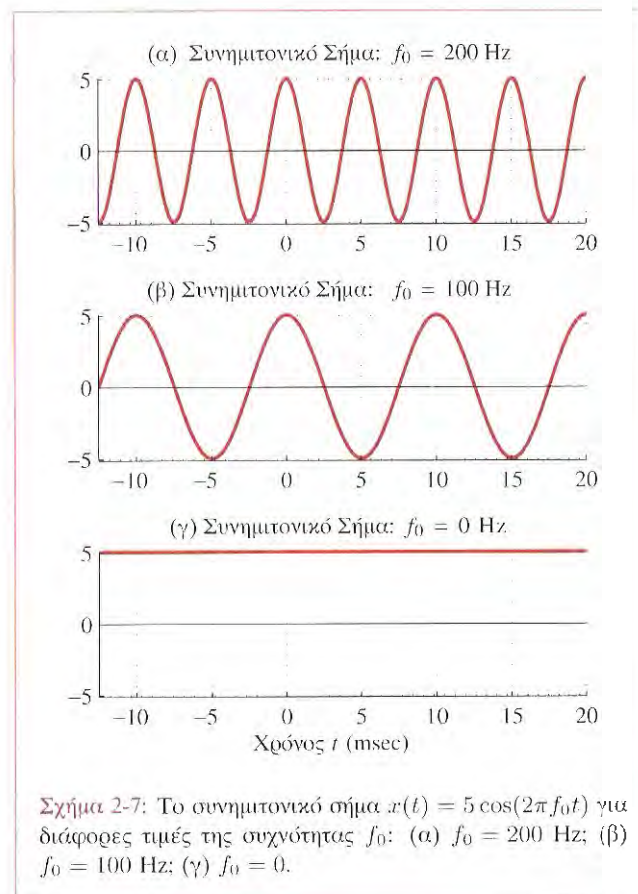
Επίδειξη: Ασκήσεις με Ημίτονα

Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουμε την επίδραση που έχει πάνω στα ημιτονοειδή η παράμετρος συχνότητα. Το Σχήμα 2-7 παρουσιάζει αυτήν την επίδραση για διάφορες επιλογές του f_0 στο σήμα

$$x(t) = 5 \cos(2\pi f_0 t)$$

Οι δύο γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 2-7(α), (β) παρουσιάζουν την επίδραση της αλλαγής της f_0 . Όπως αναμένουμε, η μορφή του ημιτονοειδούς είναι παρόμοια και για τις δύο τιμές της συχνότητας. Ωστόσο, για την υψηλότερη τιμή της συχνότητας, το σήμα αλλάζει γρηγορότερα σε σχέση με το χρόνο δηλαδή, η περίοδος του σήματος γίνεται μικρότερη. Όπως ήδη έχουμε δει

³Η μονάδα hertz (Hz) υιοθετήθηκε το 1933 από την Ηλεκτροτεχνική Επιτροπή προς τιμήν του Heinrich Hertz, ο οποίος πρώτος απέδειξε την ύπαρξη των ραδιοκυμάτων.



στη Σχέση (2.4), αυτό ισχύει επειδή η περίοδος ενός συνημιτονοειδούς σήματος είναι αντιστρόφως ανάλογη της συχνότητάς του. Παρατηρήστε ότι όταν η συχνότητα διπλασιάζεται ($100 \rightarrow 200$), η περίοδος υποδιπλασιάζεται. Αυτό αποτελεί επεξήγηση μιας γενικής αρχής στην οποία υπακούουν τα ημιτονοειδή σύμφωνα με την οποία, όσο υψηλότερη είναι η συχνότητα ενός ημιτονοειδούς, τόσο γρηγορότερα μεταβάλλεται στο χρόνο. Μέσα σ' αυτό το βιβλίο θα συναντήσουμε πολλά παραδείγματα στα οποία θα

διαπιστώσουμε ότι ισχύει η αντίστροφη αυτή σχέση μεταξύ της περιόδου και της συχνότητας.

Τέλος, παρατηρήστε ότι η $f_0 = 0$ είναι μία απολύτως αποδεκτή τιμή και ότι όταν χρησιμοποιείται, το σήμα που προκύπτει είναι σταθερό (Σχήμα 2-7(γ)) αφού $5 \cos(2\pi \cdot 0 \cdot t) = 5$ για όλες τις τιμές του t . Κατά συνέπεια, το σταθερό σήμα, το οποίο συχνά αποκαλούμε DC⁴, είναι στην πραγματικότητα ένα ημιτονοειδές μηδενικής συχνότητας.

2-3.2 Διαφορά Φάσης και Χρονική Ολίσθηση

Η διαφορά φάσης ϕ (μαζί με τη συχνότητα) καθορίζουν τις χρονικές στιγμές που εμφανίζονται οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές ενός συνημιτονικού κύματος. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, παρατηρήστε ότι το ημιτονοειδές της Σχέσης (2.2) για $\phi = 0$ εμφανίζει τη μέγιστη τιμή του τη χρονική στιγμή $t = 0$. Όταν το $\phi \neq 0$, η διαφορά φάσης καθορίζει πόσο πολύ απομακρύνεται η μέγιστη τιμή του συνημιτονικού σήματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Πριν εξετάσουμε λεπτομερώς το σημείο αυτό για τα ημιτονοειδή, είναι χρήσιμο να εξοικειωθούμε με τη γενική έννοια της *χρονικής-ολίσθησης* ενός σήματος. Υποθέστε ότι ένα σήμα $s(t)$ ορίζεται από μια γνωστή σχέση ή μια γραφική παράσταση. Ένα απλό παράδειγμα είναι η ακόλουθη τριγωνικά διαμορφωμένη συνάρτηση:

$$s(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}(4 - 2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.5)$$

Αυτή η απλή συνάρτηση έχει κλίση 2 για $0 \leq t < \frac{1}{2}$ και μια αρνητική κλίση ίση με $-\frac{2}{3}$ για $\frac{1}{2} < t \leq 2$. Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $x_1(t) = s(t - 2)$. Από τον ορισμό του σήματος $s(t)$, είναι φανερό ότι η $x_1(t)$ είναι μη μηδενική για


$$0 \leq (t - 2) \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq t \leq 4.$$

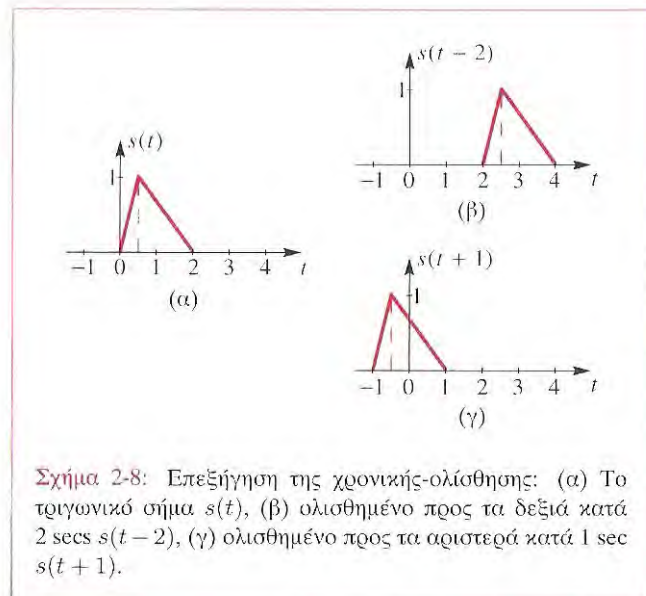
⁴Οι Ηλεκτρολόγοι Μηχανικοί χρησιμοποιούν τη συντομογραφία DC για το συνεχές ρεύμα.

Μέσα στο χρονικό διάστημα $[2, 4]$, το ολισθημένο σήμα δίνεται από τη σχέση:

$$x_1(t) = \begin{cases} 2(t - 2) & 2 \leq t \leq 2 + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}(8 - 2t) & 2 + \frac{1}{2} \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.6)$$

Δηλαδή, η $x_1(t)$ είναι απλά η συνάρτηση $s(t)$, αλλά μετατοπισμένη ή ολισθημένη προς τα δεξιά κατά 2 δευτερόλεπτα. Ομοίως, η $x_2(t) = s(t + 1)$ είναι η συνάρτηση $s(t)$ μετατοπισμένη προς τα αριστερά κατά 1 δευτερόλεπτο. Το σήμα αυτό δε μηδενίζεται στο διάστημα $-1 \leq t \leq 1$. Στο Σχήμα 2-8 φαίνονται και τα τρία σήματα $x(t) = s(t)$, $x_1(t) = s(t - 2)$ και $x_2(t) = s(t + 1)$.

 **Άσκηση 2.2:** Προσδιορίστε την εξίσωση του μετατοπισμένου σήματος $x_2(t) = s(t + 1)$.



Σχήμα 2-8: Επεξήγηση της χρονικής-ολίσθησης: (α) Το τριγωνικό σήμα $s(t)$, (β) ολισθημένο προς τα δεξιά κατά 2 secs $s(t - 2)$, (γ) ολισθημένο προς τα αριστερά κατά 1 sec $s(t + 1)$.

Θα μας δοθούν πολλές ευκαιρίες να εξετάσουμε χρονικά μετατοπισμένα σήματα. Όταν ένα σήμα μπορεί να εκφραστεί στη μορφή $x_1(t) = s(t - t_1)$, θα λέμε ότι το σήμα $x_1(t)$ είναι μια χρονικά μετατοπισμένη έκδοση του σήματος $s(t)$. Αν το t_1 είναι ένας θετικός αριθμός, τότε η μετατόπιση είναι προς τα δεξιά και λέμε ότι το σήμα $s(t)$ έχει *καθυστερήσει* χρονικά. Αν το t_1 είναι ένας αρνητικός αριθμός, τότε η μετατόπιση είναι προς τα αριστερά, και λέμε ότι το σήμα $s(t)$ *προηγείται* χρονικά. Συνοψίζοντας, η χρονική μετατόπιση είναι ουσιαστικά ένας επαναπροσδιορισμός της αρχής του χρονικού άξονα του σήματος. Γενικά, η αρχή του χρονικού άξονα οποιασδήποτε συνάρτησης της μορφής $s(t - t_1)$ μετατοπίζεται στη θέση $t = t_1$.

Ένας τρόπος για να καθοριστεί η χρονική μετατόπιση ενός συνημιτονοειδούς σήματος είναι να βρεθεί η θετική κορυφή του ημιτονοειδούς που είναι πιο κοντά στη χρονική στιγμή $t = 0$. Στη γραφική παράσταση του Σχήματος 2-6, η χρονική στιγμή που εμφανίζεται αυτή η τιμή είναι η $t_1 = 0.005$ sec. Εξαιτίας του γεγονότος ότι σε αυτήν την περίπτωση η κορυφή εμφανίζεται σε μια θετική χρονική στιγμή (στα δεξιά του $t = 0$), λέμε ότι η χρονική μετατόπιση ή ολίσθηση αντιστοιχεί σε καθυστέρηση του συνημιτονοειδούς σήματος μηδενικής φάσης. Αν $x_0(t) = A \cos(\omega_0 t)$ ένα συνημιτονοειδές σήμα μηδενικής φάσης, τότε μια καθυστέρηση του $x_0(t)$ (έστω $x_0(t - t_1)$) μπορεί να μετατραπεί σε διαφορά φάσης ϕ κάνοντας την ακόλουθη σύγκριση:

$$\begin{aligned} x_0(t - t_1) &= A \cos(\omega_0(t - t_1)) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \\ \cos(\omega_0 t - \omega_0 t_1) &= \cos(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

Επειδή η παραπάνω εξίσωση πρέπει να ισχύει για κάθε t , θα πρέπει $-\omega_0 t_1 = \phi$, που δίνει

$$t_1 = -\frac{\phi}{\omega_0} = -\frac{\phi}{2\pi f_0}$$

Παρατηρήστε ότι η διαφορά φάσης είναι αρνητική όταν η χρονική ολίσθηση είναι θετική (καθυστέρηση). Αν χρησιμοποιήσουμε την περίοδο ($T_0 = 1/f_0$) καταλήγουμε

στην ακόλουθη σχέση:


$$\phi = -2\pi f_0 t_1 = -2\pi \left(\frac{t_1}{T_0} \right) \quad (2.7)$$


που σημαίνει ότι η διαφορά φάσης ισούται με 2π φορές το τμήμα ενός κύκλου που δίνετε από το λόγο της χρονικής ολίσθησης προς την περίοδο.




Επίδειξη: Ασκήσεις Ημιτόνων

Εφόσον η θετική κορυφή που είναι πιο κοντά στο $t = 0$ πρέπει πάντα να βρίσκεται μεταξύ $|t_1| \leq T_0/2$, η διαφορά φάσης μπορεί πάντα να επιλεγεί έτσι ώστε να βρίσκεται στο διάστημα $-\pi < \phi \leq \pi$. Παρατηρήστε ωστόσο ότι η διαφορά φάσης δεν ορίζεται μονοσήμαντα αφού πρόσθεση οποιουδήποτε πολλαπλασίου του 2π στο όριο μιας συνημιτονοειδούς συνάρτησης δεν αλλάζει την τιμή της. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι το συνημιτόνο είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π . Κάθε διαφορετικό πολλαπλάσιο του 2π αντιστοιχεί στην επιλογή μιας διαφορετικής κορυφής του περιοδικού κυματοειδούς. Επομένως, ένας άλλος τρόπος να υπολογιστεί η διαφορά φάσης είναι να βρούμε οποιαδήποτε θετική κορυφή του ημιτονοειδούς και να καταγράψουμε τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη Σχέση (2.7), υπολογίζουμε τη διαφορά φάσης και προσθέτουμε, ή αφαιρούμε, ένα ακέραιο αριθμό πολλαπλασίων του 2π ώστε το τελικό αποτέλεσμα να είναι μεταξύ του $-\pi$ και του $+\pi$. Με τη διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω καταλήγουμε ακριβώς στο ίδιο αποτέλεσμα που θα βρίσκαμε αν εντοπίζαμε τη κορυφή του σήματος που βρίσκεται σε μια ημιπερίοδο εκατέρωθεν της χρονικής στιγμής $t = 0$. Η πράξη της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης πολλαπλασίων του 2π είναι γνωστή ως *μείωση modulo 2π* , επειδή είναι παρόμοια με την πράξη modulo των μαθηματικών, με την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός αριθμού με το 2π . Η τιμή της διαφοράς φάσης που βρίσκεται μεταξύ του $-\pi$ και του $+\pi$ ονομάζεται *κύρια τιμή* της διαφοράς φάσης.

 **Άσκηση 2.3:** Στο Σχήμα 2-6, είναι δυνατόν να μετρηθούν και οι δύο τιμές (θετική και αρνητική) του t_1 και μετά να υπολογιστούν οι αντίστοιχες διαφορές φάσης. Ποιά διαφορά φάσης είναι μέσα στο διάστημα $-\pi < \phi \leq \pi$; Ελέγξτε αν οι τιμές των δύο διαφορών φάσης, διαφέρουν κατά 2π .

 **Άσκηση 2.4:** Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση του Σχήματος 2-6, σχεδιάστε το σήμα $x(t - t_1)$ αν $t_1 = 0.0075$. Επαναλάβετε για $t_1 = -0.01$. Για κάθε μια περίπτωση, υπολογίστε τη διαφορά φάσης του προκύπτοντος ημιτονοειδούς.

 **Άσκηση 2.5:** Για το σήμα $x(t) = 20 \cos(2\pi(40)t - 0.4\pi)$ του Σχήματος 2-6, υπολογίστε κατάλληλες τιμές τω G και t_1 έτσι ώστε το σήμα $y(t) = Gx(t - t_1)$ να είναι ίσο με $5 \cos(2\pi(40)t)$. Με άλλα λόγια, εκφράστε το $y(t) = 5 \cos(2\pi(40)t)$ συναρτήσει του $x(t)$.

2-4 Δειγματοληψία και Σχεδίαση Ημιτονοειδών

Στο κεφάλαιο αυτό όλες οι γραφικές παραστάσεις έγιναν στο υπολογιστικό περιβάλλον Matlab. Αυτό έπρεπε να γίνει με μεγάλη προσοχή, γιατί στο Matlab μπορούμε να παραστήσουμε μόνο σήματα διακριτού χρόνου και όχι συνεχούς χρόνου. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να σχεδιάσουμε μια συνάρτηση όπως τη συνάρτηση

$$x(t) = 20 \cos(2\pi(40)t - 0.4\pi)$$

που φαίνεται στο Σχήμα 2-6, πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές της $x(t)$ σ' ένα διακριτό σύνολο χρονικών στιγμών, $t_n = nT_s$, όπου n ακέραιος. Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία παίρνουμε την ακολουθία τιμών

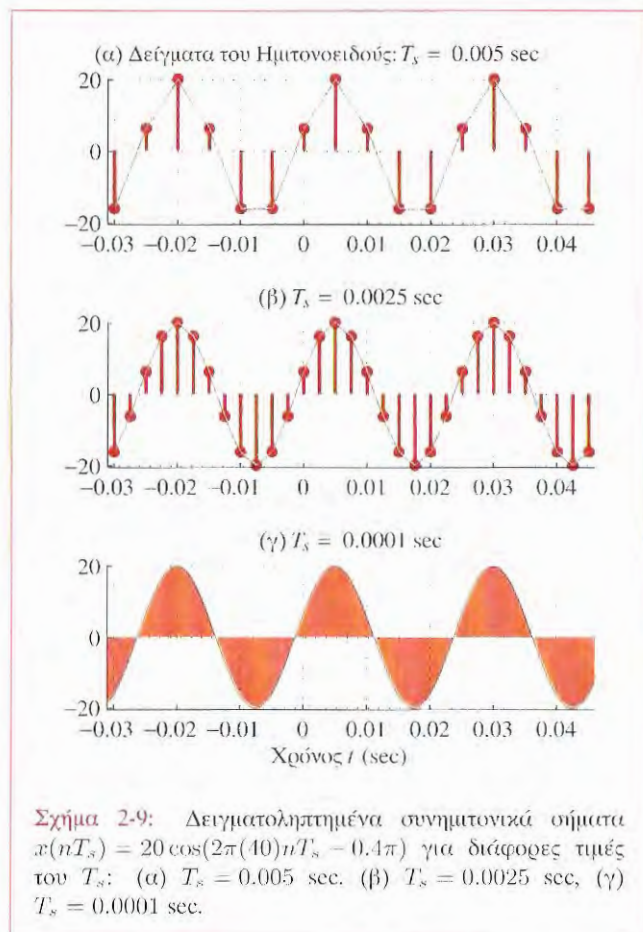
$$x(nT_s) = 20 \cos(80\pi nT_s - 0.4\pi)$$

όπου το T_s ονομάζεται *απόσταση δειγμάτων* ή *περίοδος δειγματοληψίας* και n ένας ακέραιος. Όταν σχεδιάζουμε τη συνάρτηση χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `plot` του Matlab, πρέπει να δώσουμε ένας ζεύγος διανυσμάτων, ένα που θα περιέχει τις χρονικές στιγμές και το άλλο τις υπολογισμένες τιμές της συνάρτησης. Για παράδειγμα, ο ακόλουθος κώδικας στο Matlab

```
n = -7:5;
Ts = 0.005;
tn = n*Ts;
xn = 20*cos(80*pi*tn - 0.4*pi);
plot(tn, xn)
```

θα δημιουργήσει ένα διάνυσμα γραμμή `tn` μήκους 13 που θα περιέχει αριθμούς στο διάστημα -0.035 και 0.025 οι οποίοι απέχουν μεταξύ τους κατά 0.005 και ένα άλλο διάνυσμα γραμμής `xn` των τιμών της $x(t)$. Στη συνέχεια, η συνάρτηση `plot` του Matlab σχεδιάζει τα αντίστοιχα σημεία, συνδέοντάς τα με ευθείες γραμμές. Η συμπλήρωση της καμπύλης, μ' αυτόν τον τρόπο, μεταξύ των δειγμάτων μιας συνάρτησης ονομάζεται *γραμμική παρεμβολή*. Η συνεχής γκρι καμπύλη στο επάνω μέρος του Σχήματος 2-9 δείχνει τα αποτελέσματα της γραμμικής παρεμβολής όταν η απόσταση μεταξύ των δειγμάτων είναι $T_s = 0.005$. Διαισθητικά, καταλαβαίνουμε ότι αν τα σημεία είναι πολύ κοντά το ένα με το άλλο, θα βλέπαμε μια πολύ ομαλή καμπύλη. Μια σημαντική ερώτηση είναι η ακόλουθη, “πόσο μικρή θα πρέπει να είναι η απόσταση μεταξύ των δειγμάτων ώστε το συνημιτονικό σήμα να ανακατασκευασθεί με ακρίβεια με τη γραμμική παρεμβολή;” Μια ποσοτική απάντηση σ' αυτήν την ερώτηση δίνεται στο Σχήμα 2-9, που δείχνει την ανακατασκευασμένη συνάρτηση για τρεις διαφορετικές περιόδους δειγματοληψίας. Είναι φανερό, ότι η απόσταση που προκύπτει για $T_s = 0.005$ μεταξύ των δειγμάτων, είναι αρκετά μεγάλη και η γραφική παράσταση που προκύπτει, όταν ενώσουμε τα δείγματα μεταξύ τους με ευθείες γραμμές, δεν είναι ικανοποιητική. Στις γραφικές παραστάσεις τα δείγματα φαίνονται σαν τελείες⁵. Για

⁵Αυτό μπορεί να γίνει προσθέτοντας μια δεύτερη γραφική παράσταση με τις συναρτήσεις `hold` και `stem` του Matlab.



$T_s = 0.0025$, η γραφική παράσταση που προκύπτει αρχίζει να προσεγγίζει τη μορφή του συνημιτόνου, αλλά και πάλι υπάρχουν τμήματα τα οποία είναι φανερό ότι δεν είναι λεία όπως αυτά της συνάρτησης του συνημιτόνου. Μόνο η τελευταία γραφική παράσταση του Σχήματος 2-9, η οποία αντιστοιχεί σε $T_s = 0.0001$, αναγνωρίζεται εύκολα με το μάτι σαν μια συνάρτηση συνημιτόνου⁶. Για να

⁶Σ' αυτήν τη γραφική παράσταση τα σημεία είναι τόσο κοντά μεταξύ τους που δεν μπορούμε να απεικονίσουμε τα δείγματα με τελείες.

δώσουμε μια τεκμηριωμένη απάντηση στο παραπάνω ερώτημα θα πρέπει να δώσουμε ένα μαθηματικό ορισμό της ακρίβειας. Ωστόσο, από το παράδειγμα αυτό μάθαμε ότι όσο η περίοδος δειγματοληψίας μειώνεται, τόσο περισσότερα δείγματα παίρνουμε μέσα σε μια περίοδο του συνημιτονικού σήματος. Για $T_s = 0.005$ υπάρχουν 5 δείγματα ανά περίοδο, για $T_s = 0.0025$ υπάρχουν 10 δείγματα ανά περίοδο και για $T_s = 0.0001$ υπάρχουν 250 δείγματα ανά περίοδο. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι 10 δείγματα ανά περίοδο δεν είναι αρκετά και ότι τα 250 δείγματα ανά περίοδο είναι πιθανόν πάρα πολλά, ωστόσο γενικά όσα περισσότερα δείγματα έχουμε διαθέσιμα ανά περίοδο τόσο πιο λεία και πιο ακριβής είναι η ανακατασκευή που προκύπτει με γραμμική παρεμβολή.

Η επιλογή του T_s εξαρτάται επίσης και από τη συχνότητα του συνημιτονικού σήματος. Για παράδειγμα, αν η συχνότητα του συνημιτονικού σήματος ήταν 2000 Hz αντί 40 Hz, τότε μια απόσταση μεταξύ των δειγμάτων ίση με $T_s = 0.0001$ θα μπορούσε να δώσει 5 δείγματα ανά περίοδο. Το κλειδί για ακριβή ανακατασκευή είναι να δειγματοληπτήσουμε μ' ένα ρυθμό αρκετά υψηλό, έτσι ώστε το συνημιτονικό σήμα να μην αλλάξει πάρα πολύ ανάμεσα σε δύο διαδοχικά δείγματα. Αυτό εξαρτάται βέβαια άμεσα από τη συχνότητα του συνημιτονικού σήματος.

Το πρόβλημα της σχεδίασης ενός συνημιτονικού σήματος από ένα σύνολο δειγμάτων του εξαρτάται από τη μέθοδο παρεμβολής που θα χρησιμοποιήσουμε. Στο Matlab χρησιμοποιείται μια συνάρτηση που κάνει γραμμική παρεμβολή. Μια ενδιαφέρουσα ερώτηση είναι η ακόλουθη: "Αν χρησιμοποιήσουμε μια καλύτερη μέθοδο παρεμβολής πόσο μεγάλη θα μπορούσε να ήταν η απόσταση μεταξύ των δειγμάτων ώστε να μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το συνημιτονικό σήμα από τα δείγματά του;" Παροδόξως, η θεωρητική απάντηση σ' αυτήν την ερώτηση είναι ότι το συνημιτονικό σήμα μπορεί να ανακατασκευασθεί τέλεια από τα δείγματά του, αν η απόσταση μεταξύ των δειγμάτων είναι μικρότερη από το μισό της περιόδου, δηλαδή, ο μέσος αριθμός διαθέσιμων δειγμάτων ανά περίοδο θα πρέπει να είναι λίγο μεγαλύτερος από δύο! Με γραμμική παρεμβολή βεβαίως δεν μπορούμε να πετύχουμε

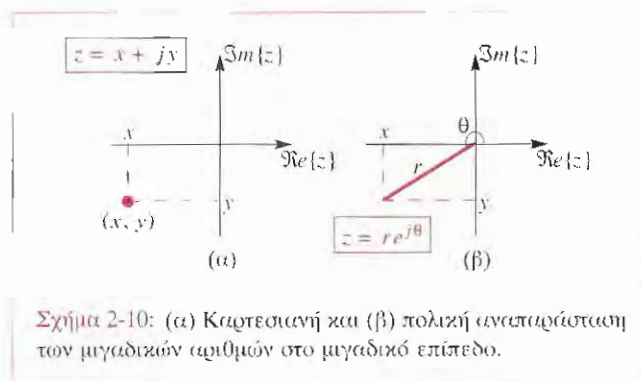
τέλεια ανακατασκευή, αλλά στο Κεφάλαιο 4, όπου θα εξετάσουμε λεπτομερώς τη διαδικασία δειγματοληψίας, θα διασαφηνίσουμε πώς μπορούμε να πετύχουμε αυτό το σπουδαίο αποτέλεσμα. Για την ώρα, η παρατήρηση ότι μπορούμε να ανακατασκευάσουμε λείες και ακριβείς ημιτονοειδείς καμπύλες από τα δείγματά τους αν η περίοδος δειγματοληψίας είναι “αρκετά μικρή,” είναι ικανοποιητική για τους σκοπούς μας.

2-5 Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα και Φάσορες

Είδαμε ότι τα συνημιτονικά σήματα είναι χρήσιμες μαθηματικές παραστάσεις σημάτων που συχνά προκύπτουν στην πράξη, και ότι αυτά μπορούν να ορισθούν και να εξηγηθούν εύκολα. Ωστόσο, όπως θα δούμε η ανάλυση και γενικά οι μαθηματικοί χειρισμοί των συνημιτονικών σημάτων πολύ συχνά απλοποιούνται πάρα πολύ όταν χρησιμοποιούμε τα σχετιζόμενα *μιγαδικά εκθετικά σήματα*. Αν και η εισαγωγή των μιγαδικών εκθετικών σημάτων φαίνεται να δυσκολεύει το πρόβλημα, θα δούμε σύντομα την αξία αυτής της καινούργιας αναπαράστασης. Πριν ορίσουμε τα μιγαδικά εκθετικά σήματα, θα κάνουμε μια γρήγορη ανασκόπηση των βασικών ιδιοτήτων των μιγαδικών αριθμών⁷.

2-5.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

Ένας μιγαδικός αριθμός z είναι ένα διατεταγμένο ζευγάρι πραγματικών αριθμών. Οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να παρασταθούν σαν $z = (x, y)$, όπου $x = \Re\{z\}$ είναι το *πραγματικό μέρος* και $y = \Im\{z\}$ το *φανταστικό μέρος* του z αντίστοιχα. Οι Μηχανικοί χρησιμοποιούν το σύμβολο j για την $\sqrt{-1}$ αντί του i , οπότε μπορούμε να παραστήσουμε ένα μιγαδικό αριθμό σαν $z = x + jy$. Οι δύο αυτές αναπαραστάσεις ονομάζονται *Καρτεσιανή*



Σχήμα 2-10: (α) Καρτεσιανή και (β) πολική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο.

μορφή του μιγαδικού αριθμού. Οι Μιγαδικοί αριθμοί συχνά αναπαριστώνται σαν σημεία του *μιγαδικού επιπέδου*, όπου το πραγματικό και φανταστικό μέρος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2-10(α), καθορίζουν την τεταγμένη και την τεταγμένη του σημείου αντίστοιχα. Με την Καρτεσιανή αναπαράσταση και έχοντας κατά νου ότι κάθε αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με το j ανήκει στο φανταστικό μέρος, οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης μεταξύ μιγαδικών αριθμών, μπορούν να ορισθούν με τη βοήθεια των αντίστοιχων οικείων πράξεων μεταξύ των πραγματικών αριθμών πάνω στα πραγματικά και φανταστικά μέρη τους. Για παράδειγμα, το άθροισμα δύο μιγαδικών αριθμών ορίζεται ως εκείνος ο μιγαδικός αριθμός του οποίου το πραγματικό μέρος είναι το άθροισμα των πραγματικών τμημάτων και το φανταστικό μέρος είναι το άθροισμα των φανταστικών τμημάτων αντίστοιχα.

Από το γεγονός ότι οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να παρασταθούν σαν σημεία ενός επιπέδου, προκύπτει ότι οι μιγαδικοί αριθμοί είναι ανάλογοι με τα διανύσματα ενός διδιάστατου χώρου. Αυτό μας οδηγεί στην πολύ χρήσιμη γεωμετρική ερμηνεία ενός μιγαδικού αριθμού που φαίνεται στο Σχήμα 2-10(β). Όπως γνωρίζουμε, τα διανύσματα έχουν μήκος και διεύθυνση, οπότε ένας άλλος τρόπος παράστασης ενός μιγαδικού αριθμού είναι η *πολική αναπαράσταση* στην οποία ο μιγαδικός αριθμός παριστάνεται με το μήκος του r και τη γωνία θ που

⁷Στο Παράρτημα Α υπάρχει μια εμπειριστική ανάλυση των θεμελιωδών εννοιών των μιγαδικών αριθμών. Οι αναγνώστες οι οποίοι γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών καθώς και τις πράξεις μεταξύ των μιγαδικών αριθμών, μπορούν να παραλείψουν το Παράρτημα Α και να συνεχίσουν στην Ενότητα 2-5.2.

σχηματίζει με τον άξονα των πραγματικών αριθμών του μιγαδικού επιπέδου. Το μήκος του διανύσματος ονομάζεται επίσης *μέτρο* του μιγαδικού αριθμού z (συμβολίζεται με $|z|$) και η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα των πραγματικών αριθμών ονομάζεται *όρισμα* του z (συμβολίζεται με $\arg z$). Αυτό δηλώνεται με τον περιγραφικό συμβολισμό $z \longleftrightarrow r\angle\theta$, που σημαίνει ότι το διάνυσμα που αναπαριστά το μιγαδικό αριθμό z έχει μήκος r και σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των πραγματικών αριθμών του μιγαδικού επιπέδου.

Είναι πολύ σημαντικό να μπορούμε να μετατρέψουμε την Καρτεσιανή μορφή αναπαράστασης ενός μιγαδικού σε πολική μορφή και αντίστροφα. Το Σχήμα 2-10(β) δείχνει ένα μιγαδικό αριθμό z και τις ποσότητες που υπεισέρχονται στην Καρτεσιανή και την πολική αναπαράσταση αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας αυτό το σχήμα, απλές τριγωνομετρικές ταυτότητες και το Πυθαγόρειο θεώρημα, μπορούμε να βρούμε ένα συστηματικό τρόπο υπολογισμού των Καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y) από τις πολικές μεταβλητές $r\angle\theta$:

$$x = r \cos \theta \quad \text{και} \quad y = r \sin \theta \quad (2.8)$$

και για να πάρουμε από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες στις πολικές

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{και} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.9)$$

Ο συμβολισμός $r\angle\theta$ είναι λίγο άκομπος και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί από μόνος του σε αλγεβρικές πράξεις. Μια καλύτερη πολική αναπαράσταση μπορεί να προκύψει, χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση του Euler για τις μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (2.10)$$

Το Καρτεσιανό ζεύγος $(\cos \theta, \sin \theta)$ μπορεί να παριστά οποιοδήποτε σημείο ενός κύκλου ακτίνας 1 και επομένως μια γενίκευση της Σχέσης (2.10) μας επιτρέπει να εκφράζουμε οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό z ως:

$$z = re^{j\theta} = r \cos \theta + jr \sin \theta \quad (2.11)$$

Η μιγαδική εκθετική πολική αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού είναι κατάλληλη όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε μιγαδικούς αριθμούς (για περισσότερες λεπτομέρειες δες στο Παράρτημα Α). Αποτελεί επίσης τη βάση των μιγαδικών εκθετικών σημάτων τα οποία μας απασχολούν στην ενότητα που ακολουθεί.



Επίδειξη: Διεπαφή ZDrill

2-5.2 Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα

Το μιγαδικό εκθετικό σήμα ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

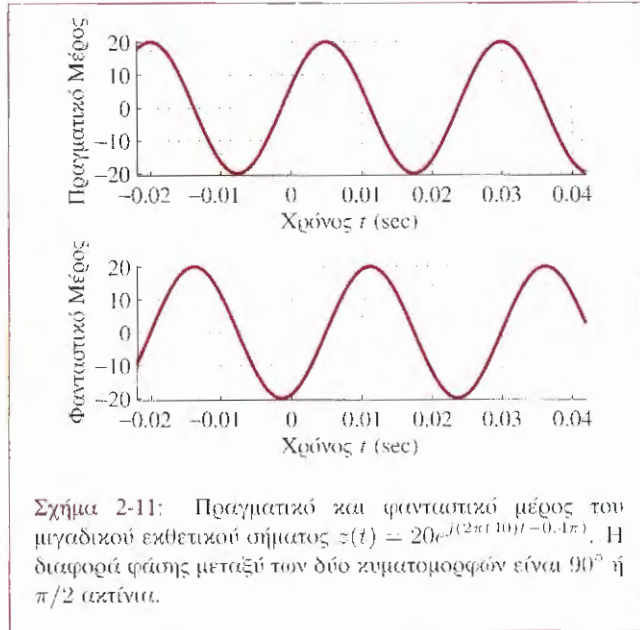
$$z(t) = A e^{j(\omega_0 t + \phi)} \quad (2.12)$$

Παρατηρήστε ότι το μιγαδικό εκθετικό σήμα είναι μια μιγαδική εκθετική συνάρτηση του t , όπου το μέτρο του $z(t)$ είναι $|z(t)| = A$ και το όρισμά του είναι $\arg z(t) = (\omega_0 t + \phi)$. Χρησιμοποιώντας τη Σχέση του Euler (2.10), προκύπτει η ακόλουθη Καρτεσιανή αναπαράσταση

$$\begin{aligned} z(t) &= A e^{j(\omega_0 t + \phi)} \\ &= A \cos(\omega_0 t + \phi) + jA \sin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned} \quad (2.13)$$

του εκθετικού μιγαδικού σήματος. Όπως και στο πραγματικό ημιτονοειδές σήμα, A είναι το πλάτος, και θα πρέπει να είναι ένας θετικός αριθμός, ϕ είναι η φάση και ω_0 είναι η *συχνότητα* σε rad/sec. Στη Σχέση (2.13) είναι προφανές ότι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού εκθετικού σήματος είναι ένα πραγματικό συνημιτονικό σήμα όπως αυτό που ορίσαμε στη Σχέση (2.2) και το φανταστικό μέρος είναι ένα ημιτονικό σήμα. Στο Σχήμα 2-11 φαίνονται το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του ακόλουθου μιγαδικού εκθετικού σήματος:

$$\begin{aligned} z(t) &= 20 e^{j(2\pi(40)t - 0.4\pi)} \\ &= 20 e^{j(80\pi t - 0.4\pi)} \\ &= 20 \cos(80\pi t - 0.4\pi) + j20 \sin(80\pi t - 0.4\pi) \\ &= 20 \cos(80\pi t - 0.4\pi) + j20 \cos(80\pi t - 0.9\pi) \end{aligned}$$



Η γραφική παράσταση ενός μιγαδικού σήματος συναρτήσει του χρόνου απαιτεί δύο γραφικές παραστάσεις, μια για το πραγματικό μέρος και μια για το φανταστικό μέρος του. Παρατηρήστε ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού εκθετικού σήματος είναι πραγματικά σήματα που διαφέρουν μόνο σε μια ολίσθηση της φάσης κατά 0.5π ακτίνια.

Ο βασικός λόγος που μας ενδιαφέρουν τα μιγαδικά εκθετικά σήματα είναι ότι αποτελούν μια εναλλακτική αναπαράσταση των πραγματικών συνημιτονικών σημάτων. Αυτό συμβαίνει γιατί πάντα μπορούμε να γράψουμε

$$x(t) = \Re \left\{ A e^{j(\omega_0 t + \phi)} \right\} = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (2.14)$$

Στην πραγματικότητα, το πραγματικό μέρος του μιγαδικού εκθετικού σήματος που φαίνεται στο Σχήμα 2-11, είναι ίδιο με το συνημιτονικό σήμα που φαίνεται στο Σχήμα 2-6. Αν και προς στιγμή μπορεί να φαίνεται ότι περιπλέκουμε τα πράγματα, προσθέτοντας πρώτα το φανταστικό μέρος, για

να προκύψει το μιγαδικό εκθετικό σήμα και στη συνέχεια το πετάμε κρατώντας μόνο το πραγματικό του μέρος, θα δούμε ότι μ' αυτόν τον τρόπο, απλοποιούνται πάρα πολύ οι υπολογισμοί. Για παράδειγμα είναι δυνατόν να αντικαταστήσουμε όλους τους τριγωνομετρικούς χειρισμούς σε αλγεβρικούς πάνω στους εκθέτες.

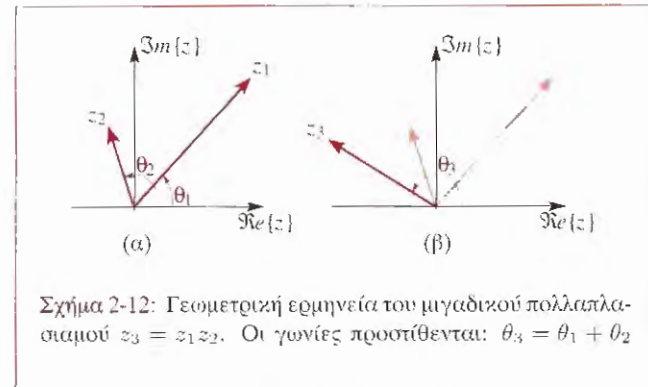
Άσκηση 2.6: Δείξτε ότι αναπτύσσοντας το πραγματικό μέρος του $e^{j(\alpha+\beta)} = e^{j\alpha} e^{j\beta}$ θα βρούμε την Ταυτότητα 5 του Πίνακα 2-2. Δείξτε επίσης ότι η Ταυτότητα 4 προκύπτει από το φανταστικό μέρος.

2-5.3 Ερμηνεία με τη Χρήση Περιστρεφόμενου Φάσος

Όταν πολλαπλασιάζονται δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούνται οι πολικές αναπαράστασές τους. Για να διευκρινίσουμε το σημείο αυτό, ας θεωρήσουμε ότι $z_3 = z_1 z_2$, όπου $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ και $z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$. Επομένως

$$z_3 = r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j\theta_1} e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

Είναι φανερό ότι στους παραπάνω χειρισμούς, για να



συνδυάσουμε τα δύο μιγαδικά εκθετικά σήματα, χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα των εκθετών. Από το αποτέλεσμα αυτό συμπεραίνουμε ότι για να πολλαπλασιάσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τα μέτρα τους και να προσθέσουμε τα ορίσματά τους. Αν θεωρήσουμε ότι ο ένας μιγαδικός αριθμός παριστάνεται από ένα σταθερό διάνυσμα πάνω στο μιγαδικό επίπεδο, τότε ο πολλαπλασιασμός μ' ένα δεύτερο μιγαδικό αριθμό σταθμίζει το μήκος του πρώτου διανύσματος με το μέτρο του δεύτερου μιγαδικού αριθμού και το περιστρέφει τόσο, όσο δηλώνει το όρισμα του δεύτερου μιγαδικού αριθμού. Η διαδικασία αυτή διασαφηνίζεται στο Σχήμα 2-12 στο οποίο υποθέτουμε ότι $r_1 > 1$ έτσι ώστε $r_1 r_2 > r_2$.

Αυτή η γεωμετρική ερμηνεία του μιγαδικού πολλαπλασιασμού μας οδηγεί σε μια πολύ χρήσιμη ερμηνεία του μιγαδικού εκθετικού σήματος, ως ένα μιγαδικό διάνυσμα που στρέφεται με την πάροδο του χρόνου. Αν ορίσουμε το μιγαδικό αριθμό

$$X = A e^{j\phi} \quad (2.15)$$

τότε η Σχέση (2.12) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$z(t) = X e^{j\omega_0 t} \quad (2.16)$$

δηλαδή, το $z(t)$ είναι το γινόμενο του μιγαδικού αριθμού X και της μιγαδικής συνάρτησης $e^{j\omega_0 t}$. Ο μιγαδικός αριθμός X , ο οποίος ευφυνώς ονομάζεται *μιγαδικό πλάτος*, είναι μια πολική αναπαράσταση που προκύπτει από το πλάτος και τη φάση του μιγαδικού εκθετικού σήματος. Το μιγαδικό πλάτος $X = A e^{j\phi}$ και η συχνότητα ω_0 είναι αρκετά για να παραστήσουμε τη συνάρτηση $z(t)$, όπως το πραγματικό συνημιτονικό σήμα, $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$, χρησιμοποιώντας τη Σχέση (2.14). Το μιγαδικό πλάτος είναι επίσης γνωστό με το όνομα *φάσορας*. Η ορολογία αυτή χρησιμοποιείται ευρέως στη θεωρία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων, όπου χρησιμοποιούνται τα μιγαδικά εκθετικά σήματα για την απλοποίηση της ανάλυσης και της σχεδίασης κυκλωμάτων. Αφού το μιγαδικό πλάτος είναι ένας μιγαδικός αριθμός, το X μπορεί να παρασταθεί γραφικά ως ένα διάνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο, όπου το μέτρο του διανύσματος ($|X| = A$) είναι το πλάτος και

η γωνία ($\angle X = \phi$) του διανύσματος είναι η φάση του μιγαδικού εκθετικού σήματος που ορίσαμε στη Σχέση (2.16). Στη συνέχεια, οι όροι *φάσορας* και *μιγαδικό πλάτος* θα χρησιμοποιούνται κατά περίπτωση, αφού και οι δύο αναφέρονται στην ίδια ποσότητα που ορίσαμε στη Σχέση (2.15).

Το μιγαδικό εκθετικό σήμα που ορίσαμε στη Σχέση (2.16) μπορεί να γραφεί και ως:

$$z(t) = X e^{j\omega_0 t} = A e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} = A e^{j\theta(t)}$$

όπου

$$\theta(t) = \omega_0 t + \phi \quad (\text{ακτίνια})$$

Σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t , η τιμή του μιγαδικού εκθετικού σήματος $z(t)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός του οποίου το μέτρο είναι A και το όρισμα είναι $\theta(t)$. Όπως κάθε μιγαδικός αριθμός, το $z(t)$ μπορεί να παρασταθεί στο μιγαδικό επίπεδο ως ένα διάνυσμα. Στην περίπτωση αυτή, η κεφαλή του διανύσματος βρίσκεται πάντοτε στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας A . Τώρα, αν το t αυξάνει, το μιγαδικό διάνυσμα $z(t)$ θα περιστρέφεται με ένα σταθερό ρυθμό, που καθορίζεται από τη γωνιακή συχνότητα ω_0 . Δηλαδή, ο πολλαπλασιασμός του φάσορα X με το $e^{j\omega_0 t}$, όπως φαίνεται στη Σχέση (2.16), έχει ως αποτέλεσμα την περιστροφή του σταθερού φάσορα X (επειδή $|e^{j\omega_0 t}| = 1$, δεν υπάρχει κλιμάκωση). Επομένως, ένα άλλο όνομα του μιγαδικού εκθετικού σήματος είναι το *περιστρεφόμενος φάσορας*.

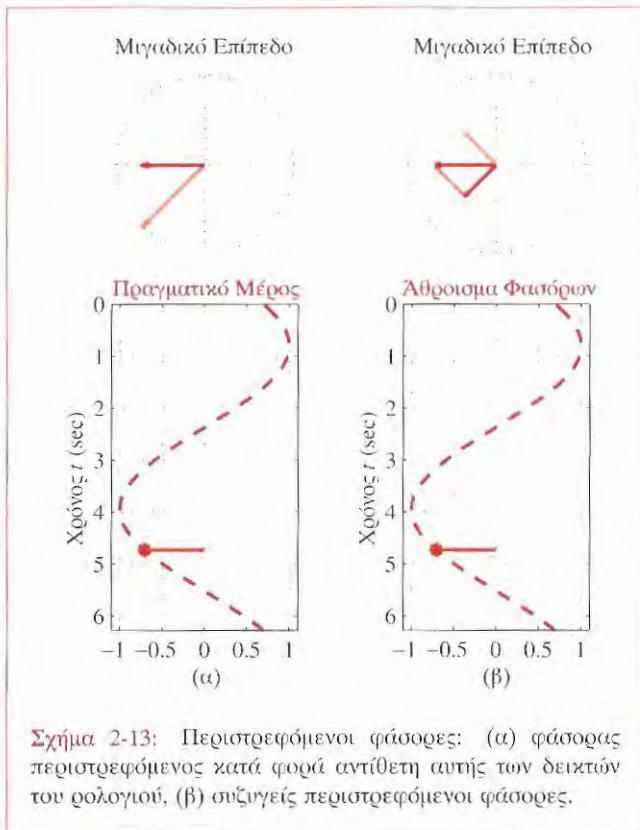
Αν η συχνότητα ω_0 είναι θετική, η φορά της περιστροφής είναι αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού, διότι η γωνία $\theta(t)$ αυξάνει καθώς περνάει ο χρόνος. Ομοίως, όταν η ω_0 είναι αρνητική, η γωνία $\theta(t)$ αλλάζει κατά την αντίθετη κατεύθυνση καθώς περνά ο χρόνος και επομένως ο μιγαδικός φάσορας περιστρέφεται κατά τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Συνεπώς, θα λέμε ότι οι περιστρεφόμενοι φάσορες έχουν *θετική συχνότητα* όταν περιστρέφονται με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού και *αρνητική συχνότητα* όταν περιστρέφονται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Ένας περιστρεφόμενος φάσορας συμπληρώνει μια πλήρη περιστροφή κάθε φορά που η γωνία $\theta(t)$ αλλάζει

κατά 2π ακιόνια. Ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη περιστροφή είναι ίσος με τη περίοδο, T_0 , του μιγαδικού εκθετικού σήματος, έτσι

$$\omega_0 T_0 = (2\pi f_0) T_0 = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{1}{f_0}$$

Παρατηρήστε ότι η διαφορά φάσης ϕ καθορίζει την



Σχήμα 2-13: Περιστρεφόμενοι φάσορες: (α) φάσορας περιστρεφόμενος κατά φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού, (β) συζυγείς περιστρεφόμενοι φάσορες.

κατεύθυνση που “δείχνει” ο φάσορας τη χρονική στιγμή $t = 0$. Για παράδειγμα, αν $\phi = \pi/2$, τότε ο φάσορας δείχνει προς τα επάνω όταν $t = 0$, ενώ αν $\phi = 0$, ο φάσορας δείχνει προς τα δεξιά όταν $t = 0$.

Οι γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 2-13(α) διευκρινίζουν τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα σ’ ένα μιγαδικό περιστρεφόμενο φάσορα και ένα πραγματικό συνημιτονικό σήμα. Η γραφική παράσταση που βρίσκεται στο επάνω αριστερό μέρος, δείχνει το μιγαδικό επίπεδο και δύο διανύσματα. Το διάνυσμα του τρίτου τεταρτημορίου παριστά το σήμα

$$z(t) = e^{j(t-\pi/4)}$$

τη χρονική στιγμή $t = 1.5\pi$. Το οριζόντιο διάνυσμα που δείχνει προς τα αριστερά παριστά το πραγματικό μέρος του διανύσματος $z(t)$ τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή ($t = 1.5\pi$), δηλαδή,

$$x(1.5\pi) = \Re\{z(1.5\pi)\} = \cos(1.5\pi - \pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Καθώς ο χρόνος t αυξάνει, ο περιστρεφόμενος φάσορας $z(t)$ περιστρέφεται κατά την αντιωρολογιακή φορά και το πραγματικό μέρος του $x(t)$ ταλαντώνεται αριστερά και δεξιά κατά μήκος του πραγματικού άξονα. Αυτό φαίνεται στο γράφημα που βρίσκεται στο κάτω μέρος που δείχνει πώς μεταβάλλεται το πραγματικό μέρος του φάσορα καθώς αυτός περιστρέφεται και συμπληρώνει μια πλήρη περιστροφή, δηλαδή, $0 \leq t \leq 2\pi$.



Επίδειξη: Περιστρεφόμενοι Φάσορες

2-5.4 Οι Αντίστροφες Σχέσεις του Euler

Οι αντίστροφες σχέσεις του Euler μας επιτρέπουν να εκφράσουμε τη συνάρτηση του συνημιτόνου συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων ως

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad (2.17)$$

και τη συνάρτηση του ημιτόνου ως

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad (2.18)$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες δές το Παράρτημα Α.

Για να εκφράσουμε το $\cos(\omega_0 t + \phi)$ ως συνάρτηση ενός μιγαδικού εκθετικού σήματος θετικής συχνότητας και ενός αρνητικής συχνότητας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση (2.17)

$$\begin{aligned} A \cos(\omega_0 t + \phi) &= A \left(\frac{e^{j(\omega_0 t + \phi)} + e^{-j(\omega_0 t + \phi)}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} X e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} X^* e^{-j\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{2} z(t) + \frac{1}{2} z^*(t) \\ &= \Re\{z(t)\} \end{aligned}$$

όπου το z^* συμβολίζει το συζυγή του z .

Η σχέση αυτή έχει μια ενδιαφέρουσα εξήγηση. Το πραγματικό συνημιτονικό σήμα με συχνότητα ω_0 συντίθεται από δύο μιγαδικά εκθετικά σήματα, ένα με θετική συχνότητα (ω_0) και ένα με αρνητική συχνότητα ($-\omega_0$). Το μιγαδικό πλάτος του μιγαδικού εκθετικού σήματος θετικής συχνότητας είναι ίσο με $\frac{1}{2} X = \frac{1}{2} A e^{j\phi}$, και το μιγαδικό πλάτος του μιγαδικού εκθετικού αρνητικής συχνότητας είναι ίσο με $\frac{1}{2} X^* = \frac{1}{2} A e^{-j\phi}$. Δηλαδή, το πραγματικό συνημιτονικό σήμα μπορεί να παρασταθεί από το άθροισμα δύο μιγαδικών συζυγών περιστρεφόμενων φασόρων.



Επίδειξη: Περιστρεφόμενοι Φάσορες

Στο Σχήμα 2-13(β) διασαφηνίζεται πώς από το ημίαθροισμα δύο συζυγών περιστρεφόμενων φασόρων προκύπτει το πραγματικό συνημιτονικό σήμα. Στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα σε μια γωνία στο τρίτο τεταρτημόριο είναι ο μιγαδικός περιστρεφόμενος φάσορας $\frac{1}{2} z(t)$ τη χρονική στιγμή $t = 1.5\pi$. Καθώς ο χρόνος t αυξάνεται, η γωνία θα πρέπει να αυξάνει κατά φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού. Ομοίως, το διάνυσμα του δευτέρου τεταρτημορίου, είναι ο μιγαδικός περιστρεφόμενος φάσορας $\frac{1}{2} z^*(t)$ τη χρονική στιγμή $t = 1.5\pi$. Καθώς περνάει ο χρόνος t , η γωνία του $\frac{1}{2} z^*(t)$ θα αυξάνεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Το οριζόντιο διάνυσμα που δείχνει προς τα δεξιά είναι το άθροισμα των δύο αυτών συζυγών μιγαδικών

περιστρεφόμενων φασόρων. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό του πραγματικού διανύσματος που φαίνεται στη γραφική παράσταση στα αριστερά και επομένως το πραγματικό συνημιτονικό σήμα. Η γραφική παράσταση στο κάτω δεξιό μέρος του σχήματος δείχνει τις μεταβολές των τιμών του $\cos(t - \pi/4)$ για τιμές του t $0 \leq t \leq 2\pi$.

Η παράσταση των πραγματικών συνημιτονικών σημάτων συναρτήσει των συζυγών μιγαδικών εκθετικών στοιχείων αποτελεί ένα αξιοσημείωτο γεγονός. Οι αρνητικές συχνότητες, που προκύπτουν εξαιτίας της μιγαδικής εκθετικής αναπαράστασης, βοηθούν πάρα πολύ στην επίλυση προβλημάτων που έχουν σχέση με την ανάλυση σημάτων και συστημάτων. Θα αναπτύξουμε περαιτέρω αυτή την αναπαράσταση στο Κεφάλαιο 3, όπου θα εισαγάγουμε την έννοια του φάσματος ενός σήματος.



Άσκηση 2.7: Δείξτε ότι κάθε πραγματικό ημιτονικό σήμα μπορεί να παρασταθεί ως ακολούθως:

$$A \sin(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2} X e^{-j\pi/2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} X^* e^{j\pi/2} e^{-j\omega_0 t}$$

όπου $X = A e^{j\phi}$. Στη περίπτωση αυτή, μπορούμε να πούμε ότι το ημιτονικό σήμα συντίθεται πάλι από δύο μιγαδικά εκθετικά σήματα με τις ίδιες θετικές και αρνητικές συχνότητες, αλλά οι μιγαδικοί συντελεστές που πολλαπλασιάζουν τους όρους είναι διαφορετικοί από εκείνους του συνημιτονικού σήματος. Συγκεκριμένα, το ημιτονικό σήμα απαιτεί επιπλέον διαφορές φάσης των $\mp\pi/2$ που εφαρμόζονται στα μιγαδικά πλάτη X και X^* , αντίστοιχα.

2-6 Πρόσθεση Φασόρων

Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις κατά τις οποίες πρέπει να προσθέσουμε δύο ή και περισσότερα ημιτονικά σήματα. Όταν όλα τα σήματα έχουν την ίδια συχνότητα, το πρόβλημα απλοποιείται. Το πρόβλημα της πρόσθεσης ημιτονικών σημάτων προκύπτει πολύ συχνά σε προβλήματα ανάλυσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων καθώς και σε άλλα


προβλήματα όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 5, όπου θα εισαγάγουμε την έννοια του φιλτραρίσματος στο διακριτό χρόνο. Επομένως είναι χρήσιμο να αναπτύξουμε μια μέθοδο πρόσθεσης ημιτονοειδών σημάτων που έχουν την ίδια συχνότητα, αλλά διαφορετικά πλάτη και φάσεις. Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε την ακόλουθη σχέση:

$$\sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega_0 t + \phi_k) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (2.19)$$

Η Εξίσωση (2.19) δηλώνει ότι το άθροισμα N συνημιτονικών σημάτων διαφορετικού πλάτους και φάσης, αλλά της ίδιας συχνότητας, μπορεί πάντα να γραφεί ως ένα συνημιτονικό σήμα της ίδιας συχνότητας. Μια απόδειξη της Εξίσωσης (2.19) μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες όπως οι ακόλουθες

$$A_k \cos(\omega_0 t + \phi_k) = A_k \cos \phi_k \cos(\omega_0 t) - A_k \sin \phi_k \sin(\omega_0 t) \quad (2.20)$$

Μπορούμε το άθροισμα της Σχέσης (2.19) να το γράφουμε ισοδύναμα σαν δύο αθροίσματα ημιτόνων και συνημιτόνων μαζεύοντας όλους τους όρους που περιέχουν $\cos(\omega_0 t)$ και όλους τους όρους που περιέχουν $\sin(\omega_0 t)$ και στη συνέχεια να ξαναχρησιμοποιήσουμε την ίδια ταυτότητα της Σχέσης (2.20) κατά την αντίστροφη φορά. Ωστόσο, η διαδικασία αυτή είναι πάρα πολύ επίπονη (δες Άσκηση 2.8) και οδηγεί σε πολύπλοκες εκφράσεις. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, μια πολύ πιο απλή προσέγγιση βασίζεται στη μιγαδική εκθετική αναπαράσταση των συνημιτονικών σημάτων.

 **Άσκηση 2.8:** Χρησιμοποιήστε τη Σχέση (2.20) και δείξτε ότι το άθροισμα

$$1.7 \cos(20\pi t + 70\pi/180) + 1.9 \cos(20\pi t + 200\pi/180)$$

ισούται με το $A \cos(20\pi t + \phi)$, όπου

$$\begin{aligned} A &= \{ [1.7 \cos(70\pi/180) + 1.9 \cos(200\pi/180)]^2 \\ &\quad + [1.7 \sin(70\pi/180) + 1.9 \sin(200\pi/180)]^2 \}^{1/2} \\ &= 1.532 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \phi &= \tan^{-1} \left\{ \frac{1.7 \sin(70\pi/180) + 1.9 \sin(200\pi/180)}{1.7 \cos(70\pi/180) + 1.9 \cos(200\pi/180)} \right\} \\ &= 141.79\pi/180 = 2.475 \text{ rads} \end{aligned}$$

Η τιμή της ϕ , η οποία δίνεται σε ακτίνια, αντιστοιχεί σε 141.79° .

2-6.1 Πρόσθεση Μιγαδικών Αριθμών

Όταν προστίθενται δύο μιγαδικοί αριθμοί, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε την Καρτεσιανή αναπαράστασή τους. Αν $z_1 = x_1 + jy_1$ και $z_2 = x_2 + jy_2$, τότε $z_3 = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$, δηλαδή, το πραγματικό και φανταστικό μέρος του αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των πραγματικών και των φανταστικών τμημάτων αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας διανύσματα και θεωρώντας ότι και τα δύο διανύσματα z_1 και z_2 αρχίζουν από την αρχή των αξόνων, το άθροισμα z_3 είναι φανερό ότι ισούται με το άθροισμα των δύο διανυσμάτων και υπολογίζεται ως ακολούθως:

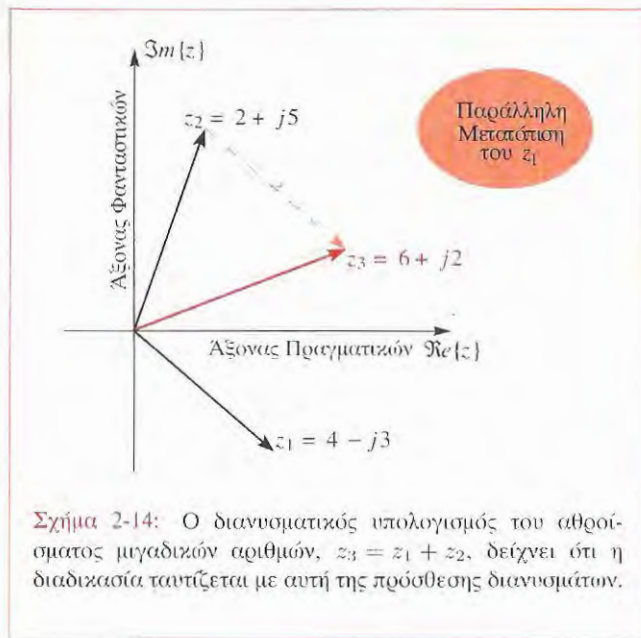
- Σχεδιάστε ένα αντίγραφο του z_1 με την αρχή του στο πέρας του z_2 . Συμβολίστε αυτό το μετατοπισμένο διάνυσμα με \hat{z}_1 .
- Σχεδιάστε το διάνυσμα που ενώνει την αρχή του μιγαδικού επιπέδου με το ίχνος του \hat{z}_1 . Αυτό είναι το άθροισμα z_3 .

Η παραπάνω διαδικασία απεικονίζεται στο Σχήμα 2-14 για την περίπτωση $z_1 = 4 - j3$ και $z_2 = 2 + j5$.

2-6.2 Πρόσθεση Φασόρων

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση φάσους ενός συνημιτονικού σήματος για να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega_0 t + \phi_k) \\ &= A \cos(\omega_0 t + \phi) \end{aligned} \quad (2.21)$$



όπου N οποιοσδήποτε ακέραιος. Δηλαδή, το άθροισμα δύο ή περισσότερων συνημιτονικών σημάτων, καθένα από τα οποία έχει την ίδια συχνότητα αλλά διαφορετικό πλάτος και φάση, μπορεί να εκφραστεί από ένα ισοδύναμο συνημιτονικό σήμα. Το πλάτος (A) και η φάση (ϕ) του όρου στο δεξιό μέλος της Σχέσης (2.21) μπορεί να υπολογιστεί από τα επιμέρους πλάτη (A_k) και τις επιμέρους φάσεις (ϕ_k) εκτελώντας την ακόλουθη πρόσθεση μιγαδικών αριθμών:

$$\sum_{k=1}^N A_k e^{j\phi_k} = A e^{j\phi} \quad (2.22)$$

Η Εξίσωση (2.22) αποτελεί τον κανόνα της πρόσθεσης φασόρων. Η απόδειξη αυτού του κανόνα απαιτεί τη χρήση των ακόλουθων πληροφοριών:

(i) Κάθε ημιτονοειδές μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \Re\{A e^{j(\omega_0 t + \phi)}\} = \Re\{A e^{j\phi} e^{j\omega_0 t}\}$$

(ii) Για κάθε σύνολο μιγαδικών αριθμών $\{X_k\}$ το άθροισμα των πραγματικών μερών τους ισούται με το πραγματικό μέρος του αθροίσματος, δηλαδή

$$\Re\left\{\sum_{k=1}^N X_k\right\} = \sum_{k=1}^N \Re\{X_k\}$$

Η απόδειξη του κανόνα πρόσθεσης των φασόρων απαιτεί τους ακόλουθους αλγεβρικούς χειρισμούς:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega_0 t + \phi_k) &= \sum_{k=1}^N \Re\{A_k e^{j(\omega_0 t + \phi_k)}\} \\ &= \Re\left\{\sum_{k=1}^N A_k e^{j\phi_k} e^{j\omega_0 t}\right\} \\ &= \Re\left\{\left(\sum_{k=1}^N A_k e^{j\phi_k}\right) e^{j\omega_0 t}\right\} \\ &= \Re\{A e^{j\phi} e^{j\omega_0 t}\} \\ &= \Re\{A e^{j(\omega_0 t + \phi)}\} \\ &= A \cos(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

Στην παραπάνω διαδικασία, δύο βήματα (φαίνονται χρωματισμένα) είναι κρίσιμα στην απόδειξη. Αφού όλα τα ημιτονοειδή έχουν την ίδια συχνότητα, στην τρίτη γραμμή το μιγαδικό εκθετικό $e^{j\omega_0 t}$ βγαίνει, ως κοινός παράγοντας, έξω από το άθροισμα. Πηγαίνοντας από την τρίτη γραμμή στην τέταρτη, το επόμενο κρίσιμο βήμα είναι η αντικατάσταση του αθροίσματος από το μιγαδικό αριθμό, $A e^{j\phi}$, όπως αυτός ορίστηκε στη Σχέση (2.22).

2-6.3 Παράδειγμα Πρόσθεσης Φασόρων

Επιστρέφουμε σ' αυτό το σημείο στο παράδειγμα της Άσκησης 2.8, όπου

$$x_1(t) = 1.7 \cos(20\pi t + 70\pi/180)$$

$$x_2(t) = 1.9 \cos(20\pi t + 200\pi/180)$$

και το άθροισμα βρέθηκε να είναι ίσο με

$$\begin{aligned}x_3(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= 1.532 \cos(20\pi t + 141.79\pi/180)\end{aligned}$$

Η συχνότητα και των δύο ημιτονοειδών είναι 10 Hz, οπότε η περίοδός τους είναι $T_0 = 0.1$ sec. Οι κυματομορφές των τριών σημάτων φαίνονται στο Σχήμα 2-15(β) και οι φάσορες που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του προβλήματος, φαίνονται στο αριστερό μέρος του Σχήματος 2-15(α). Παρατηρήστε ότι οι χρονικές στιγμές που κάθε ένα από τα συνημιτονικά σήματα παίρνει τη μέγιστη τιμή του, μπορεί να προκύψουν από τη φάση με τη βοήθεια της σχέσης

$$t_m = -\frac{\phi T_0}{2\pi}$$

η οποία δίνει

$$t_{m1} = -0.0194, \quad t_{m2} = -0.0556, \quad t_{m3} = -0.0394 \text{ sec.}$$

Αυτές οι χρονικές στιγμές σημειώνονται με κατακόρυφες διακεκομμένες γραμμές στο Σχήμα 2-15(β). Η πρόσθεση των φασόρων των δύο σημάτων υπολογίζεται σε τέσσερα βήματα ως εξής:

(i) Παραστήστε το $x_1(t)$ και το $x_2(t)$ με τους φάσορες:

$$\begin{aligned}X_1 &= A_1 e^{j\phi_1} = 1.7 e^{j70\pi/180} \\ X_2 &= A_2 e^{j\phi_2} = 1.9 e^{j200\pi/180}\end{aligned}$$

(ii) Μετατρέψτε και τους δύο φάσορες σε Καρτεσιανή μορφή:

$$\begin{aligned}X_1 &= 0.5814 + j1.597 \\ X_2 &= -1.785 - j0.6498\end{aligned}$$

(iii) Προσθέστε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη τους:

$$\begin{aligned}X_3 &= X_1 + X_2 \\ &= (0.5814 + j1.597) + (-1.785 - j0.6498) \\ &= -1.204 + j0.9476\end{aligned}$$

(iv) Μετατρέψτε το αποτέλεσμα σε πολική μορφή

$$X_3 = 1.532 e^{j141.79\pi/180}$$

Επομένως, η τελική μορφή του $x_3(t)$ είναι

$$\begin{aligned}x_3(t) &= 1.532 \cos(20\pi t + 141.79\pi/180) \\ \text{ή } x_3(t) &= 1.532 \cos(20\pi(t + 0.0394))\end{aligned}$$

2-6.4 Πρόσθεση Φασόρων στο Matlab

Η διαδικασία της πρόσθεσης φασόρων μπορεί να γίνει εύκολα στο υπολογιστικό περιβάλλον Matlab. Η απάντηση που παράγεται από το Matlab και εκτυπώνεται με την ειδική συνάρτηση `zprint` (περιέχεται στο CD-ROM) για τη συγκεκριμένη πρόσθεση φασόρων δίνεται στον Πίνακα 2-3. Η βοήθεια (`help`) στη συνάρτηση `zprint` παρέχει στο χρήστη τις ακόλουθες πληροφορίες:

```
ZPRINT print out complex # in rect.
and polar form
usage: zprint(z)
z = vector of complex numbers
```



Επίδειξη: Διεπαφή ZDrill

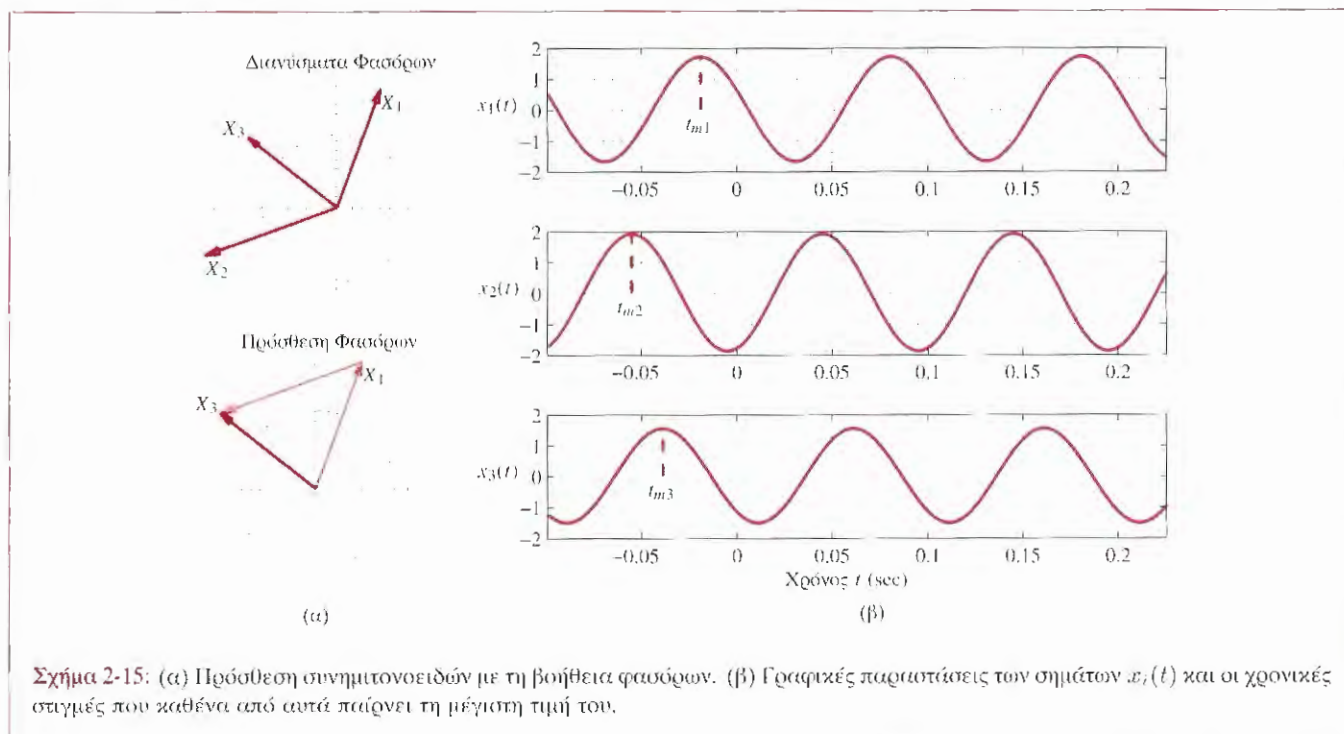
Ο κώδικας που δημιουργεί το Σχήμα 2-15 υπάρχει στο CD και περιέχεται επίσης στην πρώτη εργαστηριακή άσκηση (και αυτή υπάρχει στο CD). Για τη σχεδίαση των διανυσμάτων, χρησιμοποιεί τις ακόλουθες ειδικές συναρτήσεις του Matlab (περιέχονται στο CD-ROM) `zprint`, `zvect`, `zcat`, `ucplot` και `zcoords`.



Εργ. Ασκ.: #2 Πρόσθεση Ημιτονοειδών και Μιγαδικών Πλατών

2-6.5 Σύνοψη της Πρόσθεσης Φασόρων

Στην ενότητα αυτή, είδαμε πώς μπορούμε να παραστήσουμε ένα πραγματικό συνημιτονικό σήμα ως το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού εκθετικού σήματος (μιγαδικός περιστρεφόμενος φάσορας) και χρησιμοποιήσαμε αυτή



Πίνακας 2-3: Παράδειγμα Πρόσθεσης Φασόρων

Z	=	X	+	jY	Μέτρο	Φάση	Ph/pi	Ph(deg)
Z1		0.5814		1.597	1.7	1.222	0.389	70.00
Z2		-1.785		-0.6498	1.9	-2.793	-0.889	-160.00
Z3		-1.204		0.9476	1.532	2.475	0.788	141.79

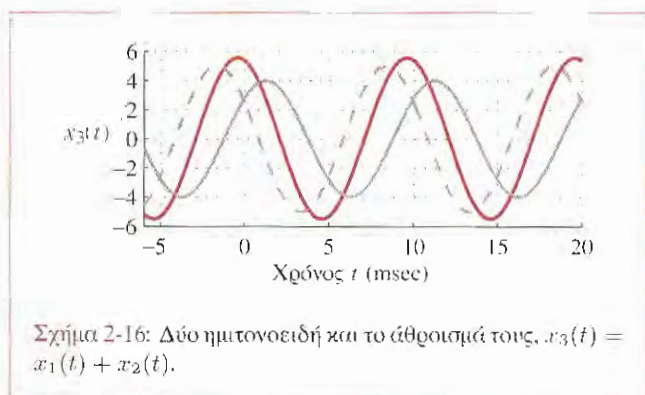
την αναπαράσταση για να δείξουμε πώς απλοποιείται η διαδικασία της πρόσθεσης διάφορων συνημιτονικών σημάτων της ίδιας συχνότητας

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega_0 t + \phi_k) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Συνοψίζοντας, αυτό που πρέπει να κάνουμε για να βρούμε το άθροισμα των συνημιτονικών σημάτων είναι:

(i) Εύρεση της αναπαράστασης φάσορα $X_k = A_k e^{j\phi_k}$ καθενός σήματος.

(ii) Πρόσθεση των φασόρων για να βρούμε το $X = X_1 + X_2 + \dots = A e^{j\phi}$. Η υλοποίηση του βήματος αυτού, προϋποθέτει τη μετατροπή από πολική σε Καρτεσιανή και από Καρτεσιανή σε πολική αναπαράσταση.



Σχήμα 2-16: Δύο ημιτονοειδή και το άθροισμά τους, $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

(iii) Πολλαπλασιασμός του X με $e^{j\omega_0 t}$ για να πάρουμε το $z(t) = Ae^{j\phi} e^{j\omega_0 t}$.

(iv) Απομόνωση του πραγματικού μέρους για να πάρουμε $x(t) = \Re\{Ae^{j\phi} e^{j\omega_0 t}\} = A \cos(\omega_0 t + \phi) = x_1(t) + x_2(t) + \dots$

Δηλαδή, το A και το ϕ πρέπει να υπολογιστούν αθροίζοντας διανυσματικά όλους τους φάσορες X_k .



Άσκηση 2.9: Θεωρήστε τα συνημιτονοειδή σήματα,

$$x_1(t) = 5 \cos(2\pi(100)t + \pi/3)$$

$$x_2(t) = 4 \cos(2\pi(100)t - \pi/4)$$

Βρείτε τις αναπαραστάσεις φασόρων των δύο σημάτων, προσθέστε τους φάσορες, σχεδιάστε τους δύο φάσορες και το άθροισμά τους στο μιγαδικό επίπεδο και δείξτε ότι το άθροισμα των δύο σημάτων είναι

$$x_3(t) = 5.536 \cos(2\pi(100)t + 0.2747)$$

Η φάση σε μοίρες θα πρέπει να είναι 15.74° . Εξετάστε τις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 2-16 για να δείτε αν μπορείτε να ταυτοποιήσετε τα συνημιτονικά κύματα $x_1(t)$, $x_2(t)$ και $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

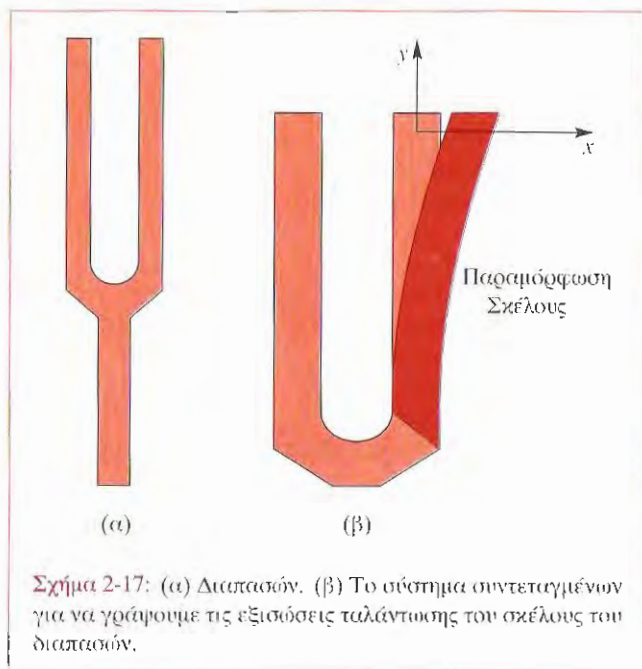
2-7 Η Φυσική του Διαπασών

Στην Ενότητα 2-1, περιγράψαμε ένα απλό πείραμα στο οποίο, με τη βοήθεια ενός διαπασών, δημιουργήσαμε ένα σήμα του οποίου η κυματομορφή έμοιαζε πάρα πολύ με αυτή του συνημιτονικού σήματος. Τώρα που γνωρίζουμε πολύ περισσότερα πράγματα για τα ημιτονοειδή σήματα, θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό. Άραγε είναι τελείως τυχαίο το γεγονός ότι το σήμα που παράγεται από το διαπασών μοιάζει σε ένα ημιτονοειδές, ή υπάρχει μια στενή σχέση ανάμεσα στις ταλαντώσεις και τα ημιτονοειδή; Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζουμε μια απλή ανάλυση του προβλήματος του διαπασών που δείχνει ότι το διαπασών πράγματι εκτελεί μια ημιτονοειδή ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας του. Η ημιτονοειδής κίνηση των σκελών του μεταφέρεται στα μόρια του περιρρέοντα αέρα τα οποία και δημιουργούν με τη σειρά τους το ακουστικό σήμα το οποίο ακούμε. Αυτό το απλό παράδειγμα διασαφηνίζει πώς μαθηματικά μοντέλα φυσικών συστημάτων, που προκύπτουν από θεμελιώδεις φυσικές αρχές, μπορούν να οδηγήσουν σε ακριβείς μαθηματικές περιγραφές των φυσικών φαινομένων και των σημάτων που προκύπτουν από αυτά.

2-7.1 Εξισώσεις από Νόμους της Φυσικής

Στο Σχήμα 2-17 φαίνεται ένα απλοποιημένο διάγραμμα του διαπασών. Όπως έχουμε δει πειραματικά, όταν χτυπήσουμε με κάτι συμπαγές το διαπασών, τα σκέλη του ταλαντώνονται και παράγουν ένα “καθαρό” τόνο. Ενδιαφερόμαστε να βρούμε τις εξισώσεις που περιγράφουν τη φυσική συμπεριφορά του διαπασών και μέσα από αυτές να κατανοήσουμε το βασικό μηχανισμό με τον οποίο παράγεται ο ήχος. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο δεύτερος νόμος του Newton, $F = ma$, θα μας οδηγήσει σε μια διαφορική εξίσωση της οποίας η γενική λύση είναι μια μιγαδική εκθετική συνάρτηση.

Όταν χτυπήσουμε το διαπασών, το ένα από τα σκέλη του παραμορφώνεται και μετακινείται ελαφρώς από τη θέση ηρεμίας του, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2-17(β). Γνωρίζουμε τώρα ότι θα υπάρχει μια τάση από το σκέλος να επιστρέψει στη θέση ηρεμίας του (εκτός βέβαια και αν



το χτύπημα ήταν τόσο ισχυρό που παραμόρφωσε μόνιμα ή έσπασε το διαπασών). Ο φυσικός νόμος που διέπει αυτή τη μετακίνηση είναι ο νόμος του Hooke. Παρόλο που το διαπασών είναι κατασκευασμένο από σκληρό μέταλλο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για μικρές παραμορφώσεις συμπεριφέρεται σαν ένα ελαστικό υλικό. Ο νόμος του Hooke λέει ότι η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη της παραμόρφωσης. Για ένα σύστημα συντεταγμένων όπως αυτό του Σχήματος 2-17(β), η παραμόρφωση συμβαίνει κατά μήκος του άξονα x και μπορούμε να γράψουμε

$$F = -kx$$

όπου η παράμετρος k είναι η σταθερά ελαστικότητας του υλικού. Το αρνητικό σημείο στην παραπάνω σχέση δηλώνει ότι η δύναμη επαναφοράς δρα προς την αντίθετη κατεύθυνση αυτής της μετατόπισης του σκέλους του διαπασών, δηλαδή αυτή δρα κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να επαναφέρει το σκέλος στη θέση ηρεμίας του.

Η δύναμη επαναφοράς δημιουργεί μια επιτάχυνση όπως υποδεικνύει ο δεύτερος νόμος του Newton, δηλαδή,

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

όπου m είναι η μάζα του σκέλους και η δεύτερη παράγωγος της μετατόπισης x ως προς το χρόνο είναι η επιτάχυνση της μάζας κατά μήκος του άξονα x . Εξαιτίας του ότι οι δύο αυτές δυνάμεις πρέπει να εξισορροπώσουν η μία την άλλη (δηλαδή το άθροισμα των δύο αυτών δυνάμεων πρέπει να είναι μηδέν), παίρνουμε την ακόλουθη δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει τη κίνηση $x(t)$ του σκέλους συναρτήσει του χρόνου t

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) \quad (2.23)$$

Είναι εύκολο να λύσουμε τη διαφορική αυτή εξίσωση αφού μπορούμε στην πραγματικότητα να μαντέψουμε τη λύση της. Από τις ιδιότητες των παραγώγων ωθούμαστε να δοκιμάσουμε σαν λύση τη συνάρτηση

$$x(t) = \cos \omega_0 t$$

όπου η παράμετρος ω_0 είναι μια σταθερά που πρέπει να υπολογίσουμε. Η δεύτερη παράγωγος της $x(t)$ είναι:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2} (\cos \omega_0 t) \\ &= \frac{d}{dt} (-\omega_0 \sin \omega_0 t) \\ &= -\omega_0^2 \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης είναι η ίδια η συνάρτηση πολλαπλασιασμένη με μια σταθερά ($-\omega_0^2$). Επομένως, αντικαθιστώντας την $x(t)$ στη Σχέση (2.23), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= -kx(t) \\ -m\omega_0^2 \cos \omega_0 t &= -k \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

Αφού η παραπάνω σχέση πρέπει να ικανοποιείται για κάθε t , συμπεραίνουμε ότι οι συντελεστές του $\cos \omega_0 t$ και στα δύο μέλη της εξίσωσης θα πρέπει να είναι ίσοι. Έτσι οδηγούμαστε στην ακόλουθη αλγεβρική εξίσωση:

$$-m \omega_0^2 = -k$$

Λύνοντας την εξίσωση ως προς ω_0 , παίρνουμε:

$$\omega_0 = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.24)$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η ακόλουθη

$$x(t) = \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

Από το μοντέλο μας, η $x(t)$ περιγράφει την κίνηση του σκέλους του διαπασών. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι τα σκέλη του διαπασών ταλαντώνονται με ημιτονοειδή τρόπο. Η κίνηση αυτή μεταφέρεται στα σωματίδια του περιθρόντα, το σκέλος του διαπασών, αέρα και τα οποία παράγουν με τη σειρά τους μικρές μεταβολές στην πίεση του αέρα, με αποτέλεσμα την παραγωγή ακουστικού κύματος. Η σχέση από την οποία δίνεται η συχνότητα, μας επιτρέπει να προβούμε στα ακόλουθα συμπεράσματα:

- (i) Από δύο διαπασών που έχουν την ίδια μάζα, το πιο δύσκαμπτο (σκληρό) θα παράξει την υψηλότερη συχνότητα. Αυτό συμβαίνει γιατί η συχνότητα είναι ανάλογη της \sqrt{k} , η οποία είναι ο αριθμητής της Σχέσης (2.24).
- (ii) Από δύο διαπασών που έχουν την ίδια δυσκαμψία, το βαρύτερο θα παράξει τη χαμηλότερη συχνότητα. Αυτό συμβαίνει γιατί η συχνότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της μάζας, \sqrt{m} , η οποία βρίσκεται στο παρονομαστή της Σχέσης (2.24).




Επίδειξη: Διαπασών

2-7.2 Γενική Λύση της Διαφορικής Εξίσωσης

Όπως κάθε διαφορική εξίσωση έτσι και η Διαφορική Εξίσωση (2.23) επιδέχεται πολλές λύσεις. Για παράδειγμα, μπορούμε να αποδείξουμε αντικαθιστώντας στη Σχέση (2.23) και παραγωγίζοντας, ότι η συνάρτηση

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

ικανοποιεί τη Διαφορική εξίσωση (2.23). Για μια ακόμα φορά, η συχνότητα πρέπει να είναι $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Πρέπει να παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό, ότι το απλό μοντέλο που χρησιμοποιούμε περιορίζει μόνο την τιμή της συχνότητας ω_0 , ενώ οι τιμές των παραμέτρων A και ϕ δεν υπεισέρχονται σε κανέναν υπολογισμό. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι οποιοδήποτε σταθμισμένο ή χρονικά καθυστερημένο ημιτονοειδές με τη σωστή συχνότητα, θα ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σκέλους του διαπασών. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να παραχθεί από το απλό πείραμα του διαπασών ένας άπειρος αριθμός ημιτονοειδών σημάτων. Σε κάθε πείραμα, οι τιμές των A και ϕ εξαρτώνται από τη δύναμη που χτυπάμε το διαπασών και το χρονισμό της στιγμιαίας δύναμης που προκαλεί την αρχική μετατόπιση του σκέλους. Ωστόσο, η συχνότητα όλων αυτών των ημιτονοειδών εξαρτάται μόνο από τη μάζα και τη δυσκαμψία του μετάλλου από το οποίο είναι κατασκευασμένο το διαπασών.

 **Άσκηση 2.10:** Δείξτε ότι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα μπορεί να είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης του διαπασών:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x(t)$$

Αντικαθιστώντας $z(t)$ και $z^*(t)$ και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης, δείξτε ότι η εξίσωση ικανοποιείται για κάθε t και από τα δύο σήματα

$$z(t) = X e^{j\omega_0 t} \quad \text{και} \quad z^*(t) = X^* e^{-j\omega_0 t}$$

Προσδιορίστε τη τιμή του ω_0 για την οποία ικανοποιείται η διαφορική εξίσωση.

2-7.3 Ακούγοντας Τόνους

Ο παρατηρητής αποτελεί ίσως το πιο σημαντικό στοιχείο κάθε φυσικού πειράματος. Αυτό είναι ακόμα σημαντικότερο όταν ένα πείραμα απαιτεί την ακρόαση ηχητικών σημάτων. Στο πείραμα του διαπασών, δεχόμαστε ένα τόνο με συγκεκριμένο pitch (ποσότητα σχετιζόμενη με τη συχνότητα) και ένταση (ποσότητα που σχετίζεται με το πλάτος). Το ανθρώπινο αυτί και το ανθρώπινο νευρικό σύστημα αποκρίνεται στη συχνότητα και το πλάτος ενός ήχου, όπως αυτού που παρήχθη από το διαπασών, αλλά δεν αντιλαμβάνεται τη φάση. Αυτό συμβαίνει γιατί η φάση ορίζεται μέσω ενός αυθαίρετου ορισμού της αρχικής χρονικής στιγμής του ημιτονοειδούς, δηλαδή, ένας ήχος ηχεί το ίδιο τώρα όπως ακριβώς ηχούσε και πριν από 5 λεπτά. Από την άλλη μεριά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μικρόφωνο και να δειγματοληπτήσουμε ή να δούμε το σήμα στον παλμογράφο. Στην περίπτωση αυτή, θα μπορούσαμε να κάνουμε ακριβείς μετρήσεις της συχνότητας και του πλάτους, αλλά η φάση και πάλι θα μπορούσε να μετρηθεί με ακρίβεια μόνο σε σχέση με τη βάση χρόνου του δειγματολήπτη ή του παλμογράφου.

2-8 Άλλα Ημιτονοειδή Χρονικά Σήματα

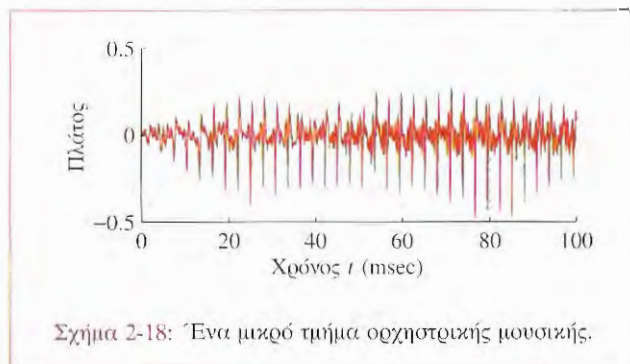
Το κεφάλαιο αυτό είχε σκοπό να εισαγάγει την έννοια του ημιτονοειδούς σήματος και να διασαφηνίσει πώς τα ημιτονοειδή προκύπτουν στην πράξη. Τα σήματα, όπως τα έχουμε ορίσει, είναι μεταβαλλόμενα πρότυπα που μεταφέρουν ή περιέχουν πληροφορία, που αναφέρεται συνήθως στην κατάσταση ή τη συμπεριφορά φυσικών συστημάτων. Είδαμε θεωρητικά, αλλά και πειραματικά, ότι το διαπασών παράγει ένα σήμα, το οποίο μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά από ένα ημιτονοειδές. Στα πλαίσια του πειράματος του διαπασών, το συνημιτονικό κύμα μεταφέρει και περιέχει πληροφορία σχετική με τη κατάσταση του διαπασών. Κωδικοποιημένες στο ημιτονοειδές κύμα είναι οι πληροφορίες, όπως το αν το διαπασών ταλαντώνεται ή είναι σε κατάσταση ηρεμίας και, αν ταλαντώνεται, η συχνότητα και το πλάτος ταλάντωσης.

Η πληροφορία αυτή μπορεί να αποσπασθεί από τον άνθρωπο άμεσα ή μπορεί να καταγραφεί για περαιτέρω επεξεργασία της από τον άνθρωπο ή τον υπολογιστή.



Επίδειξη: Πήλινη Σφυρίχτρα

Αν και η λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.23) του διαπασών είναι μια συνημιτονική συνάρτηση, η λύση αυτή αποτελεί μια εξιδανίκευση, ένα μοντέλο της πραγματικής λύσης που προκύπτει από μια εξιδανικευμένη περιγραφή του διαπασών. Είναι σημαντικό να θυμηθούμε ότι το σήμα είναι μια ξεχωριστή οντότητα από την εξίσωση. Η πραγματική κυματομορφή που παράγεται από το διαπασών είναι πολύ πιθανό να μην είναι ακριβώς ημιτονοειδής. Το σήμα *παριστάνεται* με τη μαθηματική σχέση $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$, η οποία μπορεί να προκύψει από το εξιδανικευμένο μοντέλο που βασίζεται σε φυσικούς νόμους. Το μοντέλο αυτό είναι μια καλή προσέγγιση της πραγματικότητας, αλλά μόνον μια προσέγγιση, τίποτα παραπάνω. Ακόμα και έτσι, το μοντέλο είναι εξαιρετικά χρήσιμο αφού οδηγεί άμεσα σε μια χρήσιμη μαθηματική αναπαράσταση του σήματος που παράγει το διαπασών. Στην περίπτωση ενός πολύπλοκου σήματος που παράγεται



από κάποιο μουσικό όργανο, το σήμα δεν μπορεί να περιγραφεί εύκολα με τη βοήθεια μιας μαθηματικής σχέσης. Στο Σχήμα 2-18 φαίνεται ένα σύντομο κομμάτι

μιας ηχογραφημένης ορχηστρικής μουσικής. Η μορφή και μόνο του σήματος υποδεικνύει ότι πρόκειται για μια πολύπλοκότερη περίπτωση. Παρόλο που ταλαντώνεται όπως ένα συνημιτονικό κύμα, είναι φανερό ότι δεν είναι περιοδικό (τουλάχιστον, όπως μπορούμε να δούμε από το συγκεκριμένο κομμάτι). Η ορχηστρική μουσική συντίθεται από διαφορετικές νότες διαφορετικών οργάνων. Αν κάθε όργανο παρήγαγε ένα καθαρό ημιτονοειδή τόνο στη συχνότητα του τόνου που του είχε εκχωρηθεί, τότε το σύνθετο ορχηστρικό σήμα θα ήταν απλά ένα άθροισμα ημιτονοειδών διαφορετικής συχνότητας, διαφορετικού πλάτους και διαφοράς φάσης. Αν και αυτό είναι πολύ μικρό από το να είναι ένα σωστό μοντέλο για τα περισσότερα μουσικά όργανα, είναι πραγματικά ένας πολύ κατ'άλληλος τρόπος για να σκεφτούμε το ορχηστρικό σήμα. Στην πραγματικότητα, θα δούμε σύντομα ότι άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων διαφορετικής συχνότητας, πλάτους και φάσης μπορούν να προκύψουν σε μια απειρία κωματομορφών. Πράγματι, είναι αλήθεια ότι σχεδόν κάθε σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί σαν άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων. Όταν αυτό υποστηρίχθηκε για πρώτη φορά το 1807 από τον Jean-Baptiste Joseph Fourier, η επιστημονική κοινότητα το δέχτηκε με πολύ σκεπτικισμό. Σήμερα, η έννοια αυτή χρησιμοποιείται ευρέως. Οι μαθηματικές και οι υπολογιστικές τεχνικές της ανάλυσης Fourier περιλαμβάνουν τα εργαλεία ανάλυσης στο πεδίο της συχνότητας που χρησιμοποιούνται πάρα πολύ από τους ηλεκτρολόγους μηχανικούς και από επιστήμονες άλλων επιστημονικών περιοχών.

2-9 Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι

Στο Κεφάλαιο αυτό έγινε μια εισαγωγή στα ημιτονοειδή σήματα. Προσπαθήσαμε να δείξουμε ότι αυτά προκύπτουν σε πολλές φυσικές διαδικασίες και ότι μπορούν να παρασταθούν από γνωστές μαθηματικές συναρτήσεις και μιγαδικά εκθετικά σήματα. Το κέρδος από τη μαθηματική αναπαράσταση ενός σήματος είναι διπλό. Πρώτον, η μαθηματική αναπαράσταση ενός σήματος επιτρέπει τη συνεπή περιγραφή του σήματος μέσω μιας μαθηματικής σχέσης. Για παράδειγμα, το συνημιτονικό

σήμα περιγράφεται πλήρως από τρεις παραμέτρους. Δεύτερον, αναπαριστώντας τα σήματα και τα συστήματα μέσω μαθηματικών εκφράσεων, μπορούμε να βγάλουμε ακριβή συμπεράσματα σχετικά με την αλληλεπίδραση που υπάρχει ανάμεσα στα σήματα και στα συστήματα.



Εργ. Ασκ.: #1 Εισαγωγή στο Matlab

Επιπλέον, στο CD-ROM μπορείτε να βρείτε δύο εργαστηριακές ασκήσεις. Η Εργαστηριακή άσκηση #1 περιέχει μερικές εισαγωγικές ασκήσεις και στοιχεία για το προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab και πώς μπορούμε να χειριζόμαστε μιγαδικούς αριθμούς και να κάνουμε γραφικές παραστάσεις ημιτονοειδών. Οι Εργαστηριακές ασκήσεις #2α και #2β διαπραγματεύονται την πρόσθεση φασόρων και ημιτονοειδών. Στις ασκήσεις αυτές, ζητείται από τους φοιτητές να δημιουργήσουν μια διεπαφή όπως αυτή του Σχήματος 2-15.



Εργ. Ασκ.: #2 Εισαγωγή στα Μιγαδικά Εκθετικά

Στο CD-ROM, μπορείτε να βρείτε τα ακόλουθα:

- (i) Ένα αρχείο βίντεο με θέμα το διαπασών που δείχνει το πείραμα διέγερσης και καταγραφής του παραγόμενου ηχητικού σήματος. Διατίθενται επίσης πολλοί διαφορετικοί ήχοι που προκύπτουν από διαφορετικά διαπασών, καθώς και ήχοι από πήλινες σφουρίχτρες.



Επίδειξη: Σύνδεσμοι με Πολλές Επίδειξεις

- (ii) Ένα πρόγραμμα γραμμένο στο Matlab για εξοικείωση με το πλάτος τη φάση και τη συχνότητα των ημιτονοειδών σημάτων.
- (iii) Ένα σύνολο αρχείων βίντεο που δείχνουν περι-στροφόμενους φάσορες και πώς δημιουργούνται τα ημιτονοειδή με τη χρήση του τελεστή πραγματικού μέρους.

Τέλος, στο CD-ROM υπάρχει μεγάλος αριθμός λυμένων προβλημάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για πρακτική και μελέτη.



Υπόδειξη: Εκατοντάδες Λυμένα Προβλήματα

2-10 Προβλήματα

Πρόβλημα.-2.1 Ορίστε το $x(t)$ ως

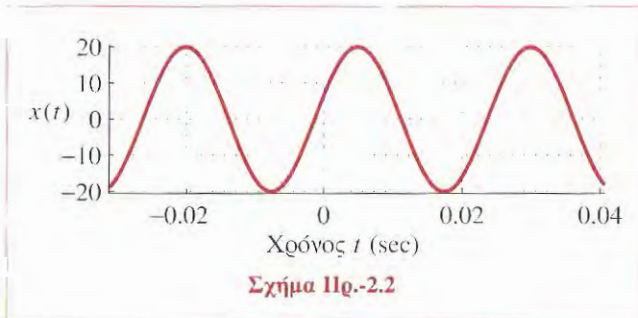
$$x(t) = 3 \cos(\omega_0 t - \pi/4)$$

Για $\omega_0 = \pi/5$, σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του $x(t)$ στο διάστημα $-10 \leq t \leq 20$.

Πρόβλημα.-2.2 Στο Σχήμα Πρ.-2.2 φαίνεται η γραφική παράσταση ενός ημιτονικού κύματος. Από τη γραφική παράσταση, βρείτε κατάλληλες τιμές για το πλάτος (A), τη φάση (ϕ) και τη συχνότητα (ω_0) για την παράστασή του στη μορφή:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Στις απαντήσεις σας να αναφέρονται και οι μονάδες.



Πρόβλημα.-2.3 Σχεδιάστε τις ακόλουθες συναρτήσεις.

(i) $\cos \theta$ για τιμές της θ στο διάστημα $0 \leq \theta \leq 6\pi$.

(ii) $\cos(0.2\pi t)$ για τιμές του t που θα εξασφαλίζουν ότι θα φαίνονται τρεις περίοδοι της συνάρτησης.

(iii) $\cos(2\pi t/T_0)$ για τιμές του t που θα εξασφαλίζουν ότι θα φαίνονται τρεις περίοδοι της συνάρτησης. Σημειώστε στον οριζόντιο άξονα την παράμετρο T_0 .

(iv) $\cos(2\pi t/T_0 + \pi/2)$ για τιμές του t που θα εξασφαλίζουν ότι θα φαίνονται τρεις περίοδοι της συνάρτησης.

Πρόβλημα.-2.4 Χρησιμοποιήστε μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις (φάσορες) και αποδείξτε τις ακόλουθες τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$(i) \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)$$

$$(ii) \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)$$

Υπόδειξη: Εκφράστε το αριστερό μέλος κάθε εξίσωσης ως το πραγματικό μέρος μίας μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης.

Πρόβλημα.-2.5 Χρησιμοποιήστε τα αναπτύγματα σειρών των συναρτήσεων e^x , $\cos(\theta)$, και $\sin(\theta)$ που δίνονται παρακάτω και αποδείξτε τον τύπο του Euler.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

Πρόβλημα.-2.6 Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler, αποδείξτε τον τύπο του DeMoivre

$$(\cos \theta + j \sin \theta)^n = \cos n\theta + j \sin n\theta$$

Χρησιμοποιήστε την παραπάνω σχέση στον υπολογισμό της έκφρασης $(\frac{3}{5} + j\frac{4}{5})^{100}$.

Πρόβλημα.-2.7 Απλοποιήστε τις ακόλουθες εκφράσεις:

- (i) $3e^{j\pi/3} + 4e^{-j\pi/6}$
 (ii) $(\sqrt{3} - j3)^{10}$
 (iii) $(\sqrt{3} - j3)^{-1}$
 (iv) $(\sqrt{3} - j3)^{1/3}$
 (v) $\Re\{je^{-j\pi/3}\}$

Δώστε τις απαντήσεις σας σε Καρτεσιανή ($x + jy$) και σε πολική ($re^{j\theta}$) μορφή.

Πρόβλημα.-2.8 Υποθέστε ότι χρησιμοποιείτε το περιβάλλον Matlab στη σχεδίαση ενός ημιτονοειδούς σήματος. Ο κώδικας, που ακολουθεί, δημιουργεί ένα σήμα και το σχεδιάζει. Γράψτε τη μαθηματική έκφραση του σήματος και στη συνέχεια σχεδιάστε το, όπως αυτό θα σχεδιάζόταν στο Matlab.

```
dt = 1/100;
tL = -1 : dt : 1;
Fo = 2;
zz = 300*exp(j*(2*pi*Fo*(tL - 0.75)));
xx = real( zz );
```

```
plot( tL, xx ), grid on
title( 'SECTION of a SINUSOID' )
xlabel( 'TIME (sec)' )
```

Πρόβλημα.-2.9 Ορίστε το σήμα $x(t)$ ως

$$x(t) = 2\sin(\omega_0 t + 45^\circ) + \cos(\omega_0 t)$$

- (i) Εκφράστε το $x(t)$ στη μορφή $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$.
 (ii) Υποθέστε ότι $\omega_0 = 5\pi$. Σχεδιάστε το $x(t)$ στο διάστημα $-1 \leq t \leq 2$. Πόσοι περίοδοι του σήματος περιλαμβάνονται στη γραφική σας παράσταση;
 (iii) Βρείτε ένα μιγαδικό σήμα $z(t)$ έτσι ώστε $x(t) = \Re\{z(t)\}$.

Πρόβλημα.-2.10 Ορίστε το σήμα $x(t)$ ως

$$x(t) = 5\cos(\omega t) + 5\cos(\omega t + 120^\circ) + 5\cos(\omega t - 120^\circ)$$

Απλοποιήστε το $x(t)$ στην κλασική ημιτονοειδή μορφή: $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Χρησιμοποιήστε φάσορες για τις αλγεβρικές πράξεις και σχεδιάστε τα διανύσματα που παριστάνουν τους τρεις φάσορες.

Πρόβλημα.-2.11 Λύστε την ακόλουθη εξίσωση ως προς θ :

$$\Re\{(1 + j)e^{j\theta}\} = -1$$

Δώστε τις απαντήσεις σας σε ακτίνια. Βεβαιωθείτε ότι βρήκατε όλες τις δυνατές λύσεις.

Πρόβλημα.-2.12 Δώστε δύο δυνατές μιγαδικές λύσεις της παρακάτω διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -100x(t)$$

Πρόβλημα.-2.13 Ορίστε το ακόλουθο μιγαδικό εκθετικό σήμα:

$$s(t) = 5e^{j\pi/3} e^{j10\pi t}$$

- (i) Σχεδιάστε το $s_i(t) = \Im\{s(t)\}$. Επιλέξτε το εύρος τιμών του t έτσι ώστε να περιλαμβάνει ακριβώς τρεις περιόδους του σήματος.
 (ii) Σχεδιάστε το $q(t) = \Im\{s(t)\}$, όπου η τελεία σημαίνει διαφύση ως προς το χρόνο t . Σχεδιάστε πάλι τρεις κύκλους του σήματος.



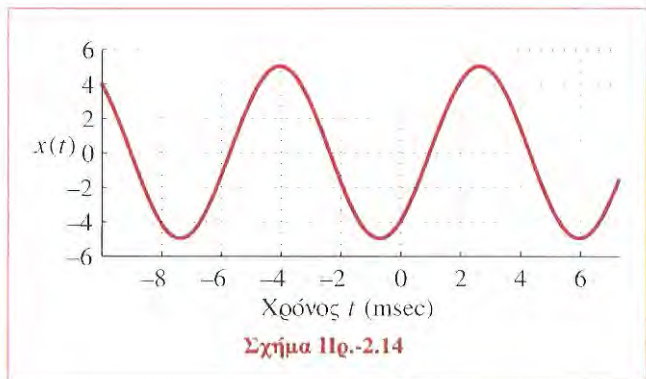
Επίδειξη: Περιστρεφόμενοι Φάσορες

Πρόβλημα.-2.14 Για το ημιτονοειδές που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-2.14, βρείτε τη μιγαδική παράσταση φάσορα

$$X = Ae^{j\phi}$$

δηλαδή, βρείτε ω_0 , ϕ και A έτσι ώστε το σήμα να μπορεί να παρασταθεί ως

$$x(t) = \Re\{X e^{j\omega_0 t}\}$$



Πρόβλημα.-2.15 Ορίστε το $x(t)$ ως

$$x(t) = 5 \cos(\omega t + \frac{1}{3}\pi) + 7 \cos(\omega t - \frac{5}{4}\pi) + 3 \cos(\omega t)$$

Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό φάσρα, εκφράστε το $x(t)$ στη μορφή $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$. Εξηγήστε την απάντησή σας δίνοντας ένα διάγραμμα φασόρων.

Πρόβλημα.-2.16 Η φάση ενός ημιτονοειδούς μπορεί να συσχετιστεί με τη χρονική ολίσθηση ως εξής:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = A \cos(2\pi f_0 (t - t_1))$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η περίοδος του ημιτονοειδούς κύματος είναι $T_0 = 8$ sec.

- (i) “Όταν $t_1 = -2$ sec, η τιμή της φάσης είναι $\phi = \pi/2$.” Εξηγήστε αν είναι Σωστό ή Λάθος.
- (ii) “Όταν $t_1 = 3$ sec, η τιμή της φάσης είναι $\phi = 3\pi/4$.” Εξηγήστε αν είναι Σωστό ή Λάθος.

- (iii) “Όταν $t_1 = 7$ sec, η τιμή της φάσης είναι $\phi = \pi/4$.” Εξηγήστε αν είναι Σωστό ή Λάθος.

Πρόβλημα.-2.17 Ορίστε το $x(t)$ ως

$$x(t) = 5 \cos(\omega t + \frac{3}{2}\pi) + 4 \cos(\omega t + \frac{2}{3}\pi) + 4 \cos(\omega t + \frac{1}{3}\pi)$$

- (i) Εκφράστε το $x(t)$ στη μορφή $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ και υπολογίστε τις τιμές των παραμέτρων A και ϕ .
- (ii) Σχεδιάστε, στο μιγαδικό επίπεδο, όλους τους φάσορες που χρησιμοποιήσατε στη λύση του ερωτήματος (i).

Πρόβλημα.-2.18 Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των φασόρων, λύστε τις ακόλουθες εξισώσεις. Είναι μοναδικές οι απαντήσεις για τα A_1 , A_2 , ϕ_1 , ϕ_2 ; Για να εξηγήσετε την απάντησή σας, δώστε ένα γεωμετρικό διάγραμμα.

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) &= A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2) \\ \sin(\omega_0 t) &= 2A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2) \end{aligned}$$

Πρόβλημα.-2.19 Λύστε τις ακόλουθες εξισώσεις ως προς το M και το ψ . Βρείτε όλες τις δυνατές λύσεις. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των φασόρων. Δώστε ένα γεωμετρικό διάγραμμα για να εξηγήσετε την απάντησή σας.

$$5 \cos(\omega_0 t) = M \cos(\omega_0 t - \pi/6) + 5 \cos(\omega_0 t + \psi)$$

Υπόδειξη: Περιγράψτε την εικόνα στο επίπεδο z που ορίζεται από το σύνολο $\{z : z = 5e^{j\psi} - 5\}$ όπου $0 \leq \psi \leq 2\pi$.

Πρόβλημα.-2.20 Έστω $x[n]$ μία μιγαδική εκθετική ακολουθία

$$x[n] = 7e^{j(0.22\pi n - 0.25\pi)}$$

ορισμένη στο διάστημα $n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$. Αν ορίσουμε τη νέα ακολουθία $y[n]$ να είναι οι δεύτερης τάξης διαφορές της $x[n]$, δηλαδή

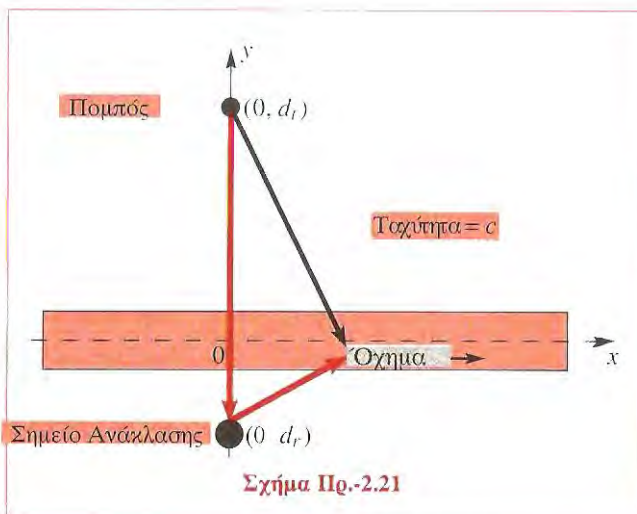
$$y[n] = x[n+1] - 2x[n] + x[n-1] \quad \text{για κάθε } n,$$

είναι δυνατόν να εκφράσουμε την $y[n]$ στη μορφή

$$y[n] = Ae^{j(\omega_0 n + \phi)}$$

Αν ναι, βρείτε τις αριθμητικές τιμές των A , ϕ , και ω_0 .

Πρόβλημα.-2.21 Σε ένα κινητό ραδιοσύστημα (π.χ. κινητή τηλεφωνία), υπάρχει ένας τύπος υποβάθμισης που μπορεί να παρασταθεί εύκολα με τα ημιτονοειδή. Αυτή είναι η περίπτωση του φαινομένου της πολυόδεσης που προκαλείται από τις ανακλάσεις των ραδιοκυμάτων που παρεμβάλλονται καταστροφικά σε κάποιες θέσεις. Υποθέστε ότι ένας αναμεταδότης στέλνει ένα ημιτονοειδές σήμα και ο χρήστης του κινητού λαμβάνει όχι ένα, αλλά δύο αντίγραφα του σήματος: το άμεσο σήμα και ένα ανακλώμενο σήμα (π.χ. από ένα μεγάλο κτίριο) όπως φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-2.21. Το ληφθέν σήμα είναι το



άθροισμα των δύο αντιγράφων και δεδομένου ότι διανύουν διαφορετικές αποστάσεις έχουν διαφορετικές χρονικές καθυστερήσεις. Αν το σήμα που μεταδόθηκε είναι το $s(t)$, τότε το ληφθέν σήμα⁸ είναι

$$r(t) = s(t - t_1) + s(t - t_2)$$

Στην περίπτωση του κινητού τηλεφώνου, η απόσταση μεταξύ του χρήστη του κινητού και του αναμεταδότη αλλάζει πάντα. Υποθέστε ότι η απόσταση που διανύει το άμεσο σήμα είναι

$$d_1 = \sqrt{x^2 + 10^6} \quad (\text{μέτρα})$$

όπου x είναι η θέση του χρήστη που κινείται κατά μήκος του άξονα των x . Υποθέστε ότι η απόσταση που διανύει το ανακλώμενο σήμα είναι

$$d_2 = \sqrt{(x - 55)^2 + 10^6} + 55 \quad (\text{μέτρα})$$

(i) Η καθυστέρηση (σε δευτερόλεπτα) μπορεί να υπολογιστεί και για τις δύο πορείες διάδοσης, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η χρονική καθυστέρηση είναι η απόσταση προς την ταχύτητα του φωτός (3×10^8 m/s). Ορίστε τα t_1 και t_2 ως μία συνάρτηση της θέσης του κινητού τηλεφώνου (x).

(ii) Υποθέστε ότι το σήμα που αναμεταδόθηκε είναι το

$$s(t) = \cos(300 \times 10^6 \pi t)$$

Ορίστε το ληφθέν σήμα όταν $x = 0$. Αποδείξτε ότι το ληφθέν σήμα είναι ένα ημιτονοειδές και βρείτε το πλάτος, τη φάση και τη συχνότητά του, όταν το $x = 0$.

(iii) Το πλάτος του λαμβανομένου σήματος είναι ένα μέτρο της ισχύος του. Δείξτε ότι καθώς ο χρήστης κινητού τηλεφώνου κινείται, είναι δυνατό να βρεθούν θέσεις στις οποίες η ισχύς των σημάτων είναι μηδέν. Εντοπίστε μια τέτοια θέση.

(iv) Σχεδιάστε στο Matlab την ισχύ του σήματος ως προς τη θέση x ($-100 \leq x \leq 100$) και δείτε ότι υπάρχουν πολλές θέσεις στις οποίες δεν λαμβάνεται σήμα

⁸Για ευκολία αγνοούμε τις απώλειες διάδοσης: Όταν ένα ραδιοσήμα μεταδίδεται σε απόσταση R , το πλάτος του μειώνεται ανάλογα του $1/R^2$.

Φάσμα Σήματος

Αυτό το κεφάλαιο εισάγει την έννοια του **φάσματος**, που αποτελεί μια συμπαγή αναπαράσταση του συχνότητας περιεχομένου ενός σήματος που συντίθεται από ημιτονοειδή. Στο προηγούμενο κεφάλαιο, μάθαμε για τις ιδιότητες των ημιτονοειδών σημάτων

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \Re \{ X e^{j2\pi f_0 t} \}$$

όπου $X = A e^{j\phi}$ είναι ένας φάσορας και δείξαμε πως οι φάσορες μπορούν να απλοποιήσουν την πρόσθεση ημιτονοειδών σημάτων ίδιας συχνότητας. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δείξουμε πως ακόμα πιο πολύπλοκες κυματομορφές μπορούν να σχηματιστούν από ημιτονοειδή σήματα διαφορετικού πλάτους, φάσης και συχνότητας. Το φάσμα ορίζεται απλά ως η συλλογή της πληροφορίας για το πλάτος, τη φάση και τη συχνότητα που μας επιτρέπει να

εκφράσουμε το σήμα στη μορφή

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k) \\ &= X_0 + \Re \left\{ \sum_{k=1}^N X_k e^{j2\pi f_k t} \right\} \end{aligned}$$

όπου $X_0 = A_0$ είναι μια πραγματική σταθερά και $X_k = A_k e^{j\phi_k}$ το μιγαδικό πλάτος (δηλαδή ο φάσορας) για το εκθετικό μιγαδικό σήμα συχνότητας f_k . Θα δούμε ότι είναι χρήσιμο να δείχνουμε την πληροφορία αυτή σε μια γραφική παράσταση. Αυτή η οπτική αναπαράσταση επιτρέπει να βλέπουμε τις ενδιαμέσες σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των συντελεστών διαφορετικής συχνότητας και των σχετικών πλάτων τους γρήγορα και εύκολα.

3-1 Το Φάσμα Αθροίσματος Ημιτονοειδών

Ένας από τους λόγους που τα ημιτονοειδή σήματα είναι τόσο σημαντικά στη μελέτη μας, είναι ότι αποτελούν τα βασικά δομικά στοιχεία σύνθετων σημάτων. Παρακάτω σ' αυτό το κεφάλαιο, θα δείξουμε ορισμένες ασυνήθιστα σύνθετες κυματομορφές οι οποίες μπορούν να προκύψουν από απλούς συνδυασμούς των βασικών συνημιτονικών κυματομορφών. Η πιο γενική και ισχυρότερη μέθοδος για την παραγωγή νέων σημάτων από ημιτονοειδή είναι ο *προσθετικός γραμμικός συνδυασμός*, όπου ένα σήμα δημιουργείται προσθέτοντας μια σταθερά και ημιτονοειδή, κάθε ένα από τα οποία έχει διαφορετική συχνότητα, πλάτος και φάση. Μαθηματικά, αυτό το σήμα εκφράζεται από τη σχέση

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k) \quad (3.1)$$

όπου κάθε πλάτος, φάση και συχνότητα¹ μπορούν να επιλεγούν ανεξάρτητα. Ένα τέτοιο σήμα μπορεί επίσης να αναπαρασταθεί με τα μιγαδικά πλάτη μεμονωμένων ημιτονοειδών παραγόντων, δηλαδή,

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^N \Re \{ X_k e^{j2\pi f_k t} \} \quad (3.2)$$

όπου $X_0 = A_0$ παριστάνει μια πραγματική σταθερά και κάθε μιγαδικό πλάτος

$$X_k = A_k e^{j\phi_k}$$

παριστάνει το μέτρο και τη φάση ενός περιστρεφόμενου φάσματος συχνότητας f_k .

Οι *αντίστροφες σχέσεις του Euler* μας δίνουν τη δυνατότητα να παραστήσουμε το σήμα $x(t)$ με τον ακόλουθο εναλλακτικό τρόπο:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{X_k}{2} e^{j2\pi f_k t} + \frac{X_k^*}{2} e^{-j2\pi f_k t} \right\} \quad (3.3)$$

¹Σε αυτό το κεφάλαιο, χρησιμοποιούμε την κυκλική συχνότητα f_k και όχι τη γωνιακή συχνότητα $\omega_k = 2\pi f_k$, γιατί είναι ευκολότερο να περιγράψουμε φυσικές ποσότητες όπως είναι οι μουσικές νότες σε Hz.

Όπως και στην περίπτωση των μεμονωμένων ημιτονοειδών, αυτή η μορφή προκύπτει από το γεγονός ότι το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού ισούται με το ημιάθροισμα του αριθμού και του συζυγή του. Η Εξίσωση (3.3) δείχνει επίσης ότι κάθε ημιτονοειδές του αθροίσματος αποσυντίθεται σε δυο περιστρεφόμενους φάσους, έναν με θετική συχνότητα f_k και έναν άλλο με αρνητική συχνότητα, $-f_k$.

Ορίζουμε ως *φάσμα δίπλευρης επέκτασης* ενός σήματος που συντίθεται από ημιτονοειδή όπως αυτά στη Σχέση (3.3), ένα σύνολο $2N + 1$ μιγαδικών πλατών και $2N + 1$ συχνοτήτων που προσδιορίζουν το σήμα στην αναπαράσταση της Σχέσης (3.3). Για να είμαστε πιο συγκεκριμένοι, αν και είναι μια όχι και τόσο μαθηματική επισήμανση, ο ορισμός του φάσματος είναι ακριβώς το σύνολο των ακόλουθων ζευγών:

$$\left\{ (0, X_0), (f_1, \frac{1}{2} X_1), (-f_1, \frac{1}{2} X_1^*), \dots \right. \\ \left. (f_k, \frac{1}{2} X_k), (-f_k, \frac{1}{2} X_k^*), \dots \right\} \quad (3.4)$$

Κάθε ζευγάρι $(f_k, \frac{1}{2} X_k)$ δηλώνει το μέγεθος και τη σχετική φάση του ημιτονοειδούς που συμβάλλει στη συχνότητα f_k . Συνήθως αναφερόμαστε στο φάσμα σαν *αναπαράσταση του σήματος στο πεδίο της συχνότητας*. Αντί να δύσουμε τη χρονική κυματομορφή (δηλαδή, την αναπαράσταση στο πεδίο του χρόνου), η αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας δίνει απλά την πληροφορία που απαιτείται για τη σύνθεση της με τη Σχέση (3.3)



Παράδειγμα 3-1: Φάσμα Δίπλευρης Επέκτασης

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το άθροισμα μιας σταθεράς και δυο ημιτονοειδών:

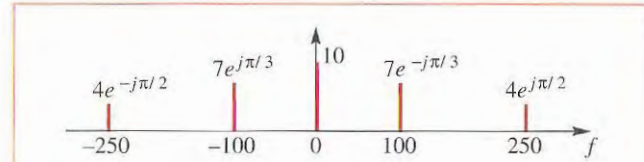
$$x(t) = 10 + 14 \cos(200\pi t - \pi/3) \\ + 8 \cos(500\pi t + \pi/2)$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο τύπο του Euler, παίρνουμε τους ακόλουθους πέντε όρους:

$$x(t) = 10 + 7e^{-j\pi/3} e^{j2\pi(100)t} + 7e^{j\pi/3} e^{-j2\pi(100)t} \\ + 4e^{j\pi/2} e^{j2\pi(250)t} + 4e^{-j\pi/2} e^{-j2\pi(250)t} \quad (3.5)$$

Παρατηρήστε ότι η σταθερή συνιστώσα του σήματος, που συνήθως καλείται **DC συνιστώσα**, μπορεί να εκφραστεί ως ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα με μηδενική συχνότητα, δηλαδή $10e^{j0t} = 10$. Επομένως, στη μορφή που προτείνεται στη Σχέση (3.4), το φάσμα αυτού του σήματος είναι το σύνολο των πέντε περιωστρεφόμενων φασόρων που παριστάνεται ως εξής

$$\{(0, 10), (100, 7e^{-j\pi/3}), (-100, 7e^{j\pi/3}), (250, 4e^{j\pi/2}), (-250, 4e^{-j\pi/2})\}$$



Σχήμα 3-1: Γραφική παράσταση του φάσματος του σήματος $x(t) = 10 + 14 \cos(200\pi t - \pi/3) + 8 \cos(500\pi t + \pi/2)$. Η μονάδα μέτρησης της συχνότητας (f) είναι το Hz. Οι αρνητικές συχνοτικές συνιστώσες θα πρέπει να περιλαμβάνονται για πληρότητα, αν και είναι οι συζυγείς των αντίστοιχων θετικών συχνοτικών συνιστωσών.

3-1.1 Αλλαγή Συμβολισμού

Η σχέση μεταξύ του X_k και του φάσματος αναφέρεται σε ειδικές περιπτώσεις επειδή, εκτός από το X_0 , ο συντελεστής $\frac{1}{2}$ πολλαπλασιάζει κάθε X_k στο φάσμα της Σχέσης (3.4). Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι σχετιζόμενες σχέσεις όπως η (3.3) αν μη τι άλλο να μην είναι εύρηστες. Επομένως, εισάγουμε το a_k σαν ένα νέο σύμβολο για το μιγαδικό πλάτος στο φάσμα και το ορίζουμε ως εξής:

$$a_k = \begin{cases} A_0 & \text{για } k = 0 \\ \frac{1}{2}A_k e^{j\phi_k} & \text{για } k \neq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Με τη βοήθεια του νέου συμβολισμού μπορούμε τώρα να πούμε ότι το φάσμα είναι το σύνολο των ζευγών (f_k, a_k) . Πρωταρχικό κίνητρο για την εισαγωγή αυτού του διαφοροποιημένου ορισμού του φάσματος είναι να απλοποιήσουμε τις σχέσεις για τις σειρές Fourier που θα αναπτυχθούν στην Ενότητα 3-4. Για παράδειγμα, η Σχέση (3.3), η οποία, όπως θα δούμε, είναι παρόμοια με τον τύπο σύνθεσης των σειρών Fourier, μπορεί τώρα να γραφτεί ως ενιαίο άθροισμα ως ακολούθως

$$x(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{j2\pi f_k t} \quad (3.7)$$

όπου έχουμε ορίσει $f_0 = 0$.

3-1.2 Γραφική Παράσταση Φάσματος

Μια γραφική παράσταση του φάσματος είναι πολύ πιο παραστατική από τη λίστα των ζευγών (f_k, a_k) . Κάθε συχνοτική συνιστώσα μπορεί να αναπαρασταθεί από μια κατακόρυφη γραμμή στην κατάλληλη συχνότητα και το μήκος αυτής της γραμμής μπορεί να σχεδιαστεί να είναι ανάλογο του μέτρου $|a_k|$. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 3-1 για το σήμα της Σχέσης (3.5). Κάθε **φασματική γραμμή** σημειώνεται με την τιμή του a_k ώστε να συμπληρωθούν οι πληροφορίες που απαιτούνται για τον ορισμό του φάσματος. Αυτή η απλή αλλά αποτελεσματική, γραφική παράσταση μας διευκολύνει να δούμε δύο πράγματα: τις σχετικές θέσεις των συχνοτήτων και τα σχετικά πλάτη των ημιτονοειδών στοιχείων. Οι δύο αυτοί λόγοι, εξηγούν γιατί η γραφική παράσταση φάσματος χρησιμοποιείται τόσο πολύ ως γραφική αναπαράσταση του σήματος. Όπως θα δούμε στα Κεφάλαια 4 και 6, η αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας είναι τόσο χρήσιμη, γιατί συχνά είναι πολύ εύκολο να δούμε πώς επηρεάζεται ένα σήμα από ένα σύστημα, προσδιορίζοντας τι θα συμβεί στο φάσμα του σήματος καθώς αυτό “μεταφέρεται” δια μέσου του συστήματος. Αυτός είναι και ο λόγος που το φάσμα αποτελεί το κλειδί στο να κατανοήσουμε πιο σύνθετα επεξεργαστικά συστήματα όπως τα ραδιόφωνα, οι τηλεοράσεις, τα συστήματα αναπαραγωγής CD κ.α..

Παρατηρήστε ότι για το παράδειγμα του Σχήματος

3-1 το μιγαδικό πλάτος κάθε αρνητικής συχνότητας είναι ο συζυγής του μιγαδικού πλάτους της αντίστοιχης θετικής συχνότητας. Αυτό είναι μια γενική ιδιότητα του φάσματος όταν το $x(t)$ είναι ένα πραγματικό σήμα, αφού οι περιστρεφόμενοι φάσορες με θετική και αρνητική συχνότητα πρέπει να προστεθούν για να προκύψει το πραγματικό σήμα (δες Σχήμα. 2-13(β) και το σχετικό βίντεο που υπάρχει στο CD-ROM).



Επίδειξη: Περιστρεφόμενοι Φάσορες

Μια γενική διαδικασία για τον υπολογισμό και σχεδιασμό του φάσματος ενός τυχαία επιλεγμένου σήματος, απαιτεί γνώσεις της σχετικής θεωρίας που είναι γνωστή ως ανάλυση Fourier. Ωστόσο, υποθέτοντας ότι το σήμα που μας ενδιαφέρει είναι το άθροισμα μιας σταθεράς και ενός ή περισσότερων ημιτονοειδών, μπορούμε να αξιολογήσουμε να εξερευνούμε τις αρετές της αναπαράστασης φάσματος. Για ένα σήμα που γνωρίζουμε τις ημιτονοειδείς κυματομορφές από τις οποίες αποτελείται, η διαδικασία είναι απλή. Ουσιαστικά, είναι απαραίτητη μόνο η έκφραση των συνημιτόνων και των ημιτόνων σε εκθετική μορφή (με τη χρήση των αντίστροφων σχέσεων του Euler) και στη συνέχεια η σχεδίαση του μιγαδικού πλάτους κάθε όρου στην αντίστοιχη συχνότητα. Δηλαδή, όταν είναι γνωστό εκ των προτέρων ότι ένα σήμα αποτελείται από ένα πεπερασμένο αριθμό ημιτονοειδών συνιστωσών, η διαδικασία ανάλυσης που θα πρέπει να ακολουθήσουμε για να βρούμε τις **φασματικές συνιστώσες** που περιλαμβάνει, συνίσταται στο να γράψουμε μια εξίσωση για το σήμα της μορφής της (3.3) και να καταγράψουμε το πλάτος τη φάση και τη συχνότητα κάθε περιστρεφόμενου φάσορά του.

Σε πολλές άλλες περιπτώσεις, η φασματική ανάλυση αν και δεν είναι τόσο απλή, είναι δυνατή. Για παράδειγμα, είναι δυνατόν να παραστήσουμε κάθε περιοδική κυματομορφή (ακόμα και ασυνεχή σήματα) ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων όπου όλες οι συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας κοινής συχνότητας, που ονομάζεται **θεμελιώδης συχνότητα**. Επιπλέον, τα περισσότερα (μη περιοδικά) σήματα μπορούν επίσης

να αναπαρασταθούν ως υπέρθεση μιγαδικών εκθετικών σημάτων. Τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται, για να γίνει αυτή η ανάλυση, είναι οι σειρές Fourier (δες Ενότητα 3-4) και οι μετασχηματισμοί Fourier (Κεφάλαιο 11). Πριν αντιμετωπίσουμε τη γενική περίπτωση, θα παραθέσουμε παραδείγματα που το άθροισμα μερικών ημιτονοειδών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην παραγωγή ακουστικά ευχάριστων ηχητικών σημάτων και θα μας επιτρέψει να συσχετίσουμε τους ήχους με το φάσμα τους.

3-2 Διακροτήματα

Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο ημιτονοειδή διαφορετικών συχνοτήτων, δημιουργείται ένα ενδιαφέρον ηχητικό αποτέλεσμα που ονομάζεται **διακρότημα ή ρυθμική νότα**. Το αποτέλεσμα, που μοιάζει σαν κελάδισμα, ακούγεται καλύτερα αν επιλέξουμε η μια από τις δύο συχνότητες να είναι πολύ χαμηλή (για παράδειγμα 10 Hz) και η άλλη γύρω στο 1kHz. Μερικά μουσικά όργανα παράγουν ρυθμικούς τόνους. Άλλη μια εφαρμογή στην οποία χρησιμοποιείται ο πολλαπλασιασμός ημιτονοειδών είναι στη ραδιοφωνία, για τη διαμόρφωση των σημάτων που επιθυμούμε να μεταδώσουμε. Οι ραδιοφωνικοί AM σταθμοί χρησιμοποιούν αυτή τη μέθοδο, που είναι γνωστή με το όνομα **διαμόρφωση πλάτους**.



Εργ. Ασκ.: #3 AM και FM Ημιτονοειδή Σήματα

3-2.1 Γινόμενο Ημιτονοειδών

Αν και το σήμα προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό δύο ημιτονοειδών, η αναπαράσταση φάσματος απαιτεί το σήμα να είναι εκφρασμένο ως γραμμικός συνδυασμός μιγαδικών εκθετικών σημάτων. Άλλοι συνδυασμοί ημιτονοειδών θα πρέπει πρώτα να εκφραστούν ως γραμμικός συνδυασμός με σκοπό να απεικονιστεί η φασματική τους αναπαράσταση. Το σημείο αυτό διευκρινίζεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.



Παράδειγμα 3-2: Φάσμα Γινόμενου

Για την ειδική περίπτωση του ρυθμικού σήματος που προκύπτει από δύο ημιτονοειδή συχνότητας 5 Hz και $\frac{1}{2}$ Hz


αντίστοιχα

$$x(t) = \cos(\pi t) \sin(10\pi t) \quad (3.8)$$

είναι απαραίτητο πριν ορίσουμε το φάσμα του, να το εκφράσουμε σε μορφή αθροίσματος. Η τεχνική που ακολουθεί βασίζεται στις αντίστροφες σχέσεις του Euler:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\frac{e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}}{2} \right) \left(\frac{e^{j10\pi t} - e^{-j10\pi t}}{2j} \right) \\ &= \frac{1}{4} e^{-j\pi/2} e^{j11\pi t} + \frac{1}{4} e^{-j\pi/2} e^{j9\pi t} \\ &\quad - \frac{1}{4} e^{-j\pi/2} e^{-j9\pi t} - \frac{1}{4} e^{-j\pi/2} e^{-j11\pi t} \\ &= \frac{1}{2} \cos(11\pi t - \pi/2) + \frac{1}{2} \cos(9\pi t - \pi/2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Από τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή της παραπάνω σχέσης, είναι προφανές ότι υπάρχουν τέσσερις όροι στον γραμμικό συνδυασμό και οι τέσσερις φασματικές συνιστώσες είναι στις συχνότητες $\pm 11\pi$ και $\pm 9\pi$ rad/sec που μετατρέπονται σε 5.5, 4.5, -4.5 και -5.5 Hz αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί ότι καμιά από τις αρχικές συχνότητες (5 και $\frac{1}{2}$ Hz) που χρησιμοποιούνται στον ορισμό του $x(t)$ (Σχέση (3.8)) δεν υπάρχει στο φάσμα. ■

 **Άσκηση 3.1:** Έστω $x(t) = \sin^2(10\pi t)$. Βρείτε έναν γραμμικό συνδυασμό της μορφής της Σχέσης (3.7) για το $x(t)$ και στη συνέχεια σχεδιάστε το φάσμα του. Μετρήστε τον αριθμό των συχνωτικών συνιστωσών στο φάσμα. Ποια είναι η μεγαλύτερη συχνότητα που περιέχεται στο $x(t)$; Χρησιμοποιήστε τις αντίστροφες σχέσεις του Euler.

3-2.2 Κυματομορφή Διακροτήματος

Τα διακροτήματα προκύπτουν από την πρόσθεση δυο ημιτονοειδών με πολύ κοντινές συχνότητες (για παράδειγμα, παίζοντας ταυτόχρονα δύο γειτονικά πλήκτρα στο πιάνο). Το παράδειγμα (Σχέσεις (3.8) και (3.9)) μας λέει ότι το γινόμενο δύο ημιτονοειδών σημάτων είναι ισοδύναμο με ένα άθροισμα. Επομένως αρχίζοντας από

το γραμμικό συνδυασμό δύο ημιτονοειδών με παραλλήλεις συχνότητες, μπορούμε να βρούμε μια γενική σχέση μεταξύ οποιουδήποτε διακροτήματος, του φάσματός του και της πολλαπλασιαστικής μορφής του:

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) \quad (3.10)$$

Οι δύο συχνότητες μπορούν να εκφραστούν ως $f_1 = f_c - f_\Delta$ και $f_2 = f_c + f_\Delta$, όπου έχουμε ορίσει μια *κεντρική συχνότητα* $f_c = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ και μια *συχνότητα απόκλισης* $f_\Delta = \frac{1}{2}(f_2 - f_1)$, που υποθέτουμε ότι είναι πολύ μικρότερη από την f_c . Το φάσμα αυτού του διακροτήματος φαίνεται στο Σχήμα 3-2.



Επίδειξη: Φασματογραφήματα Απλών Ήχων

Χρησιμοποιώντας τη μιγαδική εκθετική αναπαράσταση των δύο συνημιτόνων, μπορούμε να ξαναγράψουμε το $x(t)$ σαν γινόμενο δύο συνημιτόνων και να διευκολυνθούμε στη σχεδίαση του σήματος στο πεδίο του χρόνου. Η ανάλυση γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) \\ &= \Re \{ e^{j2\pi f_1 t} \} + \Re \{ e^{j2\pi f_2 t} \} \\ &= \Re \{ e^{j2\pi(f_c - f_\Delta)t} + e^{j2\pi(f_c + f_\Delta)t} \} \\ &= \Re \{ e^{j2\pi f_c t} (e^{-j2\pi f_\Delta t} + e^{j2\pi f_\Delta t}) \} \\ &= \Re \{ e^{j2\pi f_c t} (2 \cos(2\pi f_\Delta t)) \} \\ &= 2 \cos(2\pi f_\Delta t) \cos(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

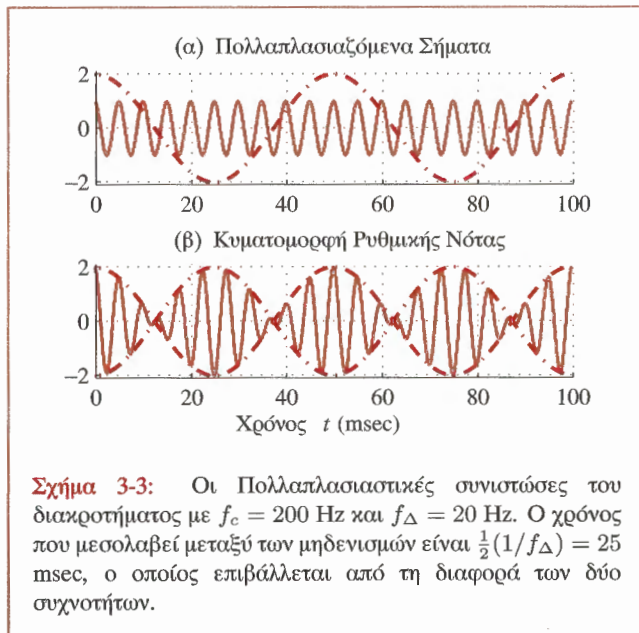
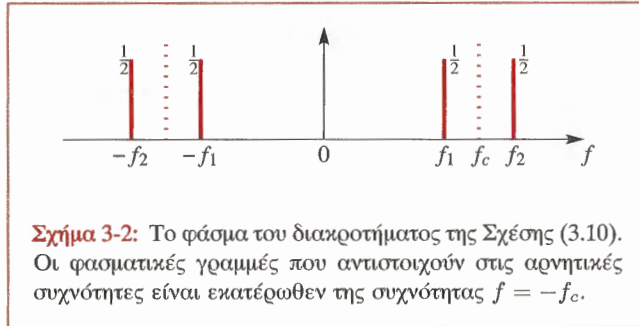


Παράδειγμα 3-3: Γραφική Παράσταση Διακροτήματος

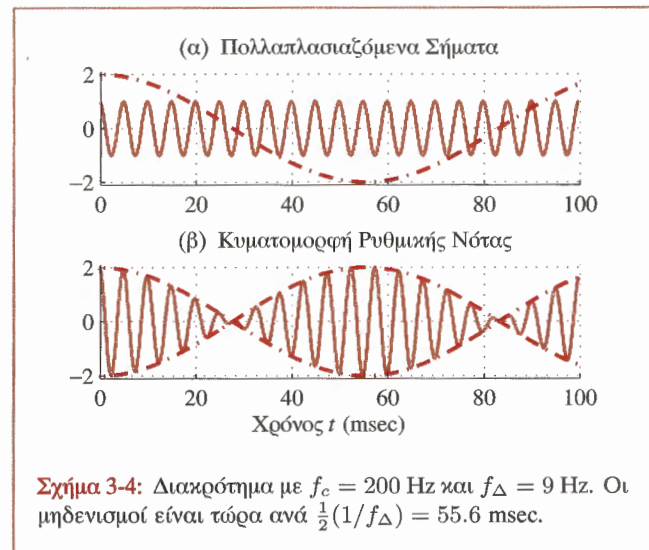
Σαν μια εφαρμογή των παραπάνω, παραθέτουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα στο οποίο $f_c = 200$ Hz και $f_\Delta = 20$ Hz και επομένως:

$$x(t) = 2 \cos(2\pi(20)t) \cos(2\pi(200)t) \quad (3.12)$$

Μια γραφική παράσταση του $x(t)$ στο πεδίο του χρόνου φαίνεται στο Σχήμα 3-3(β). ■



Στο Σχήμα 3-3(α) φαίνονται οι δύο ημιτονοειδείς συνιστώσες, $2 \cos(2\pi(20)t)$ και $\cos(2\pi(200)t)$, που υπεισέρχονται στη Σχέση (3.12). Η γραφική παράσταση του διακροτήματος κατασκευάζεται σχεδιάζοντας πρώτα το $2 \cos(2\pi(20)t)$ και το αντίθετο του $-2 \cos(2\pi(20)t)$ ώστε να ορίσουμε τα όρια μέσα στα οποία θα σχεδιάσουμε το σήμα υψηλής συχνότητας. Τα όρια αυτά αποτελούν το **φωρατή ή περιβάλλουσα** του σήματος. Το διακρότημα (ρυθμική νότα) που προκύπτει φαίνεται στο Σχήμα 3-3(β), από το οποίο μπορούμε να δούμε ότι ο πολλαπλασιασμός του ημιτονοειδούς της υψηλότερης συχνότητας (200 Hz) με το ημιτονοειδές της χαμηλότερης συχνότητας (20 Hz) έχει σαν αποτέλεσμα να αλλάξει την περιβάλλουσα των κορυφών της κυματομορφής της υψηλότερης συχνότητας. Αν ακούσουμε ένα τέτοιο σήμα $x(t)$ μπορούμε να αντιληφθούμε την βαθμιαία εξασθένιση και ενίσχυση του σήματος που προκαλεί η συχνότητα απόκλισης f_Δ (δες Σχήμα 3-3(β)). Αυτό το φαινόμενο στη μουσική ονομάζεται “ρυθμός”.





Παράδειγμα 3-4: Μείωση του f_{Δ}

Αν η f_{Δ} ελαττωθεί στα 9 Hz, βλέπουμε στο Σχήμα 3-4(α,β) ότι η περιβάλλουσα του τόνου των 200 Hz μεταβάλλεται πολύ πιο αργά. Το χρονικό διάστημα μεταξύ των μηδενισμών της περιβάλλουσας είναι $\frac{1}{2}(1/f_{\Delta})$ και επομένως όσο πιο κοντά επιλεγούν οι συχνότητες των ημιτονοειδών στη Σχέση (3.10), τόσο πιο αργά θα μεταβάλλεται η περιβάλλουσα. Αυτές οι γραφικές παραστάσεις απλοποιούνται σε κάποιο βαθμό με τη χρήση συνημιτόνων και στους δύο όρους της Σχέσης (3.10), αλλά και άλλες σχέσεις στις φάσεις των σημάτων θα μπορούσαν να δώσουν παρόμοια αποτελέσματα. Τέλος, πρέπει να θυμόμαστε ότι το φάσμα του $x(t)$ του Σχήματος 3-3 περιέχει συχνοτικές συνιστώσες στα ± 220 Hz και στα ± 180 Hz, ενώ το φάσμα του Σχήματος 3-4 περιέχει συχνοτικές συνιστώσες στα ± 209 Hz και ± 191 Hz. ■

Οι μουσικοί χρησιμοποιούν αυτό το φαινόμενο για να βοηθηθούν στο συντονισμό δυο μουσικών οργάνων στον ίδιο τόνο. Όταν δυο νότες είναι κοντινές αλλά δεν ταυτίζονται, το φαινόμενο γίνεται ακουστικά αντιληπτό. Όταν ένας τόνος αλλάζει για να γίνει πιο κοντινός σε έναν άλλο, το φαινόμενο εξαφανίζεται και τα δυο όργανα είναι “συντονισμένα”.

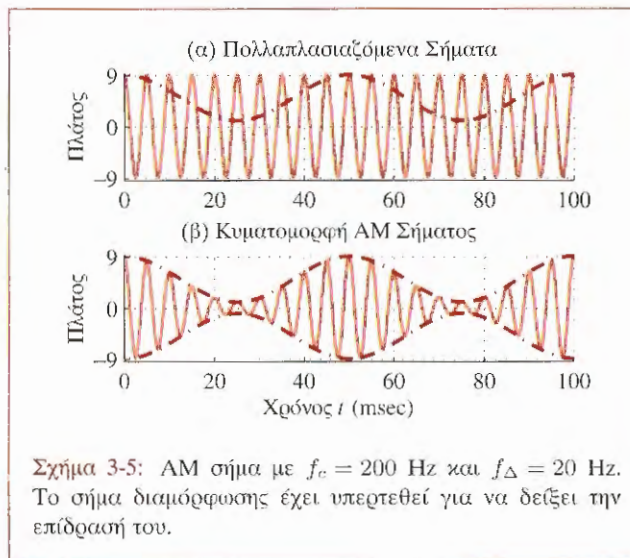
3-2.3 Διαμόρφωση Πλάτους



Εργ. Ασκ.: #3, Ημιτονοειδή Σήματα AM και FM

Ο πολλαπλασιασμός ημιτονοειδών είναι επίσης χρήσιμος στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα. Η **Διαμόρφωση πλάτους** είναι μια διαδικασία πολλαπλασιασμού ενός σήματος χαμηλής συχνότητας μ' ένα ημιτονοειδές σήμα υψηλής συχνότητας. Αυτή είναι η τεχνική που χρησιμοποιείται στη ραδιοφωνική μετάδοση AM: Στην πραγματικότητα “AM” είναι ένα ακρωνύμιο που προκύπτει από τα αρχικά των λέξεων Amplitude (πλάτος) και Modulation (διαμόρφωση). Το AM σήμα είναι ένα γινόμενο της μορφής

$$x(t) = v(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (3.13)$$



Σχήμα 3-5: AM σήμα με $f_c = 200$ Hz και $f_{\Delta} = 20$ Hz. Το σήμα διαμόρφωσης έχει υπερτεθεί για να δείξει την επίδρασή του.

όπου υποθέτουμε ότι η συχνότητα του συνημιτονικού όρου (f_c) είναι πολύ υψηλότερη από οποιαδήποτε συχνότητα που περιέχεται στο φάσμα του σήματος $v(t)$, η οποία αναπαριστά το προς μετάδοση φωνητικό ή μουσικό σήμα. Το συνημιτονικό σήμα $\cos(2\pi f_c t)$ στη Σχέση (3.13) ονομάζεται *φέρων σήμα* και η συχνότητά του *συχνότητα φέροντος*.

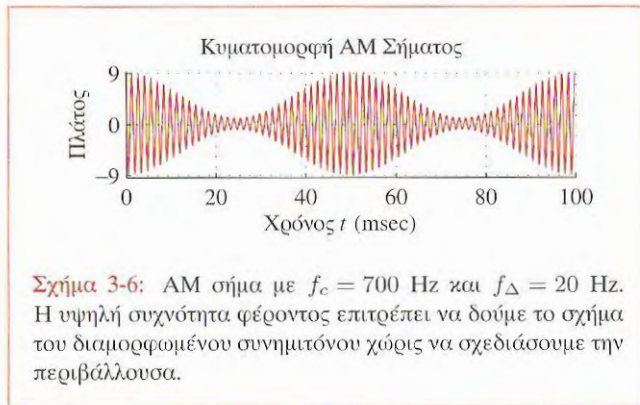
Με τη βασική γνώση του φάσματος που διαθέτουμε σε αυτό το σημείο, η μορφή του σήματος $v(t)$ στη Σχέση (3.13) πρέπει να περιοριστεί σε άθροισμα ημιτονοειδών, αλλά αυτό είναι αρκετό για να κατανοήσουμε πώς λειτουργεί η διαμόρφωση.



Παράδειγμα 3-5: Διαμόρφωση Πλάτους

Αν υποθέσουμε ότι $v(t) = 5 + 4 \cos(40\pi t)$ και $f_c = 200$ Hz, τότε το σήμα AM είναι ένα γινόμενο παρόμοιο με το διακροτήματα:

$$x(t) = [5 + 4 \cos(40\pi t)] \cos(400\pi t) \quad (3.14)$$



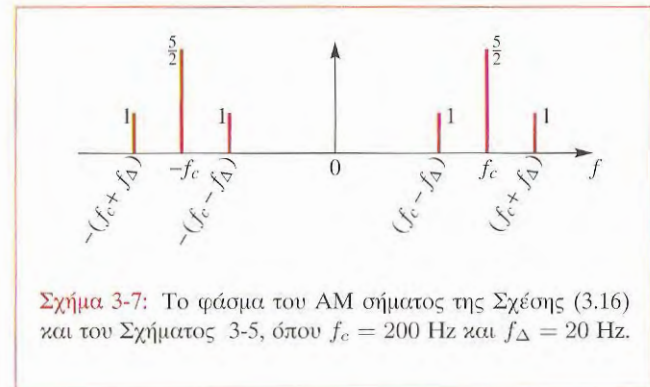
Η γραφική παράσταση αυτού του σήματος φαίνεται στο Σχήμα 3-5, όπου μπορούμε να δούμε ότι ο πολλαπλασιασμός του ημιτονοειδούς υψηλής συχνότητας (200 Hz) με το χαμηλής συχνότητας ημιτονοειδές (20Hz) έχει σαν αποτέλεσμα να “διαμορφώσει” (ή να αλλάξει) το πλάτος της περιβάλλουσας του σήματος φέροντος, αυτός άλλωστε είναι και ο λόγος που ονομάζεται διαμόρφωση πλάτους. ■

Η βασική διαφορά μεταξύ αυτού του AM σήματος και του διακροτήματος είναι ότι η περιβάλλουσα δεν μηδενίζεται ποτέ. Αυτό συμβαίνει διότι η συνεχής συνιστώσα (5) είναι μεγαλύτερη από το πλάτος (4) του συνημιτόνου των 20 Hz. Όταν η συχνότητα φέροντος γίνεται πολύ μεγάλη συγκριτικά με τις συχνότητες του $v(t)$ όπως στο Σχήμα 3-6, είναι δυνατόν να δούμε το περιγράμμα της διαμόρφωσης συνημιτόνου χωρίς να σχεδιάσουμε την περιβάλλουσα του σήματος. Αυτή η ιδιότητα απλοποιεί την υλοποίηση του κυκλώματος αντίληψης στους δέκτες ραδιοφωνικής εκπομπής AM. Στο πεδίο της συχνότητας, το φάσμα του AM σήματος είναι σχεδόν το ίδιο με αυτό του διακροτήματος. Η μόνη διαφορά τους είναι στην παρουσία ενός DC όρου στη συχνότητα $f = f_c$.

Το φάσμα μπορεί να παραχθεί πρώτα με το διαχωρισμό του σήματος σε δύο όρους, στο πεδίο του χρόνου

$$x(t) = 5 \cos(400\pi t) + 4 \cos(40\pi t) \cos(400\pi t) \quad (3.15)$$

και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις γνώσεις μας σχετικά



με το διακρότημα, να πάρουμε τον ακόλουθο γραμμικό συνδυασμό για το φάσμα:

$$x(t) = \frac{5}{2} e^{j400\pi t} + e^{j440\pi t} + e^{j360\pi t} + \frac{5}{2} e^{-j400\pi t} + e^{-j440\pi t} + e^{-j360\pi t} \quad (3.16)$$

Επομένως, το σήμα $x(t)$ έχει έξι φασματικές συνιστώσες στις συχνότητες ± 220 Hz, ± 180 Hz και επίσης στη συχνότητα ± 200 Hz του φέροντος (Σχήμα 3-7). Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι το φάσμα του $x(t)$ περιέχει δύο ταυτόσημα υποσύνολα, που το ένα είναι τοποθετημένο γύρω από τη συχνότητα $f = f_c$ και το άλλο γύρω από τη συχνότητα $f = -f_c$. Καθένα από αυτά τα υποσύνολα περιέχει τρεις φασματικές γραμμές και είναι φανερό ότι κάθε υποσύνολο είναι απλά μια ολισθημένη στη συχνότητα εκδοχή του φάσματος δίπλευρης επέκτασης του σήματος $v(t)$. Στο Κεφάλαιο 11 θα δείξουμε ότι αυτό συμβαίνει για μια πολύ μεγαλύτερη κατηγορία σημάτων.



Άσκηση 3.2: Βρείτε το φάσμα του σήματος $v(t) = 5 + 2 \cos(2\pi(20)t)$ και σχεδιάστε το συναρτήσει της συχνότητας. Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με τη γραφική παράσταση του φάσματος του σήματος AM στο Σχήμα 3-7.

3-3 Περιοδικές Κυματομορφές

Ένα περιοδικό σήμα ικανοποιεί τη συνθήκη $x(t + T_0) = x(t)$ για κάθε t , που σημαίνει ότι το σήμα επαναλαμβάνει τις τιμές του κάθε T_0 sec. Το χρονικό διάστημα T_0 ονομάζεται *περίοδος* του σήματος $x(t)$. Αν το T_0 είναι ο μικρότερος χρόνος επανάληψης του σήματος, τότε ονομάζεται *θεμελιώδης περίοδος*. Για παράδειγμα το σήμα $x(t) = \cos^2(4\pi t)$ έχει περίοδο $\frac{1}{2}$ sec, αλλά η θεμελιώδης περιόδός του είναι $T_0 = \frac{1}{4}$ sec. Στην παράγραφο αυτή, δείχνουμε ότι τα περιοδικά σήματα μπορούν να κατασκευαστούν προσθέτοντας δύο ή περισσότερα συνημιτονοειδή κύματα που έχουν *αρμονικά* σχετιζόμενες συχνότητες, δηλαδή, όλες οι συχνότητές του είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας συχνότητας f_0 . Το σήμα μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα $N+1$ συνημιτονικών κυματομορφών²

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (3.17)$$

όπου η συχνότητα f_k , της k -οστής συνημιτονικής συνιστώσας στη Σχέση (3.17) είναι η ακόλουθη:

$$f_k = k f_0 \quad (\text{αρμονικές συχνότητες})$$

Η συχνότητα f_k ονομάζεται *k-οστή Αρμονική* της f_0 γιατί είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της f_0 , που ονομάζεται *θεμελιώδης συχνότητα*.



Παράδειγμα 3-6: Υπολογισμός της f_0

Η θεμελιώδης συχνότητα είναι η *μεγαλύτερη* f_0 για την οποία ισχύει $f_k = k f_0$. Αυτό σημαίνει ότι η f_0 είναι ο *Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης* (ΜΚΔ) των f_k οπότε μπορούμε να πούμε:

$$f_0 = \text{MK}\Delta \{f_k\}$$

Για παράδειγμα, αν ένα σήμα είναι άθροισμα ημιτονοειδών με συχνότητες 1.2, 2 και 6 Hz, τότε $f_0 = 0.4$ Hz γιατί το 1.2

²Η Συνεχής (DC) συνιστώσα αντιστοιχεί σε συνημιτονικό σήμα μηδενικής συχνότητας.

Hz είναι η τρίτη αρμονική, τα 2 Hz η πέμπτη και τα 6 Hz η δέκατη πέμπτη αρμονική. ■

Ποιά είναι η περίοδος του σήματος $x(t)$; Αφού κάθε συνημίτονο στη Σχέση (3.17) έχει περίοδο $1/f_0$, το άθροισμα πρέπει να έχει ακριβώς την ίδια περίοδο και $x(t + 1/f_0) = x(t)$. Άρα η περίοδος του $x(t)$ είναι $T_0 = 1/f_0$, δηλαδή το αντίστροφο της θεμελιώδους συχνότητας. Συχνά το $T_0 = 1/f_0$ αναφέρεται και ως η θεμελιώδης περίοδος του σήματος.

Χρησιμοποιώντας τη μιγαδική εκθετική αναπαράσταση των συνημιτόνων, η Σχέση (3.17) γράφεται

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-N}^N a_k e^{j2\pi k f_0 t} \\ &= a_0 + 2\Re \left\{ \sum_{k=1}^N a_k e^{j2\pi k f_0 t} \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

όπου οι συντελεστές a_k ορίστηκαν στη Σχέση (3.6) της Ενότητας 3-1.1.



Άσκηση 3.3: Δείξτε ότι μια πιθανή περίοδος του μιγαδικού εκθετικού σήματος $v_k(t) = e^{j2\pi k f_0 t}$ είναι η $T_0 = 1/f_0$. Επίσης δείξτε ότι η θεμελιώδης περίοδος είναι $1/(k f_0)$.

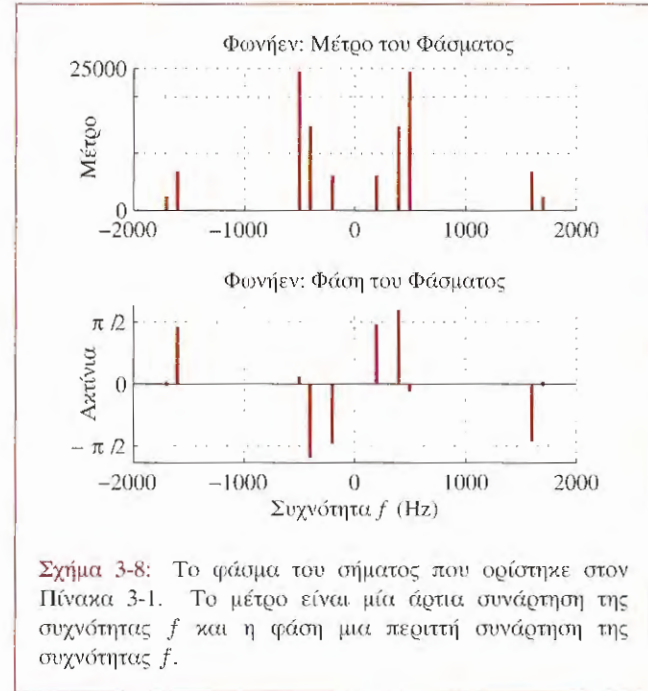
3-3.1 Συνθετικό Φωνήεν

Ως ένα παράδειγμα σύνθεσης ενός περιοδικού σήματος, ας θεωρήσουμε την περίπτωση που το άθροισμα της Σχέσης (3.18) περιέχει μη μηδενικούς όρους για $\{a_{\pm 2}, a_{\pm 4}, a_{\pm 5}, a_{\pm 16}, a_{\pm 17}\}$ και όπου η θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_0 = 100$ Hz. Οι αριθμητικές τιμές των μιγαδικών πλατών φαίνονται στον Πίνακα 3-1. Αυτό το σήμα προσεγγίζει την κυματομορφή που παράγεται από το φωνητικό σύστημα ενός άνδρα που προφέρει το αγγλικό φωνήεν “a”. Το φάσμα δίπλευρης επέκτασης αυτού του σήματος φαίνεται στο Σχήμα 3-8. Παρατηρήστε

Πίνακας 3-1: Μιγαδικά πλάτη του περιοδικού σήματος που προσεγγίζει το αγγλικό φωνήεν “α”. Οι συντελεστές a_k δίνονται για τις θετικές τιμές του δείκτη k . Οι τιμές των συντελεστών για τις αρνητικές τιμές του δείκτη k υπακούουν στη σχέση $a_{-k} = a_k^*$.

k	f_k (Hz)	a_k	Μέτρο	Φάση
1	100	0	0	0
2	200	$386 + j6101$	6113	1.508
3	300	0	0	0
4	400	$-4433 + j14024$	14708	1.877
5	500	$24000 - j4498$	24418	-0.185
6	600	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
15	1500	0	0	0
16	1600	$828 - j6760$	6811	-1.449
17	1700	$2362 + j0$	2362	0

ότι όλες οι συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια των 100 Hz, αν και όπως μπορούμε να δούμε, δεν υπάρχει φασματική συνιστώσα στα 100 Hz. Επίσης παρατηρήστε ότι οι συνιστώσες που αντιστοιχούν στις αρνητικές συχνότητες έχουν ορίσματα που είναι αντίθετα από αυτά των αντίστοιχων θετικών συχνοτικών συνιστωσών. Αυτό συμβαίνει διότι, όπως ήδη αναφέραμε, τα μιγαδικά πλάτη για τις αρνητικές συχνότητες είναι οι συζυγείς των πλάτων των αντίστοιχων θετικών συχνοτήτων. Παρατηρήστε επίσης ότι το Σχήμα 3-8 εμφανίζει το φάσμα σε δύο γραφικές παραστάσεις, μια για το μέτρο και μια για τη φάση, σε αντίθεση με το Σχήμα 3-1 όπου ήταν αρκετό να φτιάξουμε μόνο μία γραφική παράσταση και να ονομάσουμε τις φασματικές συνιστώσες με τα μιγαδικά τους πλάτη. Το σήμα του συνθετικού αγγλικού φωνήεντος έχει δέκα φασματικές συνιστώσες που αντιστοιχούν σε πέντε πραγματικά θεμελιώδη ημιτονοειδή σήματα, αν εκφραστεί ως το πραγματικό μέρος ενός αθροίσματος όπως αυτό της Σχέσης (3.18). Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε τη συνεισφορά κάθε πραγματικού ημιτονοειδούς παράγοντα



Σχήμα 3-8: Το φάσμα του σήματος που ορίστηκε στον Πίνακα 3-1. Το μέτρο είναι μία άρτια συνάρτηση της συχνότητας f και η φάση μια περιττή συνάρτηση της συχνότητας f .

ξεχωριστά. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε σχεδιάζοντας διαδοχικά τις κυματομορφές που αντιστοιχούν σε ένα ημιτονοειδές κύμα, στη συνέχεια σε δύο, τρία κ.ο.κ.. Το Σχήμα 3-9 (πάνω πλαίσιο) δείχνει τη γραφική παράσταση για $k=2$ ημιτονοειδείς όρους του Πίνακα 3-1. Παρατηρήστε ότι εφόσον η συχνότητα αυτής της συνιστώσας είναι $2f_0 = 200$ Hz, η κυματομορφή είναι περιοδική με περίοδο $1/200 = 5$ msec. Το επόμενο πλαίσιο του Σχήματος 3-9 δείχνει τη $x_4(t)$ η οποία είναι γραφική παράσταση του αθροίσματος των όρων για $k=2$ και $k=4$.

Παρατηρήστε ότι οι δύο συχνότητες είναι πολλαπλάσια των 200 Hz, και επομένως η περίοδος του σήματος $x_4(t)$ εξακολουθεί να είναι 5 msec. Στο μεσαίο πλαίσιο του Σχήματος 3-9 φαίνεται η γραφική παράσταση του αθροίσματος $x_5(t)$ των τριών πρώτων όρων. Παρατηρούμε ότι η περίοδος του σήματος έχει αυξηθεί στα 10 msec.

Αυτό συμβαίνει γιατί οι τρεις συχνότητες 200, 400 και 500 Hz είναι ακέραια πολλαπλάσια των 100 Hz, δηλαδή η θεμελιώδης συχνότητα είναι τώρα 100 Hz. Στο τελευταίο πλαίσιο του Σχήματος 3-9 παρουσιάζεται το σήμα $x_{17}(t)$, το άθροισμα όλων των όρων του Πίνακα 3-1. Παρατηρήστε ότι η περίοδος του $x_{17}(t)$ είναι $T_0 = 10$ msec, η οποία ισούται με το $1/f_0$, παρόλο που δεν υπάρχει συνιστώσα με αυτή τη συχνότητα. Το σήμα $x_{17}(t)$ αποτελεί τυπικό παράδειγμα κυματομορφής φωνήεντος που συναντάμε στα σήματα ομιλίας. Οι ψηλές συχνότητες στο σήμα συνεισφέρουν στις λεπτομέρειες της κυματομορφής. Αυτό είναι φανερό στο Σχήμα 3-9 όπου όσο προσθέτουμε συνιστώσες υψηλότερων συχνοτήτων (όπως αυτή της 16-ης και της 17-ης αρμονικής), τόσο η κυματομορφή γίνεται πιο πολύπλοκη και μεταβάλλεται γρηγορότερα.



Επίδειξη: Σύνθεση Φωνήεντος

3-3.2 Παράδειγμα ενός μη Περιοδικού Σήματος

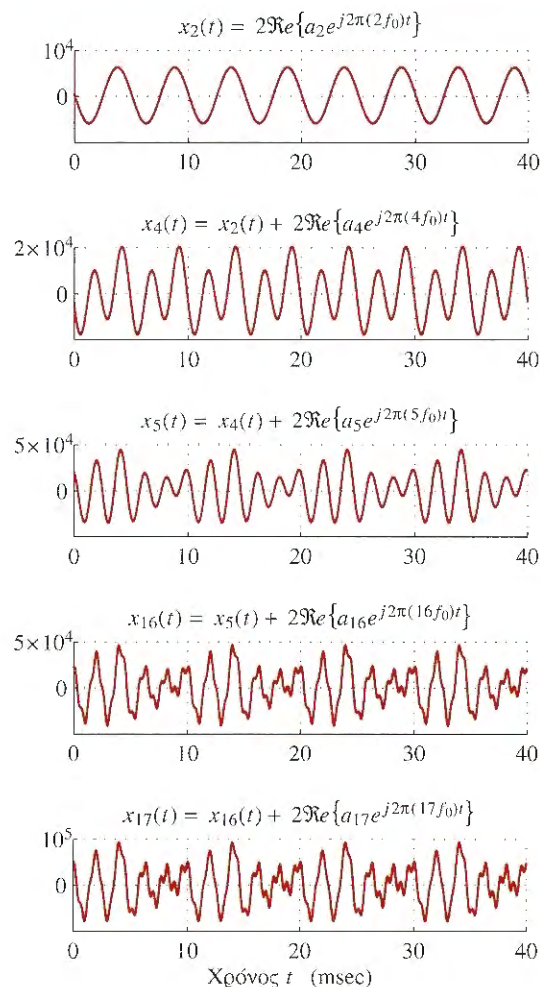
Όταν προσθέτουμε αρμονικά σχετιζόμενους μιγαδικούς εκθετικούς αριθμούς, παίρνουμε ένα περιοδικό αποτέλεσμα. Τι συμβαίνει όταν οι συχνότητες έχουν μικρή σχέση η μία με την άλλη; Ο τύπος σύνθεσης των ημιτονοειδών

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$$

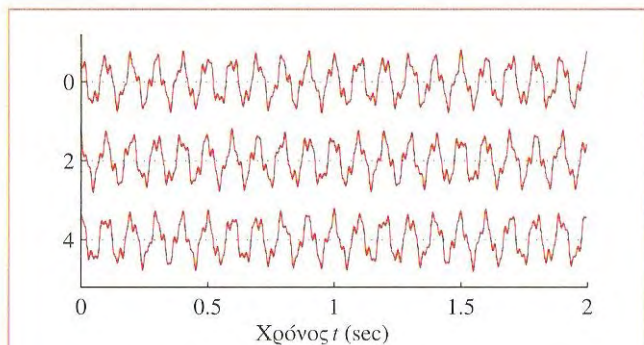
$$= A_0 + \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} A_k e^{j\phi_k} e^{j2\pi f_k t} + \frac{1}{2} A_k e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi f_k t} \right)$$

εξακολουθεί να ισχύει, αλλά τώρα δεν μπορούμε να κάνουμε υποθέσεις σχετικά με τις συχνότητες f_k .

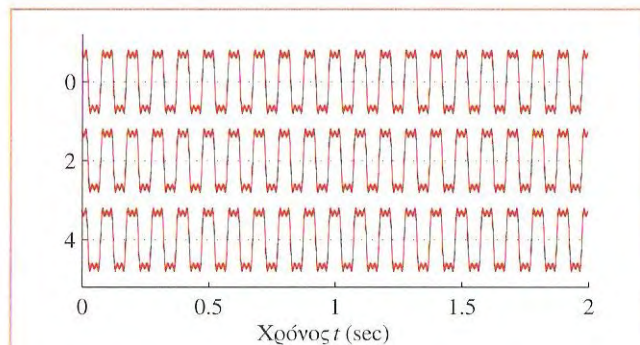
Με ένα απλό παράδειγμα, θέλουμε να δείξουμε ότι η περιοδικότητα είναι στενά συνδεδεμένη με τις αρμονικές συχνότητες. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε παίρνοντας ένα εξειδικευμένο παράδειγμα. Θεωρήστε το αρμονικό σήμα $x_h(t)$ που προκύπτει από την 1-η, την 3-η και την



Σχήμα 3-9: Διαδοχικά άθροισματα των πέντε όρων του Πίνακα 3-1. Ο όρος των 200 Hz φαίνεται στο πρώτο πλαίσιο (κορυφή). Οι υπόλοιποι όροι προστίθενται διαδοχικά μέχρι να δημιουργηθεί το ολοκληρωμένο σήμα ομιλίας (τελευταίο πλαίσιο του σχήματος).



Σχήμα 3-10: Το άθροισμα $x_2(t)$ τριών συνημιτονικών σημάτων με μη αρμονικές συχνότητες. Όσο κι αν προσπαθήσουμε, δεν μπορούμε να βρούμε μία ακριβή επανάληψη σε αυτό το σήμα.



Σχήμα 3-11: Άθροισμα συνημιτονοειδών κυμάτων αρμονικών συχνοτήτων. Η θεμελιώδης συχνότητα του $x_h(t)$ είναι 10 Hz.

5-η αρμονική ενός τετραγωνικού κύματος³ με θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 10$ Hz:

$$x_h(t) = 2 \cos(20\pi t) - \frac{2}{3} \cos(20\pi(3)t) + \frac{2}{5} \cos(20\pi(5)t)$$

Η γραφική παράσταση του $x_h(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 3-11 χρησιμοποιώντας μια “τιμηματική αναπαράσταση” του. Η γραφική παράσταση αποτελείται από τρεις γραμμές, που καθεμία περιέχει 2 sec του σήματος. Η πρώτη γραμμή αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$, η δεύτερη τη χρονική στιγμή $t = 2$ και η τρίτη τη χρονική στιγμή $t = 4$. Αυτό μας επιτρέπει να δούμε ένα μεγάλο τμήμα του σήματος, το οποίο σε αυτή την περίπτωση είναι καθαρά περιοδικό, με περίοδο ίση με 1/10 sec.



Επίδειξη: Φασματογραφήματα Απλών Ήχων

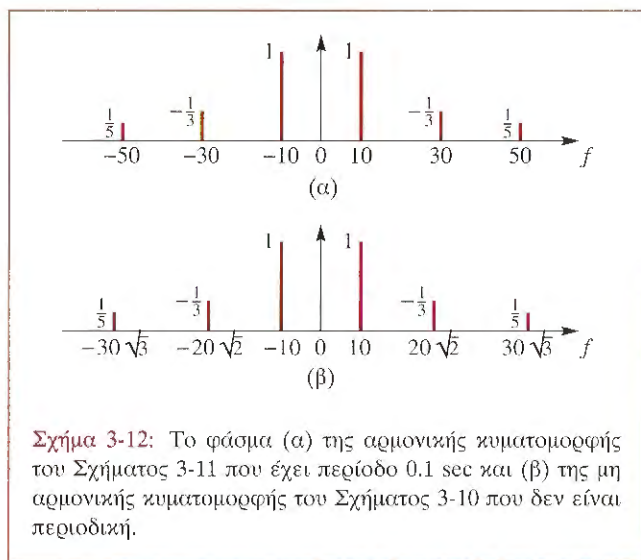
Τώρα δημιουργούμε ένα δεύτερο σήμα το οποίο αποτελεί μία μικρή παραλλαγή του πρώτου. Ορίζουμε το

³Θα συζητήσουμε για το φάσμα του τετραγωνικού κύματος αργότερα στην Ενότητα 3-6.1.

σήμα $x_2(t)$ ως το ακόλουθο άθροισμα τριών ημιτονοειδών:

$$x_2(t) = 2 \cos(20\pi t) - \frac{2}{3} \cos(20\pi\sqrt{8}t) + \frac{2}{5} \cos(20\pi\sqrt{27}t)$$

Τα πλάτη είναι ίδια, αλλά οι συχνότητες έχουν αλλάξει ελαφρώς. Η γραφική παράσταση του Σχήματος 3-10 δείχνει ότι το σήμα $x_2(t)$ δεν είναι περιοδικό. Οι φασματικές γραφικές παραστάσεις στο Σχήμα 3-12 μας βοηθούν στο να εντοπίσουμε και στη συνέχεια να εξηγήσουμε τις διαφορές μεταξύ των σημάτων στα Σχήματα 3-10 και 3-11. Στο Σχήμα 3-12(α) οι συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας κοινής συχνότητας $f_0 = 10$ Hz, οπότε η κυματομορφή του Σχήματος 3-11 είναι περιοδική με περίοδο $T_0 = 1/10$ sec. Η κυματομορφή του Σχήματος 3-10 είναι *μη περιοδική*. Αυτό μπορούμε να το εξακριβώσουμε στο “πεδίο της συχνότητας” εξετάζοντας το Σχήμα 3-12(β), το οποίο δείχνει ότι το φάσμα του σήματος του Σχήματος 3-10 δεν έχει μια θεμελιώδη συχνότητα, εφόσον οι συχνότητες δεν είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας κοινής συχνότητας. Αυτές οι γραφικές παραστάσεις *φάσματος* δείχνουν “πόσο πολύ” μετέχει κάθε συνημίτονο στο άθροισμα και μοιάζουν πολύ. Ωστόσο, οι συχνότητες διαφέρουν ελάχιστα:



$20\sqrt{2} = 28.28 \dots \approx 30$ και $30\sqrt{3} = 51.96 \dots \approx 50$. Αυτές οι μικρές ολισθήσεις της συχνότητας δημιουργούν μια δραματική διαφορά στην κυματομορφή στο πεδίο του χρόνου.

3-4 Σειρές Fourier

Τα παραδείγματα της Ενότητας 3-3 δείχνουν ότι μπορούμε να συνθέσουμε *περιοδικές* κυματομορφές με τη χρήση *αρμονικών* ημιτονοειδών κυμάτων. Τώρα, θέλουμε να περιγράψουμε μια γενική θεωρία η οποία δείχνει πως *κάθε* *περιοδικό* σήμα *μπορεί να προκύψει από το άθροισμα αρμονικά σχετιζόμενων ημιτονοειδών, αν και το άθροισμα μπορεί να χρειαστεί άπειρους όρους.* Αυτή είναι η θεωρία των *σειρών Fourier* που χρησιμοποιεί την ακόλουθη αναπαράσταση:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt} \quad (3.19)$$

όπου T_0 είναι η θεμελιώδης περίοδος του περιοδικού σήματος $x(t)$. Ο k -οστός μιγαδικός εκθετικός όρος

στη Σχέση (3.19) έχει συχνότητα ίση με $f_k = k/T_0$ Hz, οπότε όλες οι συχνότητες είναι *ακέραια* πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας $f_0 = 1/T_0$ Hz⁴.

Υπάρχουν δύο βασικές διαδικασίες στη θεωρία του Fourier: η διαδικασία της *ανάλυσης* και η διαδικασία της *σύνθεσης*. Αρχίζοντας από το σήμα $x(t)$ και υπολογίζοντας τους συντελεστές $\{a_k\}$ κάνουμε αυτό που ονομάζεται *ανάλυση Fourier*. Η αντίστροφη διαδικασία κατά την οποία αρχίζουμε από τους συντελεστές $\{a_k\}$ και δημιουργούμε το σήμα $x(t)$ ονομάζεται *σύνθεση Fourier*.

Ο τύπος της Σχέσης (3.19) αποτελεί το γενικό τύπο σύνθεσης. Όταν τα μιγαδικά πλάτη είναι *συζυγή-συμμετρικά*, δηλαδή όταν $a_{-k} = a_k^*$, ο τύπος σύνθεσης γίνεται ένα άθροισμα ημιτονοειδών κυμάτων της μορφής

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos((2\pi/T_0)kt + \phi_k) \quad (3.20)$$

όπου $A_0 = a_0$ και το πλάτος και η φάση του k -οστού όρου προέρχονται από την πολική αναπαράσταση, $a_k = \frac{1}{2}A_k e^{j\phi_k}$. Δηλαδή, η συνθήκη $a_{-k} = a_k^*$ είναι μια ικανή συνθήκη για τη σύνθεση *πραγματικών* περιοδικών σημάτων.

Με την έξυπνη επιλογή των μιγαδικών πλατών a_k της Σχέσης (3.19), μπορούμε να αναπαράσσουμε έναν αριθμό ενδιαφερόντων περιοδικών κυματομορφών, όπως τετραγωνικών κυματομορφών, τριγωνικών κυματομορφών κ.τ.λ.. Το γεγονός ότι μια *ασυνεχής* τετραγωνική κυματομορφή μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα *άπειρο* αριθμό ημιτονοειδών κυμάτων ήταν ένας από τους εκπληκτικούς ισχυρισμούς στην περιφρημη εργασία του Fourier το 1807. Πήρε πολλά χρόνια πριν οι μαθηματικοί καταφέρουν να βρουν μια αυστηρά τεκμηριωμένη απόδειξη που να πιστοποιεί τον ισχυρισμό του Fourier.

⁴Μπορούμε να αναφερόμαστε στη θεμελιώδη συχνότητα με τρεις διαφορετικούς τρόπους: γωνιακή συχνότητα ω_0 σε rad/sec, κυκλική συχνότητα f_0 σε Hz, ή με την περίοδο T_0 σε sec. Καθένας έχει τα πλεονεκτήματά του. Η σχέση που συνδέονται μεταξύ τους οι παραπάνω ποσότητες είναι $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$.

3-4.1 Σειρές Fourier: Ανάλυση

Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές του αρμονικού αθροίσματος της Σχέσης (3.19), δηλαδή, πώς μπορούμε να πάμε από το σήμα $x(t)$ στους συντελεστές a_k ; Η απάντηση είναι να χρησιμοποιήσουμε το **ολοκλήρωμα σειρών Fourier** για να εκτελέσουμε την ανάλυση Fourier. Τα μιγαδικά πλάτη για κάθε περιοδικό σήμα μπορούν να υπολογιστούν με το ολοκλήρωμα Fourier

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j(2\pi/T_0)kt} dt \quad (3.21)$$

όπου T_0 είναι η θεμελιώδης περίοδος του $x(t)$. Μια ειδική περίπτωση του ολοκληρώματος της Σχέσης (3.21) είναι αυτή της συνεχούς (DC) συνιστώσας που υπολογίζεται από τον τύπο

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt \quad (3.22)$$

Μια κοινή ερμηνεία του ολοκληρώματος (3.22) είναι ότι ο a_0 είναι απλώς η μέση τιμή του σήματος μέσα σε μια περίοδο.

Το ολοκλήρωμα Fourier της Σχέσης (3.21) είναι κατάλληλο αν έχουμε τη μαθηματική σχέση ορισμού του $x(t)$ για μια περίοδο. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε δύο παραδείγματα για να διευκρινιστεί αυτό το σημείο. Απ' την άλλη, αν η $x(t)$ είναι γνωστή μόνο ως μία εγγραφή, τότε θα χρειαστούμε αριθμητικές μεθόδους όπως αυτές που συζητούνται στο Κεφάλαιο 13.

3-4.2 Παραγωγή Σειρών Fourier

Σ' αυτή την παράγραφο, παρουσιάζουμε ένα τρόπο παραγωγής των ολοκληρωτικών σειρών Fourier (3.21). Όπως θα δούμε η παραγωγή τους βασίζεται σε μια απλή ιδιότητα του μιγαδικού εκθετικού σήματος σύμφωνα με την οποία το ολοκλήρωμα ενός μιγαδικού εκθετικού σήματος μέσα σ' ένα διάστημα που καλύπτει έναν ακέραιο αριθμό

περιοδών είναι μηδέν. Σε μορφή εξίσωσης,

$$\int_0^{T_0} e^{j(2\pi/T_0)kt} dt = 0 \quad (3.23)$$

όπου T_0 είναι η περίοδος του μιγαδικού εκθετικού του οποίου η συχνότητα είναι $\omega_k = (2\pi/T_0)k$ και k είναι ένας μη μηδενικός ακέραιος. Πράγματι ισχύει

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} e^{j(2\pi/T_0)kt} dt &= \left. \frac{e^{j(2\pi/T_0)kt}}{j(2\pi/T_0)k} \right|_0^{T_0} \\ &= \frac{e^{j(2\pi/T_0)kT_0} - 1}{j(2\pi/T_0)k} = 0 \end{aligned}$$

αφού ο αριθμητής είναι μηδέν διότι $e^{j2\pi k} = 1$ για κάθε ακέραιο k (θετικό ή αρνητικό). Αυτό μπορεί επίσης να αποδειχθεί με χρήση του τύπου του Euler χωρίζοντας το ολοκλήρωμα στο πραγματικό και το φανταστικό μέρος του και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας ξεχωριστά το συνημίτονο και το ημίτονο μέσα σε k πλήρεις περιόδους:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} e^{j(2\pi/T_0)kt} dt &= \int_0^{T_0} \cos((2\pi/T_0)kt) dt \\ &\quad + j \int_0^{T_0} \sin((2\pi/T_0)kt) dt = 0 \end{aligned}$$

Ένα σημείο κλειδί στην αναπαράσταση σειρών απείρων όρων της Σχέσης (3.19) είναι η μορφή των μιγαδικών εκθετικών, η οποία πρέπει να επαναλαμβάνεται με την ίδια περίοδο με αυτή του σήματος $x(t)$, η οποία είναι T_0 . Αν ορίσουμε $v_k(t)$ να είναι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα συχνότητας $\omega_k = (2\pi/T_0)k$, τότε

$$v_k(t) = e^{j(2\pi/T_0)kt} \quad (3.24)$$

Ακόμα και αν η περίοδος με τη μικρότερη διάρκεια της $v_k(t)$ είναι μικρότερη από την T_0 , οι ακόλουθοι τύποι

δείχνουν ότι η $v_k(t)$ επαναλαμβάνεται με περίοδο T_0 :

$$\begin{aligned} v_k(t + T_0) &= e^{j(2\pi/T_0)k(t+T_0)} \\ &= e^{j(2\pi/T_0)kt} e^{j(2\pi/T_0)kT_0} \\ &= e^{j(2\pi/T_0)kt} e^{j2\pi k} \\ &= e^{j(2\pi/T_0)kt} = v_k(t) \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ταυτότητα $e^{j2\pi k} = 1$ για κάθε ακέραιο k (θετικό ή αρνητικό).

Τώρα μπορούμε να γενικεύσουμε την ιδιότητα του μηδενικού ολοκληρώματος ενός μιγαδικού εκθετικού σήματος της Σχέσης (3.23) ώστε να περιέχει δυο σήματα⁵

Ιδιότητα Ορθογωνιότητας

$$\int_0^{T_0} v_k(t)v_\ell^*(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{αν } k \neq \ell \\ T_0 & \text{αν } k = \ell \end{cases} \quad (3.25)$$

όπου $v_\ell^*(t)$ είναι η συζυγής της μιγαδικής συνάρτησης $v_\ell(t)$.

Απόδειξη: Η απόδειξη της ιδιότητας της ορθογωνιότητας είναι πολύ απλή. Ξεκινάμε με

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} v_k(t)v_\ell^*(t) dt &= \int_0^{T_0} e^{j(2\pi/T_0)kt} e^{-j(2\pi/T_0)\ell t} dt \\ &= \int_0^{T_0} e^{j(2\pi/T_0)(k-\ell)t} dt \end{aligned}$$

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις για το τελευταίο ολοκλήρωμα : όταν $k = \ell$ ο εκθέτης γίνεται μηδέν, έτσι το ολοκλήρωμα

είναι

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} e^{j(2\pi/T_0)(k-\ell)t} dt &= \int_0^{T_0} e^{j0t} dt \\ &= \int_0^{T_0} 1 dt = T_0 \end{aligned}$$

Διαφορετικά, όταν $k \neq \ell$ ο εκθέτης είναι μη μηδενικός και μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα μηδενικού ολοκληρώματος της Σχέσης (3.23) και να πάρουμε

$$\int_0^{T_0} e^{j(2\pi/T_0)(k-\ell)t} dt = \int_0^{T_0} e^{j(2\pi/T_0)mt} dt = 0$$

όπου $m = k - \ell \neq 0$. ■

Η ιδιότητα της ορθογωνιότητας των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων της Σχέσης (3.25) απλοποιεί την παραγωγή των υπόλοιπων σειρών Fourier. Αν υποθέσουμε ότι η Σχέση (3.19) ισχύει δηλαδή,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$

τότε πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη με τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση $v_\ell^*(t)$ και ολοκληρώνοντας μέσα σε μία περίοδο T_0 , καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} x(t)e^{-j(2\pi/T_0)\ell t} dt &= \\ \int_0^{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt} \right) e^{-j(2\pi/T_0)\ell t} dt &= \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(\int_0^{T_0} e^{j(2\pi/T_0)(k-\ell)t} dt \right) &= a_\ell T_0 \end{aligned}$$

⁵Το ολοκλήρωμα της Σχέσης (3.25) ονομάζεται “εσωτερικό γινόμενο” των $v_k(t)$ και $v_\ell(t)$, μερικές φορές συμβολίζεται ως $(v_k(t), v_\ell(t))$.

Παρατηρήστε ότι μπορούμε να απομονώσουμε ένα από τα μιγαδικά πλάτη (a_k) στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνιότητας της Σχέσης (3.25).

Το κρίσιμο βήμα σ' όλα τα παραπάνω, είναι η αλλαγή της σειράς των τελεστών του αθροίσματος και του ολοκληρώματος. Αυτός είναι ένας λεπτός χειρισμός, ο οποίος εξαρτάται από τις ιδιότητες σύγκλισης της σειράς και αποτέλεσε το αντικείμενο έρευνας, που απασχόλησε τους μαθηματικούς, για αρκετό διάστημα στις αρχές του 19ου αιώνα. Για τους σκοπούς μας, αν υποθέσουμε ότι η $x(t)$ είναι μια ομαλή συνάρτηση και έχει μόνο ένα πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών μέσα σε μια περίοδο, τότε επιτρέπεται η παραπάνω εναλλαγή των τελεστών.

Η τελικός τύπος της ανάλυσης προκύπτει διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το T_0 . Εφόσον το ℓ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε ακέραια τιμή, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ℓ με το k και να πάρουμε τελικά

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Εξίσωση Ανάλυσης Fourier} \\ a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j(2\pi/T_0)kt} dt \end{array}} \quad (3.26)$$

όπου $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi f_0$ είναι η θεμελιώδης συχνότητα του περιοδικού σήματος $x(t)$.

Ο τύπος ανάλυσης συνάδει με τον τύπο σύνθεσης για τα περιοδικά σήματα, ο οποίος δεν είναι άλλος απ' αυτόν της Σχέσης (3.19),

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Εξίσωση Σύνθεσης Fourier} \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt} \end{array}} \quad (3.27)$$

3-5 Το Φάσμα των Σειρών Fourier

Όταν συζητήσαμε για το φάσμα στην Ενότητα 3-1, περιγράψαμε μια γραφική διαδικασία για το σχεδιασμό του, όταν το σήμα $x(t)$ αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών. Δυνάμει του τύπου της σύνθεσης

της Σχέσης (3.27), οι συντελεστές των σειρών Fourier a_k είναι, στην πραγματικότητα, τα μιγαδικά πλάτη που ορίζουν το φάσμα του σήματος $x(t)$. Για να διευκρινίσουμε αυτή τη γενική σύνδεση μεταξύ των σειρών Fourier και του φάσματος, χρησιμοποιούμε το σήμα $x(t) = \sin^3(3t)$. Πρώτα υπολογίζουμε τους συντελεστές a_k και στη συνέχεια σχεδιάζουμε το φάσμα του.



Παράδειγμα 3-7: Σειρές χωρίς Ολοκλήρωση

Προσδιορίστε τους συντελεστές της σειράς Fourier για το σήμα:

$$x(t) = \sin^3(3\pi t)$$

Λύση: Υπάρχουν δύο τρόποι για να βρούμε τους συντελεστές a_k : με αντικατάσταση του $x(t)$ στο ολοκλήρωμα Fourier της Σχέσης (3.26), ή χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο τύπο του Euler για να εκφράσουμε το $x(t)$ σε ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών. Είναι πολύ ευκολότερο να ακολουθήσουμε τον δεύτερο τρόπο. Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο τύπο του Euler για το $\sin(\cdot)$, παίρνουμε τον ακόλουθο τύπο για το σήμα:

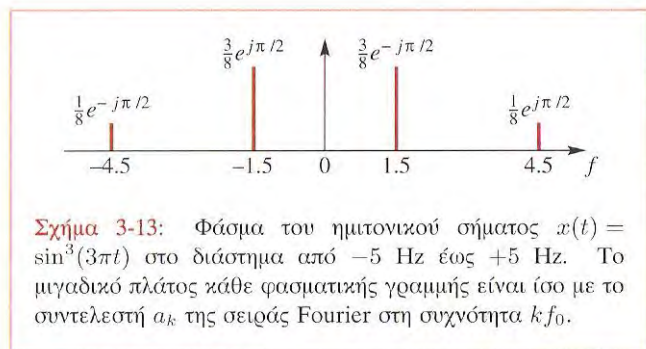
$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\frac{e^{j3\pi t} - e^{-j3\pi t}}{2j} \right)^3 \\ &= \frac{1}{-8j} (e^{j9\pi t} - 3e^{j6\pi t} e^{-j3\pi t} + 3e^{j3\pi t} e^{-j6\pi t} - e^{-j9\pi t}) \\ &= \frac{j}{8} e^{j9\pi t} + \frac{-3j}{8} e^{j3\pi t} + \frac{3j}{8} e^{-j3\pi t} + \frac{-j}{8} e^{-j9\pi t} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Παρατηρούμε ότι η Σχέση (3.28) περιέχει τέσσερις συχνότητες: $\omega = \pm 3\pi$ και $\omega = \pm 9\pi$ rad/s. Αφού $MK\Delta(3\pi, 9\pi) = 3\pi$, η θεμελιώδης συχνότητα είναι $\omega_0 = 3\pi$ rad/sec. Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι οι ακόλουθοι:

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{για } k = 0 \\ \mp j \frac{3}{8} & \text{για } k = \pm 1 \\ 0 & \text{για } k = \pm 2 \\ \pm j \frac{1}{8} & \text{για } k = \pm 3 \\ 0 & \text{για } k = \pm 4, \pm 5, \pm 6, \dots \end{cases} \quad (3.29)$$

Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $\{a_k\}$ δεν είναι πάντα απαραίτητο να υπολογίσουμε ολοκληρώματα. ■

Τώρα μπορούμε να σχεδιάσουμε το φάσμα (Σχήμα 3-13) αφού γνωρίζουμε ότι έχουμε τέσσερις μη μηδενικές συνιστώσες a_k τοποθετημένες στις τέσσερις συχνότητες: $\omega = \{-9\pi, -3\pi, 3\pi, 9\pi\}$ rad/sec. Επιλέγουμε, στην περίπτωση αυτή, να σχεδιάσουμε το φάσμα συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας, οπότε οι φασματικές γραμμές είναι στα $f = -4.5, -1.5, 1.5,$ και 4.5 Hz. Η δεύτερη αρμονική λείπει και η τρίτη αρμονική είναι στα 4.5 Hz.



Σχήμα 3-13: Φάσμα του ημιτονικού σήματος $x(t) = \sin^3(3\pi t)$ στο διάστημα από -5 Hz έως $+5$ Hz. Το μιγαδικό πλάτος κάθε φασματικής γραμμής είναι ίσο με το συντελεστή a_k της σειράς Fourier στη συχνότητα $k f_0$.

Άσκηση 3.4: Χρησιμοποιήστε το ολοκλήρωμα Fourier και προσδιορίστε τους συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος του προηγούμενου παραδείγματος. Δηλαδή, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^3(3\pi t) e^{-j(2\pi/T_0)kt} dt$$

για κάθε k . *Υποδείξεις:* Υπολογίστε πρώτα την περίοδο για να βρείτε το διάστημα ολοκλήρωσης. Επιπλέον, μπορείτε να το υπολογίσετε ευκολότερα αν εκφράσετε το σήμα $\sin^3(\cdot)$ σε εκθετική μορφή (εκφράζοντας το $\sin(\cdot)$ με τη βοήθεια του αντίστροφου τύπου του Euler). Αν, στη

συνέχεια, εφαρμόσετε την ιδιότητα της ορθογωνιότητας σε καθένα από τα ολοκληρώματα, θα πρέπει να βρείτε ακριβώς την ίδια απάντηση με αυτή της Σχέσης (3.29).

Άσκηση 3.5: Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος που ορίζεται από τη σχέση:

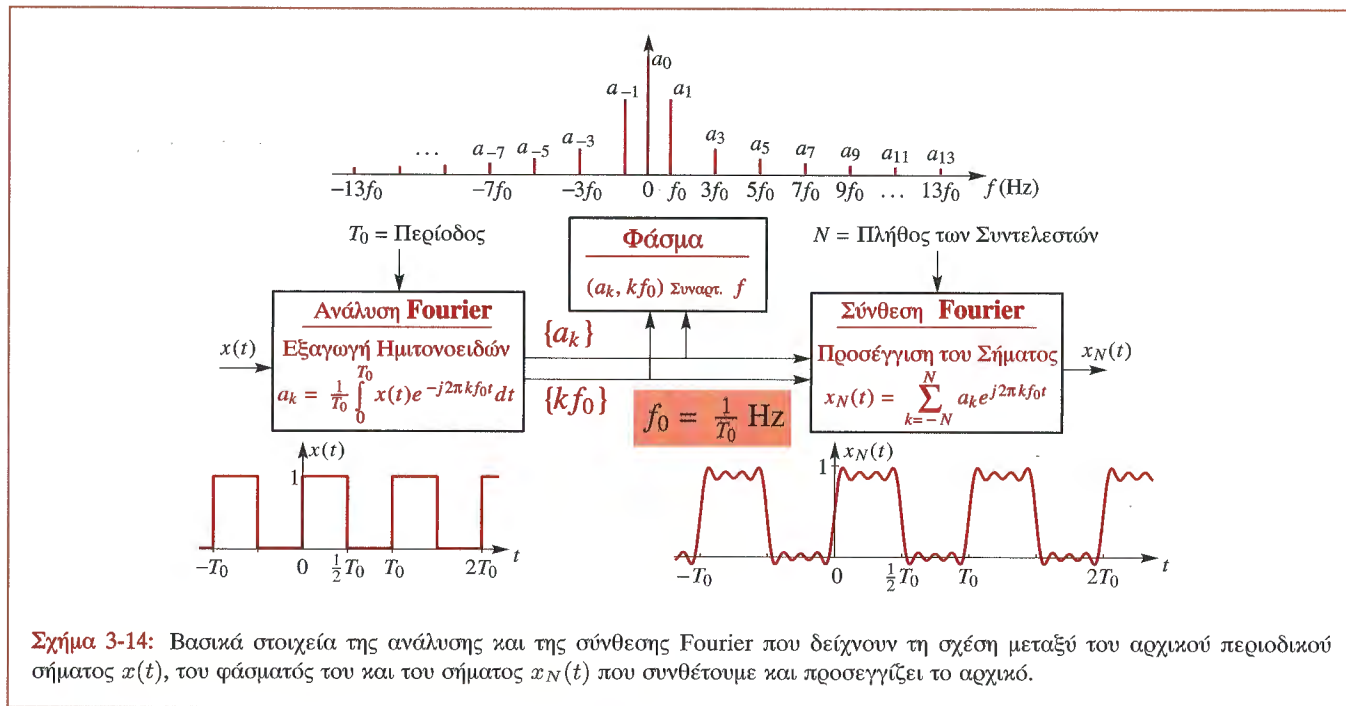
$$x(t) = \sum_{k=-3}^3 \frac{1}{1+jk} e^{jkt}$$

3-6 Ανάλυση Fourier Περιοδικών Σημάτων

Μπορούμε να συνθέσουμε κάθε περιοδικό σήμα χρησιμοποιώντας ένα άθροισμα ημιτονοειδών κυμάτων όπως αυτό της Σχέσης (3.27), με την προϋπόθεση ότι οι συχνότητες είναι αρμονικά συσχετισμένες. Για να αποδείξουμε ότι η σχέση σύνθεσης Fourier ισχύει και για τις κυματομορφές που δεν μοιάζουν καθόλου με τα ημιτονοειδή, σ' αυτήν την ενότητα θα εκτελέσουμε λεπτομερώς όλη την απαραίτητη διαδικασία για ένα τετραγωνικό και ένα τριγωνικό σήμα. Οι τύποι που προκύπτουν για τους συντελεστές Fourier a_k είναι σχετικά συμπαγείς. Το Σχήμα 3-14 δείχνει τη σχέση μεταξύ της ανάλυσης και της σύνθεσης Fourier χρησιμοποιώντας τις αντιπροσωπευτικές παραστάσεις για την περίπτωση του τετραγωνικού κύματος. Αν έχετε πρόσβαση στο υπολογιστικό περιβάλλον Matlab, είναι πολύ εύκολο να γράψετε ένα πρόγραμμα σύνθεσης Fourier το οποίο θα δέχεται μια λίστα συχνοτήτων και μια λίστα μιγαδικών πλατών και θα παράγει ένα σήμα ως το άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σύμφωνα με τον πεπερασμένο τύπο αθροίσματος σύνθεσης Fourier

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{j(2\pi/T_0)kt} \quad (3.30)$$

Αυτή η άσκηση προγραμματισμού στο Matlab περιγράφεται με περισσότερες λεπτομέρειες στην εργαστηριακή άσκηση μουσικής σύνθεσης.



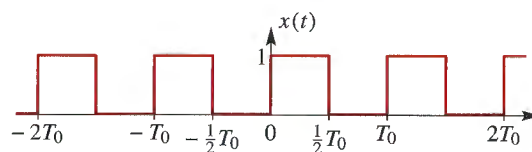
Εργ. Ασκ.: #4 Σύνθεση Ημιτονοειδών Σημάτων

3-6.1 Το Τετραγωνικό Κύμα

Το απλούστερο παράδειγμα είναι το περιοδικό τετραγωνικό κύμα, το οποίο ορίζεται για μια περίοδο από τη σχέση:

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 \leq t < \frac{1}{2}T_0 \\ 0 & \text{για } \frac{1}{2}T_0 \leq t \leq T_0 \end{cases} \quad (3.31)$$

Στο Σχήμα 3-15 φαίνεται η γραφική παράσταση αυτού του σήματος από την οποία παρατηρούμε ότι το σήμα είναι ίσο με μηδέν κατά τη διάρκεια της μισής περιόδου του (50% duty-cycle). Θα βρούμε τώρα τη σχέση από την οποία προκύπτουν τα μιγαδικά πλάτη a_k . Για το σκοπό αυτό, αντικαθιστούμε τον ορισμό του σήματος $x(t)$ στο



Σχήμα 3-15: Γραφική παράσταση ενός σήματος τετραγωνικού κύματος.

ολοκλήρωμα τη Σχέσης (3.26) και παίρνουμε:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{1}{2}T_0} (1) e^{-j(2\pi/T_0)kt} dt$$

Το πάνω όριο γίνεται $\frac{1}{2}T_0$, γιατί το σήμα $x(t)$ είναι μηδέν για $\frac{1}{2}T_0 \leq t \leq T_0$. Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε και απλοποιούμε:

$$\begin{aligned} a_k &= \left(\frac{1}{T_0} \right) \frac{e^{-j(2\pi/T_0)kt} \Big|_{\frac{1}{2}T_0}}{-j(2\pi/T_0)k} \\ &= \left(\frac{1}{T_0} \right) \frac{e^{-j(2\pi/T_0)k(\frac{1}{2}T_0)} - e^{-j(2\pi/T_0)k(0)}}{-j2\pi/T_0k} \\ &= \frac{e^{-j\pi k} - 1}{-j2\pi k} \end{aligned}$$

Αφού $e^{-j\pi} = -1$, μπορούμε να γράψουμε τον ακόλουθο τύπο για τους συντελεστές της σειράς Fourier του τετραγωνικού κύματος.

$$a_k = \frac{1 - (-1)^k}{j2\pi k}, \quad \text{για } k \neq 0$$

Υπάρχει μια ατέλεια στον παραπάνω τύπο για τα a_k . Δεν ισχύει για $k = 0$ αφού το k εμφανίζεται στον παρονομαστή. Επομένως, χρησιμοποιώντας τη Σχέση (3.22) υπολογίζουμε το a_0

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{1}{2}T_0} (1) e^{-j0t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{1}{2}T_0} (1) dt = \frac{1}{T_0} \left(\frac{1}{2}T_0 \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ο τύπος για τα a_k όταν το $k \neq 0$ έχει έναν αριθμητή που είναι ή μηδέν (για k άρτιο) ή 2 (για k περιττό), γιατί το $(-1)^k$ εναλλάσσεται μεταξύ των τιμών +1 και -1. Επομένως, η τελική απάντηση για τους συντελεστές της σειράς Fourier του τετραγωνικού κύματος είναι η

ακόλουθη:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{j\pi k} & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \\ 0 & k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \\ \frac{1}{2} & k = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Παρατηρήστε ότι ο τύπος για τα a_k δεν εξαρτάται από την περίοδο, T_0 , αν και αυτή δεν είναι η συνήθης περίπτωση. Επίσης, το μέτρο των συντελεστών μειώνεται καθώς το $k \rightarrow \infty$, οπότε οι υψηλ συχνοί όροι συνεισφέρουν λιγότερο όταν συνθέτουμε την κυματομορφή μέσω της Σχέσης (3.30).

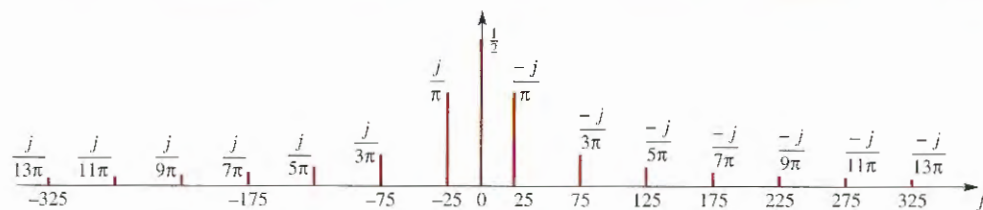
3-6.1.1 Η Τιμή του Σταθερού Συντελεστή

Ο συντελεστής της σειράς Fourier για $k = 0$ έχει μια ειδική ερμηνεία, αυτή της μέσης τιμής του σήματος $x(t)$. Αν επαναλάβουμε το ολοκλήρωμα ανάλυσης της Σχέσης (3.26) για την περίπτωση του $k = 0$, τότε έχουμε ότι:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt \quad (3.33)$$

Το ολοκλήρωμα είναι το εμβαδόν κάτω από τη συνάρτηση $x(t)$ στη διάρκεια μιας περιόδου. Αν σκεφτούμε το εμβαδόν ως ένα άθροισμα και συνειδητοποιήσουμε ότι διαιρώντας με το T_0 είναι το ίδιο με το να διαιρέσουμε με το πλήθος των όρων του αθροίσματος, μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη Σχέση (3.33) ως τη μέση τιμή του σήματος. Στην ειδική περίπτωση του 50% duty-cycle τετραγωνικού κύματος, η μέση τιμή είναι $\frac{1}{2}$ γιατί το σήμα είναι ίσο με +1 για το μισό της περιόδου και 0 στο άλλο μισό. Αυτό πιστοποιείται και με τον παραπάνω υπολογισμό ότι $a_0 = \frac{1}{2}$.

Στον τύπο σύνθεσης της Σχέσης (3.27), ο συντελεστής a_0 είναι μια προσθετική σταθερά, οπότε μια αλλαγή στην τιμή της θα μετακινήσει πάνω ή κάτω τη γραφική παράσταση του σήματος. Η συντομογραφία “DC” προέρχεται από τα ηλεκτρικά κυκλώματα, όπου μια σταθερή τιμή ρεύματος ονομάζεται συνεχές ρεύμα ή DC. Είναι σύνηθες να καλούμε το a_0 σταθερό συντελεστή, ή όρο DC. Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε ότι η συχνότητα του σταθερού συντελεστή είναι η $f = 0$.



Σχήμα 3-16: Φάσμα ενός τετραγωνικού κύματος παραγόμενο από τους συντελεστές της σειράς Fourier. Η γραφική παράσταση περιορίζεται στο διάστημα από $k = -13$ έως $+13$. Με θεμελιώδη συχνότητα 25 Hz, το παραπάνω διάστημα αντιστοιχεί σε συχνότητες από -325 Hz έως +325 Hz.

3-6.2 Το Φάσμα ενός Τετραγωνικού Κύματος

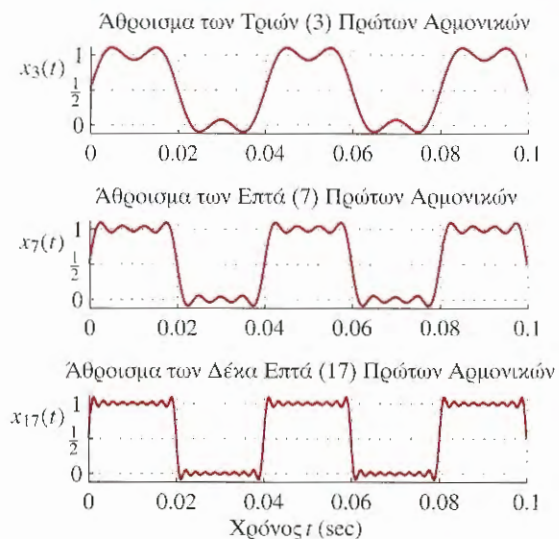
Το Σχήμα 3-16 δείχνει το φάσμα του τετραγωνικού κύματος με 50% duty cycle που αναλύθηκε στη Σχέση (3.32) όταν η θεμελιώδης συχνότητα είναι 25 Hz. Αφού $a_k = 0$ για όλα τα άρτια k , εκτός του μηδενός, οι μόνες συχνότητες που εμφανίζονται στο φάσμα είναι οι περιττές αρμονικές στα $\pm 25, \pm 75, \pm 125$ κ.λ.π.. Τα μιγαδικά πλάτη των περιττών αρμονικών είναι οι συντελεστές $a_k = -j/(\pi k)$ της σειράς Fourier και χρησιμοποιούνται σαν επιγραφές στις φασματικές γραμμές του Σχήματος 3-16. Το σχήμα δείχνει επίσης ότι το μέτρο αυτών των συντελεστών φθίνει με ρυθμό ανάλογο του $1/k$.



Επίδειξη: Φασματογραφήματα Απλών Ήχων

3-6.3 Σύνθεση Ενός Τετραγωνικού Κύματος

Χρησιμοποιώντας ένα απλό αρχείο-m του Matlab κάναμε σύνθεση μέσω της Σχέσης (3.17) με μια θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 25$ Hz και $f_k = kf_0$. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T_0 = 1/25 = 0.04$ secs. Στο Σχήμα 3-17, οι γραφικές παραστάσεις δείχνουν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις, στις οποίες ο αριθμός των όρων του αθροίσματος είναι $N = 3, 7$ και 17 αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι η περίοδος της κυματομορφής που συνθέτουμε είναι πάντα η ίδια, γιατί αυτή καθορίζεται από τη θεμελιώδη συχνότητα.



Σχήμα 3-17: Αθροίζοντας αρμονικές συνιστώσες με τη βοήθεια της Σχέσης (3.30): $N = 3$ (πάνω); $N = 7$ (μέση) και $N = 17$ (κάτω). Η τιμή του σταθερού συντελεστή $\frac{1}{2}$ περιλαμβάνεται σε όλες τις παραστάσεις.

Ο τύπος σύνθεσης της Σχέσης (3.30) συνήθως μπορεί να απλοποιηθεί σε μια συνημιτονική μορφή. Για την ειδική

$$\begin{aligned}
 x_3(t) &= a_{-3}e^{-j3\omega_0 t} + a_{-1}e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1e^{j\omega_0 t} + a_3e^{j3\omega_0 t} \\
 &= \frac{1}{-j3\pi}e^{-j3\omega_0 t} + \frac{1}{-j\pi}e^{-j\omega_0 t} + a_0 + \frac{1}{j\pi}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{j3\pi}e^{j3\omega_0 t} \\
 &= a_0 + \frac{1}{\pi}(e^{-j\pi/2}e^{j\omega_0 t} + e^{j\pi/2}e^{-j\omega_0 t}) + \frac{1}{3\pi}(e^{-j\pi/2}e^{j3\omega_0 t} + e^{j\pi/2}e^{-j3\omega_0 t}) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\omega_0 t - \pi/2) + \frac{2}{3\pi} \cos(3\omega_0 t - \pi/2)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

περίπτωση των συντελεστών του τετραγωνικού κύματος της Σχέσης (3.32), όταν παίρνουμε το άθροισμα του σταθερού συντελεστή της πρώτης και της τρίτης αρμονικής, παίρνουμε το άθροισμα δύο συνημιτόνων και το σταθερό συντελεστή που δίνεται στην Εξίσωση (3.34). Όσο περισσότεροι αρμονικοί όροι προστίθενται, ένα σήμα τετραγωνικού κύματος θα μπορούσε να προσεγγιστεί καλύτερα απ' αυτό το άθροισμα συνημιτόνων. Ωστόσο, παρατηρήστε τι συμβαίνει στο Σχήμα 3-17 καθώς αυξάνεται το N . Το συνημιτονικό άθροισμα φαίνεται να συγκλίνει στις σταθερές τιμές $+1$ και 0 , αλλά η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη. Για το λόγο αυτό οι “υπερακοντισμοί” στις ασυνέχειες ποτέ δεν εξαλείφονται εντελώς. Αυτή η συμπεριφορά, που συμβαίνει σε κάθε ασυνέχεια μιας κυματομορφής ονομάζεται *φαινόμενο Gibbs* και είναι μια από τις ενδιαφέρουσες λεπτομέρειες της θεωρίας Fourier που μελετάται εκτενώς σε βιβλία με προχωρημένα θέματα της επεξεργασίας σημάτων.



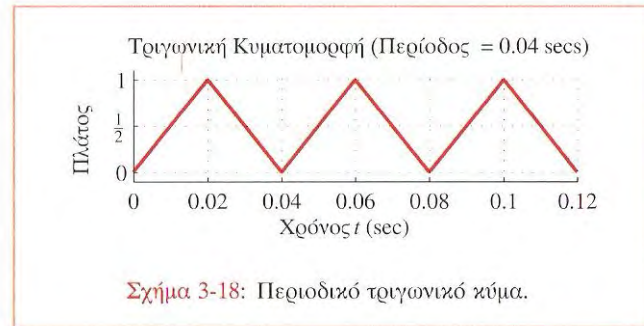
Εργ. Ασκ.: #4 Σύθεση Ημιτονοειδών Σημάτων



Επίδειξη: Σειρές Fourier

3-6.4 Τριγωνικό Κύμα

Άλλη μια ενδιαφέρουσα περίπτωση που είναι σχετικά απλή, είναι αυτή του τριγωνικού κύματος που φαίνεται στο Σχήμα 3-18. Η σχέση ορισμού του τριγωνικού σήματος αποτελείται από δύο κλάδους. Πρέπει να δώσουμε τον



Σχήμα 3-18: Περιοδικό τριγωνικό κύμα.

ορισμό της κυματομορφής ακριβώς μέσα σε μια περίοδο και επιλέγουμε να το κάνουμε για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq T_0$:

$$x(t) = \begin{cases} 2t/T_0 & \text{για } 0 \leq t < \frac{1}{2}T_0 \\ 2(T_0 - t)/T_0 & \text{για } \frac{1}{2}T_0 \leq t < T_0 \end{cases} \tag{3.35}$$

όπου $T_0 = 0.04$ sec στο Σχήμα 3-18. Σε αντίθεση με το τετραγωνικό, το τριγωνικό κύμα είναι ένα συνεχές σήμα.

Τώρα χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα Fourier θα υπολογίσουμε τους συντελεστές $\{a_k\}$ του τριγωνικού κύματος αρχίζοντας από το σταθερό συντελεστή. Εφαρμόζοντας τον ορισμό για $k = 0$ παίρνουμε:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$$

Αν αναγνωρίσουμε ότι το ολοκλήρωμα μέσα σε μια περίοδο

είναι στην πραγματικότητα, το εβδαδόν του τριγώνου, παίρνουμε:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}(\text{εμβαδόν}) = \frac{1}{T_0}(T_0)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad (3.36)$$

Για την περίπτωση $k \neq 0$, πρέπει να διασπάσουμε το ολοκλήρωμα ανάλυσης της σειράς Fourier σε δυο τμήματα αφού το σήμα, όπως είπαμε, περιγράφεται από δύο κλάδους:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{1}{2}T_0} (2t/T_0)e^{-j(2\pi/T_0)kt} dt + \frac{1}{T_0} \int_{\frac{1}{2}T_0}^{T_0} (2(T_0 - t)/T_0)e^{-j(2\pi/T_0)kt} dt \quad (3.37)$$

Μετά την ολοκλήρωση και αρκετές αλγεβρικές πράξεις, το ολοκλήρωμα για τους συντελεστές a_k γράφεται ως ακολούθως:

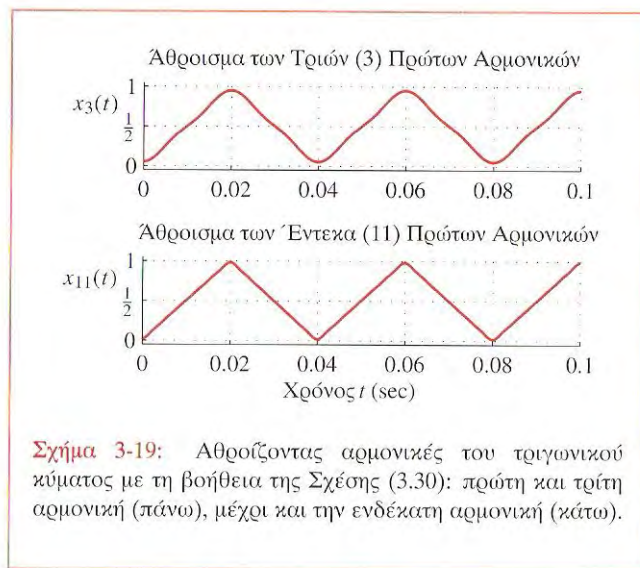
$$a_k = \frac{e^{-jk\pi} - 1}{\pi^2 k^2} \quad (3.38)$$

Αφού $e^{-jk\pi} = (-1)^k$, ο αριθμητής της Σχέσης (3.38) ισούται είτε με 0 είτε με -2 και επομένως καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$a_k = \begin{cases} \frac{-2}{\pi^2 k^2} & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \\ 0 & k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \\ \frac{1}{2} & k = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Για μια ακόμα φορά, η σχέση από την οποία δίνονται οι συντελεστές είναι ανεξάρτητη του T_0 , τη θεμελιώδη συχνότητα του τριγωνικού σήματος.

Άσκηση 3.6: Ξεκινώντας από τη Σχέση (3.37), να καταλήξετε στον τύπο της Σχέσης (3.39) για τους συντελεστές της σειράς Fourier του τριγωνικού κύματος.



Σχήμα 3-19: Αθροίζοντας αρμονικές του τριγωνικού κύματος με τη βοήθεια της Σχέσης (3.30): πρώτη και τρίτη αρμονική (πάνω), μέχρι και την ενδέκατη αρμονική (κάτω).

Χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες, ώστε να δημιουργήσετε ολοκληρώματα που να περιέχουν όρους της μορφής $te^{-j(2\pi/T_0)kt}$.




Άσκηση 3.7:

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του φάσματος του τριγωνικού κύματος (όπως αυτή του Σχήματος 3-16 του τετραγωνικού κύματος). Χρησιμοποιήστε τα μιγαδικά πλάτη από τη Σχέση (3.39) και θεωρήστε ότι $f_0 = 25$ Hz.

3-6.5 Σύνθεση Τριγωνικού Σήματος

Το ιδανικό τριγωνικό κύμα του Σχήματος 3-18 είναι ένα συνεχές σήμα, σε αντίθεση με το τετραγωνικό κύμα που όπως είδαμε είναι ασυνεχές. Συνεπώς, είναι ευκολότερο να προσεγγίσουμε το τριγωνικό κύμα με ένα πεπερασμένο άθροισμα Fourier όπως αυτό της Σχέσης (3.30). Στο Σχήμα 3-19 φαίνονται δύο περιπτώσεις τριγωνικών σημάτων, για $N = 3$ και $N = 11$ αντίστοιχα. Η θεμελιώδης συχνότητα είναι ίση με $f_0 = 25$ Hz. Στην περίπτωση του $N = 11$,

η προσέγγιση σχεδόν ταυτίζεται με τη μορφή του ιδανικού τριγωνικού κύματος. Προσθέτοντας αρμονικές για $N > 11$ δεν θα βελτιώσουμε πολύ τη σύνθεση. Ακόμα και στην περίπτωση του $N = 3$ η προσέγγιση είναι ικανοποιητικά καλή παρόλο που χρησιμοποιήσουμε μόνο το σταθερό συντελεστή και δυο ημιτονοειδείς όρους. Μπορούμε να δούμε το λόγο που συμβαίνει αυτό, σχεδιάζοντας το φάσμα (όπως στην Άσκηση 3.7), που δείχνει ότι οι υψηλής συχνότητας συνιστώσες μειώνονται σε μέγεθος πολύ γρηγορότερα από τις αντίστοιχες του τετραγωνικού κύματος.

 **Άσκηση 3.8:** Για την περίπτωση της προσέγγισης του τριγωνικού κύματος με $N = 3$ και ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία μ' αυτήν της Άσκησης (3.34), βρείτε τα ημιτονοειδή.

3-6.6 Σύγκλιση της Σχέσης Σύνθεσης Fourier

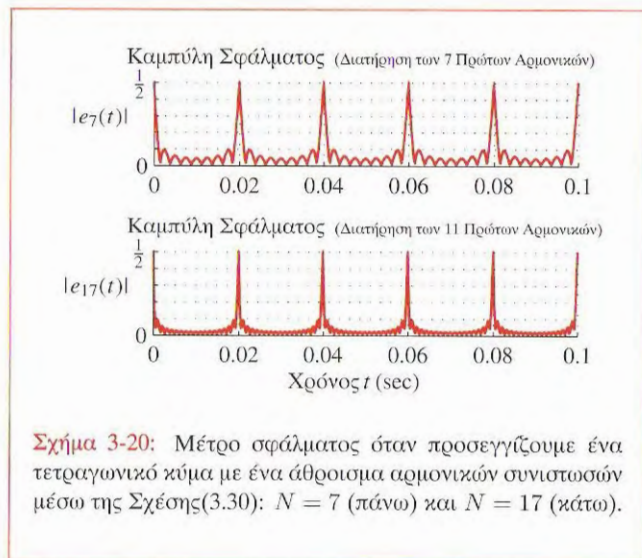
Μπορούμε να σκεφτούμε το πεπερασμένο άθροισμα Fourier της Σχέσης (3.30) σαν ένα είδος προσέγγισης του πραγματικού σήματος, δηλαδή:

$$x(t) \approx x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$

Πραγματικά, μπορούμε να ελπίζουμε ότι με αρκετές μιγαδικές εκθετικές θα κάνουμε την προσέγγιση τέλεια. Αυτό μας οδηγεί να ορίσουμε ένα σήμα σφάλματος, $e_N(t)$, ως τη διαφορά μεταξύ του πραγματικού σήματος και της σύνθεσης με N όρους, δηλαδή $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$. Μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε το παραπάνω σφάλμα μετρώντας ένα χαρακτηριστικό του, όπως για παράδειγμα είναι η μέγιστη τιμή του. Αυτό ονομάζεται *σφάλμα χειρότερης περίπτωσης*, και ορίζεται ως ακολούθως:

$$E_{\text{worst}} = \max_{t \in [0, T_0]} |x(t) - x_N(t)| \quad (3.40)$$

Τώρα μπορούμε να συγκρίνουμε τις προσεγγίσεις



του τριγωνικού κύματος για $N = 3$ και για $N = 11$, συγκρίνοντας τα σφάλματά χειρότερης περίπτωσης. Αν μεγενθύνουμε το Σχήμα 3-19, αυτά τα λάθη μπορούν να μετρηθούν και τα αποτελέσματα είναι 0.0497 για $N = 3$ και 0.0168 για $N = 11$ αντίστοιχα. Επειδή το τριγωνικό κύμα είναι συνεχές, το μέγιστο σφάλμα τείνει στο μηδέν όταν το $N \rightarrow \infty$ (δηλαδή, δεν υπάρχει φαινόμενο Gibbs). Αυτό δεν συμβαίνει, όπως είδαμε, στην περίπτωση του τετραγωνικού κύματος, όπου το μέγιστο σφάλμα είναι πάντα ίσο με το μισό του μεγέθους της ασυνέχειας της κυματομορφής και με μια *υπερακόντιση* περίπου 9% του μεγέθους της ασυνέχειας και στις δύο πλευρές. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 3-20 για $N = 7$ και $N = 17$. Το Σχήμα 3-20 δημιουργήθηκε χρησιμοποιώντας τους συντελεστές Fourier της Σχέσης (3.32) σε ένα πρόγραμμα του Matlab για να δημιουργήσουμε τη γραφική παράσταση για το σφάλμα χειρότερης περίπτωσης.

3-7 Θεώρημα Parseval

Ένας από τους λόγους που οι σειρές Fourier είναι τόσο χρήσιμες, είναι ότι υπάρχει μια ισοδυναμία ανάμεσα στο

τετράγωνο των συντελεστών Fourier και της ισχύος του σήματος. Η μέση ισχύς ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ είναι η συνολική ενέργεια μιας περιόδου του $x(t)$ διαιρεμένη με τη διάρκεια της περιόδου.

$$E = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt. \quad (3.41)$$

Η μέση ισχύς αποτελεί ένα κατάλληλο μέτρο του μεγέθους (ή της δύναμης) του σήματος.



Παράδειγμα 3-8: Μέση Ισχύς Ημιτονοειδούς

Για την περίπτωση που $x(t) = A \cos((2\pi/T_0)t + \phi)$, το ολοκλήρωμα μέσης ισχύος

$$E = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |A \cos(2\pi t/T_0 + \phi)|^2 dt$$

μπορεί να υπολογιστεί άμεσα.

Αν και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια τριγωνομετρική ταυτότητα, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Euler και την ταυτότητα $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\Re\{zw^*\} + |w|^2$. Έχουμε επομένως,

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left| \frac{1}{2} A e^{j((2\pi/T_0)t + \phi)} + \frac{1}{2} A e^{-j((2\pi/T_0)t + \phi)} \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} 2\Re \left\{ \frac{1}{2} A e^{j((2\pi/T_0)t + \phi)} \frac{1}{2} A e^{j((2\pi/T_0)t + \phi)} \right\} dt \\ &\quad + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} 2 \left| \frac{1}{2} A \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{1}{4} A^2 + 2\Re \left\{ \frac{1}{4} A^2 e^{j((4\pi/T_0)t + 2\phi)} \right\} + \frac{1}{4} A^2 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T_0} \frac{1}{2} A^2 T_0 + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{1}{2} A^2 \cos((4\pi/T_0)t + 2\phi) dt \\ &= \frac{1}{2} A^2 \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι το ολοκλήρωμα του συνημιτόνου είναι μηδέν. ■

Το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 3-8 μπορεί να συσχετιστεί με τους συντελεστές της σειράς Fourier αν παρατηρήσουμε ότι ο τύπος του Euler είναι, στην πραγματικότητα, η σειρά Fourier του ημιτονοειδούς.

$$A \cos(2\pi t/T_0 + \phi) = \frac{1}{2} A e^{j\phi} e^{j2\pi t/T_0} + \frac{1}{2} A e^{-j\phi} e^{-j2\pi t/T_0} \quad (3.42)$$

Η σειρά Fourier έχει μόνο δύο μη μηδενικούς συντελεστές, a_1 και a_{-1} , οπότε ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της μέσης ισχύος είναι ο ακόλουθος:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = \left| \frac{1}{2} A e^{j\phi} \right|^2 + \left| \frac{1}{2} A e^{-j\phi} \right|^2 = \frac{1}{2} A^2 \quad (3.43)$$

Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται για την περίπτωση που η σειρά Fourier έχει παραπάνω από δύο συντελεστές. Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος χρησιμοποιεί την ιδιότητα της ορθογωνιότητας των μιγαδικών εκθετικών σημάτων. Το γενικευμένο αποτέλεσμα, γνωστό ως Θεώρημα του Parseval είναι το ακόλουθο

Θεώρημα του Parseval

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \quad (3.44)$$



Άσκηση 3.9: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Parseval για να αποδείξετε τον περίφημο τύπο:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

και προσδιορίστε την τιμή του ακεραίου M .

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τετραγωνικό παλμό και τους συντελεστές της σειράς Fourier (εκτός του σταθερού συντελεστή).

3-8 Η Φύση της Προσέγγισης των Σειρών Fourier

Μια συνέπεια του Θεωρήματος του Parseval είναι ότι μπορούμε να εκτιμήσουμε το σφάλμα προσέγγισης όταν κρατάμε τους όρους $|k| \leq N$ της σειράς Fourier. Ας αρχίσουμε από ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ και ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τους συντελεστές, a_k , της σειράς Fourier. Τότε το Θεώρημα του Parseval μας λέει ότι κάθε συντελεστής συνεισφέρει στη συνολική ισχύ του σήματος. Επομένως, η διαφορά στην ισχύ του πραγματικού σήματος και της $(2N + 1)$ όρων προσέγγισης του θα είναι:

$$E_N = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}|^2 dt \quad (3.45)$$

$$= \sum_{|k|=N+1}^{\infty} |a_k|^2 \quad (3.46)$$



Παράδειγμα 3-9: Μέση Ισχύς Σήματος

Δείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των μέτρων των συντελεστών (Σχέση (3.32)) της σειράς Fourier του τετραγωνικού σήματος της Σχέσης (3.31), συγκλίνει στη μέση ισχύ του.

Λύση: Η μέση ισχύς του τετραγωνικού σήματος της Σχέσης 3.32 είναι

$$E = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{1}{2}T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} (1)^2 \frac{1}{2} T_0 = \frac{1}{2}$$

Από την άλλη μεριά, οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι $a_0 = \frac{1}{2}$ και

$$a_k = \frac{1}{j\pi k} \quad k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

Ας αρχίσουμε τώρα να αθροίζουμε διαδοχικά τα τετράγωνα των μέτρων των συντελεστών για $k = \pm 1$, στη συνέχεια $k = \pm 3$, $k = \pm 5$, κ.ο.κ. .

$$\sum_{k=-1}^1 |a_k|^2 = |a_0|^2 + |a_{-1}|^2 + |a_1|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}$$

το οποίο ισούται ≈ 0.4526 .

Τώρα χρησιμοποιώντας και του συντελεστές για $k = \pm 3$:

$$\sum_{k=-3}^3 |a_k|^2 = |a_0|^2 + |a_{-1}|^2 + |a_1|^2 + |a_{-3}|^2 + |a_3|^2 = \frac{1}{4} + \frac{20}{9\pi^2}$$

το οποίο ισούται ≈ 0.4752 .

Χρησιμοποιώντας και τους συντελεστές για $k = \pm 5$:

$$\sum_{k=-5}^5 |a_k|^2 = \frac{1}{4} + \frac{20}{9\pi^2} + \frac{1}{25\pi^2} + \frac{1}{25\pi^2}$$

το οποίο ισούται ≈ 0.4833 .

Το Σχήμα 3-21 δείχνει ότι η μέση ισχύς συγκλίνει στην τελική τιμή της 0.5. Συγκεκριμένα, με τη συνεισφορά της πρώτης και της τρίτης αρμονικής απέχει μόλις 5% από την τελική της τιμή και μόλις 2% αν αθροίσουμε τους συντελεστές μέχρι και το $|k| = 11$. ■

3-8.1 Σύγκλιση Σειρών Fourier

Το άθροισμα απείρων όρων της Σχέσης (3.27) πραγματικά σημαίνει ότι υπάρχει μια οριακή διαδικασία η οποία εξασφαλίζει την ισότητα των μελών της Σχέσης (3.27). Υπάρχουν δύο δυνατότητες για τη σύγκλιση σ' αυτό το όριο:

1. Εκλαμβάνουμε το όριο στη Σχέση (3.47) ως σημείο προς σημείο σύγκλιση για κάθε τιμή του t

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N a_k e^{j(2\pi k/T_0)t} \quad (3.47)$$

αυτή η προσέγγιση παρουσιάζει μια δυσκολία όταν το σήμα $x(t)$ έχει σημεία ασυνέχειας, όπως στο παράδειγμα του τετραγωνικού παλμού.

2. Ένας καλύτερος τρόπος ορισμού της οριακής διαδικασίας είναι να χρησιμοποιήσουμε αυτό που ονομάζουμε τετραγωνικό σφάλμα.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{T_0} \left| x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{j(2\pi k/T_0)t} \right|^2 dt \rightarrow 0 \quad (3.48)$$

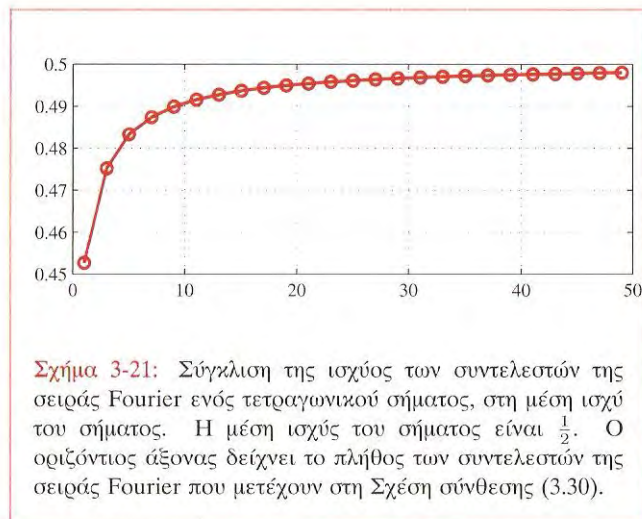
Στον παραπάνω ορισμό, το σφάλμα είναι η αθροιστική διαφορά ανάμεσα στο αριστερό και δεξί μέλος της Σχέσης (3.27) και η διαφορά αυτή γίνεται μικρή όταν η *συνολική ισχύς του σφάλματος σε μία περίοδο τείνει στο μηδέν*. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3-21, το Θεώρημα του Parseval εγκυιάται ότι η ισχύς του σφάλματος θα είναι μικρή όταν το σήμα έχει πεπερασμένη μέση ισχύ.

Η προς ολοκλήρωση ποσότητα στη Σχέση (3.48) θα πρέπει να αναφέρεται σαν σφάλμα προσέγγισης όταν χρησιμοποιείται ένας πεπερασμένος αριθμός συντελεστών της σειράς Fourier για την αναπαράσταση του σήματος $x(t)$. Αν ορίσουμε ως $x_N(t)$ το σήμα που προκύπτει από το άθροισμα ενός πεπερασμένου αριθμού μιγαδικών εκθετικών σημάτων:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{j(2\pi k/T_0)t}$$

τότε το συνολικό σφάλμα είναι $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$.

Το καλύτερο παράδειγμα για τη σύγκλιση κάτω από τις δύο προαναφερθείσες προσεγγίσεις αποτελεί ο



Σχήμα 3-21: Σύγκλιση της ισχύος των συντελεστών της σειράς Fourier ενός τετραγωνικού σήματος, στη μέση ισχύ του σήματος. Η μέση ισχύς του σήματος είναι $\frac{1}{2}$. Ο οριζόντιος άξονας δείχνει το πλήθος των συντελεστών της σειράς Fourier που μετέχουν στη Σχέση σύνθεσης (3.30).

τετραγωνικός παλμός ο οποίος παρουσιάζει, μέσα σε κάθε περίοδο, δύο ασυνέχειες. Το Σχήμα 3-17 μας επιτρέπει να συγκρίνουμε το σήμα $x(t)$ και $x_N(t)$ για διαφορετικές τιμές του N . Καθώς το N αυξάνει, το σήμα $x_N(t)$ εμφανίζει ταλαντώσεις υψηλότερης συχνότητας στα σημεία ασυνέχειας, αλλά συγχρόνως συγκλίνει στο σήμα $x(t)$ για όλες τις άλλες χρονικές στιγμές. Από την άλλη μεριά, όταν εστιάσουμε την προσοχή μας κοντά στις περιοχές που υπάρχουν τα σημεία ασυνέχειας ($t = 0, 0.02, 0.04, 0.06, \dots$), παρατηρούμε ότι το μέγεθος της τελευταίας ταλάντωσης δεν μειώνεται. Αυτός ο “υπερακοντισμός” αναφέρεται σαν Φαινόμενο του Gibbs, μετά τον J. Gibbs ο οποίος πρώτος απέδειξε ότι το μέγεθος του υπερακοντισμού δεν μειώνεται με το N και στην πραγματικότητα πάντα ισούται περίπου με το 9% του μεγέθους της ασυνέχειας του τετραγωνικού παλμού. Επίσης παρατηρούμε ότι το σήμα $x_N(t)$ στα σημεία ασυνέχειας είναι πάντα ίσο με 0.5, αλλά η τιμή του σήματος $x(t)$ στα σημεία αυτά είναι αόριστη (θα μπορούσε να είναι +1 ή 0).

Αυτές οι δύο παρατηρήσεις εξηγούν γιατί δεν μπορεί να επιτευχθεί η σύγκλιση σημείου προς σημείο των σειρών

Fourier. Ωστόσο, μπορούμε να παρατηρήσουμε στο Σχήμα 3-17 ότι η υπερακόντιση γίνεται στενότερη αν και η μέγιστη τιμή της παραμένει η ίδια. Συνεπώς η ισχύς στο σημείο υπερακόντισης μειώνεται, δηλαδή υπάρχει σύγκλιση με την έννοια του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, η οποία επιβεβαιώνεται στο Σχήμα 3-21.

3-9 Χρονο-Συχνοτικό Φάσμα

Είδαμε ότι πολλές ενδιαφέρουσες κυματομορφές μπορούν να προκύψουν από τη σχέση σύνθεσης:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k) \quad (3.49)$$

Οι κυματομορφές αυτές ποικίλουν από σταθερές,

Σχήμα 3-22: Το πεντάγραμμο είναι ένα χρονο-συχνοτικό διάγραμμα.

συνημιτονικά σήματα, γενικά περιοδικά σήματα και μη περιοδικά σήματα. Μια υπόθεση που κάναμε είναι ότι τα πλάτη, οι φάσεις και οι συχνότητες στη Σχέση (3.49) δεν αλλάζουν με το χρόνο. Ωστόσο, τα περισσότερα σήματα που συναντάμε στο πραγματικό κόσμο αλλάζουν με το χρόνο. Η μουσική αποτελεί το καλύτερο παράδειγμα. Για μικρής διάρκειας χρονικά διαστήματα, η μουσική μπορεί να έχει ένα “σταθερό” φάσμα, όμως στη διάρκεια μεγάλων χρονικών διαστημάτων, το συχνοτικό περιεχόμενο της μουσικής αλλάζει σημαντικά. Πράγματι, το μεταβαλλόμενο συχνοτικά φάσμα αποτελεί την ουσία της μουσικής. Ο

ανθρώπινος λόγος αποτελεί ένα άλλο καλό παράδειγμα. Τα φωνήεντα, παρουσιάζουν μία “σταθερή” συμπεριφορά γιατί αν τα εκφέρουμε για μακρύ χρονικό διάστημα, η στοματική κοιλότητα δρα σαν αντηχείο με σταθερές χαρακτηριστικές συχνότητες. Ωστόσο, καθώς προφέρουμε διαφορετικές λέξεις, το συχνοτικό περιεχόμενο αλλάζει συνεχώς. Σε κάθε περίπτωση, τα πιο ενδιαφέροντα σήματα μπορούν να μοντελοποιηθούν από ένα άθροισμα συνημιτονοειδών, αν επιτρέψουμε να μεταβάλλονται με το χρόνο οι συχνότητες, τα πλάτη και οι φάσεις. Επομένως, χρειαζόμαστε ένα τρόπο να περιγράψουμε τέτοιες χρονο-συχνοτικές μεταβολές. Αυτό μας οδηγεί στην έννοια του χρονο-συχνοτικού φάσματος ή *φασματογραφήματος*.

Σχήμα 3-23: Τα πλήκτρα του πιάνου μπορούν να αριθμηθούν από το 1 έως το 88. Στο σχήμα φαίνονται τρεις (3) οκτάβες. Το μεσαίο C είναι το 40-οστό πλήκτρο. Η συχνότητα A-440 αντιστοιχεί στο πλήκτρο 49.

Αν και ο μαθηματικός ορισμός του χρονο-συχνοτικού φάσματος είναι πολύ σοφιστικέ, διαισθητικά η έννοια ενός τέτοιου φάσματος αποτελεί ένα καθημερινό παράδειγμα. Το καλύτερο παράδειγμα είναι το μουσικό πεντάγραμμο (Σχήμα 3-22). Μια μουσική παρτιτούρα προδιαγράφει πως θα παιχτεί ένα κομμάτι δίνοντας τις νότες προς εκτέλεση, τη χρονική διάρκεια κάθε νότας και το χρόνο έναρξης κάθε μιας. Η σημειολογία δεν είναι τόσο προφανής, αφού ο οριζόντιος άξονας στο Σχήμα 3-22 είναι ο χρόνος ενώ ο κατακόρυφος είναι η συχνότητα. Η χρονική διάρκεια κάθε

νότας ποικίλει ανάλογα με το αν είναι ολόκληρη, μισή, ένα τέταρτο ένα όγδοο, ένα δέκατο έκτο κ.λ.π. .

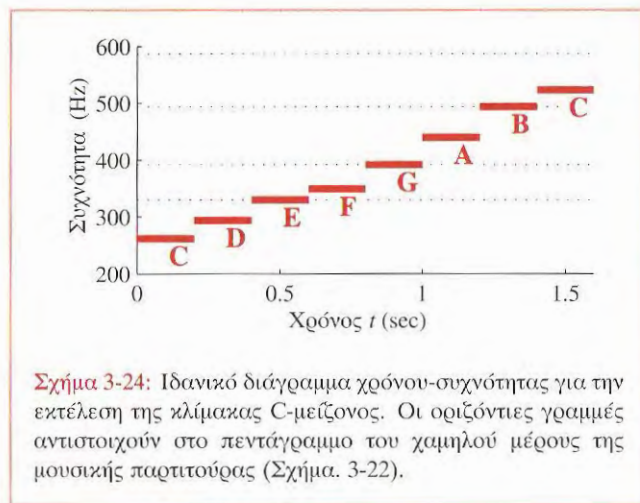
Στο Σχήμα 3-22 οι περισσότερες νότες είναι νότες του ενός δεκάτου έκτου, δείχνοντας ότι το κομμάτι θα πρέπει να εκτελεστεί ζωηρά. Αν αναθέσουμε μια χρονική διάρκεια σε μια νότα του ενός δέκατου έκτου, τότε όλες οι νότες θα πρέπει να έχουν την ίδια διάρκεια. Μια νότα του ενός ογδόου θα έχει τη διπλάσια διάρκεια μιας του ενός δέκατου έκτου και μια νότα του ενός τετάρτου θα έχει τέσσερις φορές μεγαλύτερη διάρκεια απ' αυτή της νότας του ενός δέκατου έκτου, κλπ.

Ο κατακόρυφος άξονας έχει ένα πιο πολύπλοκο συμβολισμό για τον ορισμό της συχνότητας. Αν κοιτάσουμε προσεκτικά στο Σχήμα 3-22, θα δούμε ότι οι μαύρες κοιλίδες που συμβολίζουν τις νότες βρίσκονται είτε πάνω, είτε ανάμεσα στις οριζόντιες γραμμές του πενταγράμμου. Κάθε μια από αυτές συμβολίζει ένα λευκό πλήκτρο του πιάνου όπως μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 3-23 και κάθε πλήκτρο παράγει μια νότα διαφορετικής συχνότητας. Τα μαύρα πλήκτρα του πιάνου συμβολίζονται με “διέσεις” (♯) ή “παύλες” (♭). Το Σχήμα 3-22 έχει μερικές καινούργιες νότες συμβολισμένες με διέση. Η παρτιτούρα διαιρείται σε ένα υψηλό τμήμα (οι πάνω πέντε γραμμές) και σε ένα χαμηλό τμήμα (οι κάτω πέντε γραμμές). Το κάθετο σημείο αναφοράς για τις νότες είναι το “μεσαίο C,” το οποίο βρίσκεται πάνω σε μια αόρατη οριζόντια γραμμή μεταξύ των χαμηλών και υψηλών τμημάτων (το πλήκτρο με το νούμερο 40 στο Σχήμα 3-23). Άρα η κάτω οριζόντια γραμμή στο χαμηλό τμήμα αναπαριστά το λευκό πλήκτρο (E) το οποίο βρίσκεται δύο πιο πάνω από το μεσαίο C, δηλαδή το πλήκτρο νούμερο 44 στο Σχήμα 3-23.

Απαξ και τελειώσει η απεικόνιση από την παρτιτούρα στα πλήκτρα του πιάνου, μπορούμε να γράψουμε ένα μαθηματικό τύπο για τη συχνότητα κάθε νότας. Ένα πιάνο με 88 πλήκτρα διαιρείται σε οκτάβες των δώδεκα πλήκτρων. Το νόημα της λέξης *οκτάβα* είναι διπλασιασμός της συχνότητας. Τα γειτονικά πλήκτρα μέσα σε μια οκτάβα διατηρούν ένα σταθερό συχνοτικό λόγο. Εφόσον υπάρχουν δώδεκα πλήκτρα ανά οκτάβα ο λόγος (r) είναι

$$r^{12} = 2 \quad \implies \quad r = 2^{1/12} = 1.0595$$

Με αυτό το λόγο μπορούμε να υπολογίσουμε τις



συχνότητες όλων των πλήκτρων αν διαθέτουμε μια ως αναφορά. Η συνθήκη είναι ότι το κλειδί A πάνω από το μεσαίο C, λέγεται A-440, έχει συχνότητα 440 Hz. Εφόσον το A-440 είναι το πλήκτρο με νούμερο 49 και το μεσαίο C είναι πλήκτρο με νούμερο 40, η συχνότητα του μεσαίου C είναι

$$f_{\text{middle C}} = 440 \times 2^{(40-49)/12} \approx 261.6 \text{ Hz}$$

Σίγουρα δεν είναι σκοπός μας να εξηγήσουμε πώς να διαβάζετε μια μουσική παρτιτούρα, παρόλο που δύο από τις εργαστηριακές ασκήσεις στο CD-ROM διερευνούν μεθόδους σύνθεσης κυματομορφών για τη δημιουργία μουσικών ήχων και τραγουδιών. Το ενδιαφέρον στη μουσική σημειολογία, είναι ότι χρησιμοποιεί μια δισδιάστατη προβολή για να απεικονίσει το συχνοτικό περιεχόμενο που αλλάζει με το χρόνο. Αν υιοθετήσουμε μια ανάλογη σημειολογία μπορούμε να προσδιορίσουμε πώς να συνθέτουμε ημιτονοειδή με χρονικά μεταβαλλόμενο συχνοτικό περιεχόμενο. Η σημειολογία μας διευκρινίζεται στο Σχήμα 3-24.



Εργ. Ασκ.: #4 Σύνθεση Ημιτονοειδών Σημάτων



Εργ. Ασκ.: #5 FM Σύνθεση για Μουσικά Όργανα

3-9.1 Τμηματικά Σταθερή Συχνότητα

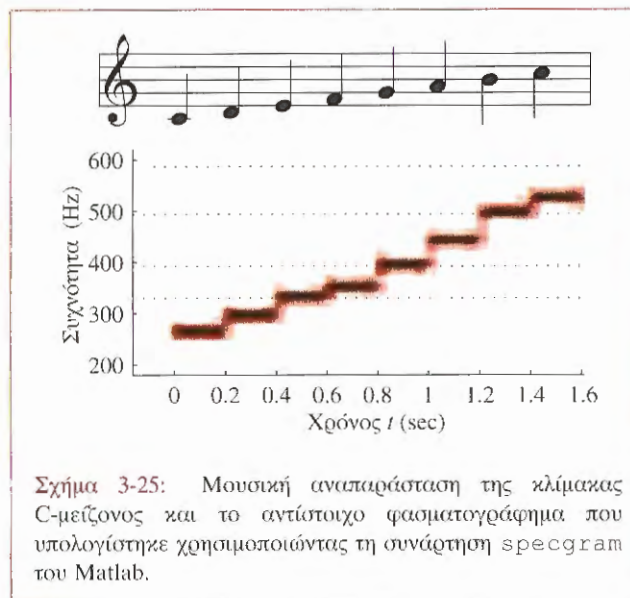
Το απλούστερο παράδειγμα χρονικά μεταβαλλόμενου συχνοτικού περιεχομένου είναι να φτιάξουμε μια κυματομορφή της οποίας η συχνότητα παραμένει σταθερή για ένα σύντομο χρονικό διάστημα και στη συνέχεια μεταβαίνει απότομα σε μια υψηλότερη (ή χαμηλότερη) συχνότητα. Ένα αντίστοιχο μουσικό παράδειγμα θα ήταν να εκτελέσουμε μια Μουσική κλίμακα η οποία θα μπορούσε να είναι μια ακολουθία από τις διαδοχικές νότες μιας οκτάβας. Για παράδειγμα η κλίμακα της C-μείζονος απαρτίζεται από την εκτέλεση των {C, D, E, F, G, A, B, C} τη μια μετά την άλλη, αρχίζοντας από το μεσαίο C. Αυτή η κλίμακα εκτελείται εξολοκλήρου με λευκά πλήκτρα. Οι συχνότητες που αντιστοιχούν στις παραπάνω νότες είναι:

Μεσαίο C	D	E	F	G	A	B	C
262 Hz	294	330	349	392	440	494	523

Η γραφική παρουσίαση της κλίμακας C-μείζονος φαίνεται στο Σχήμα 3-24. Θα έπρεπε να εξηγηθεί ως εξής: Συνθέστε τη συχνότητα 262 Hz για 200 msec και μετά τη συχνότητα 294 Hz στα επόμενα 200 msec, κλπ. Η συνολική διάρκεια της κυματομορφής θα είναι 1.6 sec. Σε μουσική σημειολογία οι νότες θα γράφονταν όπως στο Σχήμα 3-25 (πάνω), όπου κάθε νότα αντιστοιχεί σε μια νότα ενός τετάρτου.

3-9.2 Ανάλυση Φασματογραφήματος

Το φασματικό περιεχόμενο ενός σήματος μπορούμε να το δούμε από τη σκοπιά της ανάλυσης και της σύνθεσης. Για παράδειγμα το ιδανικό χρόνο-συχνοτικό διάγραμμα του Σχήματος 3-24 καθορίζει έναν κανόνα για τη σύνθεση της κλίμακας C-μείζονος. Η ανάλυση είναι ένα πιο ενδιαφέρον πρόβλημα όπως είδαμε στην Ενότητα 3-4, όπου δόθηκε το ολοκλήρωμα ανάλυσης (3.26) της σειράς Fourier. Η ανάλυση των χρονικά μεταβαλλόμενων συχνοτήτων συχνά αφήνεται για προχωρημένα μεταπτυχιακά μαθήματα.



Σχήμα 3-25: Μουσική αναπαράσταση της κλίμακας C-μείζονος και το αντίστοιχο φασματογράφημα που υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `specgram` του Matlab.

Ένας λόγος είναι ότι δε μπορούμε με μια απλή μαθηματική σχέση, όπως αυτή του ολοκληρώματος της σειράς Fourier, να κάνουμε την ανάλυση. Από την άλλη πλευρά είναι διαθέσιμες εξαιρετικά αποδοτικές αριθμητικές μέθοδοι για την χρονο-συχνοτική ανάλυση. Συγκεκριμένα μπορούμε να υπολογίσουμε ένα *φασματογράφημα* το οποίο είναι μια διδιάστατη συνάρτηση του χρόνου και της συχνότητας που απεικονίζει τη χρονική μεταβολή του συχνοτικού περιεχομένου ενός σήματος.



Επίδειξη: Φασματογράφημα Ήχων Πιάνου

Η συνάρτηση `specgram` του Matlab θα υπολογίσει το φασματογράφημα και οι προκαθορισμένες τιμές του είναι καλές για τα περισσότερα σήματα⁶.

Επομένως είναι λογικό να δούμε την έξοδο που επιστρέφει η συνάρτηση `specgram`. Το Σχήμα 3-25 δείχνει τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της

⁶Το εργαλείο *SP First* διαθέτει μια ισοδύναμη συνάρτηση που λέγεται `spectgr`.

spectrogram στα ημιτονοειδή που απαρτίζουν την κλίμακα του C-μειζονος. Ο υπολογισμός γίνεται με μια ανάλυση συχνότητας σε μικρά τμήματα του σήματος και στη συνέχεια κάνοντας τη γραφική παράσταση των αποτελεσμάτων στο χρόνο που γίνεται η ανάλυση. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή με μικρές μετατοπίσεις στο χρόνο, δημιουργείται ένας διδιάστατος πίνακας του οποίου το μέτρο μπορεί να παρασταθεί ως μια εικόνα διαβαθμίσεων του γκρι, της οποίας ο οριζόντιος άξονας είναι ο χρόνος και ο κατακόρυφος η συχνότητα. Ο άξονας του χρόνου μπορεί να συμβολιστεί ως “ο χρόνος της ανάλυσης” επειδή ο υπολογισμός της συχνότητας δεν είναι στιγμιαίος αλλά βασίζεται σε ένα πεπερασμένο τμήμα του σήματος (στην περίπτωση αυτή 25.6 msec).

Είναι αρκετά απλό να αναγνωρίσουμε το συχνοτικό περιεχόμενο κάθε νότας αλλά υπάρχουν κάποια μειονεκτήματα που κάνουν το φασματογράφημα του Σχήματος 3-25 μη ιδανικό. Στο Κεφάλαιο 13 θα κάνουμε μια συζήτηση για την *ανάλυση* συχνότητας για να εξηγήσουμε πώς υπολογίζεται το φασματογράφημα και πώς πρέπει να διαλέξει κάποιος τις παραμέτρους της ανάλυσης, για να πάρει τα επιθυμητά αποτελέσματα. Αν και το φασματογράφημα είναι μια πολύ εξελιγμένη ιδέα στην ανάλυση σημάτων, η εφαρμογή του είναι σχετικά εύκολη και διαισθητική, ειδικά για μουσικά σήματα που περιγράφονται με μια σημειολογία που μοιάζει πάρα πολύ με αυτή του φασματογραφήματος.

3-10 Διαμόρφωση Συχνότητας: Τερέτισμα

Η Ενότητα 3-9 αποκάλυψε τη δυνατότητα, ενδιαφέροντες ήχοι να μπορούν να δημιουργηθούν όταν η συχνότητα μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου. Στην ενότητα αυτή χρησιμοποιούμε ένα διαφορετικό μαθηματικό τύπο για να δημιουργήσουμε σήματα των οποίων η συχνότητα μεταβάλλεται χρονικά. Θα αναπτύξουμε περισσότερο την ιδέα αυτή στην Εργαστηριακή Άσκηση #5



Εργ. Ασκ.: #5 FM Σύνθεση για Μουσικά Όργανα

3-10.1 Τερέτισμα ή Σήμα Συχνότητας Γραμμικής Σάρωσης

Το “τερέτισμα” είναι ένα σήμα του οποίου η συχνότητα αλλάζει γραμμικά από κάποια χαμηλή συχνότητα σε μια υψηλή. Για παράδειγμα στην ακουστική περιοχή συχνοτήτων μπορούμε να ξεκινήσουμε στα 220 Hz και να φτάσουμε μέχρι τα 2320 Hz. Ένας απλός τρόπος παραγωγής ενός τέτοιου σήματος είναι να συνδέσουμε ένα μεγάλο αριθμό σύντομων ημιτονοειδών σταθερής συχνότητας των οποίων οι συχνότητες αυξάνονται σταδιακά από χαμηλές σε υψηλές. Αυτή η προσέγγιση έχει ένα μειονέκτημα. Το όριο μεταξύ των σύντομων ημιτονοειδών θα είναι ασυνεχές εκτός και αν ρυθμίσουμε την αρχική φάση κάθε επιμέρους ημιτονοειδούς. Το Σχήμα 3-26 δείχνει μια κυματομορφή αυτού του είδους. Παρατηρήστε τις ασυνέχειες στα σημεία $t = 1, 2, 3, 4, 5$ secs, τα οποία προκαλούνται εξαιτίας του ότι η φάση κάθε ημιτονοειδούς είναι $\phi = 0$.

Μια καλύτερη προσέγγιση του προβλήματος είναι να τροποποιήσουμε τη συνάρτηση φάσης του ημιτονοειδούς έτσι ώστε να πάρουμε μια συχνότητα μεταβλητή στο χρόνο. Ένας τέτοιος τύπος μπορεί να παραχθεί εκφράζοντας το ημιτονοειδές με τη βοήθεια μιγαδικών εκθετικών σημάτων. Αν θεωρήσουμε ότι ένα ημιτονοειδές σταθερής συχνότητας είναι το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού (περιστρεφόμενου) φάσους

$$x(t) = \Re\{Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}\} = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (3.50)$$

τότε η *Συνάρτηση γωνίας*⁷ του σήματος αυτού είναι ο εκθέτης $(\omega_0 t + \phi)$ ο οποίος προφανώς αλλάζει γραμμικά με το χρόνο. Η παράγωγος της συνάρτησης φάσης ως προς το χρόνο είναι ω_0 , η οποία ισούται με τη σταθερή συχνότητα. Άρα υιοθετούμε τον παρακάτω γενικό συμβολισμό για την κλάση των σημάτων με μεταβαλλόμενη στο χρόνο *Συνάρτηση Γωνίας*:

$$x(t) = \Re\{Ae^{j\psi(t)}\} = A \cos(\psi(t)) \quad (3.51)$$

⁷Εδώ χρησιμοποιούμε τον όρο *συνάρτηση γωνίας* για να συμβολίσουμε το *είσμα* του σινημιτονοειδούς σήματος. Θυμηθείτε ότι η σταθερά ϕ είναι η *διαφορά φάσης*.

όπου $\psi(t)$ συμβολίζει τη *Συνάρτηση Γωνίας* σε σχέση με το χρόνο. Για παράδειγμα μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα σήμα του οποίου η *Συνάρτηση Γωνίας* να είναι μια δευτέρας τάξης συνάρτηση του χρόνου

$$\psi(t) = 2\pi\mu t^2 + 2\pi f_0 t + \phi \quad (3.52)$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τη *στιγμιαία συχνότητα* για τα σήματα αυτά ως την κλίση της *Συνάρτησης Γωνίας* (δηλαδή την παράγωγό της)

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt}\psi(t) \quad (\text{rad/sec}) \quad (3.53)$$

όπου οι μονάδες της $\omega_i(t)$ είναι rad/sec, ή αν διαιρέσουμε με 2π

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt}\psi(t) \quad (\text{Hz}) \quad (3.54)$$

Hz. Αν η *Συνάρτηση Γωνίας* του $x(t)$ είναι δευτεροβάθμια, τότε η στιγμιαία συχνότητα αλλάζει γραμμικά με το χρόνο δηλαδή,

$$f_i(t) = 2\mu t + f_0$$

Η μεταβολή της συχνότητας που παράγεται από τη μεταβλητή στο χρόνο *Συνάρτηση Γωνίας*, λέγεται διαμόρφωση συχνότητας και τα σήματα της κατηγορίας αυτής λέγονται *σήματα FM*. Τέλος, εφόσον η γραμμική διακύμανση της στιγμιαίας συχνότητας μπορεί να παράγει ένα ήχο παρόμοιο μ' αυτό μιας σειρήνας, τα γραμμικά FM σήματα λέγονται επίσης και *τερετίσματα*.

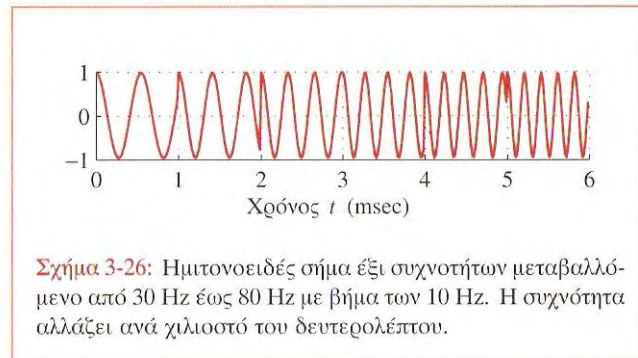


Επίδειξη: Φασματογράφημα Τερετίσματος

Η διαδικασία μπορεί να αντιστραφεί επειδή η Σχέση (3.53) δηλώνει ότι η στιγμιαία συχνότητα είναι η παράγωγος της *Συνάρτησης Γωνίας* $\psi(t)$. Άρα, αν επιθυμούμε μια συγκεκριμένη γραμμική σάρωση συχνότητας, η πραγματική *Συνάρτηση Γωνίας* που απαιτείται στη Σχέση (3.51) προκύπτει με ολοκλήρωση της $\omega_i(t)$.



Παράδειγμα 3-10: Συνθεση Τερετίσματος



Σχήμα 3-26: Ημιτονοειδές σήμα έξι συχνοτήτων μεταβαλλόμενο από 30 Hz έως 80 Hz με βήμα των 10 Hz. Η συχνότητα αλλάζει ανά χιλιοστό του δευτερολέπτου.

Υποθέστε ότι θέλουμε να συνθέσουμε ένα σήμα συχνότητας από $f_1 = 220$ Hz μέχρι $f_2 = 2320$ Hz σ' ένα χρονικό διάστημα 3 sec, δηλαδή, η αρχική και τελική χρονική στιγμή είναι $t = 0$ και $t = T_2 = 3$ sec. Καταρχήν είναι αναγκαίο να εκφράσουμε τη στιγμιαία συχνότητα ως ακολούθως:

$$f_i(t) = \frac{f_2 - f_1}{T_2} t + f_1 = \frac{2320 - 220}{3} t + 220$$

Στη συνέχεια πρέπει να ολοκληρώσουμε την $2\pi f_i(t)$ για να πάρουμε τη *Συνάρτηση Γωνίας*:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_0^t \omega_i(u) du \\ &= \int_0^t 2\pi \left(\frac{2320 - 220}{3} u + 220 \right) du \\ &= 700\pi t^2 + 440\pi t + \phi \end{aligned}$$

όπου η μετατόπιση φάσης, ϕ , είναι μια τυχαία σταθερά. Το τερέτισμα είναι $x(t) = \cos(\psi(t))$. ■

3-10.2 Μια Κοντινότερη ματιά στη Στιγμαία Συχνότητα

Μπορεί να είναι δύσκολο να δούμε γιατί η παράγωγος της *Συνάρτησης Γωνίας* είναι η στιγμιαία συχνότητα. Το παρακάτω παράδειγμα μας δίνει μια ιδέα.

- (i) Ορίστε ένα “τερέτισμα”, όπως στο Παράδειγμα 3-10, με τις παρακάτω παραμέτρους:

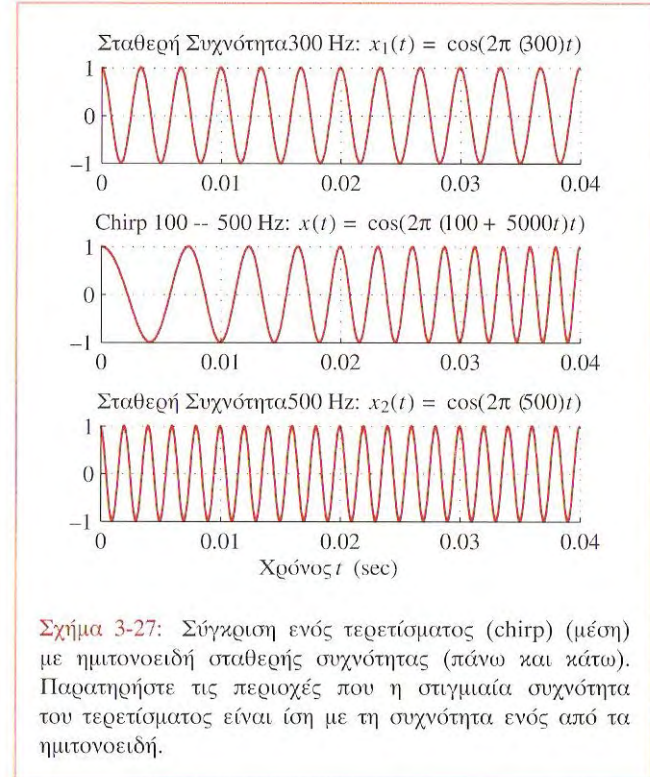
$$f_1 = 100 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 500 \text{ Hz}$$

$$T_2 = 0.04 \text{ sec}$$

Δηλαδή επιλέξτε το μ και το f_0 στη Σχέση (3.52) που να ορίζει το $x(t)$ έτσι ώστε να σαρώνει τη συγκεκριμένη συχνοτική περιοχή.

- (ii) Σχεδιάστε τώρα το σήμα που συνθέσατε στο μέρος (i). Στο Σχήμα 3-27, αυτή η γραφική παράσταση φαίνεται στο μέσον.
- (iii) Είναι δύσκολο να ελεγχθεί εάν αυτό το σήμα θα έχει ή δεν θα έχει το σωστό συχνοτικό περιεχόμενο. Εντούτοις, το υπόλοιπο αυτού του πειράματος θα δείξει ότι η παράγωγος της *Συνάρτησης Γωνίας* είναι ο “σωστός” ορισμός της στιγμιαίας συχνότητας. Καταρχήν, κάντε τη γραφική παράσταση ενός ημιτόνου 300-Hz, $x_1(t)$ το οποίο παρουσιάζεται στο πάνω μέρος του Σχήματος 3-27.
- (iv) Τέλος, δημιουργήστε και σχεδιάστε ένα ημιτονοειδές 500-Hz, $x_2(t)$ όπως αυτό που φαίνεται στο κάτω μέρος του Σχήματος 3-27.
- (v) Τώρα συγκρίνετε τα τρία σήματα του Σχήματος 3-27 σε σχέση με το συχνοτικό περιεχόμενο του τερέτισματος. Επικεντρωθείτε στη συχνότητα του τερέτισματος στο χρονικό διάστημα $0.019 \leq t \leq 0.021 \text{ sec}$. Προσέξτε ότι το ημιτονοειδές των 300-Hz συμπίπτει με το τερέτισμα σ’ αυτό το χρονικό διάστημα. Υπολογίστε θεωρητικά το $f_i(t)$ σ’ αυτό το διάστημα.



Σχήμα 3-27: Σύγκριση ενός τερέτισματος (chirp) (μέση) με ημιτονοειδή σταθερής συχνότητας (πάνω και κάτω). Παρατηρήστε τις περιοχές που η στιγμιαία συχνότητα του τερέτισματος είναι ίση με τη συχνότητα ενός από τα ημιτονοειδή.

- (vi) Μπορείτε να βρείτε και άλλο διάστημα (κοντά στο $t = 0.04\text{s}$) όπου η συχνότητα του τερέτισματος είναι ίση (τοπικά) με 500 Hz.

Είδαμε ότι για τα σήματα της μορφής $x(t) = A \cos(\psi(t))$, η στιγμιαία συχνότητα του σήματος είναι η παράγωγος της *Συνάρτησης Γωνίας* $\psi(t)$. Αν η $\psi(t)$ είναι σταθερή, η συχνότητα είναι μηδέν. Εάν η $\psi(t)$ είναι γραμμική, η $x(t)$ είναι ένα ημιτονοειδές κάποιας σταθερής συχνότητας. Εάν η $\psi(t)$ είναι τετραγωνική, η $x(t)$ είναι ένα τερέτισμα του οποίου η συχνότητα αλλάζει γραμμικά σε σχέση με το χρόνο. Πιο πολύπλοκες παραλλαγές της $\psi(t)$ μπορούν να παράξουν μια ευρεία ποικιλία σημάτων. Μια σημαντική εφαρμογή των σημάτων FM είναι στη σύνθεση μουσικής.

Αυτή η εφαρμογή διασαφηνίζεται με παρουσιάσεις και μια εργαστηριακή άσκηση στο CD-ROM.



Επίδειξη: Φασματογράφημα Τερετίσματος



Επίδειξη: Σύνθεση Σημάτων FM

3-11 Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι

Στο κεφάλαιο αυτό γνωρίσαμε την έννοια του *φάσματος* με το οποίο παριστάνουμε ένα σήμα με τις ημιτονοειδής συνιστώσες του. Το φάσμα είναι μια γραφική παρουσίαση του μιγαδικού πλάτους κάθε συχνοτικής συνιστώσας του σήματος. Δείξαμε ότι πολύπλοκα σήματα μπορούν να προκύψουν από σχετικά απλά φάσματα και παρουσιάσαμε τις βασικές έννοιες των σειρών Fourier έτσι ώστε να μπορούμε να δημιουργήσουμε το φάσμα τυχαίων περιοδικών σημάτων. Στο τέλος του κεφαλαίου έγινε μια συζήτηση σχετικά με το πώς το φάσμα μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο.

Στο σημείο αυτό, μπορούν να γίνουν τόσες πολλές επιδείξεις και εργαστηριακές ασκήσεις που αναγκαζόμαστε να περιορίσουμε κατά κάποιο τρόπο τον κατάλόγο μας. Μεταξύ των εργαστηριακών ασκήσεων που περιέχονται στο CD-ROM υπάρχουν τρεις που αφιερώνονται σε διαφορετικά ζητήματα του φάσματος. Η πρώτη (Εργαστηριακή άσκηση #3) περιέχει ασκήσεις αναπαράστασης σε σειρά Fourier του τετραγωνικού και του τριγωνικού κύματος. Στη δεύτερη (Εργαστηριακή άσκηση #4) ζητείται από τους φοιτητές να αναπτύξουν ένα πρόγραμμα σύνθεσης μουσικής που θα μπορεί να παίζει ένα μουσικό κομμάτι όπως αυτό του Bach “Jesu, Joy of Man’s Desiring.” Η σύνθεση πρέπει να γίνει με ημιτονοειδή, αλλά μπορεί και να εμπλουτιστεί με επιπλέον σήματα. Τέλος, αντικείμενο της Εργαστηριακής άσκησης #5 είναι οι ρυθμικές νότες, τα τερετίσματα και τα φασματογραφήματα. Το δεύτερο μέρος της άσκησης αυτής αναφέρεται σε μια μέθοδο σύνθεσης μουσικής που βασίζεται στη διαμόρφωση συχνότητας. Η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να παράγει τεχνητούς ήχους

μουσικών οργάνων όπως το κλαρινέτο ή *drum*, που είναι πολύ κοντά στους φυσικούς. Επιπροσθέτως, υπάρχει και μια άλλη εργαστηριακή άσκηση που αναφέρεται σε μερικά συστήματα, των οποίων η λειτουργία βασίζεται στα ημιτονοειδή σήματα, όπως το Τηλεφωνικό Τονικό Σύστημα Αφής. Η εργαστηριακή άσκηση αυτή απαιτεί γνώσεις σχετικές με φιλτράρισμα και για το λόγο αυτό θα την αφήσουμε για το Κεφάλαιο 7.



Επίδειξη: Σύνδεσμοι με πολλές Επιδείξεις

Το CD-ROM επίσης περιέχει πολλές επιδείξεις ήχητων σημάτων καθώς και των φασματογραφημάτων τους:

- (i) Φασματογραφήματα απλών ήχων όπως τετραγωνικών κυμάτων και άλλων αρμονικών σημάτων.
- (ii) Φασματογραφήματα πραγματικών ήχων, συμπεριλαμβανομένης μιας καταγραφής πιάνου, μια συνθετικής κλίμακας και μιας σύνθεσης ενός μουσικού κομματιού, που έγινε από κάποιο φοιτητή.
- (iii) Φασματογραφήματα τερετισμάτων που δείχνουν πώς επηρεάζει τον ήχο που ακούμε ο ρυθμός μεταβολής της συχνότητας.
- (iv) Μια εξήγηση της μεθόδου σύνθεσης FM για την εξομοίωση των μουσικών οργάνων. Συμπεριλαμβάνονται παραδείγματα διάφορων ήχων.
- (v) Στρεφόμενους φάσορες.
- (vi) Σύνθεση φωνηέντων



Υπόδειξη: Εκατοντάδες Λυμένων Προβλημάτων

Τέλος, υπενθυμίζεται στον αναγνώστη ότι στο CD-ROM περιέχεται ένας μεγάλος αριθμός λυμένων προβλημάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για επισκόπηση και πρακτική.

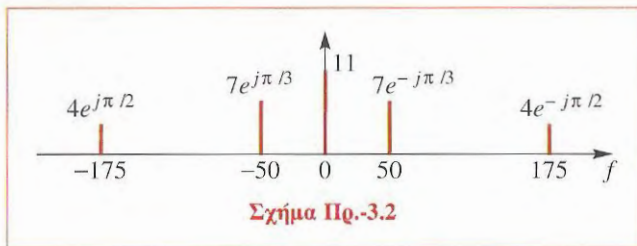
3-12 Προβλήματα

Πρόβλημα.-3.1 Ένα σήμα ημιτονοειδών δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$x(t) = 10 \cos(800\pi t + \pi/4) + 7 \cos(1200\pi t - \pi/3) - 3 \cos(1600\pi t)$$

- (i) Σχεδιάστε το φάσμα, σημειώνοντας το μιγαδικό πλάτος κάθε συχνοτικής συνιστώσας. Κάντε διαφορετικές γραφικές παραστάσεις για το πραγματικό/φανταστικό ή μέτρου/φάσης του μιγαδικού πλάτους σε κάθε συχνότητα.
- (ii) Είναι το $x(t)$ περιοδικό; Αν ναι, ποιά είναι η περιόδός του;
- (iii) Θεωρήστε τώρα ένα άλλο σήμα $y(t) = x(t) + 5 \cos(1000\pi t + \pi/2)$. Πώς αλλάζει το φάσμα; Είναι το $y(t)$ περιοδικό; Αν ναι, ποιά είναι η περιόδός του;

Πρόβλημα.-3.2 Ένα σήμα $x(t)$ έχει το φάσμα που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-3.2.



- (i) Εκφράστε το $x(t)$ ως άθροισμα συνημιτόνων.
- (ii) Είναι το $x(t)$ ένα περιοδικό σήμα; Αν ναι, προσδιορίστε τη θεμελιώδη περίοδο του και τη θεμελιώδη συχνότητά του.
- (iii) Εξηγήστε γιατί χρειάζονται οι “αρνητικές” συχνότητες στο φάσμα.

Πρόβλημα.-3.3 Έστω $x(t) = \sin^3(27\pi t)$.

- (i) Βρείτε ένα τύπο για το $x(t)$ σαν το πραγματικό μέρος ενός αθροίσματος μιγαδικών εκθετικών.
- (ii) Ποιά είναι η θεμελιώδης περίοδος του σήματος $x(t)$;
- (iii) Σχεδιάστε το φάσμα του $x(t)$.

Πρόβλημα.-3.4 Στην Ενότητα 3-2.2, συζητήσαμε ένα απλό παράδειγμα ενός διακροτήματος. Στο πρόβλημα αυτό, θα θεωρήσετε μια πιο γενική περίπτωση. Έστω

$$x(t) = A \cos[2\pi(f_c - f_\Delta)t] + B \cos[2\pi(f_c + f_\Delta)t]$$

Για την περίπτωση που συζητήσαμε στην Ενότητα 3-2.2, τα πλάτη είναι ίσα, $A = B = 1$.

- (i) Χρησιμοποιήστε φάσορες για να βρείτε ένα μιγαδικό σήμα $z(t)$ έτσι ώστε

$$x(t) = \Re\{z(t)\}$$

- (ii) Εκφράζοντας κατάλληλα το $z(t)$ και στη συνέχεια παίρνοντας το πραγματικό μέρος, δείξτε ότι για την παραπάνω πιο γενική περίπτωση, το $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$x(t) = C \cos(2\pi f_\Delta t) \cos(2\pi f_c t) + D \sin(2\pi f_\Delta t) \sin(2\pi f_c t)$$

και βρείτε εκφράσεις για τα C και D συναρτήσει των A και B . Ελέγξτε την απάντησή σας αντικαθιστώντας $A = B = 1$.

- (iii) Βρείτε τιμές για τα A και B έτσι ώστε

$$x(t) = 2 \sin(2\pi f_\Delta t) \sin(2\pi f_c t)$$

Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος.

Πρόβλημα.-3.5 Θεωρήστε το σήμα

$$x(t) = 10 + 20 \cos(2\pi(100)t + \frac{1}{4}\pi) + 10 \cos(2\pi(250)t)$$

- (i) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler, το σήμα $x(t)$ που ορίστηκε παραπάνω μπορεί να εκφραστεί σαν άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων χρησιμοποιώντας τη Σχέση (3.30). Βρείτε τις τιμές των f_0 , N και όλων των μιγαδικών συντελεστών a_k . Δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσετε κανένα ολοκλήρωμα για να βρείτε τα a_k .
- (ii) Είναι το σήμα $x(t)$ περιοδικό; Αν ναι, ποιά είναι η θεμελιώδης περιόδός του;
- (iii) Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας.

Πρόβλημα.-3.6 Ένα συνημιτονικό κύμα με διαμορφωμένο πλάτος (AM) παριστάνεται από τη σχέση

$$x(t) = [12 + 7 \sin(\pi t - \frac{1}{3}\pi)] \cos(13\pi t)$$

- (i) Χρησιμοποιήστε φάσορες για να δείξετε ότι το $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + A_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3)$$

όπου $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$, δηλαδή, βρείτε τιμές των παραμέτρων $A_1, A_2, A_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$.

- (ii) Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος. Σημειώστε στις γραφικές σας παραστάσεις τις αριθμητικές τιμές των A_i, ϕ_i και ω_i .

Πρόβλημα.-3.7 Θεωρήστε το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) \\ = \cos[(\omega_2 + \omega_1)t] + \cos[(\omega_2 - \omega_1)t]$$

όπου $0 < \omega_1 < \omega_2$.

- (i) Ποιά είναι η γενική συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται από τα $\omega_2 - \omega_1$ και $\omega_2 + \omega_1$ έτσι ώστε $x(t) = x(t + T_0)$, δηλαδή το $x(t)$ να είναι περιοδικό με περίοδο T_0 ;

- (ii) Τι σημαίνει το αποτέλεσμα του ερωτήματος (i) για τα ω_1 και ω_2 ; Για παράδειγμα, είναι η ω_2 ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του ω_1 ;

Πρόβλημα.-3.8 Ένα περιοδικό σήμα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$x(t) = 2 + 4 \cos(40\pi t - \frac{1}{5}\pi) \\ + 3 \sin(60\pi t) + 4 \cos(120\pi t - \frac{1}{3}\pi)$$

- (i) Για το παραπάνω σήμα χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση Fourier της Σχέσης (3.30), προσδιορίστε τη θεμελιώδη συχνότητα ω_0 , τη θεμελιώδη περίοδο T_0 , το πλήθος των αναγκαίων όρων N και τους συντελεστές a_k . Μπορείτε να υπολογίσετε τα παραπάνω **χωρίς** να υπολογίσετε ολοκληρώματα.
- (ii) Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος σημειώνοντας το μιγαδικό πλάτος κάθε μιας συχνοτικής συνιστώσας. Σημειώστε τα μιγαδικά πλάτη στις κατάλληλες συχνότητες. Δεν είναι απαραίτητο να κάνετε χωριστές γραφικές παραστάσεις για πραγματικό/φανταστικό μέρος ή μέτρου/φάσης.
- (iii) Θεωρήστε τώρα το σήμα που προκύπτει προσθέτοντας ένα ακόμη ημιτονοειδές $y(t) = x(t) + 10 \cos(50\pi t - \pi/6)$. Πώς αλλάζει το φάσμα; Εξασκολουθεί το $y(t)$ να είναι περιοδικό; Αν ναι, ποιά είναι η θεμελιώδης περίοδός του;

Πρόβλημα.-3.9 Ένα περιοδικό σήμα $x(t) = x(t + T_0)$ περιγράφεται μέσα σε μια περίοδο $-T_0/2 \leq t \leq T_0/2$ από τη σχέση

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } |t| < t_c \\ 0 & \text{για } t_c < |t| \leq T_0/2 \end{cases}$$

όπου $t_c < T_0/2$.

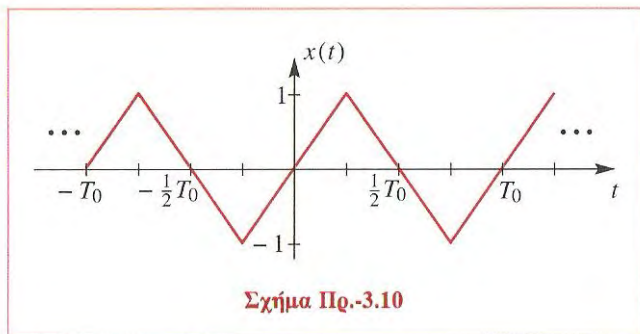
- (i) Σχεδιάστε το περιοδικό σήμα $x(t)$ στο διάστημα $-2T_0 < t < 2T_0$ για τη περίπτωση που $t_c = T_0/4$.
- (ii) Προσδιορίστε το συντελεστή a_0 .

- (iii) Βρείτε έναν τύπο για τους συντελεστές a_k της σειράς Fourier της Σχέσης (3.30). Η τελική απάντησή σας θα πρέπει να εξαρτάται από τα t_c και T_0 .
- (iv) Σχεδιάστε το φάσμα του $x(t)$ για τη περίπτωση $\omega_0 = 2\pi(100)$ και $t_c = T_0/4$. Χρησιμοποιήστε το διάστημα συχνότητας από $-10\omega_0$ έως $+10\omega_0$.
- (v) Σχεδιάστε το φάσμα του $x(t)$ για τη περίπτωση $\omega_0 = 2\pi(100)$ και $t_c = T_0/10$. Χρησιμοποιήστε το διάστημα συχνότητας από $-10\omega_0$ έως $+10\omega_0$.
- (vi) Από τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (iii) και (iv), τι συμπεραίνετε για τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο t_c και το σχετικό μέγεθος των υψηλών συχνοτήτων του $x(t)$; Όταν μειώνεται το t_c , αυξάνονται ή μειώνονται οι υψηλές συχνοτήτες;

Πρόβλημα.-3.10 Η περιοδική κυματομορφή που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-3.10 έχει την ιδιότητα της συμμετρίας ημίσεως κύματος, δηλαδή, το δεύτερο μισό της περιόδου είναι το αρνητικό του πρώτου μισού. Συγκεκριμένα, τέτοια σήματα έχουν τη ακόλουθη ιδιότητα

$$x(t + T_0/2) = -x(t) \quad -\infty < t < \infty \quad (3.55)$$

Στο πρόβλημα αυτό θα δείξουμε ότι αυτή η συνθήκη έχει



Σχήμα Πρ.-3.10

μια πολύ ενδιαφέρουσα επίδραση στους συντελεστές της σειράς Fourier.

- (i) Υποθέστε ότι το $x(t)$ είναι ένα περιοδικό σήμα με την παραπάνω ιδιότητα και ορίζεται στο μισό της περιόδου από τη σχέση

$$x(t) = t \quad \text{για } 0 \leq t < T_0/2$$

όπου T_0 είναι η περίοδος του σήματος. Σχεδιάστε αυτό το περιοδικό σήμα στο διάστημα $-T_0 \leq t \leq T_0$.

- (ii) Αποδείξτε ότι για κάθε περιοδικό σήμα με αυτού του είδους τη συμμετρία, ο συντελεστής a_0 είναι μηδέν.
Υπόδειξη: Διασπάστε το ολοκλήρωμα για το a_0 σε δύο τμήματα.
- (iii) Αποδείξτε ότι για ένα σήμα με αυτή τη συμμετρία, όλοι οι συντελεστές της σειράς Fourier που αντιστοιχούν σε άρτιο δείκτη είναι μηδέν, δηλαδή, $a_k = 0$ για κάθε άρτιο ακέραιο k .

Πρόβλημα.-3.11 Ένα σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = 8$. Επομένως, μπορεί να παρασταθεί ως μια σειρά Fourier της μορφής

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/8)kt}$$

Είναι γνωστό ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier ενός σήματος $x(t)$ δίνονται από το ολοκλήρωμα

$$a_k = \frac{1}{8} \int_{-4}^0 (4+t) e^{-j(2\pi/8)kt} dt$$

- (i) Στη παραπάνω ολοκληρωτική έκφραση για τους συντελεστές a_k , η προς ολοκλήρωση συνάρτηση και τα όρια του ολοκληρώματος ορίζουν το σήμα $x(t)$. Προσδιορίστε μια εξίσωση για το $x(t)$ που ισχύει μέσα σε μια περίοδο.
- (ii) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του ερωτήματος (i), Σχεδιάστε το σήμα $x(t)$ στο διάστημα $-8 \leq t \leq 8$ sec.

(iii) Βρείτε το σταθερό συντελεστή του $x(t)$.

Πρόβλημα.-3.12 Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο $T_0 = 10$ περιγράφεται μέσα σε μια περίοδο, $0 \leq t \leq 10$, από τη σχέση

$$x(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 5 \\ 2 & 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

Αυτό το σήμα μπορεί να παρασταθεί από μια σειρά Fourier, όπως αυτή της Σχέσης (3.19) η οποία ισχύει για $-\infty < t < \infty$.

- (i) Σχεδιάστε την περιοδική συνάρτηση $x(t)$ στο διάστημα $-10 \leq t \leq 20$.
- (ii) Προσδιορίστε το σταθερό συντελεστή a_0 της σειράς Fourier.
- (iii) Χρησιμοποιήστε το ολοκλήρωμα ανάλυσης της Σχέσης (3.21) για να βρείτε τον πρώτο συντελεστή a_1 της σειράς Fourier (δηλαδή, για $k = 1$).
- (iv) Αν προσθέσουμε μια μονάδα στο $x(t)$, παίρνουμε το σήμα $y(t) = 1 + x(t)$ με το $y(t)$ μέσα σε μια περίοδο να δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 5 \\ 3 & 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

Το σήμα αυτό μπορεί να παρασταθεί από μια σειρά Fourier, αλλά με διαφορετικούς συντελεστές:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

Εξηγήστε πώς σχετίζονται οι συντελεστές b_0 και b_1 με τους a_0 και a_1 .

Παρατήρηση: Δεν θα πρέπει να υπολογίσετε κανένα νέο ολοκλήρωμα για να απαντήσετε σ' αυτή την ερώτηση.

Πρόβλημα.-3.13 Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος που ορίζεται από τη σχέση

$$x(t) = \sin(10t) \left(\sum_{k=-3}^3 \frac{1}{1+jk} e^{jkt} \right)$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Euler για το $\sin(10t)$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάστε για να πάρετε τους συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $x(t)$.

Πρόβλημα.-3.14 Έχουμε δει ότι ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να παρασταθεί από τη σειρά Fourier της Σχέσης (3.19). Μπορεί να αποδειχθεί ότι πολλοί χειρισμοί στο σήμα μπορούν να μετασχηματιστούν σε πράξεις πάνω στους συντελεστές a_k της σειράς. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι θέλουμε να θεωρήσουμε ένα νέο περιοδικό σήμα $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. Ποιοί θα είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $y(t)$; Η απάντηση μπορεί να δοθεί από τη διαφοροποίηση της σειράς Fourier

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{d}{dt} [e^{jk\omega_0 t}] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k [(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}] \end{aligned}$$

Έτσι, παρατηρούμε ότι το $y(t)$ είναι επίσης στη μορφή σειράς Fourier

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \text{όπου } b_k = (jk\omega_0) a_k$$

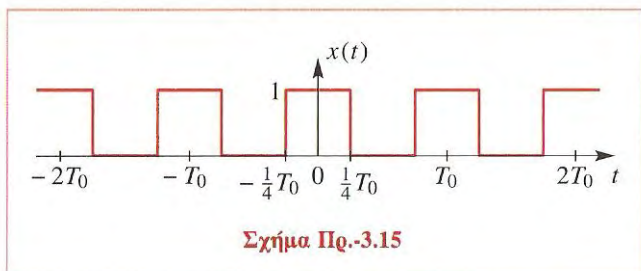
και επομένως οι συντελεστές της σειράς Fourier του $y(t)$ σχετίζονται με τους συντελεστές της σειράς Fourier του $x(t)$ με τη σχέση $b_k = (jk\omega_0) a_k$. Αυτό είναι ένα πολύ καλό αποτέλεσμα, γιατί μας επιτρέπει να βρίσκουμε τους συντελεστές χωρίς να διαφορίζουμε στην πραγματικότητα

το $x(t)$ και χωρίς να κάνουμε κανένα δύσκολο υπολογισμό ολοκληρωμάτων για να βρούμε τους συντελεστές Fourier b_k . Αυτό είναι ένα γενικό αποτέλεσμα που ισχύει για κάθε περιοδικό σήμα και τις παραγώγους του.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τέτοιου είδους χειρισμούς για να πάρουμε μερικά άλλα χρήσιμα αποτελέσματα για τις σειρές Fourier. Για κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις, αρχίζοντας από τη Σχέση (3.19), εκφράστε το σήμα $y(t)$ ως σειρά Fourier και στη συνέχεια κάντε τους απαραίτητους χειρισμούς για να εκφράσετε τους συντελεστές Fourier b_k συναρτήσει των αρχικών συντελεστών a_k .

- (i) Υποθέστε ότι $y(t) = Ax(t)$ όπου A είναι ένας πραγματικός αριθμός, δηλαδή, το $y(t)$ είναι μια σταθμισμένη εκδοχή του σήματος $x(t)$. Δείξτε ότι οι συντελεστές Fourier του $y(t)$ είναι $b_k = Aa_k$.
- (ii) Υποθέστε ότι $y(t) = x(t - t_d)$ όπου t_d είναι ένας πραγματικός αριθμός, δηλαδή, το $y(t)$ είναι μια καθυστερημένη εκδοχή του $x(t)$. Δείξτε ότι οι συντελεστές Fourier του $y(t)$ σ' αυτή την περίπτωση είναι $b_k = a_k e^{-jk\omega_0 t_d}$.

Πρόβλημα.-3.15 Θεωρήστε την περιοδική συνάρτηση $x(t)$ που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-3.15.



Σχήμα Πρ.-3.15

- (i) Βρείτε το σταθερό συντελεστή a_0 καθώς και τους υπόλοιπους συντελεστές a_k για $k \neq 0$ της σειράς Fourier της $x(t)$.

- (ii) Ορίστε ένα νέο σήμα ως $y(t) = 2x(t - T_0/2)$ και στη συνέχεια σχεδιάστε την κυματομορφή του $y(t)$. Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα του Προβλήματος 3.14 για να βρείτε τους συντελεστές b_0 και b_k για $k \neq 0$ της σειράς Fourier του περιοδικού σήματος $y(t)$ χωρίς να υπολογίσετε κανένα ολοκλήρωμα.

Πρόβλημα.-3.16 Είδαμε ότι οι μουσικοί τόνοι μπορούν να μοντελοποιηθούν από ημιτονοειδή σήματα. Αν μπορείτε να διαβάσετε το πεντάγραμμο ή να παίξετε πιάνο, ξέρετε ότι τα πλήκτρα του πιάνου διακρίνονται σε οκτάβες, με τους τόνους σε κάθε οκτάβα να είναι διπλάσιος συχνότητας των αντίστοιχων τόνων στην επόμενη χαμηλότερη οκτάβα. Για να βαθμονομήσουμε τη συχνотική κλίμακα, ο τόνος αναφοράς είναι το A πάνω από τη μεσαία C, η οποία συνήθως ονομάζεται A-440, αφού η συχνότητά της είναι 440 Hz. Κάθε οκτάβα περιέχει 12 τόνους και ο λόγος μεταξύ των συχνοτήτων διαδοχικών τόνων είναι σταθερός. Έτσι, ο λόγος πρέπει να είναι $2^{1/12}$. Αφού η μεσαία C είναι εννιά τόνους παρακάτω από την A-440, η συχνότητά της είναι περίπου $(440)2^{-9/12} \approx 261.6$ Hz. Τα ονόματα των τόνων (νότες) της οκτάβας που αρχίζει με τη μεσαία C και τελειώνει με την μεζόνα C είναι:

Όνομα νότας	C	C [#]	D	E ^b	E	F	F [#]
Αριθμός νότας	40	41	42	43	44	45	46
Συχνότητα							
Όνομα νότας	F [#]	G	G [#]	A	B ^b	B	C
Αριθμός νότας	46	47	48	49	50	51	52
Συχνότητα				440			

- (i) Δημιουργήστε ένα πίνακα των συχνοτήτων των τόνων της οκτάβας που αρχίζει από τη μεσαία C, θεωρώντας ότι η A πάνω από τη μεσαία C είναι συντονισμένη στα 440 Hz.
- (ii) Οι παραπάνω νότες σ' ένα πιάνο αριθμούνται από 40 μέχρι 52. Αν το n συμβολίζει τον αριθμό νότας και το f συμβολίζει τη συχνότητα του αντίστοιχου τόνου, δώστε ένα τύπο που θα εκφράζει τη συχνότητα του τόνου συναρτήσει του αριθμού νότας.

(iii) Μια *συγχορδία* είναι ένας συνδυασμός μουσικών τόνων που ακούγονται ταυτόχρονα. Μια *τριάδα* είναι μια συγχορδία από τρεις νότες. Η συγχορδία D-μειζονος συντίθεται από τους τόνους D, F[#] και A. Από το σύνολο των αντίστοιχων συχνοτήτων που προσδιορίσατε στο ερώτημα (i), σχεδιάστε τά βασικά χαρακτηριστικά του φάσματος της συγχορδίας D-μειζονος υποθέτοντας ότι κάθε νότα αντιστοιχεί σ' ένα καθαρό ημιτονοειδή τόνο. *Να μην προσδιορίσετε με ακρίβεια τους μιγαδικούς φάσσορες.*

Πρόβλημα.-3.17 Το τερέτισμα είναι ένα σήμα το οποίο σαρώνει τις συχνότητες από $\omega_1 = 2\pi f_1$ μέχρι $\omega_2 = 2\pi f_2$ καθώς ο χρόνος πηγαίνει από $t = 0$ σε $t = T_2$. Ο γενικός τύπος ορισμού ενός τέτοιου σήματος είναι

$$x(t) = A \cos(\alpha t^2 + \beta t + \phi) = \cos(\psi(t)) \quad (3.56)$$

όπου

$$\psi(t) = \alpha t^2 + \beta t + \phi$$

Η παράγωγος του $\psi(t)$ είναι η *στιγμιαία συχνότητα*, την οποία μπορούμε επίσης να ακούσουμε, αν οι συχνότητες είναι στο διάστημα των ακουστικών συχνοτήτων

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt} \psi(t) \quad \text{radians/sec.} \quad (3.57)$$

(i) Για το σήμα της Σχέσης (3.56), προσδιορίστε τη σχέση για την αρχική συχνότητα (ω_1) και την τελική συχνότητα (ω_2) συναρτήσει των α , β και T_2 .

(ii) Για το σήμα

$$x(t) = \Re\{e^{j(40t^2+27t+13)}\}$$

βρείτε μια σχέση της *στιγμιαίας* συχνότητας συναρτήσει του χρόνου.

(iii) Σχεδιάστε τη *στιγμιαία* συχνότητα (σε Hz) συναρτήσει του χρόνου για το διάστημα $0 \leq t \leq 1$ sec.

Πρόβλημα.-3.18 Για να δούμε γιατί η παράγωγος της συνάρτησης φάσης μπορεί να είναι η στιγμιαία συχνότητα, επαναλάβετε το πείραμα της Ενότητας 3-10.2.

(i) Χρησιμοποιήστε τις ακόλουθες παραμέτρους για να ορίσετε ένα τερέτισμα:

$$f_1 = 1 \text{ Hz}, f_2 = 9 \text{ Hz}, T_2 = 2 \text{ sec}$$

Δηλαδή, προσδιορίστε το α και το β στη Σχέση (3.56) για να ορίσετε το $x(t)$ έτσι ώστε αυτό να σαρώνει το συγκεκριμένο διάστημα συχνοτήτων.

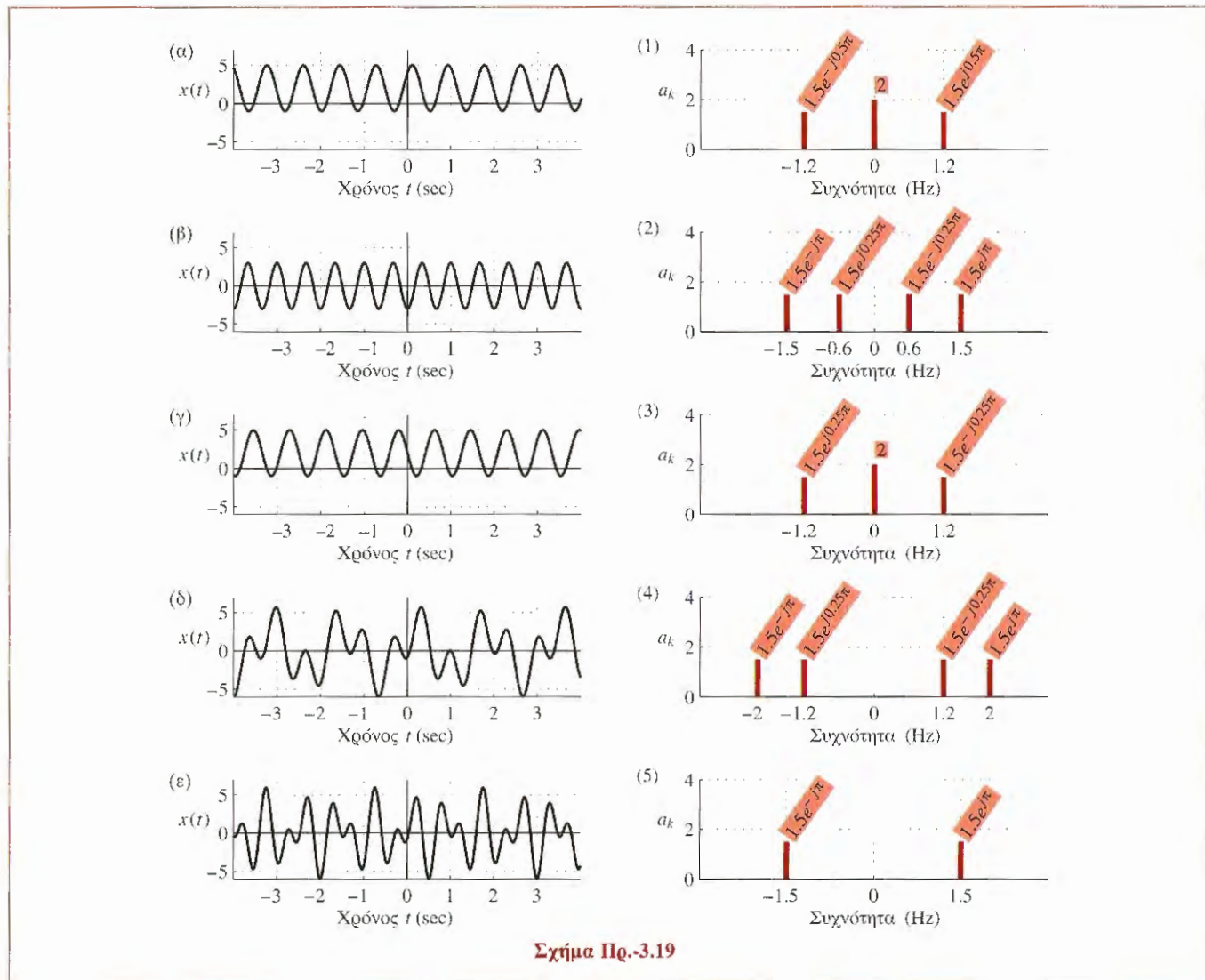
(ii) Το υπόλοιπο αυτού του προβλήματος αφιερώνεται σ' ένα πείραμα στο Matlab που δείχνει γιατί η παράγωγος της *Συνάρτησης Φάσης* αποτελεί το σωστό ορισμό της στιγμιαίας συχνότητας. Αρχικά, σχεδιάστε τη στιγμιαία συχνότητα $f_i(t)$ (σε Hz) συναρτήσει του χρόνου.

(iii) Τώρα σχεδιάστε το σήμα του ερωτήματος (i). Τοποθετήστε τη γραφική σας παράσταση στο μεσαίο πλαίσιο του γραφήματός σας, χρησιμοποιώντας την εντολή `subplot(3, 1, 2)`.

(iv) Δημιουργήστε τώρα μια γραφική παράσταση ενός ημιτονοειδούς 4-Hz. Τοποθετήστε τη γραφική σας παράσταση στο πάνω πλαίσιο του γραφήματός σας χρησιμοποιώντας την εντολή `subplot(3, 1, 1)`.

(v) Τέλος, δημιουργήστε μια γραφική παράσταση ενός ημιτονοειδούς 8-Hz. Τοποθετήστε τη γραφική σας παράσταση στο κάτω πλαίσιο του γραφήματός σας, χρησιμοποιώντας την εντολή `subplot(3, 1, 3)`.

(vi) Συγκρίνετε τα τρία σήματα και σχολιάστε σχετικά με το συχνοτικό περιεχόμενο του τερέτισματος. Εστιάστε την προσοχή σας στις συχνότητες του σήματος στο χρονικό διάστημα $1.6 \leq t \leq 2$ sec. Ποιά ημιτονοειδές αντιστοιχεί στο τερέτισμα, σ' αυτό το χρονικό διάστημα; Συγκρίνετε το αναμενόμενο $f_i(t)$ στο διάστημα αυτό με τα 4 Hz και 8 Hz.

**Πρόβλημα.-3.19**

Οι γραφικές παραστάσεις που φαίνονται στο Σχήμα Πρ.-3.19 δείχνουν κυματομορφές στην αριστερή πλευρά και φάσματα στη δεξιά. Αντιστοιχίστε το χαρακτήρα που

βρίσκεται σε κάθε κυματομορφή με τον αντίστοιχο αριθμό φάσματος. Σε κάθε περίπτωση, εκφράστε το σήμα σαν άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων.

Δειγματοληψία και Ψευδώνυμα Συχνοτήτων

Αυτό το κεφάλαιο αναφέρεται στη μετατροπή των αναλογικών σημάτων (συνεχούς χρόνου) σε ψηφιακά (διακριτού χρόνου¹) και αντίστροφα. Βασικός σκοπός της παρουσίασης μας είναι η κατανόηση του *θεωρήματος της δειγματοληψίας*, σύμφωνα με το οποίο όταν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι μεγαλύτερος από το διπλάσιο της μέγιστης συχνότητας που περιέχεται στο φάσμα του αναλογικού σήματος, τότε το αρχικό σήμα μπορεί να ανακατασκευαστεί ακριβώς από τα δείγματά του.

Η διαδικασία μετατροπής από ψηφιακό σε αναλογικό ονομάζεται *ανακατασκευή*. Ένα συνηθισμένο παράδειγμα είναι τα CD μουσικής. Η μουσική δειγματοληπτείται με συχνότητα 44.1KHz και αποθηκεύεται σε ψηφιακή

μορφή, από την οποία ένα σύστημα αναπαραγωγής CD ανακατασκευάζει τη συνεχή (αναλογική) κυματομορφή που ακούμε. Η διαδικασία ανακατασκευής ουσιαστικά είναι μια διαδικασία παρεμβολής, επειδή πρέπει να “συμπληρώσουμε” τις τιμές του σήματος ανάμεσα στις χρονικές στιγμές των δειγμάτων t_n κατασκευάζοντας μια ομαλή κυματομορφή, διαμέσου των τιμών των δειγμάτων διακριτού χρόνου $x(t_n)$. Αν και η διαδικασία αυτή μπορεί να μελετηθεί στο πεδίο του χρόνου ως μια διαδικασία παρεμβολής, θα δούμε ότι η αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας βοηθάει πολύ στην κατανόηση σημαντικών θεμάτων που αφορούν τη δειγματοληψία.

4-1 Δειγματοληψία

Ημιτονοειδείς κυματομορφές που ορίζονται μέσω της σχέσης:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (4.1)$$

¹Η ορολογία για σήματα διακριτού χρόνου δεν είναι καθολική, έτσι μπορεί περιστασιακά όταν αναφερόμαστε στο $x[n]$ να χρησιμοποιούμε τη λέξη *ακολουθία* αντί για σήμα, ή το επίθετο *ψηφιακό* αντί για διακριτού χρόνου.

αποτελούν παραδείγματα σημάτων **συνεχούς χρόνου**. Συνηθίζεται επίσης να αναφέρουμε αυτά τα σήματα σαν **αναλογικά** σήματα επειδή υποθέτουμε ότι το πλάτος του σήματος, όπως και η χρονική μεταβλητή, είναι πραγματικοί αριθμοί. Τα σήματα συνεχούς χρόνου παριστάνονται μαθηματικά ως συναρτήσεις του χρόνου, $x(t)$, όπου t συνεχής μεταβλητή. Σε προηγούμενα κεφάλαια έχουμε παραστήσει με τη βοήθεια γραφικών παραστάσεων αναλογικές κυματομορφές, χρησιμοποιώντας το Matlab αλλά στην πραγματικότητα δεν έχουμε αναπαραστήσει την κυματομορφή συνεχούς χρόνου. Ουσιαστικά, έχουμε σχεδιάσει τις τιμές της κυματομορφής σε μεμονωμένες (διακριτές) χρονικές στιγμές και στη συνέχεια ενώσαμε αυτές τις τιμές με ευθείες γραμμές (γραμμική παρεμβολή). Στην πραγματικότητα, οι ψηφιακοί υπολογιστές δε μπορούν να αναπαραστήσουν άμεσα σήματα συνεχούς χρόνου, αλλά πρέπει να τα αναπαραστήσουν και να τα διαχειριστούν αριθμητικά (όπως στο Matlab) ή μερικές φορές συμβολικά (όπως στο Mathematica ή το Maple). Το βασικό είναι ότι κάθε αναπαράσταση στον υπολογιστή είναι διακριτή. (Θυμηθείτε τη συζήτηση στην Ενότητα 2-4 στη Σελίδα 18.) Ένα **σήμα διακριτού χρόνου** παριστάνεται μαθηματικά από μια δεικτοδοτημένη ακολουθία αριθμών. Όταν η ακολουθία αποθηκεύεται σ' έναν ψηφιακό υπολογιστή, οι τιμές του σήματος κρατούνται σε θέσεις μνήμης, έτσι ώστε να είναι δεικτοδοτημένες από τις διευθύνσεις μνήμης. Τις τιμές ενός σήματος διακριτού χρόνου τις συμβολίζουμε ως $x[n]$, όπου n είναι ακέραιος δείκτης που δηλώνει τη σειρά των τιμών στην ακολουθία. Οι αγκύλες $[\]$ που περιλαμβάνουν το n διαφοροποιούν το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ από το αντίστοιχο διακριτού χρόνου $x[n]$.

Τα σήματα διακριτού χρόνου μπορούν να προκύψουν με οποιονδήποτε από τους ακόλουθους τρόπους:

- (i) Μπορούμε να **δειγματοληψήσουμε** ένα σήμα συνεχούς χρόνου σε ισαπέχουσες χρονικές στιγμές, $t_n = nT_s$,

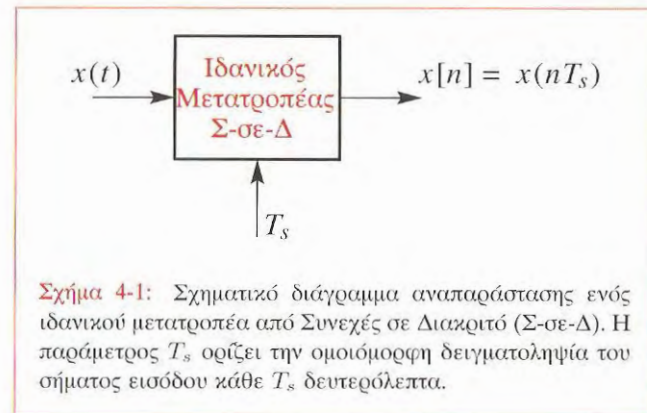
$$x[n] = x(nT_s) \quad -\infty < n < \infty, \quad (4.2)$$

όπου $x(t)$ παριστά οποιοδήποτε συνεχές μεταβαλλόμενο σήμα, π.χ., φωνή ή ήχο. Οι τιμές του $x[n]$

ονομάζονται **δείγματα** του σήματος συνεχούς χρόνου. Το σταθερό χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών δειγμάτων T_s , μπορεί επίσης να εκφραστεί ως σταθερός **ρυθμός δειγματοληψίας** f_s σε δείγματα ανά δευτερόλεπτο:

$$f_s = \frac{1}{T_s} \text{ δείγματα/δευτερόλεπτο.}$$

Επομένως, ένας εναλλακτικός τρόπος να γράψουμε



την ακολουθία στη Σχέση (4.2) είναι $x[n] = x(n/f_s)$. Η δειγματοληψία μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μετασχηματισμός ή ένας τελεστής που δρα πάνω σε ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ για να δημιουργήσει μια έξοδο η οποία είναι το αντίστοιχο σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$. Συνηθίζουμε να ονομάζουμε ένα τέτοιο μετασχηματισμό **σύστημα** και να το παριστάνουμε γραφικά με ένα σχηματικό-διάγραμμα, που δείχνει τα σήματα εισόδου και εξόδου μαζί με ένα όνομα που περιγράφει τη λειτουργία του συστήματος. Η δειγματοληψία είναι ένα παράδειγμα **συστήματος** του οποίου η είσοδος είναι ένα σήμα συνεχούς χρόνου και η έξοδος του είναι ένα σήμα διακριτού χρόνου,

όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-1. Το σχηματικό-διάγραμμα του συστήματος του Σχήματος 4-1 αναπαριστά τη μαθηματική εξίσωση (4.2) και ονομάζεται *ιδανικός μετατροπέας Συνεχούς-σε-Διακριτό (Σ-σε-Δ)*. Ο εξιδανικευμένος μαθηματικός τύπος του είναι χρήσιμος για ανάλυση, αλλά ένα πραγματικό σύστημα δειγματοληψίας είναι ένας μετατροπέας αναλογικού σε ψηφιακό (Α-σε-Ψ), ο οποίος προσεγγίζει την λειτουργία του ιδανικού μετατροπέα Σ-σε-Δ. Οι μετατροπείς Α-σε-Ψ διαφέρουν από τους Σ-σε-Δ εξ αιτίας πρακτικών προβλημάτων όπως είναι η κβάντιση του πλάτους σε 12 ή 16 bit, η αστάθεια στους χρόνους δειγματοληψίας, κι άλλοι παράγοντες που είναι δύσκολο να αναλυθούν. Από τη στιγμή που μπορούμε να αποφύγουμε αυτούς τους παράγοντες με προσεχτικό σχεδιασμό, μπορούμε με ασφάλεια να περιορίσουμε την παρουσίασή μας στο ιδανικό σύστημα Σ-σε-Δ.

- (ii) Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τις τιμές ενός σήματος διακριτού χρόνου απευθείας από μια μαθηματική σχέση. Ένα απλό παράδειγμα είναι το ακόλουθο:

$$w[n] = n^2 - 5n + 3$$

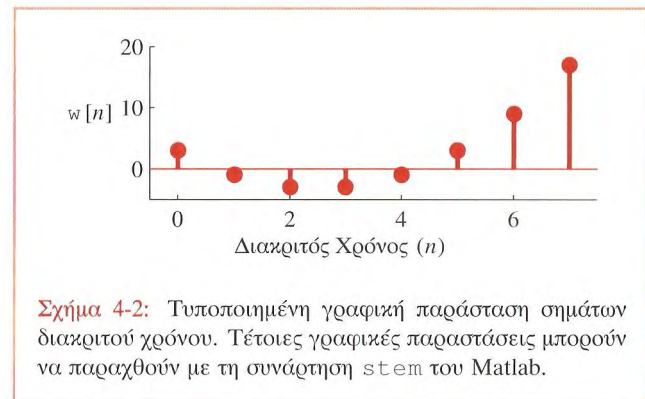
που καθορίζει την ακολουθία των τιμών $\{3, -1, -3, -3, -1, 3, 9, \dots\}$ που αντιστοιχούν στους δείκτες $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$. Παρόλο που είναι πιθανό να μην υπάρχει ένα συγκεκριμένο σήμα συνεχούς χρόνου το οποίο θα δειγματοληπτείται, εμείς μολαπαύτα θα αναφέρουμε συχνά τις μεμονωμένες τιμές των ακολουθιών, σαν *δείγματα*. Στη μελέτη μας πάνω στα σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου, θα χρησιμοποιήσουμε πολύ τα σήματα διακριτού χρόνου που περιγράφονται από συγκεκριμένες σχέσεις.

Για την παράσταση των σημάτων διακριτού χρόνου, θα χρησιμοποιούμε την τυποποίηση του Σχήματος 4-2, που δείχνει οκτώ τιμές (δείγματα) της ακολουθίας $w[n]$. Τέτοιες γραφικές παραστάσεις δείχνουν καθαρά ότι το σήμα έχει τιμές μόνο για ακέραιες τιμές

του δείκτη n , μεταξύ των οποίων, το σήμα διακριτού χρόνου δεν ορίζεται.

4-1.1 Δειγματοληψία Ημιτονοειδών Σημάτων

Τα ημιτονοειδή σήματα αποτελούν παραδείγματα σημάτων συνεχούς χρόνου που υπάρχουν στην πράξη και τα οποία μπορούμε να ορίσουμε με μια απλή μαθηματική σχέση. Επειδή τα περισσότερα σήματα συνεχούς χρόνου μπορούν να παρασταθούν ως αθροίσματα ημιτονικών σημάτων και επειδή τα αποτελέσματα της δειγματοληψίας ημιτονικών σημάτων μπορούν να κατανοηθούν εύκολα, θα τα χρησιμοποιήσουμε σαν βάση στη μελέτη μας για τη δειγματοληψία. Αν δειγματοληπτήσουμε ένα σήμα του



Σχήμα 4-2: Τυποποιημένη γραφική παράσταση σημάτων διακριτού χρόνου. Τέτοιες γραφικές παραστάσεις μπορούν να παραχθούν με τη συνάρτηση `stem` του Matlab.

τύπου που περιγράφεται στη Σχέση (4.1), παίρνουμε

$$\begin{aligned} x[n] &= x(nT_s) \\ &= A \cos(\omega n T_s + \phi) \\ &= A \cos(\hat{\omega} n + \phi), \end{aligned} \quad (4.3)$$

όπου η συχνότητα $\hat{\omega}$ ορίζεται ως ακολούθως:

$$\hat{\omega} = \omega T_s = \frac{\omega}{f_s} \quad (4.4)$$

Το σήμα $x[n]$ στη Σχέση (4.3) είναι ένα *συνημιτονικό σήμα διακριτού χρόνου* και η $\hat{\omega}$ είναι η *διακριτού χρόνου συχνότητά* του.

Χρησιμοποιούμε το σύμβολο “.” πάνω από το ω για να δηλώσουμε ότι αυτή είναι μια νέα μεταβλητή συχνότητας. Είναι μια κανονικοποιημένη έκδοση της γωνιακής συχνότητας συνεχούς χρόνου σε σχέση με την συχνότητα δειγματοληψίας. Αφού το ω έχει μονάδες rad/sec (ακτίνια/δευτερόλεπτο), οι μονάδες του $\hat{\omega} = \omega T_s$ είναι ακτίνια, δηλαδή, το $\hat{\omega}$ είναι αδιάστατη ποσότητα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο δείκτης n στο σήμα $x[n]$ δεν έχει μονάδες. Άραξ και πάρουμε τα δείγματα από το σήμα $x(t)$, η χρονική πληροφορία χάνεται. Το σήμα διακριτού χρόνου είναι απλά μια ακολουθία αριθμών και οι αριθμοί αυτοί δεν μεταφέρουν καμιά πληροφορία σχετικά με την περίοδο δειγματοληψίας, T_s , που χρησιμοποιήθηκε για να τους αποκτήσουμε. Μια άμεση συνέπεια αυτής της παρατήρησης είναι ότι μέσω της δειγματοληψίας ένας άπειρος αριθμός ημιτονικών σημάτων συνεχούς χρόνου, μπορεί να μετασχηματιστεί στο ίδιο ημιτονικό σήμα διακριτού χρόνου. Το μόνο που απαιτείται είναι να αλλάξουμε την περίοδο δειγματοληψίας, αντιστρόφως ανάλογα με τη συχνότητα του ημιτονικού σήματος συνεχούς χρόνου. Για παράδειγμα, αν $\omega = 200\pi$ rad/sec και $T_s = 1/2000$ δευτερόλεπτα, τότε $\hat{\omega} = 0.1\pi$ ακτίνια. Ενώ, αν $\omega = 1000\pi$ ακτίνια /δευτερόλεπτο και $T_s = 1/10000$ δευτερόλεπτα, τότε το $\hat{\omega}$ εξακολουθεί να είναι ίσο με 0.1 ακτίνια.

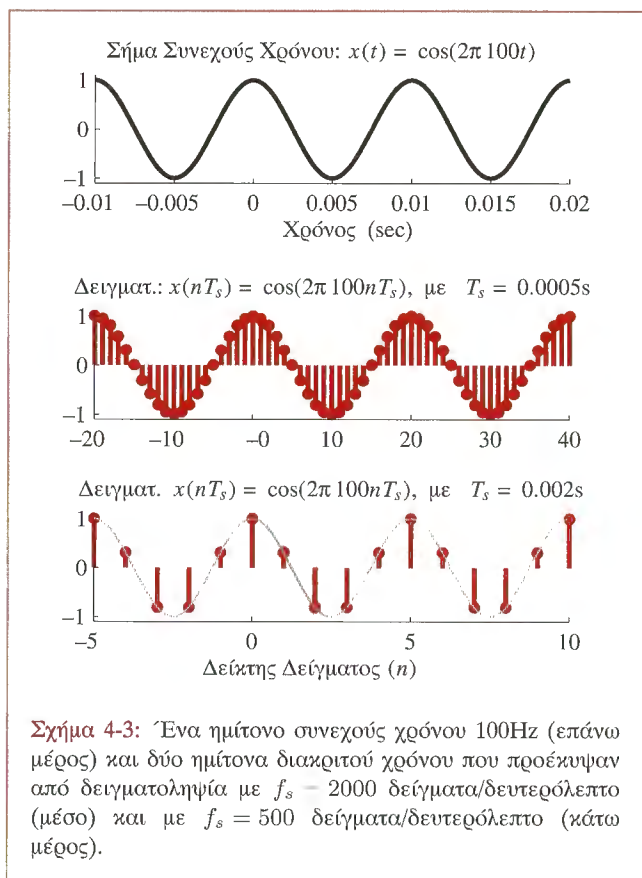
Στο πάνω πλαίσιο του Σχήματος 4-3 φαίνεται το σήμα $x(t) = \cos(200\pi t)$, που είναι ένα ημιτονικό σήμα συνεχούς χρόνου συχνότητας $f_0 = 100$ Hz. Στο μεσαίο πλαίσιο του ίδιου σχήματος φαίνονται τα δείγματα που προκύπτουν με συχνότητα δειγματοληψίας $T_s = 0.5$ msec. Η ακολουθία δίνεται από τον τύπο $x[n] = x(nT_s) = \cos(0.1\pi n)$, έτσι η γωνιακή συχνότητα διακριτού χρόνου είναι $\hat{\omega}_0 = 0.1\pi$. (Αφού το $\hat{\omega}_0$ είναι αδιάστατο, είναι περιττό να ορίζουμε ως μονάδα του το ακτίνιο.) Ο ρυθμός δειγματοληψίας σε αυτό το παράδειγμα είναι $f_s = 1/T_s = 2000$ δείγματα/δευτερόλεπτο. Οι τιμές των δειγμάτων σχεδιάζονται σαν διακριτά σημεία όπως φαίνεται στο μεσαίο πλαίσιο

του Σχήματος 4-3. Τα σημεία δεν ενώνονται με συνεχείς καμπύλες διότι δεν διαθέτουμε καμιά πληροφορία σχετικά με τις τιμές της συνάρτησης μεταξύ των δειγμάτων. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν 20 τιμές που δειγματοληπτούνται ανά περίοδο του σήματος, επειδή η συχνότητα δειγματοληψίας (2000 δείγματα/δευτερόλεπτο) είναι 20 φορές μεγαλύτερη από τη συχνότητα του συνεχούς χρόνου σήματος (100Hz). Σε αυτήν τη γραφική παράσταση εμφανίζεται ότι οι δειγματοληφθείσες τιμές είναι από μόνες τους αρκετές για την οπτική ανακατασκευή μιας συνημιτονικής κυματομορφής συνεχούς χρόνου, αλλά χωρίς γνώση του ρυθμού δειγματοληψίας, δεν μπορούμε να πούμε ποια μπορεί να είναι η συχνότητα ω . Ένα άλλο παράδειγμα δειγματοληψίας φαίνεται στο κάτω μέρος του Σχήματος 4-3. Στην περίπτωση αυτή, το ημίτονο συχνότητας 100 Hz δειγματοληπτείται με χαμηλότερο ρυθμό ($f_s = 500$ δείγματα/δευτερόλεπτο) δίνοντας την ακολουθία $x[n] = \cos(0.4n)$. Η γωνιακή συχνότητα διακριτού χρόνου είναι $\hat{\omega} = 0.4\pi$. Ο χρόνος ανάμεσα στα δείγματα είναι $T_s = 1/f_s = 2$ msec και έτσι υπάρχουν μόνο πέντε δείγματα ανά περίοδο του σήματος συνεχούς χρόνου. Παρατηρήστε ότι αν δεν υπερθέσουμε την αρχική κυματομορφή, είναι δύσκολο να διακρίνουμε την ακριβή μορφή του ημιτονικού σήματος συνεχούς χρόνου.



Άσκηση 4.1: Αν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι $f_s = 1000$ samples/sec. και το σήμα συνεχούς χρόνου είναι το $x(t) = \cos(t)$, ποια τιμή του ω θα δώσει μια ακολουθία δειγμάτων ίδια με το σήμα διακριτού χρόνου που φαίνεται στο κάτω μέρος του Σχήματος 4-3;

Με μια πρώτη ματιά, η Άσκηση 4.1 φαίνεται να ζητάει κάτι πολύ απλό, επειδή μπορούμε να λύσουμε τη Σχέση (4.4) ως προς ω και να πάρουμε $\omega = (0.4\pi)f_s = 400\pi$ rad/sec. Αλλά είναι αυτή η μόνη σωστή απάντηση; Για να κατανοήσουμε και να απαντήσουμε αυτή την ερώτηση, χρειάζεται να κοιτάξουμε πιο προσεκτικά τη διαδικασία της δειγματοληψίας και μια θεμελιώδη έννοια που θα ονομάσουμε *ψευδωνυμία*.



4-1.2 Τα Ψευδώνυμα των Συχνότητων

Ένας απλός ορισμός της λέξης ψευδώνυμο θα περιελάμβανε κάτι σαν “δυο ονόματα για το ίδιο πρόσωπο ή πράγμα.” Ας δούμε όμως πώς προκύπτουν τα ψευδώνυμα στους μαθηματικούς χειρισμούς των σημάτων διακριτού χρόνου και συγκεκριμένα των ημιτονικών σημάτων διακριτού χρόνου. Το ημιτονικό σήμα $x_1[n] = \cos(0.4\pi n)$ αποτελεί το μαθηματικό τύπο της γραφικής παράστασης, που φαίνεται στο κάτω μέρος του Σχήματος 4-3 και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ως ένα “όνομα” που προσδιορίζει αυτό το σήμα. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα άλλο

ημιτονικό σήμα $x_2[n] = \cos(2.4\pi n)$, το οποίο προφανώς είναι διαφορετικής συχνότητας. Για να δούμε πώς θα είναι μια γραφική παράσταση του $x_2[n]$, χρησιμοποιούμε την απλή τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$, κι έχουμε:

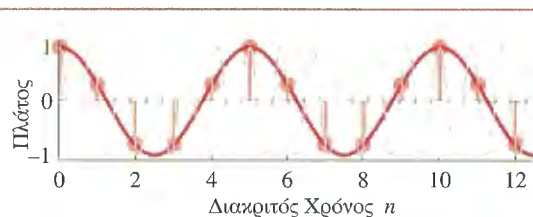
$$\begin{aligned} x_2[n] &= \cos(2.4\pi n) \\ &= \cos(0.4\pi n + 2\pi n) \\ &= \cos(0.4\pi n) \end{aligned}$$

αφού το $2\pi n$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου της συνημιτονικής συνάρτησης. Δηλαδή το φαινόμενο που ονομάζουμε ψευδωνυμία οφείλεται αποκλειστικά στην περιοδικότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.



Επίδειξη: Θεωρία Δειγματοληψίας

Το Σχήμα 4-4 δείχνει ότι οι γραφικές παραστάσεις αυτών των δύο σημάτων, $x_1[n] = \cos(0.4\pi n)$ και $x_2[n] = \cos(2.4\pi n)$, ταυτίζονται. Στο ίδιο σχήμα έχουν



Σχήμα 4-4: Επεξήγηση του φαινομένου της ψευδωνυμίας: δύο σήματα συνεχούς χρόνου σχεδιασμένα μέσω των ίδιων δειγμάτων. Τα δείγματα ανήκουν σε δύο διαφορετικών συχνοτήτων συνημιτονικά σήματα, αλλά οι συνημιτονικές συναρτήσεις έχουν τις ίδιες τιμές για $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

σχεδιαστεί επίσης οι γραφικές παραστάσεις των σημάτων συνεχούς χρόνου $\cos(0.4\pi t)$ και $\cos(2.4\pi t)$, από τις οποίες προκύπτουν τα σήματα $x_1[n]$ και $x_2[n]$, αν δειγματοληπτηθούν με $T_s = 1sec$. Από το Σχήμα 4-4 είναι

φανερό ότι οι τιμές αυτών των συνεχών συνημιτονικών σημάτων είναι ίσες για τις ακέραιες τιμές του n . Αφού $x_2[n] = x_1[n]$ για όλους τους ακέραιους n , βλέπουμε ότι το $x_2[n] = \cos(2.4\pi n)$ είναι ουσιαστικά ένα άλλο όνομα για την ίδια γραφική παράσταση, το ίδιο σήμα διακριτού χρόνου. Αυτό είναι ένα *ψευδώνυμο*.

Η συχνότητα του σήματος $x_2[n]$ είναι $\hat{\omega} = 2.4\pi$, ενώ η συχνότητα του $x_1[n]$ είναι $\hat{\omega} = 0.4\pi$. Όταν αναφερόμαστε σε συχνότητες, θα λέμε ότι η συχνότητα 2.4 είναι ένα *ψευδώνυμο* της συχνότητας 0.4. Υπάρχουν πολύ περισσότερα ψευδώνυμα όπως προκύπτει από την άσκηση που ακολουθεί.



Άσκηση 4.2: Αποδείξτε ότι ένα ψευδώνυμο του σήματος $7 \cos(0.4\pi n - 0.2\pi)$, είναι το σήμα $7 \cos(8.4\pi n - 0.2\pi)$. Βρείτε δύο επιπλέον συχνότητες οι οποίες είναι ψευδώνυμα της συχνότητας $0.4\pi \text{ rad}$.

Στην προηγούμενη άσκηση, ήταν εύκολο να δούμε ότι προσθέτοντας οποιοδήποτε ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π στο 0.4π δίνει ένα νέο ψευδώνυμο της συχνότητας 0.4π . Άρα για τα ψευδώνυμα ισχύει ο επόμενος γενικός τύπος²:

$$\hat{\omega}_\ell = 0.4\pi + 2\pi\ell \quad \ell = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.5)$$

Αφού η $\hat{\omega} = 0.4\pi$ είναι η μικρότερη από όλες τις παραπάνω συχνότητες, μερικές φορές αναφέρεται ως το *κύριο ψευδώνυμο*.

Ωστόσο, δεν τελειώσαμε ακόμα. Υπάρχουν και άλλα ψευδώνυμα. Μια άλλη τριγωνομετρική ταυτότητα μας λέει ότι το $\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$, έτσι μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα άλλο ψευδώνυμο του $x_1[n] = \cos(0.4\pi n)$ ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} x_3[n] &= \cos(1.6\pi n) \\ &= \cos(2\pi n - 0.4\pi n) \\ &= \cos(0.4\pi n) \end{aligned}$$

²Ο ακέραιος ℓ μπορεί να είναι αρνητικός, αν επιτρέψουμε αρνητικές συχνότητες, αλλά για την ώρα αποφεύγουμε την περίπτωση αυτή.

Η συχνότητα του $x_3[n]$ είναι 1.6π . Ένας γενικός τύπος για όλες τις συχνότητες ψευδωνύμων αυτού του τύπου είναι ο ακόλουθος:

$$\hat{\omega}_\ell = -0.4\pi + 2\pi\ell \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

Για λόγους που θα διευκρινιστούν παρακάτω, τα ψευδώνυμα που αντιστοιχούν σε αρνητικές συχνότητες καλούνται *αναδιπλούμενα ψευδώνυμα*.

Αν εξετάσουμε τα ψευδώνυμα του γενικού ημιτονικού σήματος διακριτού χρόνου (4.3), παρουσιάζεται μια επιπλέον πολυπλοκότητα για την περίπτωση της αναδίπλωσης όπως προκύπτει από την ανάλυση που ακολουθεί:

$$\begin{aligned} A \cos((2\pi - \hat{\omega})n - \phi) &= A \cos(2\pi n - \hat{\omega}n - \phi) \\ &= A \cos(-\hat{\omega}n - \phi) \\ &= A \cos(\hat{\omega}n + \phi) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της γωνίας φάσης των αναδιπλούμενων ψευδωνύμων πρέπει να είναι αντίθετο από το πρόσημο της γωνίας φάσης του κύριου ψευδωνύμου.



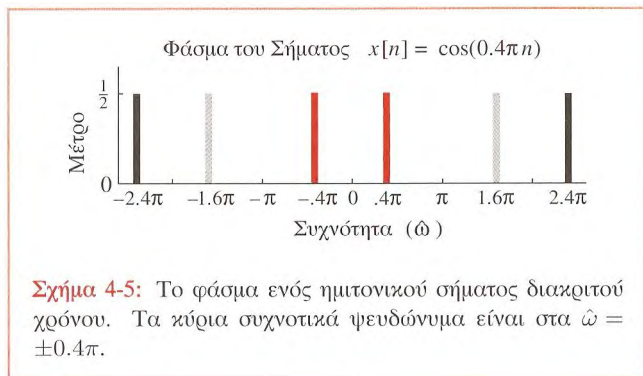
Άσκηση 4.3: Να δείξετε ότι το σήμα $7 \cos(9.6\pi n + 0.2\pi)$ είναι ένα ψευδώνυμο του σήματος $7 \cos(0.4\pi n - 0.2\pi)$. Κάνετε επίσης γραφικές παραστάσεις των δύο σημάτων στο Matlab για να επιβεβαιώσετε ότι για να ταυτίζονται οι γραφικές παραστάσεις θα πρέπει να αλλάξει το πρόσημο της φάσης.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να γράψουμε τους εξής γενικούς τύπους για όλα τα ψευδώνυμα ενός ημιτονικού σήματος συχνότητας $\hat{\omega}_0$:

$$\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_0 + 2\pi\ell, 2\pi\ell - \hat{\omega}_0, \quad (\ell = \text{ακέραιος}) \quad (4.8)$$

διότι τα ακόλουθα σήματα είναι ίσα για κάθε n :

$$\begin{aligned} A \cos(\hat{\omega}_0 n + \phi) &= A \cos((\hat{\omega}_0 + 2\pi\ell)n + \phi) \\ &= A \cos((2\pi\ell - \hat{\omega}_0)n - \phi) \end{aligned} \quad (4.9)$$



Αν θέλαμε να κάνουμε μια γραφική παράσταση όλων αυτών των σημάτων (για συγκεκριμένες τιμές των A , ω , ϕ και ℓ), δε θα μπορούσαμε να τα ξεχωρίσουμε, όπως φάνηκε στο παράδειγμα του Σχήματος 4-4.

4-1.3 Φάσμα Σήματος Διακριτού Χρόνου

Έχουμε δει ότι μερικές φορές είναι πολύ χρήσιμο να παριστάνουμε ένα ημιτονικό σήμα συνεχούς χρόνου μέσω της γραφικής παράστασης του φάσματός του. Πώς θα παριστάναμε γραφικά το φάσμα ενός σήματος διακριτού χρόνου; Το φαινόμενο της ψευδωνυμίας δημιουργεί προβλήματα γιατί μία δοθείσα ημιτονική ακολουθία διακριτού χρόνου θα μπορούσε να αντιστοιχεί σε έναν άπειρο αριθμό διαφορετικών συχνοτήτων ω . Η προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε λαμβάνει υπόψη της το πρόβλημα αυτό. Συγκεκριμένα, θα κάνουμε μια γραφική παράσταση στην οποία θα φαίνεται ότι υπάρχουν πολλά ημιτονοειδή από τα οποία με τη διαδικασία της δειγματοληψίας προκύπτουν τα ίδια δείγματα. Το Σχήμα 4-5 δείχνει ότι μπορούμε να το κάνουμε αυτό σχεδιάζοντας την φασματική αναπαράσταση του κύριου ψευδώνυμου μαζί με τα υπόλοιπα ψευδώνυμα³. Στο Σχήμα 4-5, η γραφική παράσταση του φάσματος περιλαμβάνει μια αναπαράσταση του κύριου ψευδώνυμου $x_1[n] = \cos(0.4\pi n)$ και δύο επιπλέον ψευδώνυμα, το

³Κανονικά θα έπρεπε να σχεδιάσουμε έναν άπειρο αριθμό ψευδώνυμων, κάτι βέβαια που είναι αδύνατο.

$x_2[n] = \cos(2.4\pi n)$ και το $x_3[n] = \cos(1.6\pi n)$. Θυμηθείτε ότι από τον τύπο του Euler (Σχέση (3.3)), το φάσμα ενός διακριτού χρόνου ημιτονοειδούς σήματος αποτελείται από μια θετική συχνοτική συνιστώσα και μια συνιστώσα στην αντίστοιχη αρνητική συχνότητα. Επομένως, το $x_1[n]$ παριστάνεται από τις συνιστώσες στα $\pm 0.4\pi$, το $x_2[n]$ παριστάνεται από τις συνιστώσες (μαύρο χρώμα) στα $\pm 2.4\pi$, κ.ο.κ.. Ένας άλλος τρόπος σκέψης για την κατασκευή της γραφικής παράστασης του Σχήματος 4-5 είναι ότι το φάσμα του κύριου ψευδώνυμου του σήματος που αποτελείται από τις συνιστώσες στα 0.4 μετακινήθηκε προς τα δεξιά κατά 2π και προς τα αριστερά κατά 2π , δηλαδή, το φάσμα μετατοπίστηκε κατά ακέραια πολλαπλάσια του 2π .

Στην περίπτωση της απεικόνισης του φάσματος ενός σήματος συνεχούς χρόνου, υποθέταμε ότι όλες οι φασματικές συνιστώσες προσθέτονταν μεταξύ τους για να συνθέσουν το σήμα συνεχούς χρόνου. Αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση του διακριτού χρόνου. Δείξαμε απεικονίσεις φάσματος διαφορετικών συχνοτήτων αναδίπλωσης, αλλά για να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι πολλές διαφορετικές συχνοότητες θα μπορούσαν να παράγουν την ίδια ακολουθία στο πεδίο του χρόνου. Στην περίπτωση ενός αθροίσματος ημιτονικών σημάτων διακριτού χρόνου, όπως το

$$y_1[n] = 2 \cos(0.4\pi n) + \cos(0.6\pi n) \quad (4.10)$$

θα κάναμε μια γραφική παράσταση όπως αυτή του Σχήματος 4-5 για καθένα από τα συνημιτονικά σήματα και θα τα υπερθέταμε σε μια ενιαία γραφική παράσταση. Για να συνθέσουμε το χρονικό σήμα που αντιστοιχεί σε μια δοθείσα φασματική απεικόνιση, πρέπει απλά να επιλέξουμε ένα σήμα από καθένα από τα σύνολα των συχνοτικών ψευδώνυμων. Για παράδειγμα, η Σχέση (4.10), περιλαμβάνει μόνο τα κύρια ψευδώνυμα, εφόσον τα 0.4π και 0.6π είναι και τα δύο μικρότερα του π .



Άσκηση 4.4: Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος της Σχέσης (4.10) όπως αυτό του Σχήματος 4-5 που να δείχνει το κύριο καθώς και άλλα δύο ψευδώνυμα. Πώς θα άλλαζε

η γραφική παράσταση αν το σήμα ήταν το

$$y_2[n] = 2 \cos(0.4\pi n) + \cos(2.6\pi n);$$

4-1.4 Το Θεώρημα Δειγματοληψίας

Οι γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 4-3 φυσικά γεννούν την ερώτηση πόσο συχνά πρέπει να δειγματοληπτούμε για να διατηρήσουμε αρκετή πληροφορία ώστε να είναι δυνατή η ανακατασκευή του αρχικού σήματος συνεχούς χρόνου, από τα δείγματά του. Η εξαιρετικά απλή απάντηση δίνεται από το *θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon*, ένα από τα θεωρητικά στηρίγματα των σύγχρονων ψηφιακών τηλεπικοινωνιών, του ψηφιακού ελέγχου και της ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων.

Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ με συχνότητες που δεν υπερβαίνουν την συχνότητα f_{\max} μπορεί να ανακατασκευαστεί ακριβώς από τα δείγματά του $x[n] = x(nT_s)$, αν τα δείγματα ληφθούν με ρυθμό $f_s = 1/T_s$ που είναι μεγαλύτερος από το $2f_{\max}$.

Παρατηρήστε ότι το θεώρημα δειγματοληψίας άπτεται δύο θεμάτων. Πρώτον, μιλάει για ανακατασκευή του σήματος από τα δείγματά του, αλλά δεν προσδιορίζει τον αλγόριθμο που θα χρησιμοποιήσουμε για να κάνουμε αυτή την ανακατασκευή. Δεύτερον, δίνει έναν ελάχιστο ρυθμό δειγματοληψίας ο οποίος εξαρτάται από το συχνотικό περιεχόμενο του σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$.

Ο ελάχιστος ρυθμός δειγματοληψίας $2f_{\max}$ αναφέρεται σαν *ρυθμός Nyquist*⁴. Μπορούμε να δούμε παραδείγματα του θεωρήματος δειγματοληψίας σε πολλά εμπορικά προϊόντα. Για παράδειγμα, τα ακουστικά CD χρησιμοποιούν

⁴Ο Harry Nyquist και ο Claude Shannon ήταν ερευνητές στα Bell Labs και συνέβαλαν θεμελιωδώς στη θεωρία της δειγματοληψίας και των ψηφιακών επικοινωνιών κατά την περίοδο 1920-1950.

ένα ρυθμό δειγματοληψίας 44.1 kHz για την αποθήκευση μουσικών σημάτων σε ψηφιακή μορφή. Αυτός ο ρυθμός είναι λίγο μεγαλύτερος από το διπλάσιο των 20 kHz, που είναι το γενικά αποδεκτό άνω όριο για την ανθρώπινη ακοή και αντίληψη των μουσικών ήχων. Σε άλλες εφαρμογές ο ρυθμός Nyquist είναι σημαντικός επειδή συνήθως παρακινούμαστε να χρησιμοποιούμε τον κατώτερο δυνατό ρυθμό δειγματοληψίας προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος του συστήματος σε απαιτήσεις μνήμης, σε ταχύτητα επεξεργασίας ανά δείγμα, κ.α.. Το θεώρημα του Shannon δηλώνει ότι η ανακατασκευή ενός ημιτονικού σήματος είναι δυνατή αν έχουμε τουλάχιστον δύο δείγματα ανά περίοδο. Τι συμβαίνει όμως όταν δε δειγματοληπτούμε αρκετά συχνά; Η απλή απάντηση είναι ότι συμβαίνει αναδίπλωση. Στα επόμενα κεφάλαια θα εμβαθύνουμε στο θέμα αυτό χρησιμοποιώντας μια φασματική άποψη της διαδικασίας μετατροπής Σ-σε-Δ. Πριν από αυτό στις επόμενες δύο παραγράφους εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας για δεύτερη φορά στο φαινόμενο της ψευδωνμίας και αναδίπλωσης.

4-1.5 Ψευδώνυμα Συχνοτήτων

Το Θεώρημα του Shannon δηλώνει ότι η ανακατασκευή ενός ημιτοειδούς είναι δυνατή αν έχουμε τουλάχιστον δύο δείγματα του σήματος ανά περίοδο. Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση που δεν δειγματοληπτούμε αρκετά γρήγορα; Μπορούμε να αποδείξουμε μια σχέση η οποία συνδέει τη συχνότητα του σήματος f_0 και το ρυθμό δειγματοληψίας f_s θεωρώντας την περίπτωση του ακόλουθου ημιτονοειδούς σήματος συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (4.11)$$

Αν δειγματοληπτήσουμε το $x(t)$ με περίοδο δειγματοληψίας T_s , προκύπτει η ακολουθία $x[n]$ με τιμές

$$x[n] = x(nT_s) = A \cos(2\pi f_0 nT_s + \phi) \quad (4.12)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα άλλο ημιτονοειδές με το ίδιο πλάτος και φάση, αλλά με συχνότητα $f_0 + \ell f_s$, όπου ℓ είναι

έναν ακέραιο και $f_s = 1/T_s$.

$$y(t) = A \cos(2\pi(f_0 + \ell f_s)t + \phi)$$

Αν αυτό το δεύτερο σήμα $y(t)$, δειγματοληπτηθεί με περίοδο T_s , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} y[n] = y(nT_s) &= A \cos(2\pi(f_0 + \ell f_s)nT_s + \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 nT_s + 2\pi \ell n f_s T_s + \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 nT_s + 2\pi \ell n + \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 nT_s + \phi) \\ &= x[n] \end{aligned}$$

Δηλαδή, η ακολουθία $y[n]$ έχει τις ίδιες τιμές με την ακολουθία $x[n]$ και επομένως δεν μπορούμε να το ξεχωρίσουμε από το $x[n]$. Αφού ο ℓ ήταν ένας οποιοσδήποτε ακέραιος (είτε θετικός είτε αρνητικός), αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας άπειρος αριθμός ημιτονοειδών που δίνουν την ίδια ακολουθία δειγμάτων όπως αυτών της ακολουθίας $x[n]$. Οι συχνότητες $f_0 + \ell f_s$ ονομάζονται *ψευδώνυμα* της συχνότητας f_0 σε σχέση με τη συχνότητα δειγματοληψίας f_s , μια και όλες τους εμφανίζονται να είναι ίδιες όταν δειγματοληπτηθούν με ρυθμό f_s .

4-1.6 Αναδίπλωση

Μια δεύτερη πηγή ψευδώνυμων είναι οι αρνητικές συχνότητες. Οι συχνότητες αυτές είναι οι $-f_0 + \ell f_s$, όπου ℓ είναι ένας θετικός ή αρνητικός ακέραιος. Ας θεωρήσουμε ένα τρίτο σήμα

$$w(t) = A \cos(2\pi(-f_0 + \ell f_s)t - \phi)$$

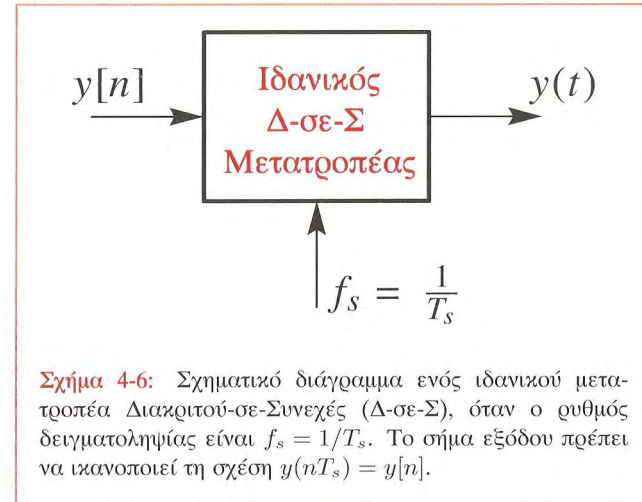
του οποίου η αρχική φάση είναι η αντίθετη αυτού της Σχέσης (4.11). Αν δειγματοληπτήσουμε το σήμα $w(t)$ με περίοδο δειγματοληψίας T_s , προκύπτει η ακολουθία

$$\begin{aligned} w[n] = w(nT_s) &= A \cos(2\pi(-f_0 + \ell f_s)nT_s - \phi) \\ &= A \cos(-2\pi f_0 nT_s + 2\pi \ell n f_s T_s - \phi) \\ &= A \cos(-2\pi f_0 nT_s + 2\pi \ell n - \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 nT_s + \phi) \\ &= x[n] \end{aligned}$$

Η τέταρτη γραμμή σε αυτή τη σχέση είναι σωστή αφού η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι μια άρτια συνάρτηση, δηλαδή, $\cos(-\theta) = \cos \theta$.

4-1.7 Ιδανική Ανακατασκευή

Το θεώρημα δειγματοληψίας δηλώνει σαφώς ότι υπάρχει μια διαδικασία ανακατασκευής ενός σήματος συνεχούς χρόνου από τα δείγματά του. Αυτή η διαδικασία ανακατασκευής ουσιαστικά αναιρεί τη μετατροπή Σ-σε-Δ και για το λόγο αυτό ονομάζεται μετατροπή Δ-σε-Σ. Ο ιδανικός μετατροπέας Δ-σε-Σ φαίνεται στο Σχήμα 4-6. Αφού η διαδικασία δειγματοληψίας του ιδανικού μετατροπέα Σ-σε-Δ ορίζεται από την αντικατάσταση $t = n/f_s$, όπως φαίνεται στη Σχέση (4.2), θα περιμέναμε η ίδια σχέση να διέπει και τον ιδανικό μετατροπέα Δ-σε-Σ, δηλαδή,



$$y(t) = y[n]_{n=f_s t} \quad -\infty < n < \infty \quad (4.13)$$

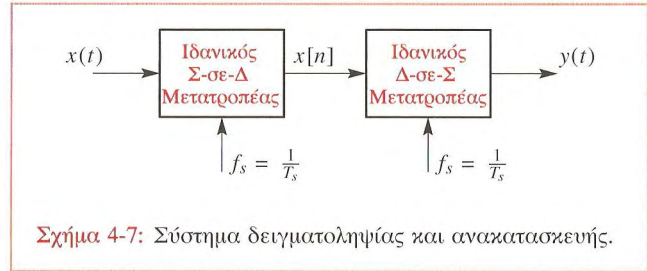
αλλά αυτή η αντικατάσταση είναι σωστή *μόνο* όταν το $y(t)$ είναι ένα άθροισμα ημιτονικών σημάτων. Στην ειδική αυτή περίπτωση που το $y[n]$ αποτελείται από

ένα ή περισσότερα ημιτονικά σήματα διακριτού χρόνου, όπως το $y[n] = A \cos(2\pi f_0 n T_s + \phi)$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση στη Σχέση (4.13) για να δημιουργήσουμε στην έξοδο του μετατροπέα Δ-σε-Σ το σήμα $y(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$. Αυτό είναι βολικό αφού προκύπτει μια μαθηματική σχέση για το $y(t)$. Αν όμως έχουμε μόνο μια ακολουθία αριθμών για το $y[n]$, που προέκυψε από δειγματοληψία και δεν ξέρουμε τον τύπο για το $y[n]$ ή δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος για το σήμα, τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά. Ένας πραγματικός μετατροπέας Ψ-σε-Α περιλαμβάνει περισσότερα από την αντικατάσταση (4.13), επειδή πρέπει να "συμπληρώσει" τις τιμές του σήματος ανάμεσα στις χρονικές στιγμές δειγματοληψίας, $t_n = nT_s$. Στην Ενότητα 4-4 θα δούμε πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η διαδικασία της *παρεμβολής* για να κατασκευάσουμε ένα μετατροπέα Α-σε-Ψ που προσεγγίζει τη συμπεριφορά του ιδανικού μετατροπέα Σ-σε-Δ. Αργότερα στο Κεφάλαιο 12, θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία του μετασχηματισμού Fourier για να δείξουμε πώς θα κατασκευάζουμε καλύτερους μετατροπείς Α-σε-Ψ, ενσωματώνοντας ένα κατωπερατό (ηλεκτρονικό) φίλτρο.

Αν ο ιδανικός μετατροπέας Σ-σε-Δ δουλεύει σωστά για ένα συνημιτονικό σήμα, τότε μπορούμε να περιγράψουμε τη λειτουργία του σαν *κλιμάκωση συχνότητας*. Για το παραπάνω σήμα $y[n]$, η συχνότητα διακριτού χρόνου είναι $\hat{\omega} = 2\pi f_0 T_s$ και η συχνότητα συνεχούς χρόνου του σήματος $y(t)$ είναι $\omega = 2\pi f_0$. Επομένως, η σχέση φαίνεται να είναι $\omega = \hat{\omega}/T_s = \hat{\omega} f_s$. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε αυτό το αποτέλεσμα αν λύσουμε τη Σχέση (4.4) της κλιμάκωσης της συχνότητας ως προς ω ,

$$\omega = \hat{\omega} f_s \quad (4.14)$$

Άρα κάθε συχνотική συνιστώσα ενός σήματος διακριτού χρόνου θα μπορούσε να απεικονιστεί σε μια συχνотική συνιστώσα του συνεχούς χρόνου σήματος εξόδου. Αλλά υπάρχει κι ένα θέμα ακόμα: το σήμα διακριτού χρόνου έχει συχνότητες αναδίπλωσης (ένας άπειρος αριθμός από αυτές δίνεται στη Σχέση (4.8)). Ποιά συχνότητα διακριτού χρόνου θα χρησιμοποιηθεί στη Σχέση (4.14);



Ο κανόνας επιλογής είναι αυθαίρετος, αλλά ο ιδανικός μετατροπέας Σ-σε-Δ πάντοτε επιλέγει τις μικρότερες δυνατές συχνотικές συνιστώσες (ουσιαστικά τις συχνότητες που αντιστοιχούν στα κύρια ψευδώνυμα). Οι συχνότητες αυτές βρίσκονται σίγουρα στο διάστημα $-\pi < \hat{\omega} \leq \pi$, όποτε όταν μετατρέπουμε την $\hat{\omega}$ σε αναλογική συχνότητα, η συχνότητα της εξόδου *πάντα βρίσκεται μέσα στο διάστημα $-\frac{1}{2}f_s$ και $+\frac{1}{2}f_s$* .



Επίδειξη: Δειγματοληψία

Συνοψίζοντας, το θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon, εγγυάται ότι αν το $x(t)$ δεν περιέχει συχνότητες υψηλότερες από τη συχνότητα f_{\max} και αν $f_s > 2f_{\max}$, τότε το σήμα εξόδου $y(t)$ του ιδανικού μετατροπέα Δ-σε-Σ είναι *ίσο* με το σήμα $x(t)$, δηλαδή την είσοδο του ιδανικού μετατροπέα Σ-σε-Δ του Σχήματος 4-7.

4-2 Φασματική Ερμηνεία Δειγματοληψίας και Ανακατασκευής

Θα παρουσιάσουμε τώρα μια ερμηνεία της διαδικασίας δειγματοληψίας που βασίζεται στο φάσμα. Επειδή η έξοδος του μετατροπέα Σ-σε-Δ είναι ένα σήμα διακριτού χρόνου με άπειρο αριθμό ψευδώνυμων, θα χρησιμοποιήσουμε το διάγραμμα φάσματος που περιλαμβάνει όλα τα ψευδώνυμα, όπως συζητήθηκε στην Ενότητα 4-1.3. Στη συνέχεια οι συχνότητες αναδίπλωσης και τα ψευδώνυμα των συχνотήτων του Σχήματος 4-7, μπορούν να παρακολουθηθούν με τη μετακίνηση των φασματικών γραμμών στο πεδίο της συχνότητας.



Επίδειξη: Ψευδωνυμία και Αναδίπλωση

4-2.1 Φάσμα Σήματος Διακριτού Χρόνου που Προκύπτει από Δειγματοληψία

Όταν το ημιτονικό σήμα διακριτού χρόνου της Σχέσης (4.3) προκύπτει από δειγματοληψία, η συχνότητά του δίνεται από τη Σχέση (4.4). Αν συμπεριλάβουμε όλα τα ψευδώνυμα, όπως προβλέπεται από τη Σχέση (4.8), είναι απαραίτητο να παραστήσουμε γραφικά έναν άπειρο αριθμό φασματικών γραμμών προκειμένου να έχουμε μια ολοκληρωμένη παράσταση του φάσματος. Φυσικά, μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά μόνο μερικά από αυτά και ίσως να δηλώνουμε ότι υπάρχουν περισσότερα έξω από το εύρος της γραφικής μας παράστασης. Ας υποθέσουμε ότι ξεκινάμε με ένα ημιτονικό σήμα συνεχούς χρόνου, $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ του οποίου το φάσμα αποτελείται από δύο φασματικές γραμμές στο $\pm\omega_0$ με μαγδικά πλάτη $\frac{1}{2}Ae^{\pm j\phi}$.



Άσκηση 4.5: Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος συνεχούς χρόνου $x(t) = \cos(2\pi(100)t + \pi/3)$.

Το σήμα διακριτού χρόνου

$$\begin{aligned} x[n] &= x(n/f_s) = A \cos((\omega_0/f_s)n + \phi) \\ &= \frac{1}{2}Ae^{j\phi}e^{j(\omega_0/f_s)n} + \frac{1}{2}Ae^{-j\phi}e^{j(-\omega_0/f_s)n} \end{aligned}$$

έχει επίσης δύο φασματικές γραμμές στις συχνότητες $\hat{\omega} = \pm\omega_0/f_s$, αλλά πρέπει επίσης να περιέχει όλες τις συχνότητες αναδίπλωσης και τα ψευδώνυμα στις ακόλουθες συχνότητες διακριτού χρόνου:

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \omega_0/f_s + 2\pi\ell & \ell &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \hat{\omega} &= -\omega_0/f_s + 2\pi\ell & \ell &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

Αυτό εξηγεί το σημαντικό γεγονός ότι όταν ένα ημιτονικό σήμα διακριτού χρόνου προέρχεται από δειγματοληψία, όλες οι συχνότητες δειγματοληψίας βασίζονται στην κανονικοποιημένη τιμή, ω_0/f_s , της συχνότητας του σήματος

συνεχούς χρόνου. Οι συχνότητες αναδίπλωσης προκύπτουν προσθέτοντας πολλαπλάσια του 2π στην τιμή της κανονικοποιημένης συχνότητας.

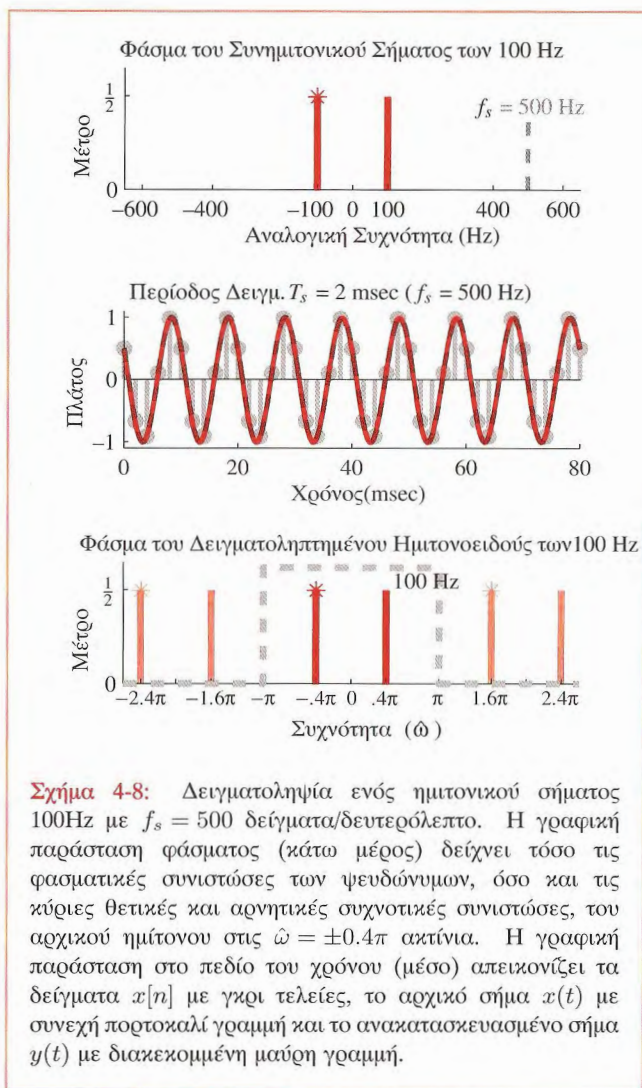
Στη συνέχεια παρατίθενται παραδείγματα δειγματοληψίας ενός ημιτονικού σήματος συνεχούς χρόνου 100 Hz που δίνεται από τον τύπο $x(t) = \cos(2\pi(100)t + \pi/3)$. Η συχνότητα δειγματοληψίας ποικίλει για να δούμε τι συμβαίνει σε διαφορετικούς ρυθμούς δειγματοληψίας. Τα παραδείγματα των Σχημάτων (4-8--4-11) δείχνουν το φάσμα διακριτού χρόνου για διαφορετικές περιπτώσεις όπου η f_s είναι πάνω ή κάτω από το ρυθμό Nyquist. Όλα κατασκευάστηκαν με τη βοήθεια ενός αρχείου-m του Matlab που απεικονίζει τη θέση των φασματικών συνιστωσών που περιλαμβάνονται στη διαδικασία της δειγματοληψίας.

4-2.2 Υπερδειγματοληψία

Στις περισσότερες εφαρμογές, προσπαθούμε να ικανοποιούμε τη συνθήκη του θεωρήματος δειγματοληψίας, δειγματοληπώντας με υψηλότερο ρυθμό από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα, ώστε να αποφεύγουμε τα προβλήματα της ψευδωνυμίας και της αναδίπλωσης. Αυτό ονομάζεται *υπερδειγματοληψία*. Για παράδειγμα, όταν δειγματοληπτούμε το ημιτονικό σήμα των 100 Hz, $x(t) = \cos(2\pi(100)t + \pi/3)$ με ρυθμό δειγματοληψίας $f_s = 500$ δείγματα/δευτερόλεπτο, δειγματοληπτούμε δύομισι φορές γρηγορότερα από την ελάχιστη απαίτηση του θεωρήματος δειγματοληψίας.

Οι γραφικές παραστάσεις στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας φαίνονται στο Σχήμα 4-8. Με αναφορά στα σχηματικά διαγράμματα των μετατροπών Σ-σε-Δ και Δ-σε-Σ του Σχήματος 4-7, το επάνω μέρος του Σχήματος 4-8 δείχνει το φάσμα του σήματος εισόδου $x(t)$, ενώ το κάτω μέρος δείχνει το φάσμα του σήματος $x[n] = \cos(0.4\pi n + \pi/3)$, που είναι η έξοδος του μετατροπέα Σ-σε-Δ. Στο μέσο, φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των $x(t)$, $x[n]$ και η ανακατασκευασμένη έξοδος $y(t)$.

Για την παράσταση του φάσματος του ημιτονικού σήματος συνεχούς χρόνου των 100 Hz (επάνω μέρος



Σχήμα 4-8: Δειγματοληψία ενός ημιτονικού σήματος 100Hz με $f_s = 500$ δείγματα/δευτερόλεπτο. Η γραφική παράσταση φάσματος (κάτω μέρος) δείχνει τόσο τις φασματικές συνιστώσες των ψευδώνυμων, όσο και τις κύριες θετικές και αρνητικές συχνοτικές συνιστώσες, του αρχικού ημίτονου στις $\hat{\omega} = \pm 0.4\pi$ ακτίνια. Η γραφική παράσταση στο πεδίο του χρόνου (μέσο) απεικονίζει τα δείγματα $x[n]$ με γκρι τελείες, το αρχικό σήμα $x(t)$ με συνεχή πορτοκαλί γραμμή και το ανακατασκευασμένο σήμα $y(t)$ με διακεκομμένη μαύρη γραμμή.

του Σχήματος 4-8), ο άξονας της συχνότητας είναι βαθμονομημένος σε Hz. Παρατηρήστε ότι η μιγαδική εκθετική συνιστώσα του συνημίτονου που αντιστοιχεί στην αρνητική συχνότητα δηλώνεται με ένα * στην κορυφή της φασματικής γραμμής. Στη μεσαία γραφική παράσταση

απεικονίζονται μαζί τα $x(t)$, $x[n]$ και $y(t)$ με μονάδα του άξονα χρόνου το msec. Το κάτω μέρος περιέχει το φάσμα του σήματος διακριτού χρόνου συναρτησί της κανονικοποιημένης συχνότητας $\hat{\omega}$. Σύμφωνα με την εξίσωση κλιμάκωσης συχνότητας της Σχέσης (4.4), η αναλογική συχνότητα εισόδου των 100 Hz απεικονίζεται στο $\hat{\omega} = 2\pi(100)/f_s = 2\pi(100)/500 = 0.4\pi$, έτσι σχεδιάζουμε τις φασματικές γραμμές στα $\hat{\omega} = \pm 0.4\pi$. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε και όλες τις συχνότητες που αντιστοιχούν στα ψευδώνυμά της:

$$\begin{aligned}\hat{\omega} &= 0.4\pi + 2\pi\ell & \ell &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \hat{\omega} &= -0.4\pi + 2\pi\ell & \ell &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

Ο μετατροπέας Δ-σε-Σ μετασχηματίζει το φάσμα διακριτού χρόνου στο φάσμα εξόδου συνεχούς χρόνου. Αλλά στο σημείο αυτό υπάρχει ένα πρόβλημα: ο μετατροπέας Δ-σε-Σ πρέπει να επιλέξει από όλες τις φασματικές γραμμές, που δίνονται από τη Σχέση (4.15), ένα μόνο ζεύγος φασματικών γραμμών. Ο κανόνας επιλογής είναι αυθαίρετος, αλλά προκειμένου να είναι σύμφωνος με την λειτουργία του πραγματικού μετατροπέα Ψ-σε-Α, πρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι ο ιδανικός μετατροπέας Δ-σε-Σ επιλέγει πάντοτε την ελάχιστη δυνατή συχνότητα για κάθε σύνολο αναδιπλωμένων συχνοτήτων. Αυτές είναι που αναφέραμε σαν κύρια ψευδώνυμα και στο Σχήμα 4-8 είναι οι συχνοτικές συνιστώσες που περιλαμβάνονται στο πλαίσιο με τις διακεκομμένες γραμμές, δηλαδή $|\hat{\omega}| < \pi$. Οι συχνότητες αυτές ικανοποιούν τη σχέση, $-\pi < \hat{\omega} \leq \pi$ και όταν μετασχηματίζονται σε αναλογικές συχνότητες, το αποτέλεσμα είναι $f = \pm 0.4\pi(f_s/2\pi) = \pm 100$ Hz. Αφού οι συχνοτικές συνιστώσες μέσα στο διακεκομμένο πλαίσιο ικανοποιούν την $|\hat{\omega}| < \pi$, οι φασματικές γραμμές της εξόδου **θα βρίσκονται πάντοτε μεταξύ του $-fs/2$ και $+fs/2$.**

Συνοψίζοντας, για την περίπτωση της υπερδειγματοληψίας όπου η αρχική συχνότητα f_0 είναι μικρότερη από την $fs/2$, η αρχική κυματομορφή θα ανακατασκευαστεί ακριβώς. Στο παράδειγμά μας, η $f_0 = 100$ Hz και η $f_s = 500$, έτσι η συνθήκη του Nyquist του θεωρήματος δειγματοληψίας ικανοποιείται και η εξόδος $y(t)$ εξισώνεται

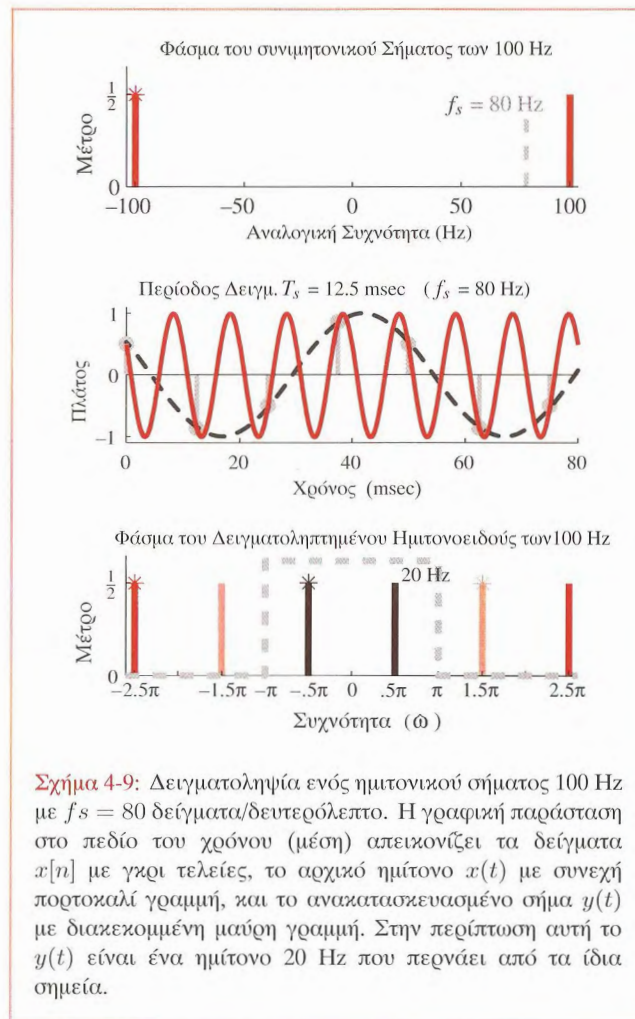
με την είσοδο $x(t)$, όπως φαίνεται στη μεσαία γραφική παράσταση του Σχήματος 4-8.

4-2.3 Ψευδώνυμα από Υποδειγματοληψία

Όταν $f_s < 2f_0$, το σήμα είναι υποδειγματοληπτημένο. Για παράδειγμα, αν $f_s = 80$ Hz και $f_0 = 100$ Hz, μπορούμε να δείξουμε ότι εξαιτίας του φαινομένου της αναδίπλωσης το σήμα παραμορφώνεται. Στο πάνω μέρος του Σχήματος 4-9, φαίνεται το φάσμα του αναλογικού σήματος εισόδου $x(t)$, μαζί με μια διακεκομμένη γραμμή που δηλώνει το ρυθμό δειγματοληψίας $f_s = 80$ Hz. Το φάσμα του σήματος διακριτού χρόνου (στο κάτω μέρος) περιέχει φασματικές γραμμές στα $\hat{\omega} = \pm 2\pi(100)/f_s = \pm 2\pi(100)/80 = \pm 2.5\pi$, όπως προβλέπεται από την εξίσωση κλιμάκωσης συχνότητας (4.4). Προκειμένου να ολοκληρώσουμε το φάσμα διακριτού χρόνου, πρέπει επίσης να σχεδιάσουμε όλα τα ψευδώνυμα

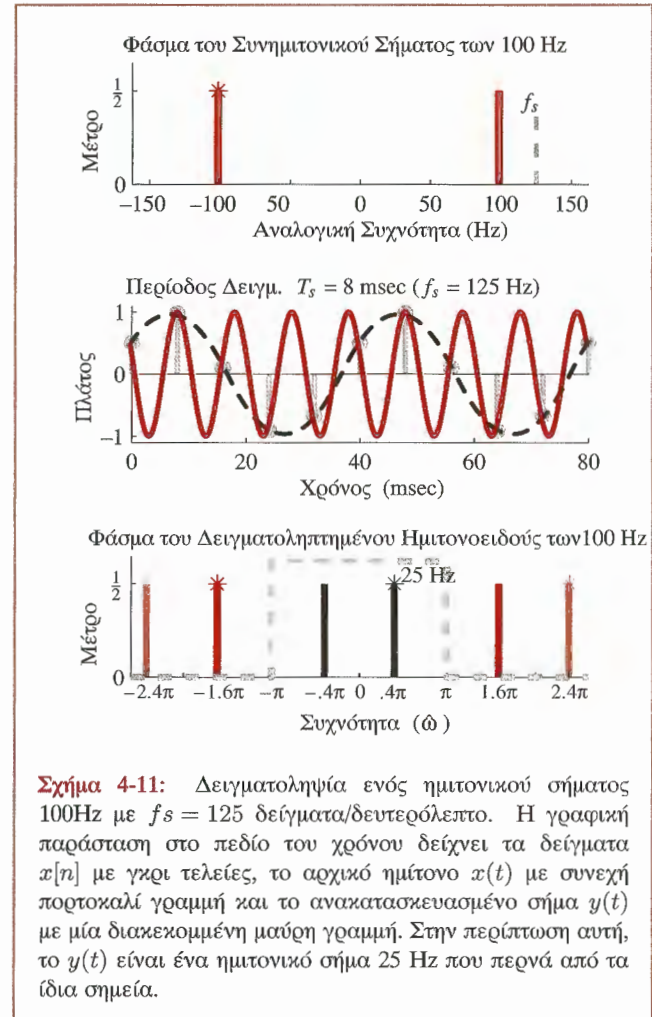
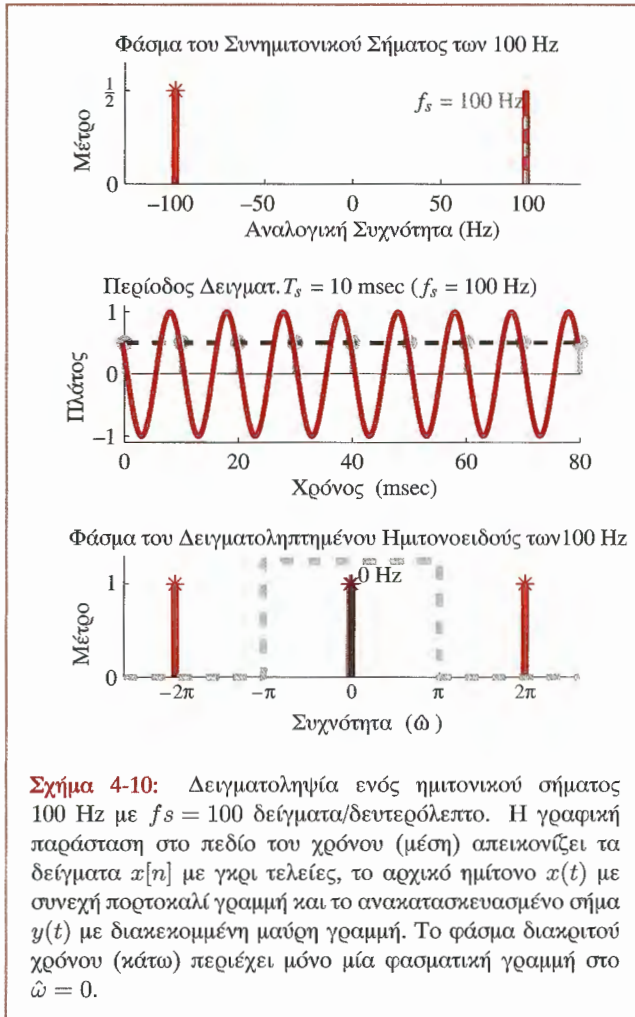
$$\begin{aligned}\hat{\omega} &= 2.5\pi + 2\pi\ell & \ell &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \hat{\omega} &= -2.5\pi + 2\pi\ell & \ell &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

Στο μεσαίο πλαίσιο του Σχήματος 4-9, το ημιτονικό σήμα των 100 Hz (πορτοκαλί γραμμή) δειγματοληπτείται τόσο σπάνια, που δεν αναγνωρίζεται ως το αρχικό ημίτονο των 100 Hz. Όταν εξετάσουμε τη διαδικασία Δ-σε-Σ για την περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούμε από το φάσμα του διακριτού χρόνου τις φασματικές γραμμές ελάχιστης συχνότητας (κάτω πλαίσιο). Αυτές είναι στα $\hat{\omega} = \pm 0.5\pi$, και έτσι υπολογίζουμε τις φασματικές γραμμές της εξόδου στα $f = \pm 0.5\pi(f_s/2\pi) = \pm 80/4 = \pm 20$ Hz. Ένας άλλος τρόπος να εκφράσουμε αυτό το αποτέλεσμα είναι να παρατηρήσουμε ότι τα ίδια δείγματα θα είχαν προκύψει από τη δειγματοληψία (με τον ίδιο ρυθμό) ενός ημιτονικού σήματος συχνότητας 20 Hz. Το σήμα ανακατασκευής είναι αυτό το ημίτονο των 20 Hz που φαίνεται με μαύρη διακεκομμένη γραμμή στο Σχήμα 4-9 (μεσαίο πλαίσιο). Παρατηρήστε ότι ψευδώνυμα των 20 Hz μπορούν να βρεθούν αφαιρώντας το f_s από τα 100 Hz. Η κατανόηση αυτού του σημείου είναι πολύ κρίσιμη. Η αναδίπλωση των ημιτονικών συνιστωσών μπορεί να έχει δραματικές



Σχήμα 4-9: Δειγματοληψία ενός ημιτονικού σήματος 100 Hz με $f_s = 80$ δείγματα/δευτερόλεπτο. Η γραφική παράσταση στο πεδίο του χρόνου (μέση) απεικονίζει τα δείγματα $x[n]$ με γκρι τελείες, το αρχικό ημίτονο $x(t)$ με συνεχή πορτοκαλί γραμμή, και το ανακατασκευασμένο σήμα $y(t)$ με διακεκομμένη μαύρη γραμμή. Στην περίπτωση αυτή το $y(t)$ είναι ένα ημίτονο 20 Hz που περνάει από τα ίδια σημεία.

συνέπειες. Το Σχήμα 4-10 παρουσιάζει την περίπτωση που ο ρυθμός δειγματοληψίας και η συχνότητα του ημιτονικού σήματος είναι ίδιες. Προφανώς, αυτό που συμβαίνει είναι ότι τα δείγματα λαμβάνονται πάντα από το ίδιο σημείο της κυματομορφής και έτσι παίρνουμε το ισοδύναμο της δειγματοληψίας ενός σταθερού σήματος (DC), που ταυτίζεται με ένα ημιτονικό σήμα μηδενικής συχνότητας.



Μπορούμε να δικαιολογήσουμε αυτό το αποτέλεσμα στο πεδίο της συχνότητας, παρατηρώντας ότι το σήμα διακριτού χρόνου πρέπει να περιέχει φασματικές γραμμές στα $\hat{\omega} = \pm 2\pi(100/f_s) = \pm 2\pi$ και επίσης στις συχνότητες των ψευδώνυμων που διαχωρίζονται κατά $2\pi\ell$. Επομένως ένα από τα ψευδώνυμα πέφτει στο $\hat{\omega} = 0$ και είναι αυτό το οποίο ανακατασκευάζεται από το μετατροπέα Δ-σε-Σ.

4-2.4 Αναδίπλωση από Υποδειγματοληψία

Στο Σχήμα 4-11 παρουσιάζεται η περίπτωση κατά την οποία η υποδειγματοληψία οδηγεί σε αναδίπλωση. Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 125$ δείγματα/δευτερόλεπτο. Για μια ακόμη φορά, στο πάνω πλαίσιο παρουσιάζεται το φάσμα του σήματος συνεχούς

χρόνου με φασματικές γραμμές στα ± 100 Hz. Το φάσμα διακριτού χρόνου (κάτω μέρος) κατασκευάζεται απεικονίζοντας τα ± 100 Hz στις δύο φασματικές γραμμές των $\hat{\omega} = \pm 2\pi(100/f_s) = \pm 1.6\pi$ και στη συνέχεια συμπεριλαμβάνοντας όλες τις συχνότητες αναδίπλωσης για να πάρουμε φασματικές γραμμές στις συχνότητες:

$$\begin{aligned}\hat{\omega} &= 1.6\pi + 2\pi\ell & \ell &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \hat{\omega} &= -1.6\pi + 2\pi\ell & \ell &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

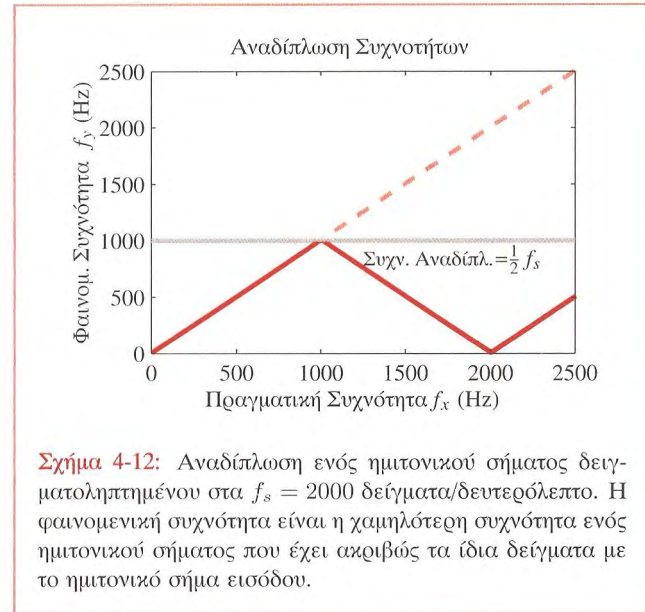
Στην περίπτωση αυτή, συμβαίνει κάτι πολύ ενδιαφέρον. Οι δύο φασματικές συνιστώσες μεταξύ του $\pm\pi$, είναι οι $\hat{\omega} = \pm 0.4\pi$, αλλά αυτή στο $\hat{\omega} = +0.4\pi$ είναι μία συχνότητα αναδίπλωσης του -1.6π . Αυτό είναι ένα παράδειγμα αναδίπλωσης. Η αναλογική συχνότητα της ανακατασκευασμένης εξόδου θα είναι $f = 0.4\pi(f_s/2\pi) = f_s/5 = 25$ Hz. Ένα επιπρόσθετο γεγονός για την αναδίπλωση είναι ότι το πρόσημο της φάσης του σήματος θα αλλάξει. Αν το αρχικό ημίτονο των 100 Hz έχει φάση $\phi = +\pi/3$, η φάση της συνιστώσας στο $\hat{\omega} = -1.6\pi$ θα είναι $-\pi/3$ και επομένως η φάση της αναδιπλωμένης συχνότητας $\hat{\omega} = +0.4\pi$ θα είναι επίσης $-\pi/3$. Μετά την ανακατασκευή, η φάση του $y(t)$ θα είναι $-\pi/3$. Μπορούμε να δούμε την "αντιστροφή φάσης" στο μεσαίο πλαίσιο του Σχήματος 4-11. Το σήμα εισόδου (συνεχής πορτοκαλί γραμμή) πέφτει στο $t = 0$, ενώ η ανακατασκευασμένη έξοδος (μαύρη διακεκομμένη γραμμή) ανεβαίνει. Αυτό σημαίνει ότι όταν δειγματοληπτούμε ένα ημίτονο 100 Hz με ρυθμό δειγματοληψίας 125 δείγματα/δευτερόλεπτο, παίρνουμε τα ίδια δείγματα που θα είχαμε πάρει δειγματοληπτώντας ένα ημίτονο 25Hz, αλλά με αντίθετη φάση.

4-2.5 Μέγιστη Συχνότητα Ανακατασκευής

Τα προηγούμενα παραδείγματα είχαν ένα κοινό σημείο: η συχνότητα εξόδου είναι πάντοτε μικρότερη από την $\frac{1}{2}f_s$. Για ένα δειγματοληπτημένο ημιτονικό σήμα, ο ιδανικός μετατροπέας Δ-σε-Σ επιλέγει την πλησιέστερη στο $\hat{\omega} = 0$ αναδιπλωμένη συχνότητα και την αντιστοιχεί στην αναλογική συχνότητα εξόδου μέσω της $f = \hat{\omega}(f_s/2\pi)$. Αφού οι κύριες αναδιπλωμένες συχνότητες βρίσκονται

σίγουρα μεταξύ του $-\pi$ και $+\pi$, η συχνότητα εξόδου θα βρίσκεται πάντοτε ανάμεσα στα $-\frac{1}{2}f_s$ και $+\frac{1}{2}f_s$

Εργ. Ασκ.: #3, Σύνθεση Τερετίσματος

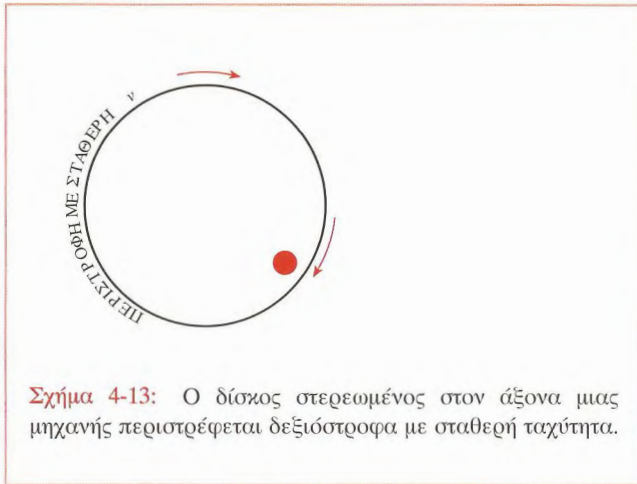


Σχήμα 4-12: Αναδίπλωση ενός ημιτονικού σήματος δειγματοληπτημένου στα $f_s = 2000$ δείγματα/δευτερόλεπτο. Η φαινόμενη συχνότητα είναι η χαμηλότερη συχνότητα ενός ημιτονικού σήματος που έχει ακριβώς τα ίδια δείγματα με το ημιτονικό σήμα εισόδου.

Μια εντυπωσιακή επίδειξη αυτού του γεγονότος μπορεί να γίνει με την υλοποίηση του συστήματος του Σχήματος 4-7, χρησιμοποιώντας ένα γραμμικό FM τερέτισμα στην είσοδο του και κατόπιν ακούγοντας το ανακατασκευασμένο σήμα εξόδου. Ας υποθέσουμε ότι η στιγμιαία συχνότητα του τερετίσματος αυξάνει σύμφωνα με τη σχέση $f_i(t) = f_s t$ Hz, δηλαδή, $x(t) = \cos(\pi f_s t^2)$. Μετά τη δειγματοληψία έχουμε

$$x[n] = \cos(\pi n^2 / f_s)$$

Απαξ και το $y(t)$ ανακατασκευασθεί από τα δείγματα $x[n]$, τι θα ακούσετε; Αποδεικνύεται ότι η συχνότητα εξόδου αυξομειώνεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-12. Αυτό



Σχήμα 4-13: Ο δίσκος στερεωμένος στον άξονα μιας μηχανής περιστρέφεται δεξιόστροφα με σταθερή ταχύτητα.

συμβαίνει επειδή ξέρουμε ότι η εξοδος δε μπορεί να έχει συχνότητα υψηλότερη από $\frac{1}{2}f_s$, παρόλο που η συχνότητα εισόδου αυξάνεται συνεχώς. Αν εστιάσουμε σε μια συγκεκριμένη συχνότητα εισόδου, μπορούμε να την απεικονίσουμε στην κανονικοποιημένη διακριτή συχνότητα, να προσδιορίσουμε όλες τις συχνότητες αναδίπλωσης και στη συνέχεια να ανακαλύψουμε τη συχνότητα ανακατασκευής από τις συχνότητες αναδίπλωσης που βρίσκονται πιο κοντά στο $\hat{\omega} = 0$. Δεν υπάρχει εύκολος τύπος, γι' αυτό αλλά θεωρούμε μερικές μεμονωμένες περιπτώσεις. Καταρχήν, όταν η συχνότητα εισόδου αυξάνεται από το 0 στο $\frac{1}{2}f_s$ το $\hat{\omega}$ θα αυξηθεί από το 0 στο π και οι συχνότητες αναδίπλωσης δε θα χρειάζεται να ληφθούν υπόψη. Η συχνότητα εξόδου θα ισούται με τη συχνότητα εισόδου. Τώρα θεωρήστε ότι η συχνότητα εισόδου αυξάνεται από $\frac{1}{2}f_s$ σε f_s . Η αντίστοιχη συχνότητα του $x[n]$ θα αυξάνει από $\hat{\omega} = \pi$ στο $\hat{\omega} = 2\pi$ και η αρνητική του συχνότητα από το $\hat{\omega} = -\pi$ στο $\hat{\omega} = -2\pi$. Η κύρια συχνότητας αναδίπλωσης της αρνητικής συχνοτικής συνιστώσας πηγαινει από $\hat{\omega} = +\pi$ σε $\hat{\omega} = 0$. Το ανακατασκευασμένο σήμα εξόδου θα έχει επομένως ένα συχνοτικό εύρος από $f = \frac{1}{2}f_s$ μέχρι $f = 0$.

Το Σχήμα 4-12 παρουσιάζει μια γραφική παράσταση της συχνότητας εξόδου f_y συναρτήσει της συχνότητας

εισόδου f_x . Καθώς η f_x αυξάνεται από $\frac{1}{2}f_s$ σε f_s , η συχνότητα εξόδου f_y μειώνεται από $\frac{1}{2}f_s$ σε 0. Ο όρος *αναδιπλωμένη* συχνότητα προέρχεται από το γεγονός ότι οι συχνότητες εισόδου και εξόδου είναι κατοπτρικές ως προς τη συχνότητα $\frac{1}{2}f_s$ και αν διπλώναμε τη γραφική παράσταση γύρω από την γραμμή $\frac{1}{2}f_s$ του Σχήματος 4-12, θα έπρεπε να πέφτει η μία πάνω στην άλλη.

4-3 Επίδειξη Στροβοσκοπίου

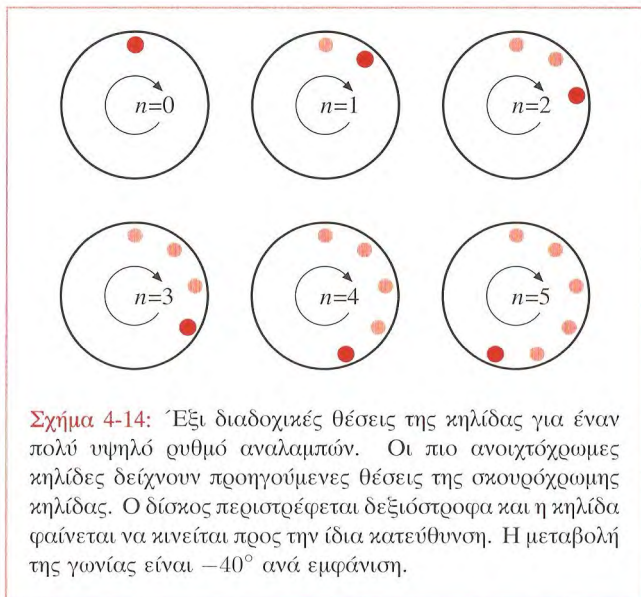
Ένας αποτελεσματικός τρόπος για την επίδειξη του φαινομένου της ψευδωνυμίας είναι η χρήση του φωτός ενός στροβοσκοπίου για το φωτισμό ενός περιστρεφόμενου αντικειμένου. Στην πραγματικότητα, αυτό είναι μια διαδικασία ρουτίνας που χρησιμοποιείται για το χρονισμό των κινητήρων των αυτοκινήτων και αποτελεί ένα πρακτικό παράδειγμα, όπου η ύπαρξη του φαινομένου της ψευδωνυμίας είναι επιθυμητή. Στην περίπτωση μας χρησιμοποιούμε ένα δίσκο στερεωμένο στον άξονα ενός ηλεκτρικού ρότορα ο οποίος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα (δες Σχήμα 4-13). Σ' αυτόν τον άσπρο δίσκο, εμφανίζεται η κηλίδα σε κάθε αναλαμπή του φωτός του στροβοσκοπίου. Στην περίπτωση μας, η ταχύτητα περιστροφής του ρότορα είναι προσεγγιστικά 750 rpm και ο ρυθμός αναλαμπών του στροβοσκοπίου είναι μεταβλητός.



Επίδειξη: Στροβοσκόπιο

Υποθέστε ότι ο ρυθμός αναλαμπών είναι πολύ υψηλός, ας πούμε εννεαπλάσιος του ρυθμού περιστροφής του ρότορα, δηλαδή, $9 \times 750 = 6750$ rpm. Σ' αυτή την περίπτωση, η γωνία που στρέφεται ο δίσκος μεταξύ δύο διαδοχικών αναλαμπών, είναι μικρή. Συγκεκριμένα ο δίσκος στρέφεται κατά $360^\circ / 9 = 40^\circ$ ανά αναλαμπή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-14. Αφού η περιστροφή είναι κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, η γωνία που καλύπτεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές αναλαμπές θα είναι -40° .

Αν ο ρυθμός αναλαμπών του στροβοσκοπίου είναι ίσος με 750 αναλαμπές/λεπτό, δηλαδή είναι ίσος με το ρυθμό περιστροφής του δίσκου, τότε η κηλίδα θα φαίνεται ότι



μένει ακίνητη. Στην περίπτωση αυτή έχουμε αναδίπλωση, γιατί η κηλίδα κάνει ακριβώς μια περιστροφή μεταξύ δύο διαδοχικών αναλαμπών και επομένως πάντα βρίσκεται ακριβώς στην ίδια θέση, κάθε φορά που φωτίζεται από το στροβοσκόπιο. Τα παραπάνω περιγράφουν ακριβώς την ίδια κατάσταση που είναι εικονογραφημένη στο Σχήμα 4-10, όπου η συχνότητα του ημιτόνου αναδιπλώνεται στο μηδέν. Αυτός δεν είναι ο μόνος ρυθμός αναλαμπής για τον οποίο το σημείο θα εμφανιστεί να είναι ακίνητο. Στην πραγματικότητα, ένας πιο αργός ρυθμός που επιτρέπει δύο ή τρεις ή οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό πλήρων περιστροφών μεταξύ αναλαμπών θα έχει το ίδιο αποτέλεσμα. Στην περίπτωση του ρότορα των 750-rpm, ρυθμοί των 375, 250, $187\frac{1}{2}$ και 125 αναλαμπών/λεπτό θα έχουν το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό των 750 αναλαμπών/λεπτό.



Επίδειξη: Αρχεία βίντεο Στροβοσκοπίου

Χρησιμοποιώντας ρυθμούς αναλαμπών που είναι κοντά

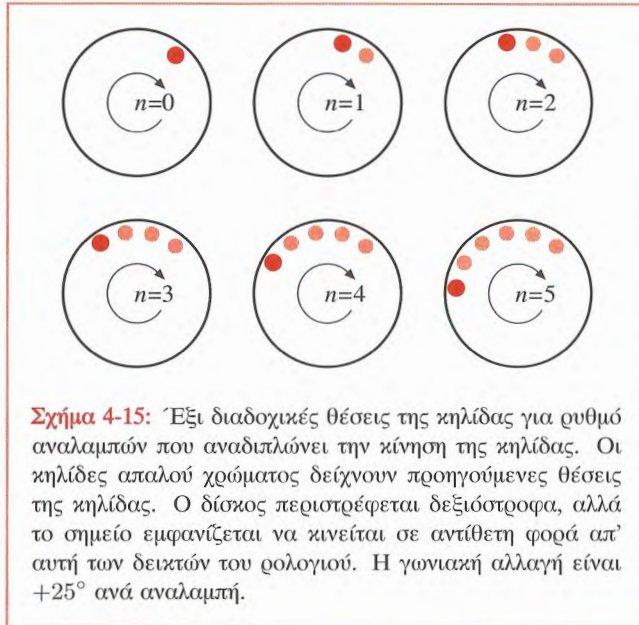
σ' αυτούς τους αριθμούς, μπορούμε να κάνουμε το σημείο να κινηθεί αργά και επίσης μπορούμε να ελέγξουμε την κατεύθυνση της κίνησής του (δεξιόστροφα ή αντίθετα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού). Για παράδειγμα, αν θέσουμε το στροβοσκόπιο σ' ένα ρυθμό αναλαμπών που είναι ελάχιστα υψηλότερος από το ρυθμό περιστροφής, θα παρατηρήσουμε ένα άλλο αποτέλεσμα αναδίπλωσης. Ας υποθέσουμε ότι ο ρυθμός αναλαμπής είναι 806 αναλαμπές/λεπτό. Ο δίσκος τότε, μεταξύ δύο διαδοχικών αναλαμπών καλύπτει ελάχιστα λιγότερο από μία πλήρη περιστροφή. Μπορούμε να υπολογίσουμε την κίνηση αν πάρουμε υπόψη μας ότι μία πλήρης περιστροφή απαιτεί $1/750$ λεπτά. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= -360^\circ \times \frac{1/806}{1/750} \\ &= -360^\circ \times \frac{750}{806} = -335^\circ = +25^\circ\end{aligned}$$

Θα πρέπει να επαναλάβουμε για μια ακόμα φορά, ότι το αρνητικό πρόσημο δείχνει περιστροφή σε δεξιόστροφα κατεύθυνση, αλλά εφόσον η γωνιακή αλλαγή είναι σχεδόν -360° , αντ' αυτού θα παρατηρήσουμε μία μικρή θετική γωνιακή αλλαγή και το σημείο θα εμφανίζεται να κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν των δεικτών του ρολογιού, όπως ακριβώς φαίνεται στο Σχήμα 4-15. Το γεγονός ότι κάποιος μπορεί να διακρίνει μεταξύ δεξιόστροφης και αριστερόστροφης κατεύθυνσης είναι ισοδύναμο με το να λέμε ότι θετικές και αρνητικές συχνότητες έχουν ξεχωριστή φυσική σημασία. Για να κάνουμε μαθηματική ανάλυση του πειράματος του στροβοσκοπίου, χρειαζόμαστε μία σχέση που να συνδέει την κίνηση της κηλίδας με το χρόνο. Το σημείο κινείται σε ένα σύστημα συντεταγμένων $x-y$ και επομένως μία ικανοποιητική παράσταση δίνεται από ένα μιγαδικό αριθμό του οποίου το πραγματικό μέρος είναι x και το φανταστικό του y . Η θέση της κηλίδας είναι

$$p(t) = x(t) + jy(t)$$

Επιπλέον, αφού η κίνηση της κηλίδας διαγράφει μια περιφέρεια κύκλου ακτίνας r , η σωστή σχέση για το $p(t)$



περιγράφεται από ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα σταθερής συχνότητας, δηλαδή:

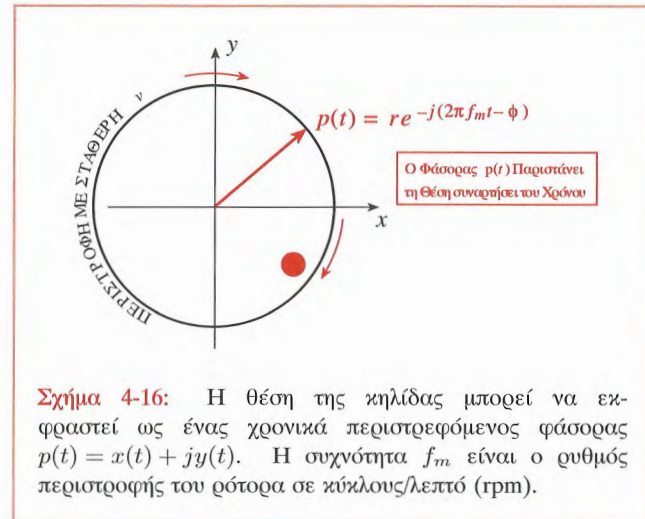
$$p(t) = r e^{-j(2\pi f_m t - \phi)} \quad (4.16)$$

Το αρνητικό πρόσημο στον εκθέτη δηλώνει περιστροφή κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού και η αρχική φάση ϕ καθορίζει τη θέση της κηλίδας τη χρονική στιγμή $t = 0$ (δες Σχήμα 4-16). Η συχνότητα περιστροφής του ρότορα f_m και η ακτίνα r είναι σταθερές. Στη συνέχεια, για την απλοποίηση των σχέσεων, θεωρούμε ότι $r = 1$.

Το αποτέλεσμα του στροβοσκοπικού φωτός είναι να δειγματοληψήσουμε το $p(t)$ μ' ένα σταθερό ρυθμό που ισούται με το ρυθμό αναλαμπών f_s . Άρα η θέση του σημείου στη n -οστή αναλαμπή μπορεί να εκφραστεί από το σήμα διακριτού χρόνου

$$p[n] = p(t)|_{t=nT_s} = p(nT_s) = p(n/f_s)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση το μιγαδικό



εκθετικό σήμα της Σχέσης (4.16) παίρνουμε

$$p[n] = r e^{-j(2\pi(f_m/f_s)n - \phi)} \quad (4.17)$$

Αν ικανοποιείται η συνθήκη του θεωρήματος δειγματοληψίας (αν δηλαδή, $f_s > 2|f_m|$), τότε δε θα εμφανιστεί το φαινόμενο της αναδίπλωσης στο πείραμα. Στην πραγματικότητα, η γωνιακή αλλαγή από μία στιγμή δειγματοληψίας στην επόμενη θα είναι μεταξύ -180° και 0° , οπότε το σημείο θα εμφανίζεται να περιστρέφεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Οι πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις προκύπτουν όταν ο ρυθμός αναλαμπών πέφτει κάτω από τη συχνότητα $2|f_m|$. Τότε ο δίσκος μπορεί να κάνει μία ή και περισσότερες περιστροφές μεταξύ δύο διαδοχικών αναλαμπών γεγονός που δημιουργεί το φαινόμενο της αναδίπλωσης. Χρησιμοποιώντας τη Σχέση (4.17), μπορούμε να επιλύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα: Βρείτε όλους τους δυνατούς ρυθμούς αναλαμπών, ώστε η κηλίδα να φαίνεται ότι κινείται αντίθετα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού με ρυθμό 25° ανά αναλαμπή, ή ισοδύναμα με μία περιστροφή κάθε 14.4 αναλαμπές. Θεωρούμε ότι η ταχύτητα περιστροφής του ρότορα είναι σταθερή και ίση με f_m . Μια δυσκολία

του προβλήματος είναι ότι οι δύο ρυθμοί περιστροφής είναι ορισμένοι σε διαφορετικές μονάδες.

Μπορούμε να κάνουμε μια συστηματική προσέγγιση αν χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα $e^{j2\pi\ell} = 1$, για οποιαδήποτε ακέραια τιμή του ℓ . Η επιθυμητή περιστροφή της κηλίδας μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως

$$d[n] = r e^{+j(2\pi(25/360)n+\psi)}$$

όπου ο όρος $2\pi(25/360)$ προκύπτει από τη μετατροπή των 25° σε ακτίνια. Η αρχική φάση ψ υπολογίζεται από τη φάση ϕ του $p[n]$, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $d[0] = p[0]$. Στη συνέχεια, αν και μπορούμε να εξισώσουμε το $p[n]$ με $d[n]$, εισάγουμε τον παράγοντα $e^{j2\pi\ell n}$, το οποίο ουσιαστικά ισοδυναμεί με το να πολλαπλασιάσουμε με τη μονάδα

$$p[n] = d[n]e^{j2\pi\ell n}$$

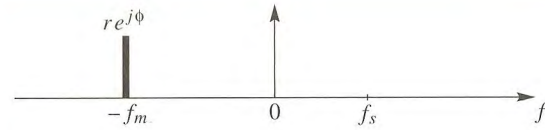
Τώρα με την ανάλυση που ακολουθεί μπορούμε να βρούμε μια εξίσωση την οποία μπορούμε να επιλύσουμε ως προς τους ρυθμούς αναλαμπών:

$$\begin{aligned} r e^{-j(2\pi(f_m/f_s)n-\phi)} &= r e^{+j(2\pi(25/360)n+\psi)} e^{j2\pi\ell n} \\ \Rightarrow -\left(2\pi\frac{f_m}{f_s}n - \phi\right) &= +\left(2\pi\frac{25}{360}n + \psi\right) + 2\pi\ell n \\ -\frac{f_m}{f_s} &= \frac{25}{360} + \ell \\ \Rightarrow -f_m &= f_s \left(\frac{25}{360} + \ell\right) \end{aligned}$$

Έτσι, τελικά μπορούμε να λύσουμε ως προς το ρυθμό αναλαμπών

$$f_s = \frac{-f_m}{(5/72) + \ell} \quad (4.18)$$

όπου ℓ οποιοσδήποτε ακέραιος. Εφόσον θέλουμε θετικές τιμές για το ρυθμό αναλαμπών και εφόσον το αρνητικό πρόσθετο είναι συσχετισμένο με περιστροφή του ρότορα κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, επιλέγουμε $\ell = -1, -2, -3, \dots$. Για παράδειγμα, όταν ο ρυθμός



Σχήμα 4-17: Αναλογικό φάσμα που παριστάνει την περιστροφή του δίσκου (με f_m rpm) κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού (αρνητική συχνότητα). Οι μονάδες για την f είναι κύκλοι/λεπτό.

περιστροφής του ρότορα είναι 750 rpm, οι ακόλουθοι ρυθμοί αναλαμπών (σε αναλαμπές/λεπτό) θα δώσουν την επιθυμητή κίνηση της κηλίδας:

ℓ	-1	-2	-3	-4
f_s	805.97	388.49	255.92	190.81

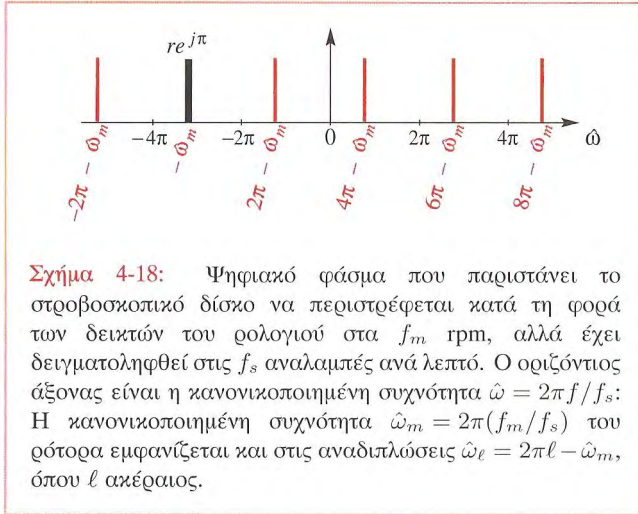


Άσκηση 4.6: Για να δοκιμάσετε τις γνώσεις σας στις παραπάνω έννοιες, προσπαθήστε να βρείτε όλους τους δυνατούς ρυθμούς αναλαμπών, ώστε η κηλίδα να κινηθεί κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού με ρυθμό μίας περιστροφής κάθε 9 αναλαμπές. Θεωρούμε ότι ταχύτητα περιστροφής του ρότορα είναι σταθερή και ίση με f_m . Ποιός είναι ο μέγιστος ρυθμός αναλαμπών σ' αυτή την περίπτωση;

4-3.1 Ερμηνεία με Χρήση του Φάσματος

Η επίδειξη του στροβοσκοπίου περιλαμβάνει τη δειγματοληψία μιγαδικών εκθετικών σημάτων και επομένως αντί να χρησιμοποιούμε εξισώσεις, μπορούμε να παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα με τη μορφή ενός φασματικού διαγράμματος, όπως κάναμε στην προηγούμενη ενότητα. Ο περιστρεφόμενος δίσκος έχει ένα αναλογικό φάσμα που δίνεται από μία συχνοτική συνιστώσα στους $f = -f_m$ κύκλους/λεπτό (δες Σχήμα 4-17).

Όταν το στροβοσκοπικό φως εφαρμόζεται με ρυθμό f_s αναλαμπές το λεπτό, το φάσμα που προκύπτει από το σήμα



Σχήμα 4-18: Ψηφιακό φάσμα που παριστάνει το στροβοσκοπικό δίσκο να περιστρέφεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού στα f_m rpm, αλλά έχει δειγματοληφθεί στις f_s αναλαμπές ανά λεπτό. Ο οριζόντιος άξονας είναι η κανονικοποιημένη συχνότητα $\hat{\omega} = 2\pi f/f_s$: Η κανονικοποιημένη συχνότητα $\hat{\omega}_m = 2\pi(f_m/f_s)$ του ρότορα εμφανίζεται και στις αναδιπλώσεις $\hat{\omega}_\ell = 2\pi\ell - \hat{\omega}_m$, όπου ℓ ακέραιος.

διακριτού χρόνου $p[n]$ θα περιέχει έναν άπειρο αριθμό φασματικών γραμμών στις συχνότητες

$$\hat{\omega}_\ell = 2\pi \frac{-f_m}{f_s} + 2\pi\ell = -\hat{\omega}_m + 2\pi\ell \quad (4.19)$$

για $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Η Εξίσωση (4.19) μας λέει ότι απαιτούνται δύο βήματα για τη δημιουργία του φάσματος (Σχήμα 4-18) του σήματος διακριτού χρόνου που παριστά τη δειγματοληπτημένη κίνηση

- (i) Υπολόγισε την κανονικοποιημένη συχνότητα του ρότορα $\hat{\omega}_m$ διαιρώντας με f_s . Στη συνέχεια σχεδίασε τη φασματική γραμμή στο $\hat{\omega} = -\hat{\omega}_m$. Το αρνητικό πρόσημο παριστά περιστροφή κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.
- (ii) Επανέλαβε την κανονικοποιημένη φασματική γραμμή του ρότορα μετατοπίζοντάς σε όλες τις συχνότητες που προκύπτουν από το άθροισμά της με πολλαπλάσια του 2π . Αυτό προσμετρά τις αναδιπλώσεις του μιγαδικού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου $p[n]$.

Πώς μπορούμε να χρησιμοποιούμε το Σχήμα 4-18 για να εξηγήσουμε αυτό που βλέπουμε στο πείραμα του

στροβοσκοπικού φωτός; Το Σχήμα 4-18 περιέχει έναν άπειρο αριθμό φασματικών γραμμών, οπότε προσφέρει έναν άπειρο αριθμό πιθανοτήτων για αυτό που θα παρατηρήσουμε. Το οπτικό μας σύστημα, ωστόσο, πρέπει να διαλέξει μία και είναι λογικό να διαλέξουμε την πιο αργή. Στην πραγματικότητα, το οπτικό μας σύστημα συμπεριφέρεται όπως ένας μετατροπέας Δ-σε-Σ. Άρα, κατά την ανακατασκευή από Δ-σε-Σ προσμετράται από το φάσμα, μόνο η πλησιέστερη στη συχνότητα $\hat{\omega} = 0$ συχνοτική συνιστώσα, οπότε το στροβοσκοπικό σήμα $p[n]$ εμφανίζεται να περιστρέφεται μ' αυτή τη χαμηλότερη κανονικοποιημένη συχνότητα. Ωστόσο, πρέπει να γίνει μια τελευταία μετατροπή για να προσδώσει τον αναλογικό ρυθμό περιστροφής που αντιλαμβανόμαστε σε rpm. Η διακριτού χρόνου συχνότητα ($\hat{\omega}$) πρέπει να μετατραπεί ξανά σε αναλογική συχνότητα (f). Στο σχήμα 4-18, η αναδίπλωση που αντιστοιχεί στην τιμή του $\ell = 2$ είναι αυτή που βρίσκεται πιο κοντά στη μηδενική συχνότητα, οπότε η αντίστοιχη αναλογική συχνότητα είναι

$$f_{\text{spot}} = \frac{1}{2\pi}(\hat{\omega}_2)f_s = \frac{1}{2\pi}(4\pi - \hat{\omega}_m)f_s = 2f_s - f_m$$

Αυτό μπορεί να φαίνεται σαν ένας κυκλικός τρόπος να πούμε ότι ο παρατηρούμενος ρυθμός περιστροφής της κηλίδας διαφέρει από την $-f_m$ κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του ρυθμού δειγματοληψίας, αλλά προσφέρει μία συστηματική μέθοδο σχεδίασης της γραφικής παράστασης των σχετικών συχνοτικών θέσεων. Τελικά, η φασματική παράσταση μας διευκολύνει στον εντοπισμό της χαμηλότερης συχνοτητας διακριτού χρόνου σαν αυτή που “ανακατασκευάζεται.” Θα πούμε περισσότερα για το γιατί τα παραπάνω είναι αληθή στην Ενότητα 4-4.

Στην περίπτωση που ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι μεταβαλλόμενος και η f_m είναι σταθερή, η λύση του προβλήματος είναι λίγο πιο δύσκολη, αλλά αυτή αντανάκλα τη πραγματική κατάσταση για το πείραμα του στροβοσκοπικού δίσκου. Παρόλα αυτά, μια γραφική προσέγγιση είναι και πάλι εφικτή, επειδή η επιθυμητή συχνότητα της κηλίδας ορίζει μια φασματική γραμμή, έστω $\hat{\omega}_d$, στο φάσμα. Αυτή η γραμμή είναι η πιο κοντινή

στην αρχή των αξόνων, οπότε πρέπει να προσθέσουμε ένα ακέραιο πολλαπλάσιο $2\pi\ell$ στο $\hat{\omega}_d$ για να ταιριάζει με την κανονικοποιημένη συχνότητα περιστροφής του ρότορα.

$$\hat{\omega}_d + 2\pi\ell = \hat{\omega}_m = \frac{-2\pi f_m}{f_s}$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να επιλυθεί ως προς το ρυθμό αναλαμπών f_s , αλλά η τελική απάντηση εξαρτάται από τον ακέραιο ℓ , ο οποίος προβλέπει, παρεμπιπτόντως, ότι υπάρχουν πολλές απαντήσεις για το f_s , όπως ήδη είδαμε στη Σχέση (4.18). Το αποτέλεσμα είναι

$$f_s = \frac{-2\pi f_m}{\hat{\omega}_d + 2\pi\ell}$$

4-4 Μετατροπή Διακριτού-σε-Συνεχές

Ο σκοπός του ιδανικού μετατροπέα από Διακριτό-σε-Συνεχές (Δ -σε- Σ) είναι να παρεμβάλλει μία ομαλή συνάρτηση συνεχούς χρόνου μεταξύ των δειγμάτων του σήματος $y[n]$. Άρα, στην ειδική περίπτωση που $y[n] = A \cos(2\pi f_0 n T_s + \phi)$ και αν $f_0 < \frac{1}{2} f_s$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα δειγματοληψίας, ο μετατροπέας θα έπρεπε να παράγει

$$y(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi). \quad (4.20)$$

Για τα δειγματοληπτημένα ημιτονοειδή σήματα *μόνο*, ο ιδανικός μετατροπέας Δ -σε- Σ ουσιαστικά αντικαθιστά το n με $f_s t$. Ενώ, αν $f_0 > \frac{1}{2} f_s$, τότε ξέρουμε ότι υπάρχουν παραμορφώσεις που οφείλονται στα φαινόμενα της αναδίπλωσης ή της ψευδωνμίας και ο ιδανικός μετατροπέας Δ -σε- Σ θα ανακατασκευάσει μια συνημιτονική κυματομορφή με συχνότητα ίση με τη συχνότητα αναδίπλωσης που είναι μικρότερη από την $\frac{1}{2} f_s$.

4-4.1 Παρεμβολή με Παλμούς

Πώς λειτουργεί ο μετατροπέας Δ -σε- Σ ; Σ' αυτήν την ενότητα, εξηγούμε πώς ο μετατροπέας Δ -σε- Σ κάνει παρεμβολή και στη συνέχεια περιγράφουμε ένα πραγματικό σύστημα που συμπεριφέρεται σχεδόν το ίδιο με τον ιδανικό μετατροπέα Δ -σε- Σ . Αυτά τα συστήματα υλικού, που είναι

γνωστά ως μετατροπείς ψηφιακού-σε-αναλογικό (Ψ -σε- A), προσεγγίζουν τη συμπεριφορά του ιδανικού συστήματος Δ -σε- Σ .

Ένας γενικός τύπος που περιγράφει μία ευρεία κατηγορία μετατροπέων Δ -σε- Σ είναι ο ακόλουθος

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] p(t - nT_s), \quad (4.21)$$

όπου $p(t)$ είναι το χαρακτηριστικό σχήμα παλμού του μετατροπέα. Η Εξίσωση (4.21) δηλώνει ότι το σήμα εξόδου παράγεται προσθέτοντας πολλούς χρονικά μετατοπισμένους παλμούς. Δηλαδή, κάθε χρονική στιγμή $t_n = nT_s$, εκπέμπεται ένας παλμός $p(t - nT_s)$ με πλάτος ανάλογο της τιμής του δείγματος $y[n]$ που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή⁵. Παρατηρήστε ότι όλοι οι παλμοί έχουν μια κοινή κυματομορφή που καθορίζεται από το $p(t)$. Αν ο παλμός έχει διάρκεια μεγαλύτερη ή ίση του T_s , τότε τα κενά μεταξύ των δειγμάτων θα γεμιστούν προσθέτοντας επικαλυπτόμενους παλμούς.

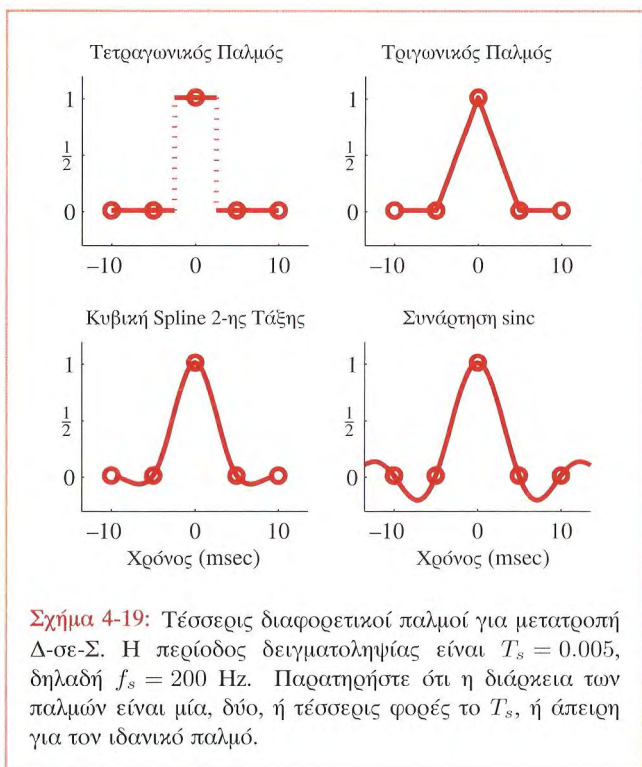
Προφανώς, το σημαντικό θέμα είναι η επιλογή της κυματομορφής του παλμού $p(t)$. Δυστυχώς, δεν διαθέτουμε ακόμη τα μαθηματικά εργαλεία που απαιτούνται για να καθορίσουμε το βέλτιστο σχήμα του παλμού που απαιτείται για ακριβή ανακατασκευή της κυματομορφής $y(t)$ από τα δείγματά της, όπως προβλέπεται στο θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon.



Επίδειξη: Ανακατασκευή: Αρχεία βίντεο

Αυτό το βέλτιστο σχήμα παλμού μπορεί να προκύψει κατά τη μαθηματική απόδειξη του θεωρήματος δειγματοληψίας. Ωστόσο, θα αποδείξουμε το εύλογο της Σχέσης (4.21), θεωρώντας μερικά απλά, αλλά υποβέλτιστα, παραδείγματα. Το Σχήμα 4-19 δείχνει τέσσερις πιθανές κυματομορφές του παλμού $p(t)$ για μετατροπή Δ -σε- Σ , όταν $f_s = 200$ Hz.

⁵Ένας παλμός είναι μια κυματομορφή συνεχούς χρόνου της οποίας η ενέργεια είναι συγκεντρωμένη στο χρόνο. Τυπικά, ένας παλμός παίρνει μη μηδενικές τιμές *μόνο* για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα.



4-4.2 Παρεμβολή Συγκράτησης Μηδενικής Τάξης

Το πιο απλό σχήμα παλμού που μπορούμε να προτείνουμε είναι ένας συμμετρικός τετραγωνικός παλμός της μορφής

$$p(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2}T_s < t \leq \frac{1}{2}T_s \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (4.22)$$

Αυτός ο παλμός είναι σχεδιασμένος στο πάνω αριστερό τμήμα του Σχήματος 4-19.

Από το Σχήμα 4-19, βλέπουμε ότι το συνολικό εύρος του τετραγωνικού παλμού είναι $T_s = 5$ ms και το πλάτος του είναι 1. Συνεπώς, κάθε όρος $y[n]p(t - nT_s)$ του αθροίσματος της Σχέσης (4.21) θα δημιουργεί μια επίπεδη περιοχή πλάτους $y[n]$ κεντραρισμένη ως προς το $t = nT_s$.

Αυτό φαίνεται στο επάνω μέρος του Σχήματος 4-20, το οποίο δείχνει το αρχικό συνημιτονικό σήμα των 83 Hz (συνεχής γκρι γραμμή), τα δείγματά του που προκύπτουν από τη δειγματοληψία με συχνότητα 200 δειγμάτων/δευτερόλεπτο και οι ξεχωριστοί μετατοπισμένοι και σταθμισμένοι παλμοί, $y[n]p(t - nT_s)$ (διακεκομμένη γραμμή). Από το άθροισμα των μετατοπισμένων και σταθμισμένων παλμών θα προκύψει μία “κλιμακωτή” κυματομορφή, όπως αυτή που παρουσιάζεται στο κάτω μέρος του Σχήματος 4-20, όπου η γκρι καμπύλη είναι η αρχική κυματομορφή $x(t)$ και η έντονη πορτοκαλί καμπύλη δείχνει την ανακατασκευασμένη κυματομορφή που προκύπτει χρησιμοποιώντας τον τετραγωνικό παλμό⁶.



Επίδειξη: Ανακατασκευή: Αρχεία βίντεο

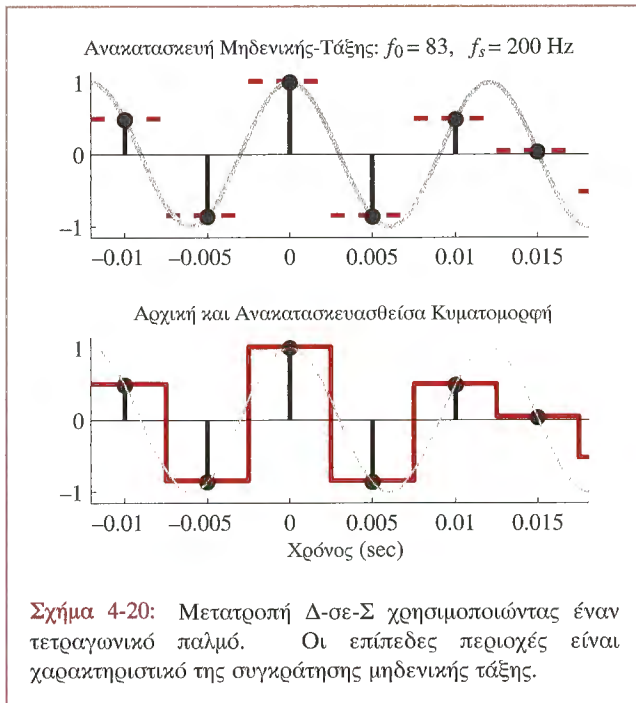
Το κενό μεταξύ των δειγμάτων έχει πράγματι καλυφθεί από μια κυματομορφή συνεχούς χρόνου. Ωστόσο, είναι ξεκάθαρο, από το κάτω μέρος του Σχήματος 4-20, ότι η ανακατασκευασμένη κυματομορφή με τον τετραγωνικό παλμό είναι μια χονδροειδής προσέγγιση της αρχικής συνημιτονικής κυματομορφής. Άρα, χρησιμοποιώντας έναν τετραγωνικό παλμό στη Σχέση (4.21) προκύπτει ένας μετατροπέας Δ-σε-Σ, αλλά όχι ο ιδανικός. Ακόμη κι έτσι, είναι ένα χρήσιμο μοντέλο, αφού πολλοί από τους υπάρχοντες μετατροπείς Ψ-σε-Α παράγουν εξόδους που φαίνονται ακριβώς σαν κι αυτό!

4-4.3 Γραμμική Παρεμβολή

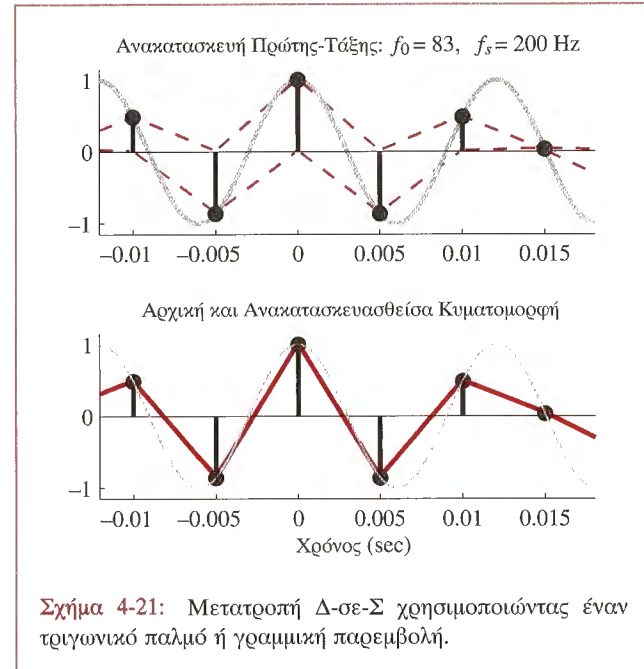
Ο τριγωνικός παλμός που έχει σχεδιαστεί στο πάνω δεξιό μέρος του Σχήματος 4-19 ορίζεται ως ένας παλμός που αποτελείται από δύο πρώτης τάξης πολυώνυμα (ευθεία γραμμή)

$$p(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T_s & -T_s \leq t \leq T_s \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (4.23)$$

⁶Εφόσον μία σταθερά είναι ένα πολυώνυμο μηδενικής τάξης και εφόσον ο σκοπός του επίπεδου παλμού είναι να “συγκρατήσει” ή να διατηρεί την τιμή κάθε δείγματος για T_s sec, η χρήση του τετραγωνικού παλμού αναφέρεται ως *ανακατασκευή συγκράτησης μηδενικής τάξης*.



Στο Σχήμα 4-21 (κορυφή) φαίνεται και πάλι το αρχικό συνημιτονικό σήμα των 83-Hz (συνεχής γκρι καμπύλη) και τα δείγματά του, μαζί με τους σταθμισμένους παλμούς $y[n]p(t - nT_s)$ (διακεκομμένη πορτοκαλί γραμμή) για το σχήμα του τριγωνικού παλμού. Σ' αυτή την περίπτωση, η έξοδος του μετατροπέα Δ-σε-Σ $y(t)$ σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t είναι το άθροισμα των σταθμισμένων παλμών που επικαλύπτονται εκείνη τη χρονική στιγμή. Εφόσον η διάρκεια του παλμού είναι $2T_s$ και είναι μετατοπισμένοι κατά πολλαπλάσια του T_s , δεν μπορούν να επικαλύπτονται, σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή, παραπάνω από δύο παλμοί. Η έξοδος που προκύπτει φαίνεται, με την έντονη πορτοκαλί καμπύλη, στο κάτω μέρος του Σχήματος 4-21. Παρατηρήστε ότι τα δείγματα ενώνονται με ευθείες γραμμές. Παρατηρήστε επίσης ότι οι τιμές της ανακατασκευασμένης κυματομορφής τις



χρονικές στιγμές $t = nT_s$ είναι απόλυτα σωστές. Αυτό συμβαίνει γιατί οι τριγωνικοί παλμοί είναι μηδενικοί στα $\pm T_s$ και μόνο ένας σταθμισμένος παλμός (με τιμή $y[n]$ στο $t = nT_s$) συμβάλλει στην τιμή τη χρονική στιγμή $t = nT_s$. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι η κυματομορφή συνεχούς χρόνου έχει προκύψει με *γραμμική παρεμβολή* μεταξύ των δειγμάτων. Αυτή είναι μια πιο ομαλή και καλύτερη προσέγγιση της αρχικής κυματομορφής (λεπτή γκρι καμπύλη), αλλά υπάρχει ακόμη σημαντικό σφάλμα ανακατασκευής για αυτό το σήμα.

4-4.4 Παρεμβολή Κυβικής Spline

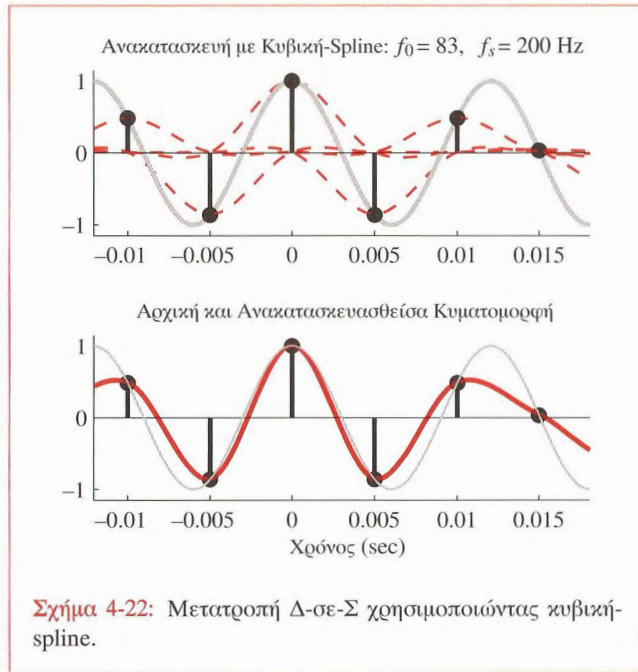
Ένα τρίτο σχήμα παλμού φαίνεται στο κάτω αριστερό μέρος του Σχήματος 4-19. Αυτός ο παλμός αποτελείται από τέσσερα κατά τμήματα κυβικά (τρίτης τάξης) πολυώνυμα.

Παρατηρήστε ότι η διάρκεια του παλμού είναι διπλάσια απ' αυτή του τριγωνικού παλμού και τετραπλάσια απ' αυτή

του τετραγωνικού παλμού. Παρατηρήστε επίσης ότι αυτή η μορφή μηδενίζεται στις θέσεις:

$$p(t) = 0 \quad \text{για } t = \pm T_s, \pm 2T_s$$

και η παράγωγός της είναι ομαλή στις θέσεις



Σχήμα 4-22: Μετατροπή Δ-σε-Σ χρησιμοποιώντας κυβική-spline.

δειγματοληψίας. Η ανακατασκευή με την κυβική-spline φαίνεται στο Σχήμα 4-22. Στο πάνω μέρος του Σχήματος 4-22 παρουσιάζονται το αρχικό συνημιτονικό σήμα των 83-Hz (συνεχής γκρι καμπύλη) οι μεταποτισμένοι και σταθμισμένοι παλμοί $y[n]p(t - nT_s)$ (διακεκομμένη πορτοκαλί γραμμή). Προσέξτε τώρα, ότι για τις τιμές του t ανάμεσα σε δύο γειτονικά δείγματα, επικαλύπτονται τέσσερις παλμοί και οι οποίοι πρέπει να αθροιστούν όπως δηλώνει το άθροισμα της Σχέσης (4.21). Αυτό σημαίνει ότι το ανακατασκευασμένο σήμα, σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, εξαρτάται από τα δύο προηγούμενα

και από τα δύο επόμενα δείγματα. Το κάτω μέρος του Σχήματος 4-22 δείχνει την αρχική κυματομορφή (απαλό γκρι), τα δείγματα και την έξοδο του μετατροπέα Δ-σε-Σ μαζί με την παρεμβολή “κυβικής-spline” (συμπαγής πορτοκαλί καμπύλη). Τώρα βλέπουμε ότι η προσέγγιση γίνεται πιο ομαλή και καλύτερη, αλλά απέχει ακόμη πολύ από την ιδανική. Θα δούμε ότι αυτό συμβαίνει επειδή η συχνότητα δειγματοληψίας είναι μόνο 2.4 φορές μεγαλύτερη της μέγιστης συχνότητας του σήματος.

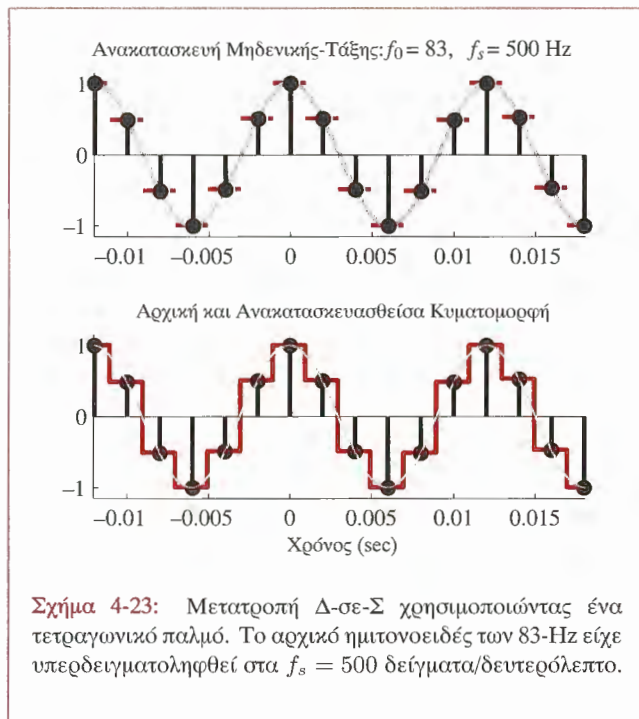
4-4.5 Υπερδειγματοληψία και Παρεμβολή

Από τα προηγούμενα τρία παραδείγματα, φαίνεται ότι ένας τρόπος για να κάνουμε μία ομαλή ανακατασκευή μιας κυματομορφής, όπως για παράδειγμα ενός ημιτονικού σήματος, είναι να χρησιμοποιήσουμε έναν παλμό $p(t)$ που είναι ομαλός και έχει μεγάλη διάρκεια. Τότε κατά τη διαδικασία της παρεμβολής θα περιλαμβάνονται μερικά γειτονικά δείγματα στον υπολογισμό κάθε τιμής της εξόδου $y(t)$. Ωστόσο, ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι ένας άλλος σημαντικός παράγοντας. Αν η αρχική κυματομορφή δεν μεταβάλλεται πολύ στη διάρκεια του $p(t)$, τότε θα έχουμε επίσης καταφέρει μία καλή ανακατασκευή. Ένας τρόπος για να το εξασφαλίσουμε είναι η υπερδειγματοληψία, χρησιμοποιώντας δηλαδή, ένα ρυθμό δειγματοληψίας που είναι πολύ μεγαλύτερος από τη συχνότητα της συνημιτονικής κυματομορφής. Αυτό είναι εικονογραφημένο στα Σχήματα 4-23, 4-24 και 4-25, όπου η συχνότητα του συνημιτονικού σήματος εξακολουθεί να είναι $f_0 = 83$ Hz, αλλά η συχνότητα δειγματοληψίας έχει αυξηθεί στα $f_s = 500$ δείγματα/δευτερόλεπτο. Οι παλμοί ανακατασκευής έχουν την ίδια μορφή όπως αυτοί του Σχήματος 4-19, αλλά είναι πολύ πιο σύντομης χρονικής διάρκειας, αφού η $T_s = 2$ msec αντι των 5 msec. Το σήμα μεταβάλλεται πολύ λιγότερο στη διάρκεια ενός παλμού και έτσι η κυματομορφή εμφανίζεται “ομολότερη” και είναι πολύ πιο εύκολο να ανακατασκευάσουμε με ακρίβεια χρησιμοποιώντας μόνο λίγα δείγματα. Παρατηρήστε, ότι ακόμη και στην περίπτωση του τετραγωνικού παλμού (Σχήμα 4-23) η ανακατασκευή είναι καλύτερη, αλλά εξακολουθεί να είναι ασυνεχής. Ο τριγωνικός παλμός

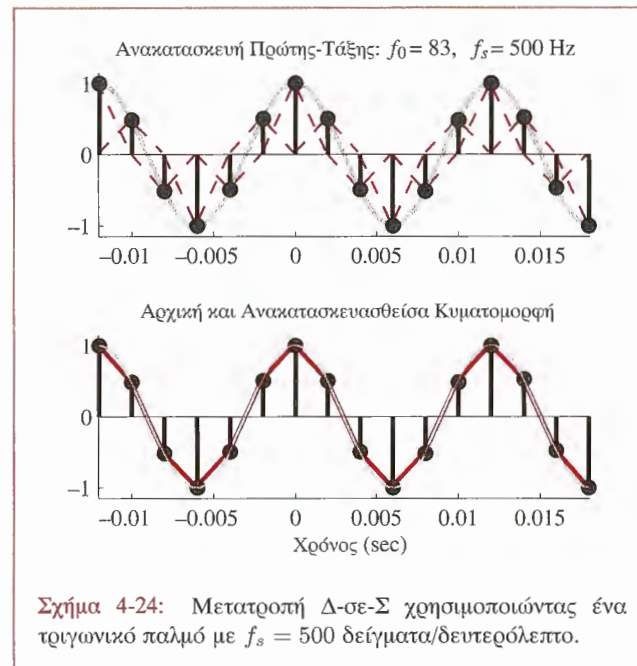
(Σχήμα 4-24) δίνει μία εξίσωση προσέγγιση και ο παλμός της κυβικής-spline δίνει μία ανακατασκευή που είναι δυσδιάκριτη από το αρχικό σήμα στην κλίμακα που χρησιμοποιείται στο Σχήμα 4-25.



Εργ. Ασκ.: Ανακατασκευή; Αρχεία βίντεο



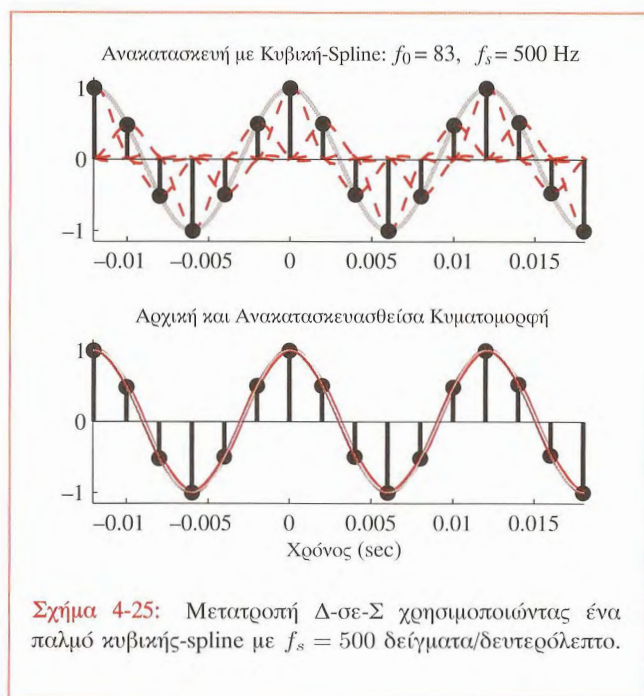
Τα Σχήματα 4-23, 4-24 και 4-25 δείχνουν ότι η υπερδειγματοληψία μπορεί να διευκολύνει την ανακατασκευή μιας κυματομορφής από τα δείγματά της. Πράγματι, γι' αυτό τα συστήματα αναπαραγωγής CD διαθέτουν μετατροπείς Ψ-σε-Α υπερδειγματοληψίας! Στη περίπτωση του συστήματος αναπαραγωγής CD, χρησιμοποιείται υπερδειγματοληψία $4\times$ ή $2\times$ για να αυξήσει το ρυθμό δειγματοληψίας



πρωτού να σταλούν τα δείγματα στον μετατροπέα Ψ-σε-Α. Αυτό κάνει δυνατή τη χρήση ενός απλούστερου (και συνεπώς φτηνότερου) μετατροπέα Ψ-σε-Α για να ανακατασκευάσουμε μια έξοδο πολύ κοντά στην ιδανική από ένα σύστημα αναπαραγωγής CD.

4-4.6 Ιδανική Παρεμβολή Περιορισμένου Εύρους

Μέχρι αυτό το σημείο αυτής της ενότητας, δείξαμε τις βασικές αρχές της μετατροπής Δ-σε-Σ. Δείξαμε ότι αυτή η διαδικασία μπορεί να προσεγγιστεί πολύ καλά από ένα άθροισμα παλμών όπως αυτό της Σχέσης (4.21). Αυτό που απομένει είναι η απάντηση στην ερώτηση: Ποιο είναι το σχήμα του παλμού που δίνει “ιδανική μετατροπή Δ-σε-Σ”; Στο Κεφάλαιο 12, θα δείξουμε ότι το βέλτιστο σχήμα



Σχήμα 4-25: Μετατροπή Δ-σε-Σ χρησιμοποιώντας ένα παλμό κυβικής-spline με $f_s = 500$ δείγματα/δευτερόλεπτο.

παλμού δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

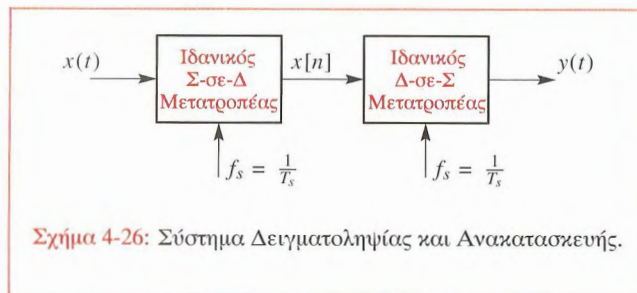
$$p(t) = \frac{\sin \frac{\pi}{T_s} t}{\frac{\pi}{T_s} t} \quad \text{για } -\infty < t < \infty \quad (4.24)$$

Το άπειρο μήκος αυτού του “παλμού” δηλώνει ότι για να ανακατασκευάσουμε ακριβώς ένα σήμα τη χρονική στιγμή t από τα δείγματά του απαιτούνται όλα τα δείγματα και όχι μόνο τα κοντινά σ’ εκείνη τη χρονική στιγμή δείγματα. Το κάτω δεξιά μέρος του Σχήματος 4-19 δείχνει αυτόν τον παλμό μέσα στο διάστημα $-2.6T_s < t < 2.6T_s$. Όπως παρατηρούμε, φθίνει έξω από αυτό το διάστημα, αλλά ποτέ δε φτάνει και δεν μένει στο μηδέν. Εφόσον ο παλμός έχει ρίζες στα πολλαπλάσια του T_s , και αυτός ο τύπος ανακατασκευής είναι μια διαδικασία παρεμβολής, η οποία ονομάζεται *παρεμβολή*

περιορισμένου εύρους ζώνης. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον παλμό για ανακατασκευή μιας συνημιτονοειδούς κυματομορφής, από τα δείγματά της, θα παραχθεί μια ακριβής συνημιτονοειδή κυματομορφή. Αν ο ρυθμός δειγματοληψίας ικανοποιεί τη συνθήκη του θεωρήματος δειγματοληψίας, η ανακατασκευασμένη συνημιτονοειδής κυματομορφή θα είναι πανομοιότυπη με το αρχικό σήμα που είχε δειγματοληφθεί. Αν κατά τη δειγματοληψία συνέβει αναδίπλωση, ο ιδανικός μετατροπέας Δ-σε-Σ ανακατασκευάζει μία συνημιτονοειδή κυματομορφή με συχνότητα ίση με τη μικρότερη της $f_s/2$ συχνότητα αναδίπλωσης.

4-5 Θεώρημα Δειγματοληψίας

Σ’ αυτό το κεφάλαιο συζητήσαμε τα θέματα που προκύπτουν κατά τη δειγματοληψία των σημάτων συνεχούς χρόνου. Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα του συνημιτονικού σήματος συνεχούς χρόνου, περιγράψαμε το φαινόμενο της αναδίπλωσης και δείξαμε πώς το αρχικό συνημιτονικό σήμα συνεχούς χρόνου μπορεί να ανακατασκευαστεί με μια διαδικασία παρεμβολής. Όλη η συζήτηση αυτού του κεφαλαίου στοχεύει στην εδραίωση εμπιστοσύνης στο θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon, το οποίο και επαναλαμβάνεται στο σημείο αυτό εξαιτίας της ουσιαστικής σημασίας του στη μελέτη μας για την επεξεργασία των ψηφιακών σημάτων.



Σχήμα 4-26: Σύστημα Δειγματοληψίας και Ανακατασκευής.

Θεώρημα Δειγματοληψίας του Shannon

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ με συχνότητες μικρότερες της f_{\max} μπορεί να ανακατασκευασθεί ακριβώς από τα δείγματά του $x[n] = x(nT_s)$, αν τα δείγματα προέκυψαν με ρυθμό $f_s = 1/T_s$ μεγαλύτερο από $2f_{\max}$.

Ένα σχηματικό διάγραμμα αναπαράστασης του θεωρήματος δειγματοληψίας φαίνεται στο Σχήμα 4-26 σε σχέση με τον ιδανικό μετατροπέα Δ-σε-Σ που ορίσαμε σ' αυτό το κεφάλαιο. Το θεώρημα δειγματοληψίας αναφέρει ότι το σύστημα δειγματοληψίας και ανακατασκευής που φαίνεται στο Σχήμα 4-26, αν η είσοδος απαριζείται από συνημιτονοειδή σήματα των οποίων οι συχνότητες ανήκουν στο διάστημα $0 \leq f \leq f_{\max}$, τότε το ανακατασκευασμένο σήμα είναι ίσο με το αρχικό σήμα, δηλαδή θα ισχύει, $y(t) = x(t)$.

Σήματα απαριζόμενα από ημιτονοειδή των οποίων οι συχνότητες περιορίζονται σε μια “ζώνη συχνοτήτων” της μορφής $0 \leq f \leq f_{\max}$ καλούνται *σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης*⁷. Τέτοια σήματα θα μπορούσαν να παρασταθούν ως ακολούθως:

$$x(t) = \sum_{k=0}^N x_k(t) \quad (4.25)$$

όπου καθένα από τα σήματα της παραπάνω σχέσης είναι της μορφής

$$x_k(t) = A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k) \quad (4.26)$$

και υποθέτουμε ότι οι συχνότητες είναι ταξινομημένες έτσι ώστε $f_0 \geq 0$ και $f_N \leq f_{\max}$. Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 3, από ένα τέτοιο αθροιστικό συνδυασμό συνημιτονικών σημάτων μπορεί να παραχθεί μια απειρία περιοδικών και μη περιοδικών σημάτων. Δειγματοληπτόντας το σήμα των

⁷Τα αντίστοιχα μιγαδικά εκθετικά σήματα θα πρέπει να περιορίζονται στη ζώνη $-f_{\max} \leq f \leq f_{\max}$.

Σχέσεων (4.25) και (4.26), παίρνουμε

$$x[n] = x(nT_s) = \sum_{k=0}^N x_k(nT_s) = \sum_{k=0}^N x_k[n] \quad (4.27)$$

όπου $x_k[n] = A_k \cos(\hat{\omega}_k n + \phi_k)$ με $\hat{\omega}_k = 2\pi f_k / f_s$. Αυτό συμβαίνει γιατί, από τη δειγματοληψία ενός αθροίσματος συνημιτονικών σημάτων, προκύπτει ένα άθροισμα δειγματοληπτημένων συνημιτονικών σημάτων καθένα από τα οποία θα μπορούσε να υποστεί αναδίπλωση αν ο ρυθμός δειγματοληψίας δεν είναι αρκετά υψηλός.

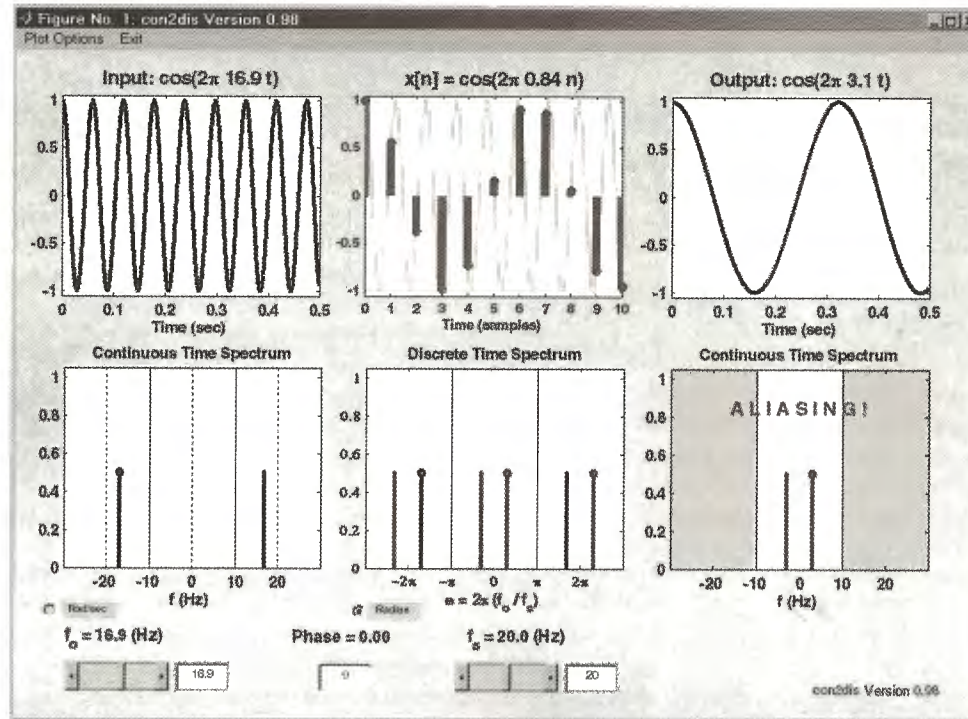
Το τελικό βήμα στη διαδικασία της δειγματοληψίας ακολουθούμενο από την ανακατασκευή στο Σχήμα 4-26 είναι η μετατροπή του σήματος διακριτού χρόνου σε σήμα συνεχούς χρόνου μέσω παρεμβολής με

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]p(t - nT_s) \quad (4.28)$$

όπου για τέλεια ανακατασκευή το $p(t)$ θα πρέπει να δίνεται από τη Σχέση (4.24). Η έκφραση αυτή του ανακατασκευασμένου σήματος της εξόδου, περιγράφει μια γραμμική διαδικασία πάνω στα δείγματα $x[n]$. Αυτό σημαίνει ότι η συνολική έξοδος $y(t)$ θα αποτελείται από το άθροισμα των εξόδων εξαιτίας της καθέμιας διαφορετικής συνιστώσας $x_k[n]$. Αυτό μπορούμε να το δούμε αντικαθιστώντας τη Σχέση (4.27) στη Σχέση (4.28), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^N x_k[n] \right) p(t - nT_s) \\ &= \sum_{k=0}^N \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k[n] p(t - nT_s) \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Υποθέτοντας τώρα ότι καθένα από τα ημιτονικά σήματα ικανοποιεί τη συνθήκη του θεωρήματος δειγματοληψίας, προκύπτει ότι ο μετατροπέας Δ-σε-Σ θα ανακατασκευάσει



Σχήμα 4-27: Γραφική διεπαφή χρήστη (GUI) του con2dis το οποίο διασαφηνίζει το φαινόμενο της αναδίπλωσης με ταυτόχρονα διαγράμματα στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας. Ο χρήστης μπορεί να αλλάξει τις συχνότητες μετακινώντας τις φασματικές γραμμές με το ποντίκι ή εισάγοντας τιμές.

τέλεια κάθε συνιστώσα και συνεπώς συμπεραίνουμε ότι

$$y(t) = \sum_{k=0}^N x_k(t) = x(t)$$

Άρα, δείξαμε ότι το θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon εφαρμόζεται σε κάθε σήμα που μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα άθροισμα ημιτονικών σημάτων περιορισμένου εύρους ζώνης και αφού είναι δυνατόν ναδειχθεί ότι τα περισσότερα σήματα μπορούν να αναπαρασταθούν ως σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης, συνεπάγεται ότι

το θεώρημα δειγματοληψίας αποτελεί ένα πολύ γενικό οδηγό για τη δειγματοληψία όλων των ειδών των σημάτων. Στο Κεφάλαιο 12, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier θα περιγράψουμε μ' ένα πιο αυστηρό τρόπο αυτά που αναφέραμε παραπάνω.

4-6 Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι

Αυτό το κεφάλαιο εισήγαγε την έννοια της δειγματοληψίας και τη συμπληρωματική της λειτουργία την ανακατασκευή. Με τη δειγματοληψία, η πιθανότητα αναδίπλωσης υπάρχει

πάντα και δημιουργήσαμε την επίδειξη του στροβοσκοπίου για να περιγράψουμε αυτή την έννοια με ένα άμεσο τρόπο.



Επίδειξη: Σύνδεσμοι Επιπλέον Επιδείξεων

Στην Εργαστηριακή άσκηση #6, παρουσιάζεται πώς εφαρμόζεται η δειγματοληψία στις ψηφιακές εικόνες. Ορισμένες όψεις της δειγματοληψίας έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί στις εργαστηριακές ασκήσεις για σύνθεση μουσικής στο Κεφάλαιο 3.

Το CD-ROM επίσης περιλαμβάνει πολλές επιδείξεις δειγματοληψίας και του φαινομένου της αναδίπλωσης:

- (i) Στροβοσκοπική ταινία γυρισμένη χρησιμοποιώντας την κοινή συχνότητα μιας video camera σε 30 πλαίσια ανά δευτερόλεπτο.
- (ii) Επιδείξεις στροβοσκοπικής σύνθεσης παραγόμενες ως ταινίες στη Matlab.
- (iii) Αρχεία βίντεο που δείχνουν τη διαδικασία της παρεμβολής για διάφορα σχήματα παλμών και διάφορους ρυθμούς δειγματοληψίας.
- (iv) Τη γραφική διεπαφή `con2dis` που φαίνεται στο Σχήμα 4-27 η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί από το φοιτητή για τη βαθύτερη κατανόηση της δειγματοληψίας και του φαινομένου της ψευδωνυμίας.
- (v) Αρχεία βίντεο με το φαινόμενο της αναδίπλωσης που δείχνουν πώς αλλάζει το φάσμα για διαφορετικούς ρυθμούς δειγματοληψίας.

Υπενθυμίζουμε και πάλι ότι το CD-ROM περιλαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό λυμένων προβλημάτων που είναι διαθέσιμα για ανασκόπηση και πρακτική.



Υπόδειξη: Εκατοντάδες Λυμένων Προβλημάτων

4-7 Προβλήματα

Πρόβλημα.-4.1 Θεωρήστε τη συνημιτονική κυματομορφή

$$x(t) = 10 \cos(880\pi t + \phi)$$

Υποθέστε ότι από τη δειγματοληψία της παραπάνω κυματομορφής σε ισαπέχουσες χρονικές στιγμές nT_s προκύπτει η παρακάτω ακολουθία αριθμών

$$x[n] = x(nT_s) = 10 \cos(880\pi nT_s + \phi)$$

για $-\infty < n < \infty$. Υποθέστε ότι $T_s = 0.0001$ sec.

- (i) Πόσα δείγματα θα ληφθούν σε μια περίοδο της συνημιτονικής κυματομορφής;
- (ii) θεωρήστε τώρα μία άλλη κυματομορφή $y(t)$ τέτοια ώστε

$$y(t) = 10 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Βρείτε μια συχνότητα $\omega_0 > 880\pi$ για την οποία $y(nT_s) = x(nT_s)$ για κάθε n .

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $\cos(\theta + 2\pi n) = \cos(\theta)$ αν n είναι ακέραιος.

- (iii) Για τη συχνότητα που βρήκατε στο (ii), ποιος είναι ο συνολικός αριθμός δειγμάτων που πήραμε σε μια περίοδο της $x(t)$;

Πρόβλημα.-4.2 Έστω $x(t) = 7 \sin(11\pi t)$. Καθορίστε, σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ που προκύπτει από τη δειγματοληψία, με ρυθμό f_s , του $x(t)$ και αποδείξτε ότι το προκύπτον $x[n]$ μπορεί να γραφεί ως ακολούθως

$$x[n] = A \cos(\hat{\omega}_0 n + \phi)$$

Σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις, προσδιορίστε τις τιμές του A , του ϕ και της $\hat{\omega}_0$. Επίσης, αναφέρετε αν έχει γίνει υπερδειγματοληψία ή υποδειγματοληψία στο σήμα.

- (i) Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 10$ δείγματα/sec.
- (ii) Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 5$ δείγματα/sec.

- (iii) Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 15$ δείγματα/sec.

Πρόβλημα.-4.3 Υποθέστε ότι ένα σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ δίνεται από τη σχέση

$$x[n] = 2.2 \cos(0.3\pi n - \pi/3)$$

και ότι έχει προκύψει από τη δειγματοληψία του σήματος συνεχούς χρόνου $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ με ρυθμό δειγματοληψίας $f_s = 6000$ δείγματα/δευτερόλεπτο. Προσδιορίστε τρία διαφορετικά σήματα συνεχούς χρόνου από τα οποία θα μπορούσε να προκύψει το σήμα $x[n]$. Όλα αυτά τα σήματα συνεχούς χρόνου θα πρέπει να έχουν συχνότητα μικρότερη από 8 kHz. Ορίστε τα τρία σήματα με μαθηματικές σχέσεις.

Πρόβλημα.-4.4 Μια διαμορφωμένη κατά πλάτος (AM) συνημιτονική κυματομορφή ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$x(t) = [10 + \cos(2\pi(2000)t)] \cos(2\pi(10^4)t)$$

- (i) Σχεδιάστε το δίπλευρο φάσμα του σήματος. Βεβαιωθείτε ότι σημειώσατε πάνω στη γραφική παράσταση όλα τα σημαντικά μεγέθη.
- (ii) Είναι η κυματομορφή αυτή περιοδική; Αν ναι, τότε ποια είναι η περίοδος της;
- (iii) Ποιά σχέση πρέπει να ικανοποιεί ο ρυθμός δειγματοληψίας f_s έτσι ώστε $y(t) = x(t)$ στο Σχήμα 4-26;

Πρόβλημα.-4.5 Υποθέστε ότι ένα σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ δίνεται από τον τύπο

$$x[n] = 10 \cos(0.2\pi n - \pi/7)$$

και ότι έχει προκύψει από τη δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου με ρυθμό δειγματοληψίας $f_s = 1000$ δείγματα/δευτερόλεπτο.

- (i) Προσδιορίστε δύο διαφορετικά σήματα συνεχούς χρόνου $x_1(t)$ και $x_2(t)$ των οποίων τα δείγματα είναι ίσα με $x[n]$, δηλαδή, βρείτε $x_1(t)$ και $x_2(t)$ έτσι ώστε $x[n] = x_1(nT_s) = x_2(nT_s)$ αν $T_s = 0.001$. Και τα δύο σήματα πρέπει να έχουν συχνότητα μικρότερη από 1000 Hz. Δώστε ένα τύπο για κάθε σήμα.

- (ii) Αν το $x[n]$ δίνεται από την παραπάνω σχέση, τι σήμα θα ανακατασκευαστεί από έναν ιδανικό μετατροπέα Δ-σε-Σ, ο οποίος λειτουργεί με ρυθμό δειγματοληψίας 2000 δείγματα/δευτερόλεπτο; Δηλαδή, ποιά είναι η έξοδος $y(t)$ στο Σχήμα 4-26 για το $x[n]$ που δίνεται παραπάνω;

Πρόβλημα.-4.6 Ένας μη-ιδανικός μετατροπέας Δ-σε-Σ, δέχεται στην είσοδό του μια ακολουθία $y[n]$ και παράγει σαν έξοδο ένα σήμα συνεχούς χρόνου $y(t)$ σύμφωνα με τη σχέση

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]p(t - nT_s)$$

όπου $T_s = 0.1$ sec. Η ακολουθία εισόδου δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$y[n] = \begin{cases} (0.8)^n & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- (i) Για τον παλμό

$$p(t) = \begin{cases} 1 & -0.05 \leq t \leq 0.05 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

σχεδιάστε προσεκτικά την κυματομορφή εξόδου $y(t)$.

- (ii) Για τον παλμό

$$p(t) = \begin{cases} 1 - 10|t| & -0.1 \leq t \leq 0.1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

σχεδιάστε προσεκτικά την κυματομορφή εξόδου $y(t)$.

Πρόβλημα.-4.7 Υποθέστε ότι χρησιμοποιούμε το Matlab για να σχεδιάσουμε ένα ημιτονοειδές σήμα. Ο ακόλουθος κώδικας παράγει ένα σήμα $x[n]$ και το παριστάνει γραφικά. Δυστυχώς, ο άξονας του χρόνου στη γραφική παράσταση δεν έχει ονομαστεί κατάλληλα.

```
Ts = 0.01;
Duration = 0.3;
tt = 0 : Ts : Duration;
Fo = 394;
xx = 9*cos( 2*pi*Fo*tt + pi/2 );
%
stem( xx )      %<--! NO time axis
```

- (i) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `stem` σχεδιάστε το σήμα συναρτήσει του n .
- (ii) Για την παραπάνω γραφική παράσταση, καθορίστε το σωστό τύπο για το σήμα διακριτού χρόνου εκφράζοντάς το στη μορφή

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$$

- (iii) Εξηγήστε πώς το φαινόμενο της ψευδωνυμίας επηρεάζει τη γραφική παράσταση που βλέπετε.

Πρόβλημα.-4.8 Το διάγραμμα φάσματος δίνει το συχνотικό περιεχόμενο ενός σήματος.

- (i) Κάντε ένα σχεδιάγραμμα του φάσματος του σήματος

$$x(t) = \cos(50\pi t) \sin(700\pi t)$$

Σημειώστε τις συχνότητες και τα μιγαδικά πλάτη.

- (ii) Καθορίστε το μικρότερο ρυθμό δειγματοληψίας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά τη δειγματοληψία του $x(t)$ χωρίς να εμφανιστεί το φαινόμενο της αναδίπλωσης.

Πρόβλημα.-4.9 Το διάγραμμα φάσματος δίνει το συχνотικό περιεχόμενο ενός σήματος.

- (i) Κάντε ένα σχεδιάγραμμα του φάσματος του σήματος

$$x(t) = \sin^3(400\pi t)$$

Σημειώστε τις συχνότητες και τα μιγαδικά πλάτη.

- (ii) Καθορίστε το μικρότερο ρυθμό δειγματοληψίας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά τη δειγματοληψία του $x(t)$ χωρίς να εμφανιστεί το φαινόμενο της αναδίπλωσης.

Πρόβλημα.-4.10 Σκοπός του παρακάτω προγράμματος στο Matlab είναι να σχεδιάσουμε 13 κύκλους ενός 13-Hz ημιτονικού σήματος, αλλά υπάρχει ένα προγραμματιστικό λάθος.

```
Fo = 13;
To = 1/Fo;      %-- Period
Ts = 0.07;
tt = 0 : Ts : (13*To);
xx = real(exp(j*(2*pi*Fo*tt - pi/2)));
%
plot( tt, xx )
xlabel('TIME (sec)'), grid on
```

- (i) Κάντε ένα σχεδιάγραμμα της γραφικής παράστασης που θα παραχθεί. Εξηγήστε πώς το φαινόμενο της αναδίπλωσης επηρεάζει τη γραφική παράσταση που θα δείτε. Συγκεκριμένα, ποια είναι η περίοδος στη γραφική παράσταση και πόσες περιόδους παρατηρείτε;
- (ii) Καθορίστε μια αποδεκτή τιμή του T_s για να πάρουμε μία ομαλή γραφική παράσταση του επιθυμητού σήματος των 13-Hz.

Πρόβλημα.-4.11 Μία διαμορφωμένη κατά πλάτος (AM) συνημιτονική κυματομορφή ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$x(t) = [3 + \sin(\pi t)] \cos(13\pi t + \pi/2)$$

- (i) Χρησιμοποιήστε φάσσορες για να δείξετε ότι η $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + A_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3)$$

όπου $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$, δηλαδή, βρείτε τιμές των παραμέτρων $A_1, A_2, A_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$.

- (ii) Σχεδιάστε το φάσμα συναρτήσει της συχνότητας. Χρησιμοποιώντας τις τιμές των A_i, ϕ_i και ω_i , βαθμονομήστε κατάλληλα τους άξονες της γραφικής παράστασης.
- (iii) Καθορίστε το μικρότερο ρυθμό δειγματοληψίας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά τη δειγματοληψία του $x(t)$ χωρίς να εμφανιστεί το φαινόμενο της αναδίπλωσης.

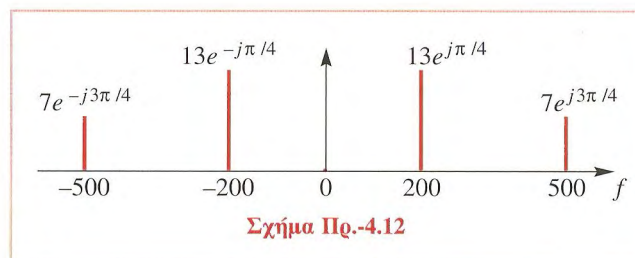
Πρόβλημα.-4.12 Ανατρεξίτε στο Σχήμα 4-26 για το σύστημα με ιδανικούς Συνεχές σε Διακριτό και Διακριτό σε Συνεχές μετατροπείς.

- (i) Υποθέστε ότι το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$x[n] = 10 \cos(0.13\pi n + \pi/13)$$

Αν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι $f_s = 1000$ δείγματα/δευτερόλεπτο, καθορίστε δύο διαφορετικά σήματα συνεχούς χρόνου $x(t) = x_1(t)$ και $x(t) = x_2(t)$ τα οποία θα μπορούσαν να είναι είσοδοι στο παραπάνω σύστημα, δηλαδή, βρείτε $x_1(t)$ και $x_2(t)$ τέτοια ώστε $x[n] = x_1(nT_s) = x_2(nT_s)$ αν $T_s = 0.001$.

- (ii) Αν το φάσμα της εισόδου $x(t)$ είναι αυτό που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-4.12, προσδιορίστε ένα απλό τύπο για το $y(t)$ όταν $f_s = 700$ δείγματα/δευτερόλεπτο (και για τους δύο μετατροπείς).



Σχήμα Πρ.-4.12

Πρόβλημα.-4.13 Ανατρεξίτε στο Σχήμα 4-26 για το σύστημα δειγματοληψίας και ανακατασκευής. Υποθέστε ότι οι ρυθμοί δειγματοληψίας των δύο μετατροπέων είναι ίσοι και η είσοδος στον ιδανικό μετατροπέα Δ-σε-Σ είναι

$$x(t) = 2 \cos(2\pi(50)t + \pi/2) + \cos(2\pi(150)t)$$

- (i) Αν η έξοδος του ιδανικού μετατροπέα Δ-σε-Σ είναι ίση με την είσοδο $x(t)$, δηλαδή,

$$y(t) = 2 \cos(2\pi(50)t + \pi/2) + \cos(2\pi(150)t)$$

ποιο γενικό συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για τη συχνότητα δειγματοληψίας f_s σ' αυτή την περίπτωση;

- (ii) Αν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι $f_s = 250$ δείγματα/δευτερόλεπτο, καθορίστε το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ και εκφράστε το ως άθροισμα συνημιτόνων. Βεβαιωθείτε ότι όλες οι συχνότητες στην απάντησή σας είναι θετικές και μικρότερες από π ακτίνια.
- (iii) Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος που βρήκατε στο μέρος (ii) στο διάστημα $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Στην απάντησή σας σχεδιάστε τη γραφική παράσταση, σημειώνοντας τη συχνότητα, το πλάτος και τη φάση κάθε φασματικής γραμμής.
- (iv) Αν η έξοδος του ιδανικού μετατροπέα Δ-σε-Σ είναι

$$y(t) = 2 \cos(2\pi(50)t + \pi/2) + 1$$

Καθορίστε την τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας f_s . (Θυμηθείτε ότι η είσοδος $x(t)$ είναι ορισμένη όπως παραπάνω.)

Πρόβλημα.-4.14 Στον περιστρεφόμενο δίσκο και τη στροβοσκοπική επίδειξη, παρατηρούμε ότι διαφορετικοί ρυθμοί αναλαμπών του στροβοσκοπικού φωτός θα έκαναν την κηλίδα στο δίσκο να μείνει ακίνητη ή να κινηθεί σε διαφορετικές κατευθύνσεις.

- (i) Υποθέστε ότι ο δίσκος περιστρέφεται *δεξιόστροφα* με σταθερή ταχύτητα 13 περιστροφές/δευτερόλεπτο. Αν ο ρυθμός αναλαμπών είναι 15 φορές το δευτερόλεπτο, εκφράστε την κίνηση της κηλίδας στο δίσκο σαν ένα μιγαδικό φάσορα, $p[n]$, που δίνει τη θέση της στη n -οστή αναλαμπή. Υποθέστε ότι η κηλίδα είναι στην κορυφή για $n = 0$ (η πρώτη αναλαμπή).
- (ii) Για τις συνθήκες του ερωτήματος (i), καθορίστε την προφανή ταχύτητα (σε περιστροφές το δευτερόλεπτο) και την κατεύθυνση της κίνησης της “στροβοσκοπικής” κηλίδας.
- (iii) *υποθέστε ότι η ταχύτητα του δίσκου είναι άγνωστη*. Αν ο ρυθμός αναλαμπών είναι 13 φορές το δευτερόλεπτο, και η κηλίδα στο δίσκο κινείται αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού κατά 15 μοίρες σε κάθε αναλαμπή, καθορίστε την ταχύτητα περιστροφής του δίσκου (σε περιστροφές το δευτερόλεπτο). Αν η απάντηση δεν είναι μοναδική, δώστε όλες τις πιθανές ταχύτητες περιστροφής.

Πρόβλημα.-4.15 Στον περιστρεφόμενο δίσκο και τη στροβοσκοπική επίδειξη, παρατηρούμε ότι διάφοροι ρυθμοί αναλαμπών στροβοσκοπικού φωτός θα έκαναν την κηλίδα στο δίσκο να μείνει ακίνητη.

- (i) Υποθέστε ότι ο δίσκος περιστρέφεται αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού με σταθερή ταχύτητα 720 rpm. Εκφράστε την κίνηση της κηλίδας στο δίσκο σαν έναν περιστρεφόμενο μιγαδικό φάσορα.
- (ii) Αν το στροβοσκοπικό φως μπορεί να αναβοσβήνει με ρυθμό n αναλαμπές το δευτερόλεπτο, όπου n είναι ένας ακέραιος μεγαλύτερος του μηδενός, καθορίστε

όλους τους πιθανούς ρυθμούς αναλαμπών, ώστε ο δίσκος να μείνει ακίνητος.

Παρατήρηση: Οι μόνοι πιθανοί ρυθμοί αναλαμπών είναι 1 ανά δευτερόλεπτο, 2 ανά δευτερόλεπτο, 3 ανά δευτερόλεπτο κ.λ.π..

- (iii) Αν ο ρυθμός αναλαμπών είναι 13 φορές το δευτερόλεπτο, εξηγήστε πώς θα κινηθεί η κηλίδα και γράψτε ένα μιγαδικό φάσορα που δίνει τη θέση της σε κάθε αναλαμπή.

Πρόβλημα.-4.16 Το ακόλουθο μιγαδικό σήμα είναι ένας φάσορας:

$$z[n] = e^{j\theta[n]}$$

όπου $\theta[n]$ είναι η φάση.

- (i) Όταν η φάση αλλάζει κατά μία σταθερή ποσότητα συναρτήσει του n , ο φάσορας περιστρέφεται με μία σταθερή ταχύτητα. Για τον ακόλουθο φάσορα:

$$z[n] = e^{j(0.08\pi n - 0.25\pi)}$$

κάντε τη γραφική παράσταση των θέσεων του φάσορα για $n = 0, 1, 2, 7, 10, 17, 20, 33, 50$ και 99.

- (ii) Ποια είναι η περίοδος του $z[n]$;
- (iii) Επαναλάβετε για το μιγαδικό φάσορα που αντιστοιχεί στο ακόλουθο σήμα chirp:

$$c[n] = e^{j0.1\pi n^2}$$

Σ’ αυτή την περίπτωση, σχεδιάστε τις θέσεις του φάσορα για $n = 0, 1, 2, 3, 4$, and 7.

Πρόβλημα.-4.17 Ένα ψηφιακό σήμα chirp ορίζεται ως ακολούθως:

$$x[n] = \Re\{e^{j\theta[n]}\} = \cos(\pi(0.7 \times 10^{-3})n^2)$$

για $n = 0, 1, 2, \dots, 200$.

- (i) Κάντε μια γραφική παράσταση για τον περιστρεφόμενο φάσορα $e^{j\theta[n]}$ για $n = 10, 50$ και 100 .
- (ii) Αν αυτό το σήμα εφαρμοστεί στην είσοδο ενός μετατροπέα Ψ-σε-Α, του οποίου ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι 8 kHz . Κάντε μία γραφική παράσταση της στιγμιαίας αναλογικής συχνότητας (σε Hz) συναρτήσει του χρόνου για το αναλογικό σήμα.
- (iii) Αν το ψηφιακό σήμα σταθερής συχνότητας $v[n] = \cos(0.7\pi n)$ εφαρμοστεί στην είσοδο ενός μετατροπέα Ψ-σε-Α του οποίου ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι 8 kHz , ποιά (αναλογική) συχνότητα θα ακουστεί;

Πρόβλημα.-4.18 Το ακόλουθο σήμα διακριτού χρόνου είναι γνωστό ως ημιτονικό σήμα

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$$

Οι τιμές του $x[n]$ για $n = 1, 2, 3, 4$ και 5 είναι καταγεγραμμένες στον ακόλουθο πίνακα.

n	1	2	3	4	5
$x[n]$	2.50	0.5226	-1.5451	-3.3457	-4.5677

- (i) Παραστήστε γραφικά το $x[n]$ συναρτήσει του n . Αποδείξτε (με φάσορες, όχι με τριγωνομετρία)

- (ii) την ακόλουθη ταυτότητα για το συνημιτονικό σήμα:

$$\beta = \frac{\cos(n+1)\hat{\omega}_0 + \cos(n-1)\hat{\omega}_0}{\cos n\hat{\omega}_0} \quad \text{για κάθε } n$$

Προσδιορίστε την τιμή της σταθεράς β .

Σημείωση: Το β είναι ανεξάρτητο του n , αλλά μπορεί να είναι συνάρτηση του $\hat{\omega}_0$.

- (iii) Καθορίστε τώρα τις αριθμητικές τιμές των A , ϕ και $\hat{\omega}_0$. (Ο υπολογισμός είναι εύκολος αν βρείτε πρώτα το $\hat{\omega}_0$.)

Πρόβλημα.-4.19 Το ακόλουθο σήμα διακριτού χρόνου είναι γνωστό ως ημιτονικό σήμα

$$x[n] = A \cos(\hat{\omega}_0 n + \phi)$$

Οι τιμές του $x[n]$ για $0 \leq n \leq 4$ είναι καταγεγραμμένες στον πίνακα που ακολουθεί.

n	0	1	2	3	4
$x[n]$	2.4271	2.9002	2.9816	2.6603	1.9798

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του $x[n]$ και στη συνέχεια καθορίστε τις αριθμητικές τιμές των A , ϕ και $\hat{\omega}_0$.

FIR Φίλτρα

Μέχρι τώρα, έχουμε ασχοληθεί με τα σήματα και τις μαθηματικές τους αναπαραστάσεις. Σε αυτό το κεφάλαιο, αρχίζουμε να στρέφουμε την προσοχή μας και να δίνουμε έμφαση στα *συστήματα* ή *φίλτρα*. Μιλώντας αυστηρά, ένα φίλτρο είναι ένα σύστημα που σχεδιάζεται για να αφαιρέσει κάποιο στοιχείο ή να τροποποιήσει κάποιο χαρακτηριστικό ενός σήματος, αλλά συχνά οι δύο αυτοί όροι χρησιμοποιούνται ο ένας στη θέση του άλλου. Σε αυτό το κεφάλαιο, εισάγουμε την κατηγορία των *FIR (Finite Impulse Response)* συστημάτων, ή *FIR φίλτρων*. Τα φίλτρα αυτά είναι συστήματα για τα οποία κάθε δείγμα εξόδου είναι το άθροισμα ενός πεπερασμένου αριθμού “σταθμισμένων” δειγμάτων της ακολουθίας εισόδου. Θα ορίσουμε τη βασική δομή εισόδου-εξόδου ενός FIR φίλτρου ως έναν υπολογισμό στο πεδίο του χρόνου, ο οποίος βασίζεται σε μια εξίσωση διαφορών *τροφοδότησης προς τα εμπρός*.

Θα ορίσουμε τη μοναδιαία κρουστική απόκριση του φίλτρου και θα αποδείξουμε ότι χαρακτηρίζει πλήρως το φίλτρο. Θα παρουσιαστούν επίσης οι γενικές έννοιες της γραμμικότητας και της χρονικής αμεταβλητότητας. Αυτές οι ιδιότητες χαρακτηρίζουν μια ευρεία κλάση φίλτρων που είναι πάρα πολύ σημαντικά σε εφαρμογές τόσο του συνεχούς, όσο και του διακριτού χρόνου.

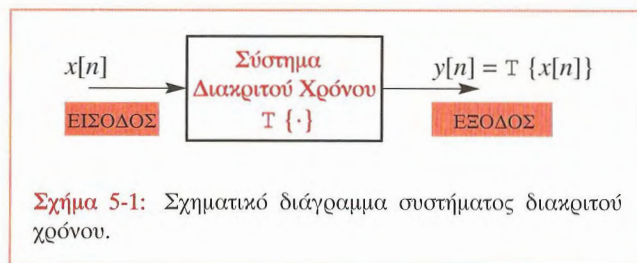
Ο σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να εισάγουμε τις βασικές αρχές που αφορούν τα συστήματα διακριτού χρόνου και να δημιουργήσουμε ερεθίσματα για περαιτέρω μελέτη. Η ανάλυση των συστημάτων διακριτού και συνεχούς χρόνου αποτελεί ένα σημαντικό αντικείμενο μελέτης, το οποίο είναι “αναγκαστικά” βασισμένο σε μαθηματικές αναπαραστάσεις και χειρισμούς¹. Τα συστήματα τα οποία εισάγουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι

¹Τα συστήματα μπορούν να αναλυθούν αποτελεσματικά με μεθόδους της ανάλυσης Fourier, οι οποίες εισάγονται στα Κεφάλαια 9-12 και

εκείνα το οποία μπορούν να αναλυθούν απλά. Σε επόμενα κεφάλαια του βιβλίου ασχολούμαστε με την επέκταση των ιδεών που θα εκτεθούν σ' αυτό το κεφάλαιο και σε άλλες κατηγορίες συστημάτων καθώς και με την ανάπτυξη εργαλείων για την ανάλυση άλλων συστημάτων.

5-1 Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου είναι μια υπολογιστική διαδικασία για το μετασχηματισμό μιας ακολουθίας, που ονομάζεται *σήμα εισόδου*, σε μια άλλη ακολουθία που ονομάζεται *σήμα εξόδου*. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τα συστήματα απεικονίζονται συχνά με σχηματικά διαγράμματα όπως αυτό του Σχήματος 5-1. Στο Κεφάλαιο 4, χρησιμοποιήσαμε παρόμοια σχηματικά διαγράμματα για να απεικονίσουμε τις διαδικασίες δειγματοληψίας και ανακατασκευής. Στην περίπτωση της δειγματοληψίας, το σήμα εισόδου είναι ένα σήμα συνεχούς χρόνου και η έξοδος είναι ένα σήμα διακριτού χρόνου, ενώ για την ανακατασκευή ισχύει το αντίστροφο. Τώρα θέλουμε να μελετάμε συστήματα διακριτού χρόνου των οποίων η είσοδος και η έξοδος είναι σήματα διακριτού χρόνου. Αυτά τα συστήματα είναι πολύ ενδιαφέροντα, καθώς μπορούν να υλοποιηθούν σε υπολογιστές και επειδή μπορούν να σχεδιαστούν έτσι ώστε να τροποποιούν τα σήματα κατά πολλούς χρήσιμους τρόπους.



Γενικά, ορίζουμε ένα σύστημα ως εξής:

αναλύονται σε βάθος σε άλλα, ανωτέρου επιπέδου, συγγράμματα σχετικά με σήματα και συστήματα.

$$y[n] = T \{x[n]\}$$

Η σχέση αυτή υποδεικνύει ότι η ακολουθία εξόδου σχετίζεται με την ακολουθία εισόδου μέσω μιας διαδικασίας που μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά από ένα τελεστή T . Αφού ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι μια ακολουθία αριθμών, τέτοιοι τελεστές μπορούν να περιγραφούν δίνοντας έναν τύπο για τον υπολογισμό των τιμών της ακολουθίας εξόδου από τις τιμές της ακολουθίας εισόδου. Για παράδειγμα, η σχέση

$$y[n] = (x[n])^2$$

ορίζει ένα σύστημα για το οποίο οι τιμές της ακολουθίας εξόδου είναι ίσες με το τετράγωνο των αντίστοιχων τιμών της ακολουθίας εισόδου. Ένα άλλο παράδειγμα που αντιστοιχεί σ' ένα πιο πολύπλοκο σύστημα είναι το ακόλουθο:

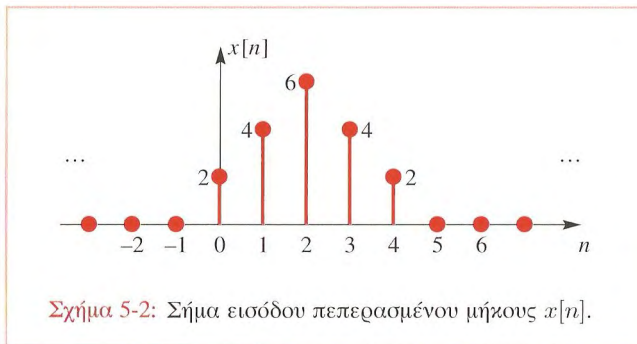
$$y[n] = \max\{x[n], x[n-1], x[n-2]\}$$

Στην περίπτωση αυτή, η έξοδος εξαρτάται από τρεις διαδοχικές τιμές εισόδου. Δεδομένου ότι υπάρχουν άπειρες δυνατότητες για τον ορισμό συστημάτων διακριτού χρόνου, είναι αναγκαίο να περιορίσουμε τις δυνατότητες αυτές, με την επιβολή μερικών περιορισμών στις ιδιότητες των συστημάτων που μελετάμε. Επομένως, θα ξεκινήσουμε τη μελέτη των συστημάτων διακριτού χρόνου σε αυτό το κεφάλαιο με την εισαγωγή μιας πολύ σημαντικής κατηγορίας συστημάτων διακριτού χρόνου, τα οποία ονομάζονται **FIR φίλτρα**. Συγκεκριμένα, θα αναλύσουμε θέματα που αφορούν την παράσταση, την υλοποίηση και την ανάλυση των FIR συστημάτων διακριτού χρόνου και θα εξηγήσουμε πώς τέτοια συστήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να τροποποιούν τα σήματα.

5-2 Φίλτρο Τρέχουσας Μέσης Τιμής

Ένας απλός, αλλά πολύ χρήσιμος, μετασχηματισμός ενός σήματος διακριτού χρόνου είναι ο υπολογισμός της **τρέχουσας μέσης τιμής** δύο ή περισσότερων διαδοχικών

τιμών του, διαμορφώνοντας με αυτόν τον τρόπο μία νέα ακολουθία, την ακολουθία των μέσων τιμών του. Το FIR φίλτρο αποτελεί ουσιαστικά μια γενίκευση της ιδέας του συστήματος τρέχουσας μέσης τιμής. Ο υπολογισμός του μέσου όρου χρησιμοποιείται συνήθως στις περιπτώσεις που τα δεδομένα έχουν έντονες διακυμάνσεις και πρέπει να λειανθούν πριν χρησιμοποιηθούν. Για παράδειγμα, οι τιμές των χρηματιστηρίων έχουν έντονες διακυμάνσεις από μέρα σε μέρα, ή από ώρα σε ώρα. Επομένως, κάποιος θα πρέπει να υπολογίσει το μέσο όρο της τιμής της μετοχής κατά τη διάρκεια αρκετών ημερών πριν καταλήξει σε συμπεράσματα σχετικά με τις ανοδικές ή τις πτωτικές της τάσεις. Άλλο καθημερινό παράδειγμα αφορά το υπόλοιπο των πιστωτικών καρτών, όπου ο τόκος χρεώνεται στο μέσο καθημερινό υπόλοιπο. Προκειμένου να εξαχθεί



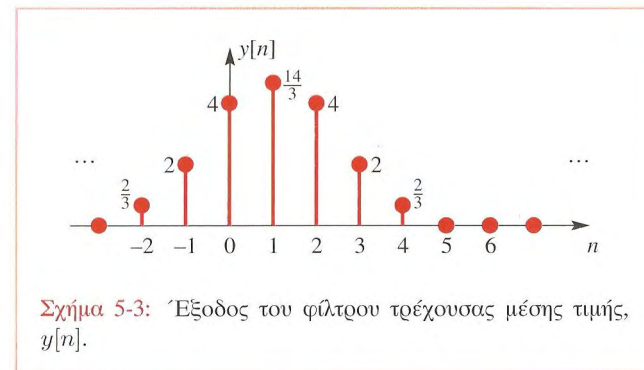
ο γενικός ορισμός της κλάσης των FIR συστημάτων, ας εξετάσουμε το απλό σύστημα του κινούμενου μέσου όρου σαν παράδειγμα ενός συστήματος που επεξεργάζεται μια ακολουθία εισόδου για να παράξει μια ακολουθία εξόδου. Για να είμαστε συγκεκριμένοι, έστω μια μέθοδος υπολογισμού του μέσου όρου τριών σημείων, δηλαδή κάθε τιμή της ακολουθίας εξόδου είναι το άθροισμα τριών διαδοχικών τιμών της ακολουθίας εισόδου, διαιρούμενο διά του τρία. Αν εφαρμόσουμε αυτόν τον αλγόριθμο στην τριγωνική ακολουθία του Σχήματος 5-2, μπορούμε να υπολογίσουμε μια νέα ακολουθία, έστω $y[n]$, η οποία είναι

η έξοδος (το αποτέλεσμα) του τελεστή μέσου όρου. Η ακολουθία στο Σχήμα 5-2 αποτελεί παράδειγμα σήματος *πεπερασμένου μήκους*. Η ενεργός περιοχή μιας τέτοιας ακολουθίας είναι το σύνολο των τιμών του δείκτη n στο οποίο η ακολουθία είναι μη μηδενική. Στην περίπτωση της παραπάνω ακολουθίας, το πεδίο ορισμού της είναι το πεπερασμένο διάστημα $0 \leq n \leq 4$. Ο μέσος όρος των τιμών $\{x[0], x[1], x[2]\} = \{2, 4, 6\}$ είναι $\frac{1}{3}(2+4+6) = 4$. Το αποτέλεσμα αυτό καθορίζει μία από τις τιμές εξόδου. Η επόμενη προκύπτει από τον υπολογισμό του μέσου όρου των δειγμάτων $\{x[1], x[2], x[3]\} = \{4, 6, 4\}$ που δίνει την τιμή $14/3$. Πριν συνεχίσουμε, θα πρέπει να αποφασίσουμε σχετικά με τη δεικτοδότηση της εξόδου. Για παράδειγμα, οι τιμές 4 και $14/3$ θα μπορούσε να εκχωρηθούν στα $y[0]$ και $y[1]$ αντίστοιχα, αλλά η επιλογή αυτή είναι μόνο μία από τις πολλές που έχουμε. Με την παραπάνω εκχώρηση, οι εξισώσεις για τον υπολογισμό της εξόδου από την είσοδο είναι:

$$y[0] = \frac{1}{3}(x[0] + x[1] + x[2])$$

$$y[1] = \frac{1}{3}(x[1] + x[2] + x[3])$$

οι οποίες γενικεύονται στην ακόλουθη εξίσωση εισόδου-



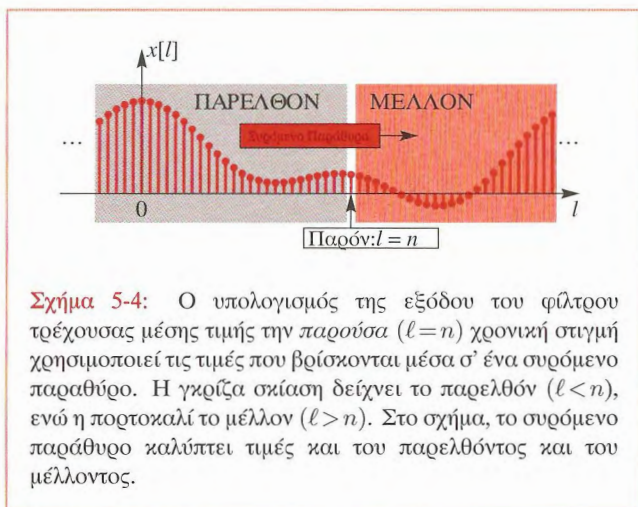
εξόδου:

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n+1] + x[n+2]) \quad (5.1)$$

Η Εξίσωση (5.1) ονομάζεται *εξίσωση διαφορών* και αποτελεί μια πλήρη περιγραφή του FIR συστήματος αφού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση αυτή για να υπολογίσουμε το σήμα εξόδου για κάθε τιμή του δείκτη n , $-\infty < n < \infty$. Η τιμές του σήματος εξόδου $y[n]$ για το σήμα εισόδου του Σχήματος 5-2, περιέχονται στον ακόλουθο πίνακα.

n	$n < -2$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$n > 5$
$x[n]$	0	0	0	2	4	6	4	2	0	0
$y[n]$	0	$\frac{2}{3}$	2	4	$\frac{14}{3}$	4	2	$\frac{2}{3}$	0	0

Παρατηρήστε ότι οι τιμές πορτοκαλί χρώματος στη σειρά $x[n]$ είναι αυτές που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του $y[2]$. Να σημειωθεί επίσης ότι $y[n] = 0$ εκτός του διαστήματος $-2 \leq n \leq 4$, δηλαδή η έξοδος έχει επίσης πεπερασμένο πεδίο ορισμού. Η γραφική παράσταση της ακολουθίας εξόδου παρουσιάζεται στο Σχήμα 5-3. Παρατηρούμε πως η ακολουθία εξόδου είναι μεγαλύτερης διάρκειας από την ακολουθία εισόδου και είναι *ομαλότερη* από την ακολουθία εισόδου. Αυτή η συμπεριφορά είναι χαρακτηριστική του FIR φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής.



Σχήμα 5-4: Ο υπολογισμός της εξόδου του φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής την *παρούσα* ($l = n$) χρονική στιγμή χρησιμοποιεί τις τιμές που βρίσκονται μέσα σ' ένα συρρόμενο παραθύρο. Η γκριζα σκίαση δείχνει το παρελθόν ($l < n$), ενώ η πορτοκαλί το μέλλον ($l > n$). Στο σχήμα, το συρρόμενο παράθυρο καλύπτει τιμές και του παρελθόντος και του μέλλοντος.

Η επιλογή της δεικτοδότησης της εξόδου είναι αυθαίρετη, αλλά παίζει ρόλο στον καθορισμό των ιδιοτήτων του φίλτρου. Για παράδειγμα, το φίλτρο που ορίστηκε στη Σχέση (5.1) έχει την ιδιότητα ότι η έξοδος του παίρνει μη μηδενικές τιμές πριν από την είσοδο του. Αυτό θα ήταν βεβαίως ανεπιθύμητο εάν οι τιμές εισόδου του προέρχονταν κατευθείαν από έναν μετατροπέα Α-σε-Ψ, όπως συνηθίζεται στις εφαρμογές επεξεργασίας ακουστικών σημάτων. Σε αυτήν την περίπτωση, το n θα αντιπροσώπευε το χρόνο και μπορούμε να θεωρήσουμε το $y[n]$ της Εξίσωσης (5.1) ως τον υπολογισμό της *τρέχουσας* τιμής της εξόδου, βασισμένος σε τρεις τιμές εισόδου. Αφού οι τιμές αυτές δεικτοδοτούνται ως n , $n + 1$ και $n + 2$, δύο από αυτές “αναφέρονται στο μέλλον”. Γενικά, κατά τον υπολογισμό της εξόδου μπορεί να χρησιμοποιηθούν τιμές είτε από το *παρελθόν*, είτε από το *μέλλον*, ή και από τα δύο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5-4. Σε όλες τις περιπτώσεις ενός συστήματος τρέχουσας μέσης τιμής τριών σημείων, ένα *συρρόμενο παράθυρο* τριών δειγμάτων καθορίζει ποιά δείγματα χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του $y[n]$.


Ένα φίλτρο που χρησιμοποιεί μόνο την τρέχουσα τιμή και παρελθούσες τιμές της εισόδου καλείται *αιτιατό* φίλτρο, υπονοώντας ότι το αίτιο δεν προηγείται του αντίστοιχου αποτελέσματος. Επομένως, ένα φίλτρο που χρησιμοποιεί μελλοντικές τιμές της εισόδου ονομάζεται *μη-αιτιατό*. Τα μη-αιτιατά συστήματα δεν μπορούν να υλοποιηθούν σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου, αφού η είσοδος δεν είναι ακόμα διαθέσιμη όταν πρέπει να υπολογιστεί η έξοδος. Σε άλλες περιπτώσεις, όπου τα δεδομένα είναι αποθηκευμένα και διαχειρίζονται μέσω υπολογιστή, το ζήτημα της αιτιατότητας δεν είναι κρίσιμο.

Μια εναλλακτική δεικτοδότηση της εξόδου μπορεί να παράγει ένα φίλτρο υπολογισμού μέσου όρου τριών σημείων που είναι αιτιατό. Σε αυτήν την περίπτωση, η τιμή εξόδου $y[n]$ είναι ο μέσος όρος των εισόδων n (παρών), $n-1$ (το προηγούμενο δείγμα), και $n-2$ (το προ-προηγούμενο δείγμα). Η εξίσωση διαφορών για αυτό το φίλτρο είναι:

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2]) \quad (5.2)$$

Η μορφή της Σχέσης (5.2) αντιστοιχεί σ' ένα **αιτιατό σύστημα τρέχουσας μέσης τιμής**, ή εξίσου καλά θα μπορούσαμε να το ονομάσουμε **σύστημα τρέχουσας μέσης τιμής προς τα πίσω**. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση διαφορών (5.2), μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν πίνακα με όλες τις τιμές που παίρνει η έξοδος στο διάστημα $-\infty < n < \infty$. (Παρατηρήστε ότι τώρα οι πορτοκαλί χρώματος τιμές του $x[n]$ χρησιμοποιούνται πλέον για τον υπολογισμό του $y[4]$ αντί του $y[2]$.) Το σήμα $y[n]$ που προκύπτει έχει τις ίδιες τιμές με πριν, αλλά το πεδίο ορισμού του είναι τώρα το διάστημα $0 \leq n \leq 6$. Παρατηρήστε επίσης ότι η έξοδος του αιτιατού φίλτρου είναι απλά μια μετατοπισμένη έκδοση της εξόδου του προηγούμενου μη-αιτιατού φίλτρου. Αυτό το φίλτρο είναι αιτιατό επειδή η έξοδος εξαρτάται μόνο από το παρόν και δύο προηγούμενες (δηλαδή, παρελθοντικές) τιμές της εισόδου. Επομένως, η έξοδος δεν μπορεί να πάρει μη μηδενικές τιμές πριν πάρει το σήμα εισόδου.

n	$n < -2$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$n > 7$
$x[n]$	0	0	0	2	4	6	4	2	0	0	0	0
$y[n]$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	2	4	$\frac{14}{3}$	4	2	$\frac{2}{3}$	0	0

 **Άσκηση 5.1:** Προσδιορίστε την έξοδο ενός φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής ζυγισμένου ως προς το κέντρο

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n+1] + x[n] + x[n-1])$$

για το σήμα εισόδου του Σχήματος 5-2. Το φίλτρο αυτό είναι αιτιατό ή μη-αιτιατό; Πώς συγκρίνεται η γραφική παράσταση της εξόδου με αυτή του Σχήματος 5-3;

5-3 Το Γενικό FIR Φίλτρο

Η Εξίσωση (5.2) αποτελεί ειδική περίπτωση της ακόλουθης γενικής εξίσωσης διαφορών

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (5.3)$$

Δηλαδή, όταν $M = 2$ και $b_k = 1/3$ για $k = 0, 1, 2$, η Σχέση (5.3) ανάγεται στο αιτιατό φίλτρο κινούμενου μέσου όρου της Σχέσης (5.2). Αν οι συντελεστές b_k δεν είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους, τότε μπορούμε να πούμε ότι η Σχέση (5.3) ορίζει μια **σταθμισμένη τρέχουσα μέση τιμή** $M + 1$ δειγμάτων.

Από τη Σχέση (5.3) είναι σαφές ότι ο υπολογισμός του $y[n]$ χρησιμοποιεί τα δείγματα $x[\ell]$ για $\ell = n, n-1, n-2, \dots, n-M$, δηλαδή, $x[n]$, $x[n-1]$, $x[n-2]$, κ.λπ.. Από τη στιγμή που το φίλτρο της Σχέσης (5.3) δεν περιλαμβάνει μελλοντικές τιμές της εισόδου, το σύστημα είναι αιτιατό, και επομένως η έξοδος δεν μπορεί να ξεκινήσει προτού η είσοδος γίνει διάφορη του μηδενός². Στο Σχήμα 5-5 φαίνεται ότι για τον υπολογισμό της εξόδου το αιτιατό FIR φίλτρο χρησιμοποιεί το δείγμα $x[n]$ και M παρελθοντικά δείγματα της εισόδου. Στο Σχήμα 5-5 φαίνεται επίσης ότι αν η είσοδος έχει πεπερασμένο πεδίο ορισμού ($0 \leq \ell \leq N-1$), θα υπάρχει στην αρχή ένα διάστημα M δειγμάτων, που ο υπολογισμός της εξόδου θα βασίζεται σε λιγότερα από $M + 1$ μη μηδενικά δείγματα καθώς το συρόμενο παράθυρο του φίλτρου πλησιάζει την είσοδο, και ένα διάστημα M δειγμάτων στο τέλος όπου το συρόμενο παράθυρο του φίλτρου απομακρύνεται από την ακολουθία εισόδου. Μπορούμε επίσης να δούμε από το Σχήμα 5-5 ότι το μήκος της ακολουθίας εξόδου είναι κατά M δείγματα μεγαλύτερο από το μήκος της ακολουθίας εισόδου.



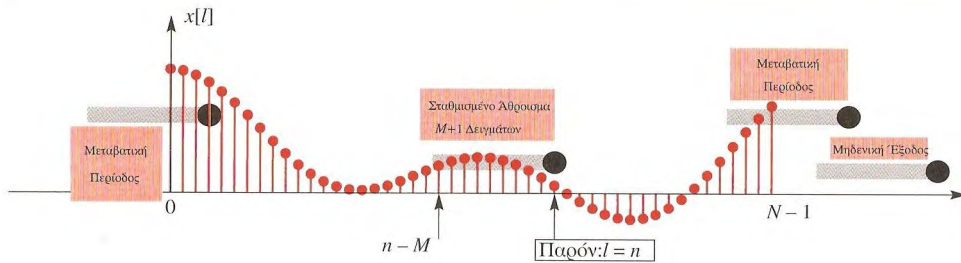
Παράδειγμα 5-1: Συντελεστές FIR φίλτρου

Ένα FIR φίλτρο καθορίζεται πλήρως άπαξ και γνωρίζουμε το σύνολο των συντελεστών του $\{b_k\}$. Για παράδειγμα, εάν οι συντελεστές $\{b_k\}$ ενός αιτιατού φίλτρου είναι:

$$\{b_k\} = \{3, -1, 2, 1\}$$

τότε έχουμε ένα φίλτρο μήκους 4 με $M = 3$ και η Εξίσωση

²Παρατηρήστε ότι ένα μη-αιτιατό σύστημα μπορεί να παρασταθεί από τη Σχέση (5.3) αν επιτρέψουμε ο δείκτης k να πάρει αρνητικές τιμές.



Σχήμα 5-5: Η λειτουργία του αιτιατού FIR φίλτρου M -τάξης, που παρουσιάζει διάφορες θέσεις του μήκους $M + 1$ σταθμισμένου παραθύρου και τα δείγματα από τα οποία υπολογίζεται ο σταθμισμένος μέσος όρος. Όταν το σήμα εισόδου $x[l]$ είναι επίσης πεπερασμένου μήκους (N σημεία), το προκύπτον σήμα εξόδου θα έχει πεπερασμένο μήκος.

διαφορών (5.3) γράφεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^3 b_k x[n-k] \\ &= 3x[n] - x[n-1] + 2x[n-2] + x[n-3] \end{aligned}$$

■

Η παράμετρος M καθορίζει την **τάξη** του FIR φίλτρου. Ο αριθμός των συντελεστών του φίλτρου καλείται επίσης και **μήκος** του φίλτρου (L). Το μήκος του φίλτρου είναι μεγαλύτερο κατά ένα από την τάξη του, δηλαδή $L = M+1$. Αυτή η ορολογία θα αποκτήσει περισσότερο νόημα μετά τον ορισμό του μετασχηματισμού- z στο Κεφάλαιο 7.



Άσκηση 5.2:

Υπολογίστε την έξοδο $y[n]$ ενός φίλτρου μήκους 4 του οποίου οι συντελεστές είναι οι $\{b_k\} = \{3, -1, 2, 1\}$. Χρησιμοποιήστε το σήμα εισόδου που φαίνεται στο Σχήμα 5-2. Επαληθεύστε ότι οι τιμές που περιέχονται στον ακόλουθο πίνακα είναι σωστές και στη συνέχεια συμπληρώστε τις τιμές που λείπουν.

n	$n < 0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$n > 8$
$x[n]$	0	2	4	6	4	2	0	0	0	0	0
$y[n]$	0	6	10	18	?	?	?	8	2	0	0

5-3.1 Ερμηνεία του FIR Φιλτραρίσματος

Για να διασαφηνίσουμε μερικά από τα πράγματα που έχουμε μάθει ως τώρα, αλλά και για να δείξουμε πώς τα FIR φίλτρα μπορούν να τροποποιούν ακολουθίες, θεωρήστε το ακόλουθο σήμα:

$$x[n] = \begin{cases} (1.02)^n + \frac{1}{2} \cos(2\pi n/8 + \pi/4) & 0 \leq n \leq 40 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

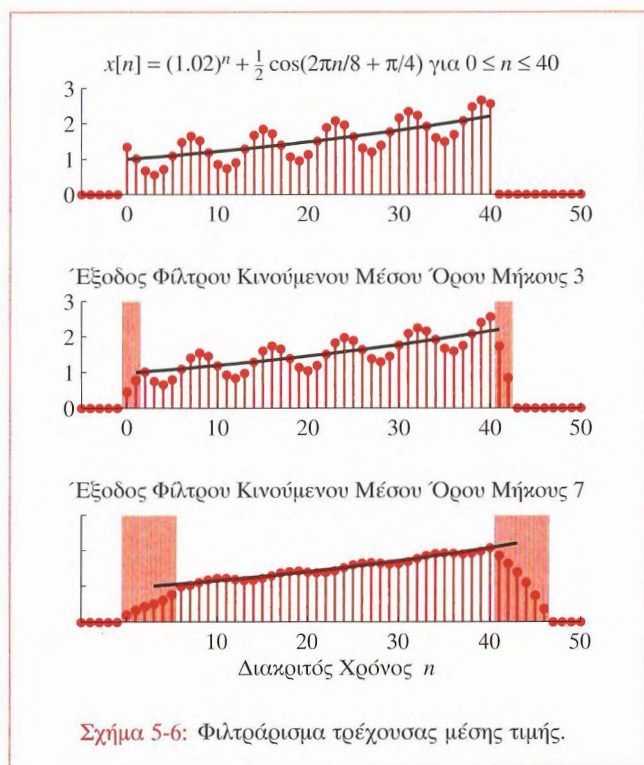
Η γραφική παράσταση αυτού του σήματος φαίνεται στο πάνω μέρος του Σχήματος 5-6. Συχνά συναντάμε πραγματικά σήματα αυτής της μορφής, δηλαδή σήματα που αποτελούνται από ένα σήμα που μας ενδιαφέρει (σε αυτήν την περίπτωση, μπορεί να είναι το αργά αυξανόμενο εκθετικό σήμα $(1.02)^n$) και από ένα ακόμα σήμα για το οποίο δεν ενδιαφερόμαστε. Πολλές φορές, το δεύτερο στοιχείο συχνά θεωρείται **θόρυβος** που παρεμβάλει το επιθυμητό σήμα. Σ' αυτή την περίπτωση, θα θεωρήσουμε το ημιτονοειδές στοιχείο $\frac{1}{2} \cos(2\pi n/8 + \pi/4)$ ως θόρυβο που επιθυμούμε να αφαιρέσουμε. Η συνεχής, εκθετικά αυξανόμενη καμπύλη που παρουσιάζεται σε κάθε μια από τις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 5-6, απλά συνδέει τις τιμές των δειγμάτων του επιθυμητού σήματος $(1.02)^n$ με

ευθείες γραμμές ως αναφορά για τις άλλες δύο γραφικές παραστάσεις.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το $x[n]$ είναι η είσοδος ενός αιτιατού φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής 3-σημείων, δηλαδή:

$$y_3[n] = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^2 x[n-k] \right) \quad (5.4)$$

Στην περίπτωση αυτή, $M = 2$ και όλοι οι συντελεστές είναι



ίσοι με $1/3$. Η έξοδος αυτού του φίλτρου παρουσιάζεται στη μεσαία γραφική παράσταση του Σχήματος 5-6. Μπορούμε να κάνουμε διάφορες παρατηρήσεις που αφορούν τις γραφικές παραστάσεις:

- (i) Παρατηρούμε ότι η ακολουθία εισόδου $x[n]$ είναι μηδέν πριν τη χρονική στιγμή $n = 0$ και επόμενως από τη Σχέση (5.4), προκύπτει ότι η έξοδος θα πρέπει να είναι μηδέν για $n < 0$.
- (ii) Η έξοδος γίνεται διάφορη του μηδενός τη χρονική στιγμή $n = 0$ και το σκιασμένο διάστημα μήκους $M = 2$ δειγμάτων στην αρχή του διαφωρου του μηδενός μέρους της ακολουθίας εξόδου, είναι το διάστημα κατά το οποίο το φίλτρο 3-σημείων “πρωτοσυναντάει” την ακολουθία εισόδου. Για τις χρονικές στιγμές $2 \leq n \leq 40$, τα δείγματα εισόδου που περιέχονται στο 3-σημείων συρόμενο παράθυρο είναι όλα διάφορα του μηδενός.
- (iii) Υπάρχει κι ένα άλλο σκιασμένο διάστημα μήκους $M = 2$ δειγμάτων στο τέλος (μετά το 40-οστο δείγμα), όπου το συρόμενο παράθυρο του φίλτρου εγκαταλείπει την ακολουθία εισόδου.
- (iv) Παρατηρούμε ότι παρότι το μέγεθος του ημιτονοειδούς όρου έχει μειωθεί, ο όρος αυτός δεν έχει εξαλειφθεί από το φίλτρο. Η συνεχής γραμμή που δείχνει τις τιμές του εκθετικού στοιχείου έχει μετατοπισθεί στα δεξιά κατά $M/2 = 1$ δείγμα για να ληφθεί υπόψη και η μετατόπιση που εισήγαγε το αιτιατό φίλτρο.

Σαφώς, το φίλτρο 3-σημείων έχει μειώσει τις διακυμάνσεις του σήματος εισόδου, αλλά δεν έχουμε ακόμα ανακτήσει το επιθυμητό σήμα. Διαισθητικά, θα έλεγε κανείς ότι ο υπολογισμός του μέσου όρου σε ένα πιο μεγάλο χρονικό διάστημα θα έδινε καλύτερα αποτελέσματα. Η γραφική παράσταση στο κάτω μέρος του Σχήματος 5-6 παρουσιάζει την έξοδο ενός φίλτρου 7-σημείων που ορίζεται από τη σχέση:

$$y_7[n] = \frac{1}{7} \left(\sum_{k=0}^6 x[n-k] \right) \quad (5.5)$$

Σε αυτή την περίπτωση, αφού $M = 6$ και όλοι οι συντελεστές είναι ίσοι με $1/7$, παρατηρούμε τα εξής:

- (i) Οι σκιασμένες περιοχές στην αρχή και στο τέλος της εξόδου έχουν τώρα μήκος $M = 6$ δειγμάτων.
- (ii) Τώρα το μέγεθος του ημιτονοειδούς όρου είναι πολύ μειωμένο σε σχέση με την ημιτονοειδή είσοδο και ο εκθετικός όρος σχεδόν ταυτίζεται με τον εκθετικό όρο της εισόδου (μετά από μια μετατόπιση $M/2 = 3$ δειγμάτων).

Τι μπορούμε να συμπεράνουμε από αυτό το παράδειγμα; Καταρχήν φαίνεται πως το FIR φίλτράρισμα μπορεί να τροποποιήσει σήματα κατά χρήσιμους τρόπους. Δεύτερον, το μήκος του διαστήματος που χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του μέσου όρου, φαίνεται να έχει μια μεγάλη επίδραση στη μορφή της προκύπτουσας εξόδου. Τρίτον, τα φίλτρα τρέχουσας μέσης τιμής εισάγουν μια μετατόπιση ίση με $M/2$ δείγματα. Όλες αυτές οι παρατηρήσεις μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύουν γενικότερα για τα FIR φίλτρα που ορίζονται στη Σχέση (5.3). Ωστόσο, πριν μπορέσουμε να διερευνήσουμε πλήρως τις λεπτομέρειες αυτού του παραδείγματος, πρέπει να διερευνήσουμε τις ιδιότητες των FIR φίλτρων λεπτομερέστερα. Θα πρέπει να περιμένουμε μέχρι την ολοκλήρωση του Κεφαλαίου 6 για να καταλάβουμε πλήρως αυτό το παράδειγμα.

5-3.2 Η Μοναδιαία Κρουστική Απόκριση

Στην ενότητα αυτή, θα εισαγάγουμε τρεις νέες έννοιες: τη μοναδιαία κρουστική ακολουθία, τη μοναδιαία κρουστική απόκριση και το συνελκτικό άθροισμα. Θα δείξουμε ότι η κρουστική απόκριση παρέχει έναν πλήρη χαρακτηρισμό του φίλτρου, διότι το συνελκτικό άθροισμα δίνει έναν τύπο για τον υπολογισμό της εξόδου από την είσοδο όταν είναι γνωστή η μοναδιαία κρουστική απόκριση.

5-3.2.1 Η Μοναδιαία Κρουστική Ακολουθία

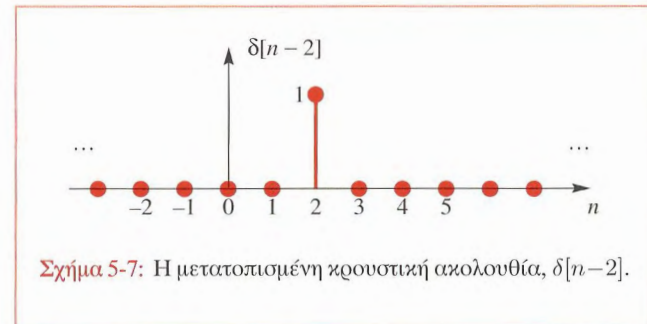
Η *μοναδιαία κρουστική ακολουθία* ίσως είναι η απλούστερη ακολουθία, επειδή έχει μόνο μία μη μηδενική τιμή, η οποία εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$. Ο μαθηματικός συμβολισμός της είναι αυτός της *ακολουθίας*

δέλτα του Kronecker:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

και οι τιμές της ακολουθίας για διάφορες τιμές του δείκτη n είναι καταχωρημένες στη δεύτερη γραμμή του πίνακα που ακολουθεί:

n	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
$\delta[n]$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$\delta[n-2]$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0



Σχήμα 5-7: Η μετατοπισμένη κρουστική ακολουθία, $\delta[n-2]$.

Μια μετατοπισμένη κρουστική ακολουθία όπως η $\delta[n-2]$ είναι μη μηδενική όταν το όρισμά της είναι μηδέν, δηλαδή όταν, $n-2 = 0$, ή ισοδύναμα $n = 2$. Η τρίτη γραμμή του παραπάνω πίνακα περιέχει τις τιμές της μετατοπισμένης κρουστικής $\delta[n-2]$ και στο Σχήμα 5-7 φαίνεται η γραφική παράσταση της ακολουθίας.

Η έννοια της μετατοπισμένης κρουστικής ακολουθίας είναι πολύ χρήσιμη για την αναπαράσταση των σημάτων και των συστημάτων. Ας εξετάσουμε, για παράδειγμα, το ακόλουθο σήμα:

$$x[n] = 2\delta[n] + 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 4\delta[n-3] + 2\delta[n-4] \quad (5.7)$$

Για να ερμηνεύσουμε τη Σχέση (5.7), πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο κατάλληλος ορισμός του πολλαπλασιασμού μιας ακολουθίας με έναν αριθμό είναι να πολλαπλασιάσουμε κάθε τιμή της ακολουθίας με αυτόν τον αριθμό. Παρομοίως, η πρόσθεση δύο ή περισσότερων ακολουθιών ορίζεται ως η πρόσθεση των τιμών της ακολουθίας σε αντίστοιχες χρονικές στιγμές. Στον πίνακα που ακολουθεί, έχουν καταχωρηθεί οι τιμές κάθε μίας από τις ακολουθίες που υπεισέρχονται στη Σχέση (5.7), καθώς και το άθροισμα τους:

n	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
$2\delta[n]$	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
$4\delta[n-1]$	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0
$6\delta[n-2]$	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0
$4\delta[n-3]$	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0
$2\delta[n-4]$	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0
$x[n]$	0	0	0	2	4	6	4	2	0	0	0



Είναι σαφές, ότι η Σχέση (5.7) αποτελεί ένα συμπαγή τρόπο αναπαράστασης του σήματος του Σχήματος 5-2. Πράγματι, κάθε ακολουθία μπορεί να παρασταθεί μ' αυτόν τον τρόπο. Η εξίσωση

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \sum_k x[k]\delta[n-k] \\
 &= \dots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] \\
 &\quad + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

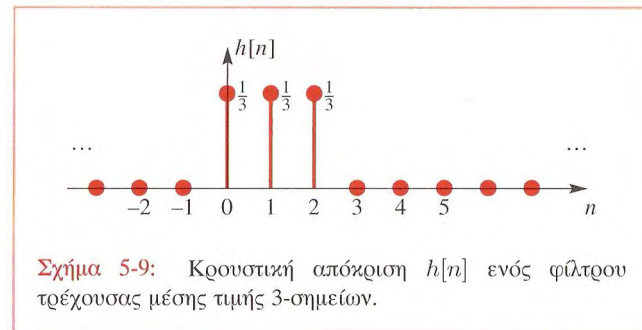
ισχύει αν ο δείκτης k παίρνει τιμές σ' όλο το εύρος που η ακολουθία $x[n]$ είναι μη μηδενική. Η Εξίσωση (5.8) δηλώνει το προφανές: η ακολουθία σχηματίζεται με τη χρησιμοποίηση μετατοπισμένων και σταθμισμένων κρουστικών ακολουθιών, προκειμένου να τοποθετηθούν δείγματα του σωστού μεγέθους στις σωστές θέσεις.

5-3.2.2 Ακολουθία Μοναδιαίας Κρουστικής Απόκρισης

Όταν η είσοδος στο FIR φίλτρο της Σχέσης (5.3) είναι η μοναδιαία κρουστική ακολουθία, $x[n] = \delta[n]$, η έξοδος, εξ ορισμού, είναι η *μοναδιαία κρουστική απόκριση*, την οποία θα συμβολίζουμε με $h[n]$ ³. Τα παραπάνω απεικονίζονται στο σχηματικό διάγραμμα του Σχήματος 5-8. Αντικαθιστώντας $x[n] = \delta[n]$ στη Σχέση (5.3) προκύπτει η έξοδος $y[n] = h[n]$:

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] = \begin{cases} b_n & n = 0, 1, 2, \dots, M \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Όπως έχουμε παρατηρήσει, το άθροισμα υπολογίζει έναν



όρο για κάθε τιμή του n , επειδή κάθε ακολουθία $\delta[n-k]$ είναι διάφορη του μηδενός μόνο όταν $n-k=0$ ή $n=k$. Στον παρακάτω πίνακα έχουν καταχωρηθεί οι τιμές της ακολουθίας της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

³Συνήθως, για χάρη συντομίας, θα παραλείψουμε τη λέξη *μοναδιαία* ως ευκόλως εννοούμενη και θα λέμε απλά *κρουστική απόκριση*.

n	$n < 0$	0	1	2	3	...	M	$M + 1$	$n > M$
$x[n] = \delta[n]$	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$y[n] = h[n]$	0	b_0	b_1	b_2	b_3	...	b_M	0	0

Δηλαδή, η κρουστική απόκριση $h[n]$ του FIR φίλτρου είναι απλά η ακολουθία των συντελεστών της εξίσωσης διαφορών. Αφού η $h[n] = 0$ για $n < 0$ και $n > M$, το μήκος της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ είναι πεπερασμένο. Γι' αυτό το λόγο και το σύστημα (5.3) καλείται σύστημα **Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR)**. Στο Σχήμα 5-9 φαίνεται η γραφική παράσταση της κρουστικής απόκρισης ενός αιτιατού φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής 3-σημείων.



Άσκηση 5.3: Προσδιορίστε και σχεδιάστε την κρουστική απόκριση του FIR συστήματος:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{10} kx[n-k]$$

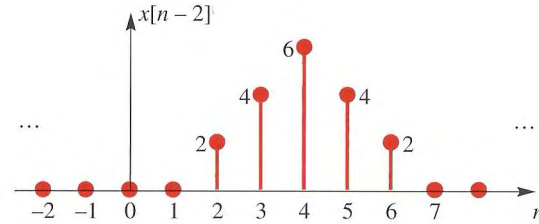
5-3.2.3 Το Σύστημα Μοναδιαίας Καθυστέρησης

Ένα πολύ σημαντικό σύστημα είναι ο τελεστής που καθυστερεί ή μετατοπίζει κατά n_0 χρονικές στιγμές το σήμα που εφαρμόζεται στην είσοδό του, δηλαδή:

$$y[n] = x[n - n_0] \quad (5.9)$$

Όταν $n_0 = 1$, το σύστημα ονομάζεται **μοναδιαία καθυστέρηση**. Η έξοδος της μοναδιαίας καθυστέρησης είναι ιδιαίτερα εύκολο να απεικονιστεί. Σε μια γραφική παράσταση, οι τιμές του $x[n]$ μετατοπίζονται προς τα δεξιά κατά μία χρονική στιγμή. Για παράδειγμα, το δείγμα $y[4]$ παίρνει την τιμή του $x[3]$, το $y[5]$ την τιμή του $x[4]$, το $y[6]$ του $x[5]$, κ.ο.κ..

Το σύστημα καθυστέρησης είναι στην πραγματικότητα το απλούστερο των FIR συστημάτων και έχει μόνο έναν συντελεστή διάφορο του μηδενός. Παραδείγματος χάριν, ένα σύστημα που παράγει μια **καθυστέρηση 2** θα έχει τους



Σχήμα 5-10: Καθυστέρηση $y[n] = x[n-2]$ του σήματος του Σχήματος 5-2.

ακόλουθους συντελεστές $\{b_k\} = \{0, 0, 1\}$. Η τάξη αυτού του FIR φίλτρου είναι $M = 2$, και η εξίσωση διαφορών του είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} y[n] &= b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2] \\ &= 0 \cdot x[n] + 0 \cdot x[n-1] + 1 \cdot x[n-2] \\ &= x[n-2] \end{aligned}$$

Το Σχήμα 5-10 δείχνει την έξοδο του συστήματος καθυστέρησης για είσοδο αυτή του Σχήματος 5-2 στη Σελίδα 115. Η κρουστική απόκριση του συστήματος καθυστέρησης προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το $x[n]$ με $\delta[n]$ στη Σχέση (5.9). Για το παράδειγμά μας έχουμε ότι:

$$h[n] = \delta[n - n_0] = \delta[n - 2] = \begin{cases} 1 & n = 2 \\ 0 & n \neq 2 \end{cases}$$

Η κρουστική απόκριση αυτή είναι το σήμα που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 5-7.

5-3.3 Συνέλιξη και FIR Φίλτρα

Στο σημείο αυτό είμαστε σε θέση να βρούμε μια γενική έκφραση της εξόδου του FIR φίλτρου (5.3) συναρτήσει της κρουστικής απόκρισής του. Από τη στιγμή που οι συντελεστές του φίλτρου στη Σχέση (5.3) είναι ίσοι με τις τιμές της κρουστικής απόκρισής του, μπορούμε να

αντικαταστήσουμε τα b_k στη Σχέση (5.3) με τα $h[k]$ και να πάρουμε:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k] x[n-k] \quad (5.10)$$

Η σχέση μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του FIR φίλτρου που εκφράζεται συναρτήσει της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης, όπως στη Σχέση (5.10), καλείται πεπερασμένο **συνελικτικό άθροισμα**, και λέμε ότι η έξοδος λαμβάνεται συνελίσοντας τις ακολουθίες $x[n]$ και $h[n]$.

5-3.3.1 Υπολογίζοντας την Έξοδο της Συνέλιξης

Η μέθοδος της καταχώρησης των τιμών της εξόδου ενός FIR φίλτρου είναι αποτελεσματική για σήματα μικρής χρονικής διάρκειας, αλλά της λείπει η γενικότητα που απαιτείται σε πιο πολύπλοκα προβλήματα. Ωστόσο, υπάρχει μια απλή ερμηνεία της Σχέσης (5.10) που οδηγεί σε ένα αποδοτικότερο αλγόριθμο υπολογισμού της συνέλιξης. Αυτός ο αλγόριθμος υλοποιείται χρησιμοποιώντας το ταμπλώ του Σχήματος 5-11 που παρακολουθεί τη σχετική θέση των τιμών του σήματος. Το παράδειγμα στο Σχήμα 5-11 παρουσιάζει πώς γίνεται η συνέλιξη του σήματος $x[n] = \{2, 4, 6, 4, 2\}$ με το $h[n] = \{3, -1, 2, 1\}$. Καταρχήν, καταγράφουμε τα σήματα $x[n]$ και $h[n]$ σε ξεχωριστές γραμμές του πίνακα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε μια μέθοδο παρόμοια με τον “πολυωνυμικό πολλαπλασιασμό” για να σχηματίσουμε την έξοδο ως το άθροισμα των μετατοπισμένων γραμμών. Κάθε μετατοπισμένη γραμμή παράγεται πολλαπλασιάζοντας τη γραμμή που έχουν καταγραφεί οι τιμές του $x[n]$ με μια από τις τιμές του $h[k]$ και μετατοπίζοντας το αποτέλεσμα προς τα δεξιά έτσι ώστε να ευθυγραμμίζεται με τη θέση του $h[k]$. Το τελικό αποτέλεσμα λαμβάνεται αθροίζοντας τις στήλες. Μπορούμε να δούμε γιατί ο παραπάνω αλγόριθμος υπολογίζει σωστά το συνελικτικό άθροισμα, αν γράψουμε το άθροισμα στη Σχέση (5.10) ως ακολούθως:

$$y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \dots$$

Ένας όρος, όπως ο $x[n-2]$, είναι το σήμα $x[n]$ με τις τιμές του μετατοπισμένες κατά δύο χρονικές

n	$n < 0$	0	1	2	3	4	5	6	7	$n > 7$
$x[n]$	0	2	4	6	4	2	0	0	0	0
$h[n]$	0	3	-1	2	1					
$h[0]x[n]$	0	6	12	18	12	6	0	0	0	0
$h[1]x[n-1]$	0	0	-2	-4	-6	-4	-2	0	0	0
$h[2]x[n-2]$	0	0	0	4	8	12	8	4	0	0
$h[3]x[n-3]$	0	0	0	0	2	4	6	4	2	0
$y[n]$	0	6	10	18	16	18	12	8	2	0

Σχήμα 5-11: Αριθμητική συνέλιξη πεπερασμένου μήκους σημάτων με συνθετικό πολλαπλασιασμό πολυωνύμων

στιγμές προς τα δεξιά. Ο πολλαπλασιαστής $h[2]$ κλιμακώνει το μετατοπισμένο σήμα $x[n-2]$ για να παραχθεί η συνεισφορά του $h[2]x[n-2]$, η οποία φαίνεται με πορτοκαλί χρώμα στον πίνακα.



Άσκηση 5.4:

Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο συνέλιξης του “πολλαπλασιασμού” για να υπολογίσετε την έξοδο $y[n]$ ενός φίλτρου μήκους 4 με τους ακόλουθους συντελεστές $\{b_k\} = \{1, -2, 2, -1\}$. Χρησιμοποιήστε ως είσοδο το σήμα του Σχήματος 5-2 στη Σελίδα 115.

Αργότερα σ’ αυτό το κεφάλαιο, θα αποδείξουμε ότι η συνέλιξη είναι ο θεμελιώδης αλγόριθμος εισόδου-εξόδου για μια μεγάλη κλάση πολύ χρήσιμων φίλτρων που περιλαμβάνει τα FIR φίλτρα ως ειδική περίπτωση. Θα δείξουμε ότι μια γενική μορφή συνέλιξης, που ισχύει επίσης για σήματα άπειρου μήκους είναι η ακόλουθη:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (5.11)$$

Αν και τα όρια του παραπάνω συνελικτικού αθροίσματος είναι από $-\infty$ μέχρι $+\infty$, όταν η $h[n] = 0$ για $n < 0$

και $n > M$, αυτό ανάγεται στο συνελκτικό άθροισμα της Σχέσης (5.10).

5-3.3.2 Η Συνέλιξη στο Περιβάλλον Matlab


Στο υπολογιστικό περιβάλλον Matlab, τα FIR συστήματα μπορούν να υλοποιηθούν χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `conv()`. Για παράδειγμα, η εκτέλεση των παρακάτω εντολών

```
xx = sin(0.07*pi*(0:50));
hh = ones(11,1)/11;
yy = conv(hh, xx);
```

θα έχει σαν αποτέλεσμα τον υπολογισμό της συνέλιξης της ακολουθίας 11-σημείων `hh` με την ημιτονοειδή ακολουθία `xx` 51-σημείων. Η συγκεκριμένη επιλογή του διανύσματος `hh` είναι στην πραγματικότητα η κρουστική απόκριση ενός συστήματος τρέχουσας μέσης τιμής 11-σημείων:

$$h[n] = \begin{cases} 1/11 & n = 0, 1, 2, \dots, 10 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Δηλαδή και οι 11 συντελεστές του φίλτρου είναι ίδιοι και ίσοι με $1/11^4$.

 **Άσκηση 5.5:** Στο Matlab, μπορούμε να υπολογίσουμε μόνο τη συνέλιξη σημάτων πεπερασμένου μήκους. Καθορίστε το μήκος της ακολουθίας εξόδου που υπολογίζεται από την πιο πάνω συνέλιξη στο πρόγραμμα του Matlab.

Ήδη έχουμε αναφέρει ότι η πράξη που ονομάσαμε *συνέλιξη* είναι ισοδύναμη με τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων. Στην Ενότητα 7-5, θα αποδείξουμε αυτή την ισοδυναμία. Σε αυτό το σημείο, σημειώνουμε ότι το Matlab δεν διαθέτει καμία συνάρτηση για τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων. Αντ' αυτού, πρέπει να

⁴Παρατηρήστε ότι στο Matlab δεικτοδοτούνται όλα τα διανύσματα αρχίζοντας από 1, ενώ εμείς δεικτοδοτούμε τις ακολουθίες, όπως την ακολουθία $x[n]$, αρχίζοντας από το $n = 0$. Αυτή η διαφορά πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στα προγράμματα σας.

γνωρίζουμε ότι η συνέλιξη είναι ισοδύναμη με τον πολυωνυμικό πολλαπλασιασμό. Επομένως μπορούμε να παραστήσουμε τα πολυώνυμα μέσω των ακολουθιών των συντελεστών τους και να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση `conv` για να υπολογίσουμε τη συνέλιξη τους, κάνοντας με αυτόν τον τρόπο (έμμεσα) πολυωνυμικό πολλαπλασιασμό.



Επίδειξη: Συνέλιξη Διακριτού Χρόνου



Άσκηση 5.6: Χρησιμοποιήστε το Matlab για να υπολογίσετε το ακόλουθο γινόμενο πολυωνύμων:

$$P(x) = (1 + 2x + 3x^2 + 5x^4)(1 - 3x - x^2 + x^3 + 3x^4)$$

5-4 Υλοποίηση των FIR Φίλτρων

ΑΣ θυμηθούμε ότι ο γενικός ορισμός ενός FIR φίλτρου είναι:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k] \quad (5.12)$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε πως, προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (5.12) για τον υπολογισμό της εξόδου του FIR φίλτρου, χρειαζόμαστε τα εξής: (1) ένα μέσο για τον πολλαπλασιασμό των τιμών του καθυστερημένου σήματος εισόδου με τους συντελεστές φίλτρου, (2) έναν μέσο για την πρόσθεση των τιμών της σταθμισμένης ακολουθίας και (3) ένα μέσο για να υπολογίζουμε τις καθυστερημένες εκδόσεις της ακολουθίας εισόδου. Θα ήταν χρήσιμο να παραστήσουμε τις λειτουργίες που υπεισέρχονται στη Σχέση (5.12) με ένα σχηματικό διάγραμμα. Τέτοιες παραστάσεις θα οδηγήσουν στην καλύτερη κατανόηση των ιδιοτήτων του συστήματος και σε εναλλακτικούς τρόπους υλοποίησής του.



Εργ. Ασκ.: #6 Ψηφιακές Εικόνες

5-4.1 Δομικά Στοιχεία

Τα βασικά Δομικά στοιχεία που χρειαζόμαστε είναι ο πολλαπλασιαστής, ο αθροιστής και ο τελεστής μοναδιαίας καθυστέρησης, όπως αυτά απεικονίζονται στο Σχήμα 5-12.

5-4.1.1 Πολλαπλασιαστής

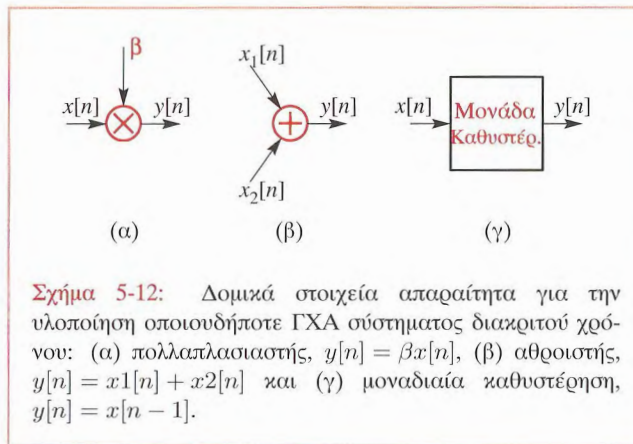
Το πρώτο στοιχειώδες σύστημα εκτελεί τον πολλαπλασιασμό ενός σήματος με μια σταθερά (δες Σχήμα 5-12(α)). Το σήμα εξόδου $y[n]$ δίνεται από τη σχέση:

$$y[n] = \beta x[n]$$

όπου ο συντελεστής β είναι μια σταθερά. Αυτό το σύστημα μπορεί να είναι η μονάδα πολλαπλασιασμού ενός υπολογιστή. Για ένα επεξεργαστή ψηφιακού σήματος (DSP), η ταχύτητα του πολλαπλασιαστή παίζει καθοριστικό ρόλο στο χρόνο που απαιτείται για την εκτέλεση της ψηφιακής διαδικασίας φιλτραρίσματος. Σε εφαρμογές που απαιτείται ο υπολογισμός της συνέλιξης πολυδιαστάτων σημάτων (όπως για παράδειγμα στο φιλτράρισμα εικόνων) μπορεί να χρειαστεί να εκτελεστούν δισεκατομμύρια πολλαπλασιασμών ανά δευτερόλεπτο για να υλοποιηθεί ένα αποτελεσματικό φίλτρο. Για το λόγο αυτό, στον τομέα της εφαρμοσμένης μηχανικής, έχει γίνει μεγάλη προσπάθεια στη σχεδίαση γρήγορων πολλαπλασιαστών για τις εφαρμογές της ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων. Επιπλέον, από τη στιγμή που πολλά φίλτρα απαιτούν την ίδια ακολουθία πολλαπλασιασμών ξανά και ξανά, η εφαρμογή τεχνικών διοχεύτησης στον πολλαπλασιαστή επιταχύνει σε μεγάλο βαθμό τη διαδικασία του φιλτραρίσματος. Παρατηρήστε επίσης, ότι ο απλός πολλαπλασιαστής είναι ένα FIR φίλτρο, με $M = 0$, και $b_0 = \beta$ στη Σχέση (5.3). Η κρουστική απόκριση του συστήματος του πολλαπλασιαστή είναι απλά η $h[n] = \beta\delta[n]$.

5-4.1.2 Αθροιστής

Το δεύτερο στοιχειώδες σύστημα στο Σχήμα 5-12 (β) εκτελεί την πρόσθεση δύο σημάτων. Αυτό αποτελεί ένα διαφορετικό είδος συστήματος, επειδή έχει δύο εισόδους και μία έξοδο. Από άποψη υλικού, ο αθροιστής είναι απλά η μονάδα πρόσθεσης στον υπολογιστή. Σε



Σχήμα 5-12: Δομικά στοιχεία απαραίτητα για την υλοποίηση οποιουδήποτε ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου: (α) πολλαπλασιαστής, $y[n] = \beta x[n]$, (β) αθροιστής, $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$ και (γ) μοναδιαία καθυστέρηση, $y[n] = x[n - 1]$.

πολλές λειτουργίες της ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων απαιτείται ένας πολλαπλασιασμός και αμέσως μετά μια πρόσθεση. Οι επεξεργαστές ψηφιακού σήματος συνήθως διαθέτουν μία ειδική μονάδα πολλαπλασιασμού-πρόσθεσης, αποκαλούμενη συχνά μονάδα “MADD” ή “MAC”⁵. Θα πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε ότι ο αθροιστής είναι ένας σημείο προς σημείο συνδυασμός των τιμών των δύο ακολουθιών εισόδου. Δεν είναι FIR φίλτρο, διότι διαθέτει περισσότερες από μια εισόδους. Ωστόσο, αποτελεί μία σημαντική δομική μονάδα των FIR φίλτρων. Με πολλές εισόδους, ο αθροιστής θα μπορούσε να παρασταθεί ως αθροιστής πολλαπλών εισόδων, αλλά στο ψηφιακό υλικό οι προσθέσεις γίνονται συνήθως με δύο εισόδους κάθε φορά.

5-4.1.3 Μοναδιαία Καθυστέρηση

Το τρίτο στοιχειώδες σύστημα εκτελεί καθυστέρηση μιας χρονικής στιγμής. Παριστάνεται από ένα σχηματικό διάγραμμα, όπως αυτό του Σχήματος 5-12(γ). Στην περίπτωση φίλτρων διακριτού χρόνου, η χρονική διάσταση δεικτοδοτείται με ακέραιους αριθμούς, οπότε αυτή η

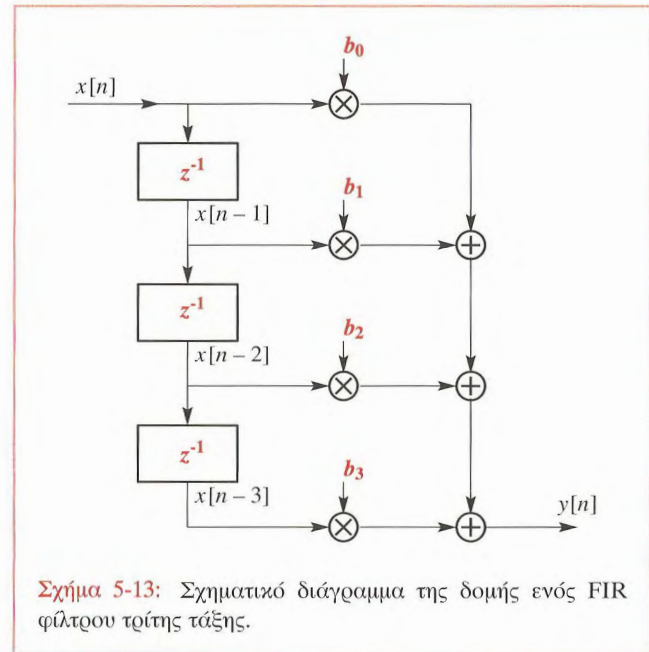
⁵Για παράδειγμα, οι επεξεργαστές ψηφιακού σήματος της οικογένειας C64 της Texas Instruments μπορούν να πραγματοποιήσουν μέχρι και 2.4 εκατομμύρια πολλαπλασιασμούς-προσθέσεις, με ακριβεία 16-bit, το δευτερόλεπτο

καθυστερήση αντιστοιχεί στη χρονική διάρκεια ενός "κύκλου" του ρολογιού του συστήματος. Η υλοποίηση σε υλικό της μοναδιαίας καθυστέρησης εκτελείται στην πραγματικότητα με την αποθήκευση μιας τιμής του σήματος στη μνήμη, για έναν κύκλο ρολογιού και στη συνέχεια την απελευθέρωσή της στην έξοδο. Οι μονάδες καθυστέρησης για περισσότερες από μία χρονικές στιγμές που απαιτούνται για την υλοποίηση της Σχέσης (5.12) μπορούν να υλοποιηθούν (από άποψης σχηματικών διαγραμμάτων), διασυνδέοντας σε σειρά αρκετές μονάδες καθυστέρησης μίας χρονικής στιγμής. Επομένως, μια καθυστέρηση M μονάδων, απαιτεί M θέσεις μνήμης, διαμορφωμένες όπως σ' έναν καταχωρητή ολίσθησης, ο οποίος μπορεί να υλοποιηθεί ως κυκλικός απομονωτής στη μνήμη του υπολογιστή.

5-4.2 Σχηματικά Διαγράμματα

Τα *σχηματικά διαγράμματα*, στα οποία καθορίζεται ο τρόπος με τον οποίο διασυνδέονται οι τρεις βασικές δομικές μονάδες προκειμένου να δημιουργηθούν πιο σύνθετες δομές, χρησιμοποιούνται με σκοπό να δημιουργήσουμε μια χρήσιμη γραφική αναπαράσταση των δομών υλικού. Σ' ένα τέτοιο κατευθυνόμενο γράφημα, οι κόμβοι (δηλαδή τα σημεία συνδέσεων) είναι είτε κόμβοι-άθροισης, είτε κόμβοι-διακλάδωσης, είτε κόμβοι εισόδου-εξόδου. Στις συνδέσεις μεταξύ των κόμβων εκτελείται είτε καθυστέρηση, είτε πολλαπλασιασμός. Στο Σχήμα 5-13 παρουσιάζεται το γενικό σχηματικό διάγραμμα ενός ψηφιακού FIR φίλτρου τρίτης τάξης ($M = 3$). Αυτή η δομή δείχνει καθαρά γιατί το FIR φίλτρο λέγεται επίσης και *εξίσωση διαφορών τροφοδότησης προς τα εμπρός*, αφού όλα τα μονοπάτια οδηγούν προς τα εμπρός, από την είσοδο στην έξοδο. Δεν υπάρχουν κύκλοι στα σχηματικά διαγράμματα. Στο Κεφάλαιο 8 θα συζητήσουμε για τα φίλτρα με *ανατροφοδότηση*, στα οποία για τον υπολογισμό της εξόδου χρησιμοποιούνται, εκτός των τιμών της εισόδου, και παρελθούσες τιμές της εξόδου.

Μιλώντας αυστηρά, η δομή του Σχήματος 5-13 είναι η

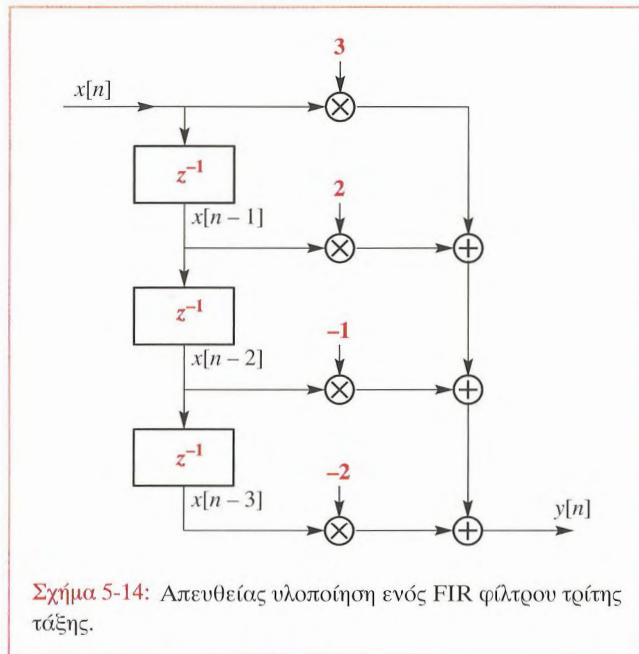


Σχήμα 5-13: Σχηματικό διάγραμμα της δομής ενός FIR φίλτρου τρίτης τάξης.

αναπαράσταση της εξίσωσης

$$y[n] = ((b_0x[n] + b_1x[n-1]) + b_2x[n-2]) + b_3x[n-3])$$

σε επίπεδο σχηματικού διαγράμματος από το οποίο εύκολα μπορεί να προκύψει μια ισοδύναμη εξίσωση με αυτή της (5.12). Το σήμα εισόδου καθυστερείται από τις συνδεδεμένες σε σειρά μοναδιαίες καθυστερήσεις, οπότε κάθε καθυστερημένο σήμα πολλαπλασιάζεται με ένα συντελεστή του φίλτρου και τα γινόμενα αθροίζονται για να διαμορφώσουν το άθροισμα. Επομένως, είναι εύκολο να δούμε ότι υπάρχει μια αντιστοίχιση ένα-προς-ένα μεταξύ του σχηματικού διαγράμματος και της εξίσωσης διαφορών (5.12) του FIR φίλτρου, αφού και τα δύο καθορίζονται από τους ίδιους συντελεστές $\{b_k\}$. Μια χρήσιμη τακτική είναι να αρχίζουμε από τη μια αναπαράσταση και να καταλήγουμε στην άλλη. Η κανονικότητα που εμφανίζει η δομή στο Σχήμα 5-13 καθιστά απλό τον ορισμό φίλτρων



μεγαλύτερης τάξης. Συγκεκριμένα, ο αριθμός των συνδεδεμένων σε σειρά στοιχείων καθυστέρησης αυξάνεται σε M και στη συνέχεια οι συντελεστές $\{b_k\}$ του φίλτρου τοποθετούνται στο διάγραμμα. Αυτή η τυποποιημένη δομή ονομάζεται *απευθείας μορφή υλοποίησης*. Η μετάβαση από το σχηματικό διάγραμμα στην εξίσωση διαφορών είναι εξίσου εύκολη. Ακολουθεί μια απλή άσκηση αντιστοίχισης.



Άσκηση 5.7:

Καθορίστε την εξίσωση διαφορών που αντιστοιχεί στο σχηματικό διάγραμμα του Σχήματος 5-14.

5-4.2.1 Άλλα Σχηματικά Διαγράμματα

Πολλά Σχηματικά διαγράμματα υλοποιούν το ίδιο FIR φίλτρο, με την έννοια ότι η εξωτερική συμπεριφορά τους από την είσοδο στην έξοδο θα είναι η ίδια. Η απευθείας

υλοποίηση είναι μία μόνο δυνατότητα. Άλλα σχηματικά διαγράμματα θα απεικονίζουν μ' ένα διαφορετικό τρόπο, ή διαφορετική σειρά, τους εσωτερικούς υπολογισμούς. Σε μερικές περιπτώσεις, οι εσωτερικοί πολλαπλασιαστές μπορεί να χρησιμοποιούν διαφορετικούς συντελεστές. Όταν θα έχουμε μελετήσει το μετασχηματισμό- z στα Κεφάλαια 7 και 8, θα έχουμε πλέον τα απαραίτητα εργαλεία για να παράγουμε πολλές διαφορετικές υλοποιήσεις.

Όταν βρίσκεται κανείς αντιμέτωπος με ένα αυθαίρετο σχηματικό διάγραμμα, μπορεί να χρησιμοποιήσει τον αλγόριθμο τεσσάρων βημάτων που περιγράφεται παρακάτω, για να προσδιορίσει την εξίσωση διαφορών από το σχηματικό διάγραμμα:

- (i) Δώστε ένα μοναδικό όνομα σήματος στην είσοδο κάθε μοναδιαίας καθυστέρησης του σχηματικού διαγράμματος.
- (ii) Παρατηρήστε ότι η έξοδος μιας μοναδιαίας καθυστέρησης μπορεί να εκφραστεί με απλό τρόπο συναρτήσει της εισόδου της.
- (iii) Σε κάθε κόμβο άθροισης του σχηματικού διαγράμματος, χρησιμοποιώντας τα ονόματα των σημάτων που ορίσατε στα προηγούμενα βήματα, γράψτε την εξίσωση που προκύπτει.
- (iv) Σ' αυτό το σημείο, θα έχετε διάφορες εξισώσεις, που θα περιλαμβάνουν τα $x[n]$, $y[n]$ και τα ονόματα των εσωτερικών σημάτων. Αυτά με απαλειφή μεταβλητών, μπορούν να αναχθούν σε μια εξίσωση που περιλαμβάνει μόνο τα $x[n]$ και $y[n]$, όπως ακριβώς γίνεται στα γραμμικά συστήματα εξισώσεων.

As εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία στο απλό, αλλά χρήσιμο παράδειγμα που παρουσιάζεται στο Σχήμα 5-15. Καταρχήν παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές των εσωτερικών σημάτων $\{v_1[n], v_2[n], v_3[n]\}$ έχουν καθοριστεί στο Σχήμα 5-15 ως οι εισόδους στις τρεις μοναδιαίες καθυστερήσεις του διαγράμματος. Αρχίζοντας από πάνω προς τα κάτω, οι εξοδοί των μοναδιαίων καθυστερήσεων είναι $v_3[n-1]$, $v_2[n-1]$ και $v_1[n-1]$

αντίστοιχα. Παρατηρούμε επίσης ότι το $v_3[n]$ είναι μια σταθμισμένη έκδοση της εισόδου $x[n]$. Γράφουμε στη συνέχεια τις τρεις εξισώσεις εξόδου των τριών κόμβων άθροισης:

$$y[n] = b_0x[n] + v_1[n - 1]$$

$$v_1[n] = b_1x[n] + v_2[n - 1]$$

$$v_2[n] = b_2x[n] + v_3[n - 1]$$

$$v_3[n] = b_3x[n]$$

Έχουμε τώρα τέσσερις εξισώσεις με πέντε “αγνώστους.” Προκειμένου να δείξουμε ότι αυτό το σύνολο εξισώσεων είναι ισοδύναμο με την απευθείας μορφή υλοποίησης, μπορούμε να απαλείψουμε τα $v_i[n]$ συνδυάζοντας τις εξισώσεις ως ακολούθως:

$$v_2[n] = b_2x[n] + b_3x[n - 1]$$

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n - 1] + v_2[n - 2]$$

$$= b_0x[n] + b_1x[n - 1] + b_2x[n - 2] + b_3x[n - 3]$$

Άρα, έχουμε καταλήξει στις ίδιες εξισώσεις διαφορών όπως και προηγουμένως και επομένως η νέα αυτή δομή αποτελεί ένα διαφορετικό τρόπο υπολογισμού του ίδιου πράγματος. Στην πραγματικότητα η παραπάνω δομή χρησιμοποιείται ευρέως και ονομάζεται *ανάστροφη μορφή υλοποίησης* του FIR φίλτρου.

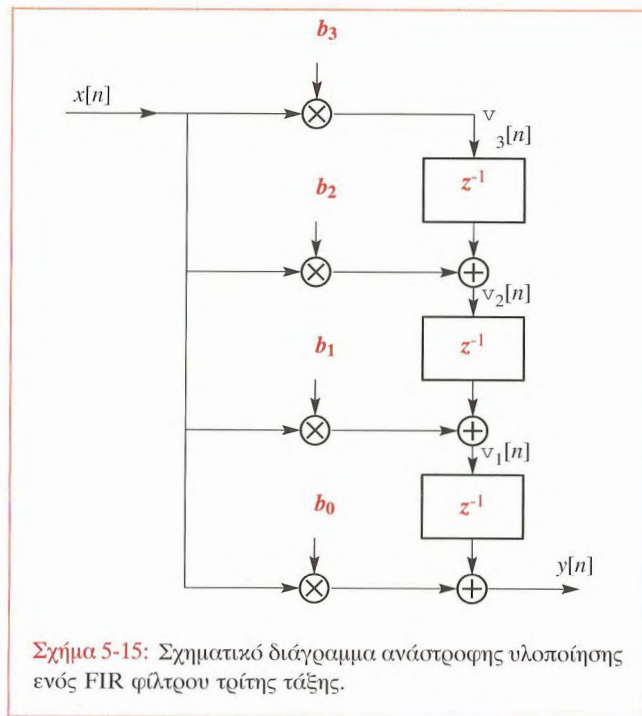


Άσκηση 5.8:

Εξηγήστε γιατί η δομή του Σχήματος 5-15 ονομάζεται *ανάστροφη υλοποίηση* της απευθείας υλοποίησης που φαίνεται στο Σχήμα 5-13.

5-4.2.2 Εσωτερικές Λεπτομέρειες Υλικού

Ένα σχηματικό διάγραμμα απεικονίζει εξαρτήσεις μεταξύ των διαφορετικών μεταβλητών σήματος. Επομένως, διαφορετικά σχηματικά διαγράμματα, που υλοποιούν την ίδια λειτουργία εισόδου-εξόδου, μπορεί να έχουν εντελώς διαφορετικά χαρακτηριστικά από άποψη εσωτερικής συμπεριφοράς. Διάφορες σκέψεις έρχονται στο μυαλό μας με τις οποίες και θα ασχοληθούμε στη συνέχεια:



Σχήμα 5-15: Σχηματικό διάγραμμα ανάστροφης υλοποίησης ενός FIR φίλτρου τρίτης τάξης.

- (i) Στο σχηματικό διάγραμμα καθορίζεται η σειρά του υπολογισμού. Σε εφαρμογές υψηλών ταχυτήτων, στις οποίες πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο παραλληλισμός ή η διοχέτευση, οι εξαρτήσεις στο σχηματικό διάγραμμα αντιπροσωπεύουν περιορισμούς στον υπολογισμό.
- (ii) Η κατάτμηση ενός φίλτρου για ένα VLSI τσιπ θα γινόταν (σε υψηλό επίπεδο) μέσω σχηματικών διαγραμμάτων. Ομοίως, Η “χαρτογράφηση” (τύπωση) αλγορίθμων πάνω σε ειδικές αρχιτεκτονικές ψηφιακών επεξεργαστών σήματος, μπορεί να επιτευχθεί με την χρησιμοποίηση σχηματικών διαγραμμάτων και ειδικών μεταγλωττιστών που μεταφράζουν τα σχηματικά διαγράμματα σε βελτιστοποιημένο κώδικα για το τσιπ του ψηφιακού επεξεργαστή σήματος.
- (iii) Τα αποτελέσματα του πεπερασμένου μήκους λέξης

είναι σημαντικά όταν το φίλτρο υλοποιείται με αριθμητική σταθερής υποδιαστολής. Στην περίπτωση αυτή, το σφάλμα στρογγυλοποίησης και η υπερχειλίση είναι σημαντικά “πραγματικά” προβλήματα, τα οποία εξαρτώνται από την εσωτερική σειρά των υπολογισμών.

Τώρα που ξέρουμε αρκετά για τη συνέλιξη και την υλοποίηση των FIR φίλτρων, είναι καιρός να εξετάσουμε τα συστήματα διακριτού χρόνου με ένα πιο γενικό και συστηματικό τρόπο. Στην επόμενη ενότητα, θα δείξουμε ότι τα FIR φίλτρα είναι μια ειδική περίπτωση της γενικής κατηγορίας των γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων. Πολλά απ’ αυτά που έχουμε μάθει για τα FIR φίλτρα ισχύουν και για αυτή τη γενικότερη κλάση συστημάτων.

5-5 Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα (ΓΧΑ) Συστήματα

Σ’ αυτή την ενότητα, συζητάμε δύο γενικές ιδιότητες των συστημάτων. Αυτές οι ιδιότητες, η *γραμμικότητα* και η *χρονική αμεταβλητότητα*, οδηγούν σε απλοποίηση της μαθηματικής ανάλυσης και σε μια μεγαλύτερη εμβάθυνση και κατανόηση της συμπεριφοράς των συστημάτων. Για να διευκολύνουμε το σχολιασμό αυτών των ιδιοτήτων, είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε το σχηματικό διάγραμμα ενός γενικού συστήματος διακριτού χρόνου που παρουσιάζεται στο Σχήμα 5-1 στη Σελίδα 114. Αυτό το σχηματικό διάγραμμα απεικονίζει το μετασχηματισμό του σήματος εισόδου $x[n]$ σε ένα σήμα εξόδου $y[n]$. Θα είναι, επίσης, χρήσιμο να αναπαραστήσουμε αυτό τον μετασχηματισμό ως ακολούθως:

$$x[n] \mapsto y[n] \quad (5.13)$$

Σε μια συγκεκριμένη περίπτωση, το σύστημα ορίζεται αφού δοθεί ένας τύπος ή ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό όλων των τιμών της ακολουθίας εξόδου από τιμές της ακολουθίας εισόδου. Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα είναι το σύστημα του *τετραγώνου* που ορίζεται από τον ακόλουθο κανόνα:

$$y[n] = (x[n])^2 \quad (5.14)$$

Ένα άλλο παράδειγμα είναι αυτό της Σχέσης (5.9), το οποίο ορίζει το γενικό σύστημα καθυστέρησης. Ένα ακόμη παράδειγμα είναι αυτό της Σχέσης (5.12), το οποίο ορίζει το γενικό FIR φίλτρο και περιλαμβάνει το σύστημα καθυστέρησης ως ειδική περίπτωση. Θα δούμε ότι αυτά τα FIR φίλτρα είναι και γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα, ενώ το σύστημα τετραγώνου δεν είναι γραμμικό.

5-5.1 Χρονική Αμεταβλητότητα

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου λέγεται ότι είναι *χρονικά αμετάβλητο* αν, όταν μια είσοδος καθυστερείται (μετατοπίζεται) κατά n_0 , η έξοδος καθυστερείται κατά το ίδιο χρονικό διάστημα. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σημειογραφία, μπορούμε να εκφράσουμε αυτή τη συνθήκη ως

$$x[n - n_0] \mapsto y[n - n_0] \quad (5.15)$$

όπου $x[n] \mapsto y[n]$. Η συνθήκη αυτή πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή του n_0 , του ακεραίου αριθμού που καθορίζει το μέγεθος της χρονικής καθυστέρησης ή μετατόπισης.

Μια ερμηνεία, σε μορφή σχηματικού διαγράμματος, της χρονικής αμεταβλητότητας δίνεται στο Σχήμα 5-16. Παρατηρήστε ότι στον πάνω κλάδο, καθυστερείται η είσοδος στο σύστημα, ενώ στον κάτω κλάδο η έξοδος. Κατά συνέπεια, ένα σύστημα μπορεί να εξεταστεί για χρονική αμεταβλητότητα ελέγχοντας εάν ισχύει ή όχι η σχέση $w[n] = y[n - n_0]$ στο Σχήμα 5-16.

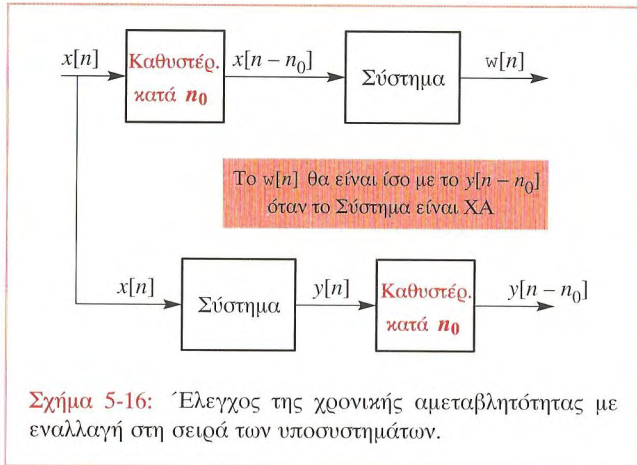
Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα του συστήματος του νόμου των τετραγώνων που ορίσαμε στη Σχέση (5.14). Εάν χρησιμοποιήσουμε την καθυστερημένη είσοδο σαν είσοδο του συστήματος του νόμου τετραγώνων, λαμβάνουμε:

$$w[n] = (x[n - n_0])^2$$

Αν η $x[n]$ είναι η είσοδος στο σύστημα του νόμου τετραγώνων, τότε $y[n] = (x[n])^2$ και

$$y[n - n_0] = (x[n - n_0])^2 = w[n]$$

και επομένως το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.



Ένα δεύτερο απλό παράδειγμα είναι το σύστημα χρονικής αναστροφής που ορίζεται από την εξίσωση:

$$y[n] = x[-n]$$

Το σύστημα αυτό αναστρέφει χρονικά, ως προς το μηδέν, την ακολουθία εισόδου. Αν καθυστερήσουμε την ακολουθία εισόδου και στη συνέχεια αναστρέψουμε τη χρονική σειρά των δειγμάτων της ως προς το μηδέν, παίρνουμε:

$$w[n] = x[(-n) - n_0] = x[-n - n_0]$$

Αν τώρα πρώτα αναστρέψουμε την ακολουθία εισόδου και στη συνέχεια την καθυστερήσουμε, παίρνουμε μια διαφορετική ακολουθία από την $w[n]$, δηλαδή, αφού $y[n] = x[-n]$

$$y[n - n_0] = x[-(n - n_0)] = x[-n + n_0]$$

Άρα, το σύστημα χρονικής αναστροφής δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.



Άσκηση 5.9: Εξετάστε αν είναι χρονικά αμετάβλητο το ακόλουθο σύστημα

$$y[n] = nx[n]$$

5-5.2 Γραμμικότητα

Τα γραμμικά συστήματα έχουν την ιδιότητα ότι εάν $x_1[n] \mapsto y_1[n]$ και $x_2[n] \mapsto y_2[n]$, τότε

$$\begin{aligned} x[n] &= \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \\ &\mapsto y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] \end{aligned} \quad (5.16)$$

Η μαθηματική αυτή συνθήκη πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή των σταθερών α και β . Η Εξίσωση (5.16) δηλώνει ότι εάν η είσοδος αποτελείται από ένα σύνολο σταθμισμένων ακολουθιών, τότε η αντίστοιχη έξοδος είναι το άθροισμα των σταθμισμένων εξόδων που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις ακολουθίες εισόδου. Μια ερμηνεία της γραμμικότητας σε επίπεδο σχηματικού διαγράμματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 5-17, από το οποίο φαίνεται ότι ένα σύστημα μπορεί να εξεταστεί ως προς τη γραμμικότητά του ελέγχοντας εάν ισχύει ή όχι η σχέση $w[n] = y[n]$. Η συνθήκη γραμμικότητας της Σχέσης (5.16) είναι ισοδύναμη με την *αρχή της υπέρθεσης*: Αν η είσοδος είναι το άθροισμα (υπέρθεση) δύο ή περισσότερων σταθμισμένων ακολουθιών, μπορούμε να βρούμε την έξοδο που αντιστοιχεί σε κάθε ακολουθία εισόδου ξεχωριστά και στη συνέχεια να προσθέσουμε τις επιμέρους σταθμισμένες εξόδους. Μερικές φορές είναι χρήσιμο να χωρίζουμε τη Σχέση (5.16) σε δύο συνθήκες. Θέτοντας $\alpha = \beta = 1$ παίρνουμε τη συνθήκη

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \mapsto y[n] = y_1[n] + y_2[n] \quad (5.17)$$

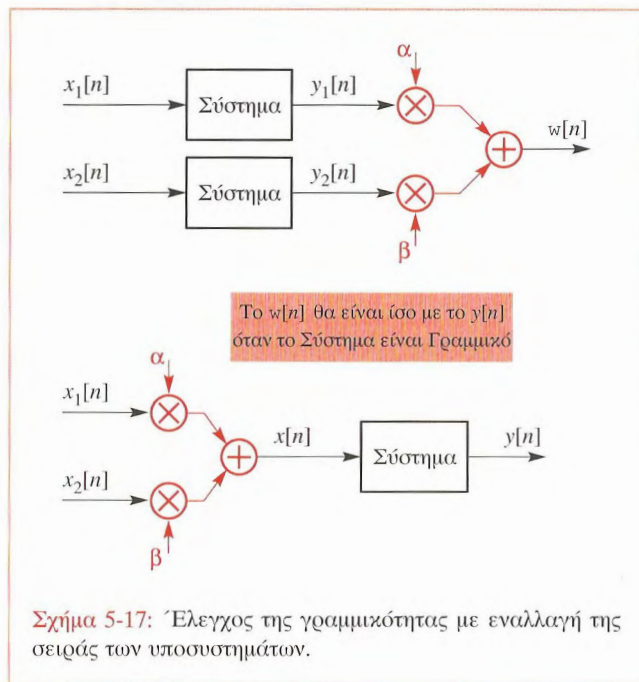
και χρησιμοποιώντας μόνο μία σταθμισμένη είσοδο, παίρνουμε

$$x[n] = \alpha x_1[n] \mapsto y[n] = \alpha y_1[n] \quad (5.18)$$

Για να είναι αληθής η Συνθήκη (5.16) θα πρέπει και οι δύο συνθήκες (5.17) και (5.18) να είναι αληθείς.

Ας θεωρήσουμε πάλι το παράδειγμα του συστήματος του νόμου των τετραγώνων που ορίστηκε στη Σχέση (5.14). Η έξοδος $w[n]$ στο Σχήμα 5-17 για το σύστημα αυτό είναι

$$w[n] = \alpha(x_1[n])^2 + \beta(x_2[n])^2$$



Σχήμα 5-17: Έλεγχος της γραμμικότητας με εναλλαγή της σειράς των υποσυστημάτων.

ενώ

$$y[n] = (\alpha x_1[n] + \beta x_2[n])^2$$

$$= \alpha^2 (x_1[n])^2 + 2\alpha\beta x_1[n]x_2[n] + \beta^2 (x_2[n])^2$$

Άρα, $w[n] \neq y[n]$ και επομένως αποδείξαμε ότι το σύστημα του νόμου των τετραγώνων δεν είναι γραμμικό. Συστήματα που δεν είναι γραμμικά ονομάζονται *μη-γραμμικά* συστήματα.



Άσκηση 5.10: Δείξτε ότι το σύστημα χρονικής αναστροφής $y[n] = x[-n]$ είναι ένα γραμμικό σύστημα.

5-5.3 Η Περίπτωση του FIR Συστήματος

Τα FIR συστήματα που περιγράφονται από τη Σχέση (5.3) ικανοποιούν και τη συνθήκη της γραμμικότητας και

τη συνθήκη της χρονικής αμεταβλητότητας. Μπορούμε να κάνουμε μια μαθηματική απόδειξη της χρονικής αμεταβλητότητας χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που απεικονίζεται στο Σχήμα 5-16. Αν ορίσουμε το σήμα $v[n]$ να είναι το $x[n - n_0]$, τότε η εξίσωση διαφορών η οποία συσχετίζει το $v[n]$ με το $w[n]$ στον πάνω κλάδο του Σχήματος 5-16 είναι η ακόλουθη:

$$w[n] = \sum_{k=0}^M b_k v[n - k]$$

$$= \sum_{k=0}^M b_k x[(n - k) - n_0]$$

$$= \sum_{k=0}^M b_k x[(n - n_0) - k]$$

Για σύγκριση, υπολογίζουμε, από τον κάτω κλάδο και το $y[n - n_0]$:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k]$$

$$\Rightarrow y[n - n_0] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - n_0 - k]$$

Αυτές οι δύο εκφράσεις είναι ίδιες, κι έτσι η έξοδος $w[n]$ είναι ίση με $y[n - n_0]$ και έχουμε αποδείξει ότι το FIR φίλτρο είναι χρονικά αμετάβλητο.

Η συνθήκη της γραμμικότητας είναι απλούστερο να αποδειχθεί. Απλώς αντικαταστήστε στην εξίσωση διαφορών (5.3) και θα έχουμε:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k]$$

$$= \sum_{k=0}^M b_k (\alpha x_1[n - k] + \beta x_2[n - k])$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^M b_k x_1[n - k] + \beta \sum_{k=0}^M b_k x_2[n - k]$$

$$= \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

Επομένως, το FIR φίλτρο υπακούει στην αρχή της υπέρθεσης και κατά συνέπεια είναι ένα γραμμικό σύστημα.

Ένα σύστημα που ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες καλείται **Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο** σύστημα, ή απλά **ΓΧΑ**. Πρέπει να τονίσουμε στο σημείο αυτό ότι ο όρος ΓΧΑ είναι ένας γενικός όρος. Το FIR φίλτρο είναι ένα παράδειγμα ενός ΓΧΑ συστήματος. Δεν περιγράφονται όλα τα ΓΧΑ συστήματα από τη Σχέση (5.3), αλλά όλα τα συστήματα που περιγράφονται από τη Σχέση (5.3) είναι ΓΧΑ συστήματα.

5-6 Συνέλιξη και ΓΧΑ Συστήματα

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου όπως αυτό που απεικονίζεται στο Σχήμα 5-8. Η κρουστική απόκριση $h[n]$ του ΓΧΑ συστήματος είναι απλά η έξοδος του συστήματος όταν η είσοδος είναι η μοναδιαία κρουστική ακολουθία $\delta[n]$. Σ' αυτήν την ενότητα, θα δείξουμε ότι η κρουστική απόκριση χαρακτηρίζει πλήρως οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα και ότι επίσης, η συνέλιξη είναι η γενική σχέση που μας επιτρέπει να υπολογίζουμε την έξοδο από την είσοδο οποιουδήποτε **ΓΧΑ συστήματος**. Στην αρχική μας συζήτηση για τη συνέλιξη, θεωρήσαμε μόνο ακολουθίες εισόδου πεπερασμένου μήκους και FIR φίλτρα. Τώρα, θα κάνουμε μια γενική παρουσίαση.

5-6.1 Συνελικτικό Άθροισμα

Αρχίζουμε υπενθυμίζοντας από την Ενότητα 5-3.2 ότι **οποιοδήποτε** σήμα $x[n]$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως σύνολο σταθμισμένων και μετατοπισμένων κρουστικών σημάτων. Κάθε μη μηδενικό δείγμα του σήματος $x[n]$ πολλαπλασιάζει ένα κρουστικό σήμα που είναι μετατοπισμένο στο δείκτη του δείγματος. Συγκεκριμένα, μπορούμε να γράψουμε το $x[n]$ ως εξής:

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{\ell} x[\ell] \delta[n - \ell] & (5.19) \\ &= \dots + x[-2] \delta[n + 2] + x[-1] \delta[n + 1] + \\ &\quad x[0] \delta[n] + x[1] \delta[n - 1] + x[2] \delta[n - 2] + \dots \end{aligned}$$

Στην πιο γενική περίπτωση, τα όρια του αθροίσματος της παραπάνω σχέσης μπορούν να κυμαίνονται από $-\infty$ έως $+\infty$. Στη Σχέση (5.19) δεν έχουμε καθορίσει τα όρια του αθροίσματος, αφού το άθροισμα θα περιλαμβάνει όλα τα μη μηδενικά δείγματα της ακολουθίας εισόδου.

Ένα σύνολο σταθμισμένων ακολουθιών όπως αυτών της Σχέσης (5.19) αναφέρεται συνήθως ως “γραμμικός συνδυασμός” ή υπέρθεση των σταθμισμένων ακολουθιών. Κατά συνέπεια, η Σχέση (5.19) αποτελεί αναπαράσταση της ακολουθίας $x[n]$ ως γραμμικός συνδυασμός, σταθμισμένων και μετατοπισμένων κρουστικών ακολουθιών. Αφού τα ΓΧΑ συστήματα αποκρίνονται με απλό και προβλέψιμο τρόπο σε αθροίσματα σημάτων και μετατοπισμένων σημάτων, αυτή η αναπαράσταση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για το σκοπό μας, την παραγωγή δηλαδή μιας γενικής σχέσης κατάλληλης για τον υπολογισμό της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος.

Το Σχήμα 5-8 μας υπενθυμίζει ότι η απόκριση στην είσοδο $\delta[n]$ είναι, εξ ορισμού, η κρουστική απόκριση $h[n]$. Η χρονική αμεταβλητότητα μας δίνει επιπρόσθετες πληροφορίες. Η απόκριση στην $\delta[n - 1]$ θα είναι η $h[n - 1]$. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να γράψουμε μια ολόκληρη οικογένεια ζευγαριών εισόδου-εξόδου ως εξής:

$$\begin{aligned} \delta[n] &\mapsto h[n] \\ \Rightarrow \delta[n - 1] &\mapsto h[n - 1] \\ \Rightarrow \delta[n - 2] &\mapsto h[n - 2] \\ \Rightarrow \delta[n - (-1)] &\mapsto h[n - (-1)] = h[n + 1] \\ \Rightarrow \delta[n - \ell] &\mapsto h[n - \ell] \text{ για κάθε ακέραιο } \ell \end{aligned}$$

Τώρα είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε τη γραμμικότητα, αφού η Σχέση (5.19) εκφράζει ένα γενικό σήμα εισόδου ως γραμμικό συνδυασμό μετατοπισμένων κρουστικών σημάτων. Μπορούμε να καταγράψουμε μερικές περιπτώσεις:

$$\begin{aligned} x[0] \delta[n] &\mapsto x[0] h[n] \\ x[1] \delta[n - 1] &\mapsto x[1] h[n - 1] \\ x[2] \delta[n - 2] &\mapsto x[2] h[n - 2] \end{aligned}$$

$$x[\ell]\delta[n - \ell] \mapsto x[\ell]h[n - \ell] \text{ για κάθε ακέραιο } \ell$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την υπέρθεση για να τα συνδυάσουμε και έχουμε:

$$x[n] = \sum_{\ell} x[\ell]\delta[n - \ell] \mapsto y[n] = \sum_{\ell} x[\ell]h[n - \ell] \quad (5.20)$$

Επειδή δεν υποθέσαμε πούθενά ότι είτε το σήμα εισόδου $x[n]$, είτε η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι πεπερασμένη διάρκειας, στη γενική περίπτωση μπορεί να χρειαστούμε τα όρια του αθροίσματος να κυμαίνονται από $-\infty$ έως $+\infty$. Μ' αυτήν την τροποποίηση παίρνουμε:

Ο Τύπος του Συνελικτικού Αθροίσματος

$$y[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell]h[n - \ell] \quad (5.21)$$

Η έκφραση αυτή παριστά τη σχέση της συνέλιξης στην γενική περίπτωση κι έτσι έχουμε αποδείξει ότι **όλα τα ΓΧΑ συστήματα μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα συνελικτικό άθροισμα**. Τα άπειρα όρια χρησιμεύουν για όλες τις δυνατές περιπτώσεις, συμπεριλαμβανομένων ακόμη και των ειδικών περιπτώσεων όπου μία ή και οι δύο από τις ακολουθίες είναι πεπερασμένες σε μήκος.

Παράδειγμα 5-2: FIR Συνέλιξη

Για παράδειγμα, αν η $h[n]$ παίρνει μη μηδενικές τιμές μόνο στο διάστημα $0 \leq n \leq M$, τότε η Σχέση (5.21) ανάγεται στην

$$y[n] = \sum_{\ell=n-M}^n x[\ell]h[n - \ell] \quad (5.22)$$

επειδή το όρισμα $n - \ell$ πρέπει να κυμαίνεται στο $0 \leq n - \ell \leq M$, οι τιμές του δείκτης ℓ στη (5.21) περιορίζονται στο διάστημα $(n - M) \leq \ell \leq n$. ■

Στο Σχήμα 5-18 παρουσιάζεται μια γραφική διεπαφή χρήση γραμμένη στο Matlab για να μπορείτε να υπολογίζετε συνέλιξεις απλών σημάτων.

Επίδειξη: Διακριτή Συνέλιξη

Άσκηση 5.11: Αντικαθιστώντας το $k = n - \ell$ στην (5.22), δείξτε ότι το $y[n]$ μπορεί να εκφραστεί στη μορφή της (5.10), $y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n - k]$

5-6.2 Μερικές Ιδιότητες των ΓΧΑ συστημάτων

Οι ιδιότητες της συνέλιξης αποτελούν και ιδιότητες των ΓΧΑ συστημάτων. Κατά συνέπεια, είναι ενδιαφέρον να διερευνηθούν αυτές οι ιδιότητες και να συσχετιστούν με τις ιδιότητες των ΓΧΑ συστημάτων.

5-6.2.1 Η Συνέλιξη ως Τελεστής

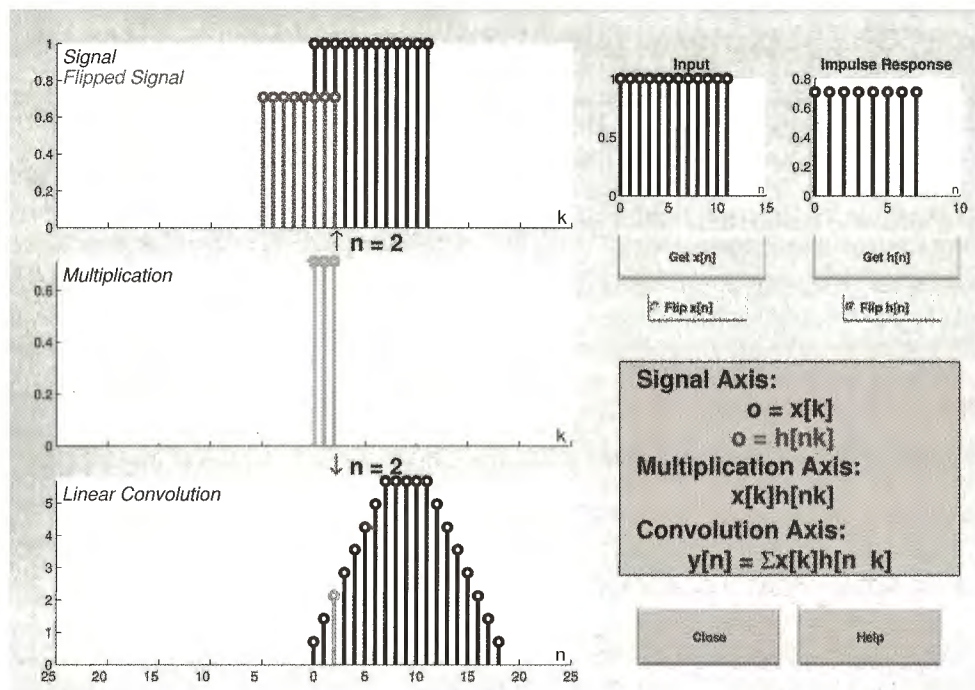
Μια ενδιαφέρουσα πτυχή της συνέλιξης είναι ο καθαρός αλγεβρικός χαρακτήρας της σαν διαδικασία μεταξύ δύο σημάτων. Η συνέλιξη του $x[n]$ και της $h[n]$ είναι μια διαδικασία που συμβολίζεται με τον τελεστή $*$, δηλαδή,

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell]h[n - \ell] \quad (5.23)$$

Λέμε ότι η ακολουθία $x[n]$ *συνελίσσεται* με την ακολουθία $h[n]$ για να παραχθεί η έξοδος $y[n]$.

Ο συμβολισμός $x[n] * h[n]$ είναι πολύ χρήσιμος γιατί μας επιτρέπει να σκεφτούμε τα προβλήματα συνέλιξης μ' έναν τελεστικό τρόπο. Σαν ένα απλό παράδειγμα, υπενθυμίζουμε ότι το ιδανικό σύστημα καθυστέρησης έχει κρουστική απόκριση $h[n] = \delta[n - n_0]$. Ξέρουμε ότι η έξοδος του ιδανικού συστήματος καθυστέρησης είναι $y[n] = x[n - n_0]$. Επομένως, συνάγεται ότι

$$\text{Συνέλιξη με Κρουστική Ακολουθία} \quad x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0] \quad (5.24)$$



Σχήμα 5-18: Γραφική διεπαφή χρήστη dconvdemo που επεξηγεί την ιδέα του συρόμενου παραθύρου που ενέχει το FIR φίλτράρισμα. Ο χρήστης μπορεί να επιλέξει το σήμα εισόδου και την κρουστική απόκριση και στη συνέχεια να σύρει το φίλτρο πάνω από το σήμα εισόδου και να παρατηρήσει με ποιο τρόπο προκύπτει η έξοδος.

Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό και χρήσιμο αποτέλεσμα διότι η (5.24) δηλώνει ότι “η συνέλιξη μιας οποιασδήποτε ακολουθίας $x[n]$ με μια κρουστική ακολουθία στο $n = n_0$, έχει σαν αποτέλεσμα τη μεταφορά της αρχής της ακολουθίας $x[n]$ στο n_0 .”

5-6.2.2 Αντιμεταθετική Ιδιότητα της Συνέλιξης

Είναι σχετικά εύκολο να αποδειχθεί ότι η συνέλιξη δύο ακολουθιών είναι αντιμεταθετική πράξη, δηλαδή:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \quad (5.25)$$

Στην πραγματικότητα, η ορθότητα της αντιμεταθετικής ιδιότητας είναι σαφής από τον υπολογιστικό αλγόριθμο του Σχήματος 5-11 στη Σελίδα 123, όπου είτε η $x[n]$, είτε η $h[n]$ μπορεί να γραφεί στην πρώτη γραμμή και επομένως η $x[n]$ και $h[n]$ μπορούν να αντιμετατεθούν. Στον αλγεβρικό χειρισμό που ακολουθεί, προβαίνουμε στην αλλαγή των μεταβλητών $k = n - \ell$ και αθροίζουμε ως προς τη νέα μεταβλητή k :

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell]h[n-\ell]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

(Θέστε: $k = n - \ell$)

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = h[n] * x[n]$$

Στην τρίτη γραμμή αυτού του συνόλου εξισώσεων, τα όρια στο άθροισμα μπορούν να εναλλαχθούν μεταξύ τους χωρίς πρόβλημα, διότι ένα σύνολο αριθμών μπορεί να αθροιστεί με οποιαδήποτε σειρά. Κατά συνέπεια, έχουμε αποδείξει ότι η συνέλιξη είναι μια αντιμεταθετική πράξη, δηλαδή:

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

5-6.2.3 Προσεταιριστική Ιδιότητα της Συνέλιξης

Η προσεταιριστική ιδιότητα, η οποία είναι ίσως λιγότερο προφανής από την αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλώνει ότι όταν θέλουμε να βρούμε τη συνέλιξη τριών σημάτων, μπορούμε να βρούμε πρώτα τη συνέλιξη των δύο εξ αυτών και στη συνέχεια τη συνέλιξη του τρίτου με το αποτέλεσμα, δηλαδή:

$$(x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n] = x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) \quad (5.26)$$

Αν και οι αλγεβρικοί χειρισμοί που απαιτούνται για την απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας είναι πολύ κουραστικοί, τους παρουσιάζουμε αναλυτικά για να επεξηγήσουμε πώς μπορούμε να χειριστούμε διαφορετικές μορφές συνελικτικών εκφράσεων. Υποθέτουμε ότι το $x_1[n]$, $x_2[n]$ και $x_3[n]$ είναι τρεις τυχαίες ακολουθίες οι οποίες συνελίσσονται. Τότε:

$$\begin{aligned} & x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_1[\ell] \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2[k]x_3[(n-\ell)-k] \right) \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_1[\ell] \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_2[q-\ell]x_3[n-q] \end{aligned}$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_1[\ell]x_2[q-\ell]x_3[n-q]$$

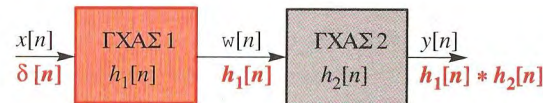
$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_1[\ell]x_2[q-\ell] \right) x_3[n-q]$$

$$= (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$$

Στην τρίτη γραμμή, κάναμε την αλλαγή των μεταβλητών $q = \ell + k$. Αυτό αποδεικνύει ότι η συνέλιξη είναι μια προσεταιριστική πράξη. Οι επιπτώσεις αυτής της ιδιότητας για συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά, περιγράφεται στην ενότητα που ακολουθεί.

5-7 ΓΧΑ Συστήματα σε Σειρά

Σε μια συνδεσμολογία δύο συστημάτων σε σειρά, η έξοδος του πρώτου συστήματος είναι η είσοδος στο δεύτερο σύστημα και ως συνολική έξοδος του συστήματος θεωρείται η έξοδος του δεύτερου συστήματος. Το Σχήμα 5-19 παρουσιάζει δύο ΓΧΑ Συστήματα (ΓΧΑ 1 και ΓΧΑ 2) συνδεδεμένα σε σειρά.



Σχήμα 5-19: Συνδεσμολογία σε σειρά δύο ΓΧΑ συστημάτων. Η συνολική κρουστική απόκριση ισούται με τη συνέλιξη των δύο κρουστικών αποκρίσεων των επιμέρους συστημάτων.

Τα ΓΧΑ συστήματα έχουν την αξιοσημείωτη ιδιότητα ότι μπορούν να δημιουργήσουν συστοιχία με οποιαδήποτε σειρά. Η ιδιότητα αυτή είναι μια άμεση συνέπεια της αντιμεταθετικής και της προσεταιριστικής ιδιότητας της συνέλιξης, όπως υποδεικνύουν οι ακόλουθες τρεις ισοδύναμες εκφράσεις οι οποίες μπορούν να προκύψουν

εύκολα εφαρμόζοντας τις δύο προαναφερθείσες ιδιότητες της συνέλιξης:

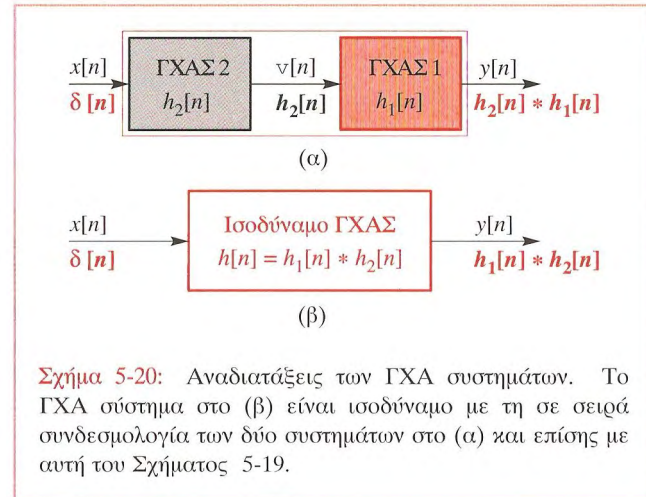
$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \quad (5.27)$$

$$= x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) \quad (5.28)$$

$$= x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) \quad (5.29)$$

$$= (x[n] * h_2[n]) * h_1[n] \quad (5.30)$$

Η Εξίσωση (5.27) αποτελεί μια μαθηματική δήλωση του γεγονότος ότι το δεύτερο σύστημα επεξεργάζεται την έξοδο του πρώτου, η οποία είναι $w[n] = x[n] * h_1[n]$. Η Εξίσωση (5.28) δείχνει ότι η έξοδος $y[n]$ είναι η συνέλιξη της εισόδου με μια νέα κρουστική απόκριση $h_1[n] * h_2[n]$. Αυτό αντιστοιχεί στο Σχήμα 5-20(β) με $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$. Η Εξίσωση (5.29) χρησιμοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα της συνέλιξης, για να δείξει ότι $h[n] = h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]$. Εφαρμόζοντας την προσεταιριστική ιδιότητα οδηγούμαστε στη Σχέση (5.30), η οποία αντιστοιχεί στη συνδεσμολογία σε σειρά του Σχήματος 5-20(α). Παρατηρήστε ότι η αναδιάταξη των ΓΧΑ συστημάτων δίνει την ίδια τελική έξοδο, δηλαδή, είναι σωστό να ονομαστούν οι έξοδοι και των τριών συστημάτων των Σχημάτων 5-19 και 5-20 με το ίδιο σύμβολο, $y[n]$, ακόμα κι αν τα ενδιάμεσα σήματα, $w[n]$ και $v[n]$, είναι διαφορετικά. Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να δείξουμε ότι η σειρά με την οποία διατάσσονται τα ΓΧΑ συστήματα σε μια σε σειρά συνδεσμολογία δεν έχει επιπτώσεις στη τελική έξοδο, είναι να δειχθεί ότι οι κρουστικές αποκρούσεις των δύο επιμέρους συστημάτων ταυτίζονται. Στο Σχήμα 5-19, η κρουστική είσοδος και οι αντίστοιχες έξοδοι παρουσιάζονται κάτω από τα βέλη. Όταν η είσοδος στο πρώτο σύστημα είναι η κρουστική ακολουθία, η έξοδος του ΓΧΑ 1 είναι η κρουστική του απόκριση, $h_1[n]$, η οποία τροφοδοτεί την είσοδο του ΓΧΑ 2. Η έξοδος του ΓΧΑ 2 είναι, επομένως, η συνέλιξη της εισόδου του, $h_1[n]$, με την κρουστική του απόκριση $h_2[n]$. Επομένως, η συνολική κρουστική απόκριση του Σχήματος 5-19 είναι $h_1[n] * h_2[n]$. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η συνολική κρουστική απόκριση στο άλλο σε σειρά σύστημα του Σχήματος 5-20(α)



είναι $h_2[n] * h_1[n]$. Αφού η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική, τα δύο σε σειρά συστήματα έχουν την ίδια κρουστική απόκριση

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n] \quad (5.31)$$

η οποία είναι επίσης η κρουστική απόκριση $h[n]$ του ισοδύναμου συστήματος. Εξαιτίας του ότι η συνολική κρουστική απόκριση καθενός από τα τρία συστήματα που φαίνονται στα Σχήματα 5-19 και 5-20 είναι ίδια, και η έξοδος τους, για την ίδια είσοδο, θα είναι ίδια.



Παράδειγμα 5-3: Συστήματα Συνδεδεμένα σε Σειρά

Για να καταδείξουμε τη χρησιμότητα των αποτελεσμάτων για τα συνδεδεμένα σε σειρά ΓΧΑ συστήματα, εξετάστε τα δύο σε σειρά συστήματα που δίνονται παρακάτω:

$$h_1[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad h_2[n] = \begin{cases} 1 & 1 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας δείχνουν ότι το συνολικό σε σειρά σύστημα έχει κρουστική απόκριση

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

Επομένως, για να βρούμε τη συνολική κρουστική απόκριση πρέπει να συνελίξουμε την $h_1[n]$ με την $h_2[n]$. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο πολυωνυμικού πολλαπλασιασμού που παρουσιάσαμε στην Ενότητα 5-3.3.1. Ο υπολογισμός παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα:

n	$n < 0$	0	1	2	3	4	5	6	$n > 6$
$h_1[n]$	0	1	1	1	1	0	0	0	0
$h_2[n]$	0	0	1	1	1				
$h_1[0]h_2[n]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$h_1[1]h_2[n-1]$	0	0	1	1	1	1	0	0	0
$h_1[2]h_2[n-2]$	0	0	0	1	1	1	1	0	0
$h_1[3]h_2[n-3]$	0	0	0	0	1	1	1	1	0
$h[n]$	0	0	1	2	3	3	2	1	0

Επομένως, η ισοδύναμη κρουστική απόκριση είναι:

$$h[n] = \sum_{k=0}^6 b_k \delta[n-k]$$

όπου $\{b_k\}$ είναι η ακολουθία $\{0, 1, 2, 3, 3, 2, 1\}$.

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι ένα σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n]$ μπορεί να περιγραφεί είτε από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \sum_{k=0}^6 b_k x[n-k] \quad (5.32)$$

όπου $\{b_k\}$ είναι και πάλι η ακολουθία που δόθηκε παραπάνω, είτε από το ζεύγος των ακόλουθων εξισώσεων διαφορών

$$w[n] = \sum_{k=0}^3 x[n-k] \quad y[n] = \sum_{k=1}^3 w[n-k] \quad (5.33)$$

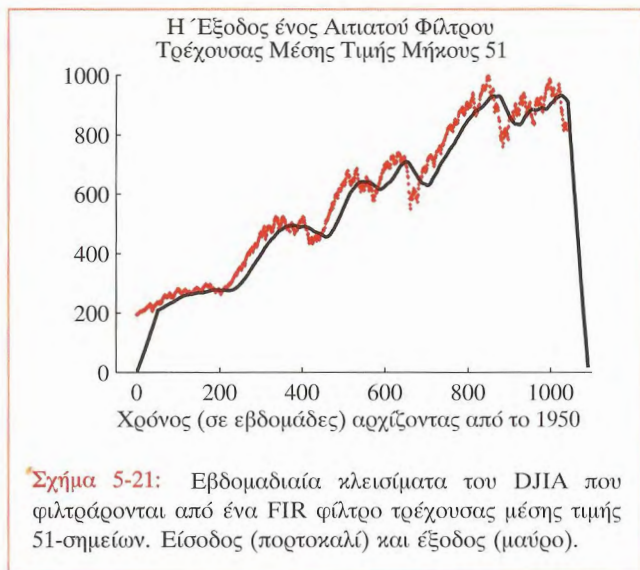
Το Παράδειγμα 5-3 διευκρινίζει ένα σημαντικό σημείο. Υπάρχει μια σημαντική διαφορά μεταξύ των Εξισώσεων (5.32) και (5.33). Μπορούμε να δούμε ότι η υλοποίηση της (5.33) απαιτεί συνολικά μόνο πέντε προσθέσεις για τον υπολογισμό κάθε τιμής της ακολουθίας εξόδου, ενώ αυτή της (5.32) απαιτεί πέντε προσθέσεις και επιπλέον τέσσερις πολλαπλασιασμούς για τους συντελεστές που είναι διάφοροι της μονάδας. Σε μια μεγαλύτερη κλίμακα (μεγαλύτερης τάξης φίλτρα), τέτοιες διαφορές στο πλήθος και στον τύπο υπολογισμών μπορεί να είναι πολύ σημαντικές στις πρακτικές εφαρμογές των FIR φίλτρων. Κατά συνέπεια, η ύπαρξη των εναλλακτικών ισοδύναμων υλοποιήσεων του ίδιου φίλτρου είναι μια πολύ σημαντική υπόθεση.

5-8 Παράδειγμα FIR Φιλτραρίσματος

Ολοκληρώνουμε αυτό το κεφάλαιο με ένα παράδειγμα της χρήσης του FIR φιλτραρίσματος σε ένα πραγματικό σήμα. Ένα παράδειγμα από επιλεγμένα δεδομένα που μπορούν να θεωρηθούν ως σήμα είναι ο Βιομηχανικός Μέσος Όρος του Dow-Jones (DJIA). Το DJIA είναι μια ακολουθία αριθμών από τους υπολογισμούς των μέσων όρων των τιμών κλεισίματος κάποιων αντιπροσωπευτικών μετοχών.

Υπολογίζεται από το 1897 και χρησιμοποιείται με πολλούς τρόπους από τους επενδυτές και του οικονομολόγους. Ολόκληρη η ακολουθία που χρονολογείται από 1897 αποτελεί ένα σήμα που έχει θετικές τιμές και είναι εκθετικά αυξανόμενο. Προκειμένου να δώσουμε ένα παράδειγμα στο οποίο είναι ορατές μερικές λεπτομέρειες, έχουμε επιλέξει σαν σήμα $x[n]$ τις τιμές του εβδομαδιαίου μέσου όρου κλεισίματος για την περίοδο από το 1950 ως το 1970⁶. Αυτό το σήμα παρουσιάζει υψηλή μεταβλητότητα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5-21, όπου κάθε εβδομαδιαία τιμή σχεδιάζεται ως ένα ξεχωριστό σημείο. Η ομαλότερη

⁶Το πλήρες σύνολο εβδομαδιαίων επιλεγμένων στοιχείων για την περίοδο 1897-2002 θα περιελάμβανε πάνω από 5000 δείγματα με την αξία να κυμαίνεται περίπου από 40 έως 12000. Μια γραφική παράσταση ολόκληρης της ακολουθίας δε θα μας επέτρεπε να εξηγήσουμε τα αποτελέσματα που επιθυμούμε.



καμπύλη του Σχήματος 5-21 είναι η έξοδος ενός αιτιατού FIR φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής 51-σημείων, δηλαδή,

$$y[n] = \frac{1}{51} \sum_{k=0}^{50} x[n-k] = x[n] * h[n]$$

όπου $h[n]$ είναι η κρουστική απόκρισή του.

Παρατηρήστε ότι, όπως έχουμε δει στην Ενότητα 5-3.1, υπάρχει μια περιοχή στην αρχή και στο τέλος (50 δείγματα, στην περίπτωση αυτή) όπου το φίλτρο δεσμεύει και αποδεσμεύει το σήμα εισόδου. Παρατηρήστε επίσης ότι ένα μεγάλο μέρος των διακυμάνσεων μικρής κλίμακας έχει απομακρυνθεί από το φίλτρο. Τέλος, παρατηρήστε ότι η έξοδος είναι μετατοπισμένη σε σχέση με την είσοδο. Στο Κεφάλαιο 6, θα αναπτύξουμε τεχνικές που θα μας επιτρέψουν να δείξουμε ότι η μετατόπιση που εισάγεται από αυτό το φίλτρο είναι ακριβώς $M/2 = 25$ δείγματα.

Σε αυτό το παράδειγμα, είναι σημαντικό να είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε την είσοδο και την έξοδο παραβλέποντας τη μετατόπιση. Ίσως θα ήταν καλύτερο να χρησιμοποιήσουμε το μη αιτιατό *συμμετρικό* φίλτρο

τρέχουσας μέσης τιμής

$$\tilde{y}[n] = \frac{1}{51} \sum_{k=-25}^{25} x[n-k] = x[n] * \tilde{h}[n]$$

όπου $\tilde{h}[n]$ είναι η κρουστική απόκρισή του. Η έξοδος $\tilde{y}[n]$ μπορεί να ληφθεί από τη μετατόπιση (προώθηση) της εξόδου του αιτιατού συστήματος κινούμενου μέσου όρου κατά 25 δείγματα προς τα αριστερά. Σύμφωνα με τα προηγούμενα περί των συνδεδεμένων σε σειρά FIR συστημάτων, θα μπορούσαμε να σκεφτούμε το συμμετρικό σύστημα σαν ένα σε σειρά αιτιατό σύστημα με ένα σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση είναι $\delta[n+25]$, δηλαδή⁷:

$$\begin{aligned} \tilde{y}[n] &= y[n] * \delta[n+25] \\ &= (x[n] * h[n]) * \delta[n+25] \\ &= x[n] * (h[n] * \delta[n+25]) \\ &= x[n] * h[n+25] \end{aligned}$$

Επομένως, βρίσκουμε ότι $\tilde{h}[n] = h[n+25]$, δηλαδή, η κρουστική απόκριση του συμμετρικού φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής είναι μια μετατοπισμένη έκδοση της κρουστικής απόκρισης του αιτιατού φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής. Με τη μετατόπιση της κρουστικής απόκρισης, αφαιρούμε την καθυστέρηση που εισάγεται από το αιτιατό σύστημα.



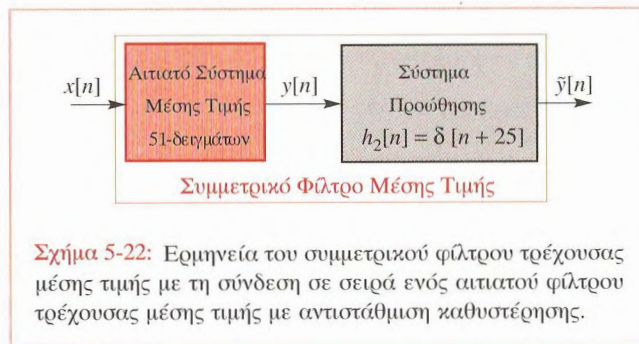
Άσκηση 5.12:

Καθορίστε την κρουστική απόκριση $h[n]$ του αιτιατού φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής 51-σημείων και καθορίστε την κρουστική απόκριση $\tilde{h}[n]$ του συμμετρικού φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής 51-σημείων.

Η αναπαράσταση του συμμετρικού φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής ως τη σύνδεση σε σειρά δύο συστημάτων, απεικονίζεται στο Σχήμα 5-22. Ένας άλλος τρόπος

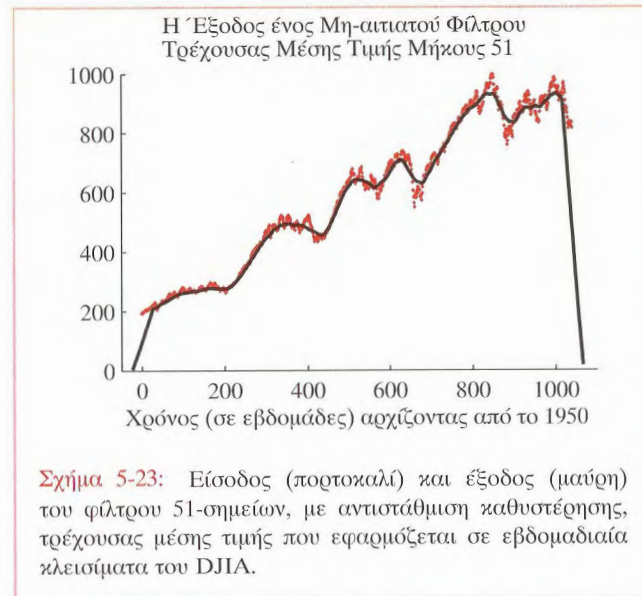
⁷Θυμηθείτε από τη Σχέση (5.24) ότι η συνέλιξη της $y[n]$ με μια κρουστική ακολουθία, απλά μετατοπίζει την αρχή της ακολουθίας στη θέση της κρουστικής ακολουθίας (σε αυτήν την περίπτωση, $n = -25$).

περιγραφής του συστήματος του Σχήματος 5-22 είναι ότι το δεύτερο σύστημα *αντισταθμίζει* την καθυστέρηση του πρώτου, ή μπορούμε να περιγράψουμε το συμμετρικό φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής σαν ένα φίλτρο *αντισταθμιστή-καθυστερότητας* τρέχουσας μέσης τιμής.



Το Σχήμα 5-23 δείχνει την είσοδο $x[n]$ και την έξοδο $\tilde{y}[n]$ ενός φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής με αντιστάθμιση καθυστέρησης. Μπορούμε τώρα να δούμε ότι τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της εισόδου και της εξόδου στοιχίζονται σωστά.

Όπως προκύπτει από το παράδειγμα αυτής της ενότητας, τα FIR φίλτρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αφαιρέσουν τις απότομες διακυμάνσεις που συνήθως υπάρχουν στα σήματα. Επιπλέον, το παράδειγμα δείχνει ότι αξίζει να αναπτύξουμε τις θεμελιώδεις μαθηματικές ιδιότητες τέτοιων συστημάτων επειδή αυτές οι ιδιότητες μπορεί να είναι χρήσιμες στο να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο λειτουργούν τέτοια συστήματα. Στο Κεφάλαιο 6, θα κατανοήσουμε ακόμα βαθύτερα και καλύτερα τα FIR συστήματα.



5-9 Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι

Αυτό το κεφάλαιο εισήγαγε την έννοια του φιλτραρίσματος με χρήση FIR συστημάτων. Μεταξύ των εργαστηριακών ασκήσεων που περιέχονται στο CD-ROM, υπάρχει μία (Εργαστηριακή άσκηση #7) που εξετάζει τη συνέλιξη διακριτού χρόνου και τα αποτελέσματα της δειγματοληψίας. Η ίδια εργαστηριακή άσκηση απαιτεί επίσης τη χρήση των δύο γραφικών διεπαφών του Matlab, CON2DIS και DCONVDEMO για τη δειγματοληψία και για τη συνέλιξη διακριτού χρόνου αντίστοιχα.



Εργ. Ασκ.: #7 Δειγματοληψία, Συνέλιξη και FIR Φιλτράρισμα



Επίδειξη: Κεφάλαιο 4, Δειγματοληψία



Επίδειξη: Συνέλιξη Διακριτού Χρόνου

Το CD-ROM, επίσης, περιέχει μεμονωμένες επιδείξεις

των ιδιοτήτων της γραμμικότητας και της χρονικής αμεταβλητότητας, χρησιμοποιώντας απλά FIR φίλτρα που επεξεργάζονται μετατοπισμένα και σταθμισμένα ημιτονικά σήματα.

Τέλος, υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη για άλλη μία φορά για το μεγάλο αριθμό λυμένων προβλημάτων που είναι διαθέσιμα στο CD-ROM για την αναγκαία επανάληψη και την πρακτική εξάσκηση.



Υπόδειξη: Εκατοντάδες Λυμένων Προβλημάτων

5-10 Προβλήματα

Πρόβλημα.-5.1 Αν η κρουστική απόκριση $h[n]$ ενός FIR φίλτρου είναι

$$h[n] = \delta[n - 1] - 2\delta[n - 4]$$

γράψτε την εξίσωση διαφορών του φίλτρου.

Πρόβλημα.-5.2 Υπολογίστε τον “κινούμενο” μέσο όρο

$$y[n] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[n - k]$$

για το μοναδιαίο-βηματικό σήμα εισόδου, δηλαδή,

$$x[n] = u[n] = \begin{cases} 0 & \text{για } n < 0 \\ 1 & \text{για } n \geq 0 \end{cases}$$

- Κάνετε ένα διάγραμμα της $u[n]$ πριν βρείτε την απάντηση για το $y[n]$.
- Υπολογίστε τώρα τις αριθμητικές τιμές του $y[n]$ για το χρονικό διάστημα $-5 \leq n \leq 10$, υποθέτοντας ότι $L = 5$.
- Σχεδιάστε το σήμα εξόδου για το χρονικό διάστημα $-5 \leq n \leq 10$, υποθέτοντας ότι $L = 5$. Χρησιμοποιήστε Matlab εάν είναι απαραίτητο, αλλά μάθετε να κάνετε τους απαραίτητους υπολογισμούς και με το χέρι.

- Τέλος, βρείτε ένα γενικό τύπο για το $y[n]$, που θα ισχύει για οποιοδήποτε μήκος L και για κάθε $n \geq 0$.

Πρόβλημα.-5.3 Ένα γραμμικό χρονικά-αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = 2x[n] - 3x[n - 1] + 2x[n - 2]$$

- Υπολογίστε τις τιμές του $y[n]$, για $0 \leq n \leq 10$, όταν η είσοδος σε αυτό το σύστημα είναι το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n + 1 & n = 0, 1, 2 \\ 5 - n & n = 3, 4 \\ 1 & n \geq 5 \end{cases}$$

- Για το προηγούμενο ερώτημα, σχεδιάστε τα σήματα $x[n]$ και $y[n]$.
- Καθορίστε την απόκριση του συστήματος στην κρουστική ακολουθία, δηλαδή, βρείτε την έξοδο $y[n] = h[n]$ όταν η είσοδος είναι $x[n] = \delta[n]$. Σχεδιάστε την $h[n]$ συναρτήσει του n .

Πρόβλημα.-5.4 Ένα γραμμικό χρονικά-αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = 2x[n] - 3x[n - 1] + 2x[n - 2]$$

- Κάντε το σχηματικό διάγραμμα της δομής απευθείας υλοποίησης του συστήματος.
- Κάντε το σχηματικό διάγραμμα της δομής ανάστροφης απευθείας υλοποίησης του συστήματος.

Πρόβλημα.-5.5 Θεωρήστε ένα σύστημα που ορίζεται από τη σχέση

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k]$$

- (i) Υποθέστε ότι η είσοδος $x[n]$ είναι διαφορετική από το μηδέν μόνο για $0 \leq n \leq N-1$. Αποδείξτε ότι το $y[n]$ είναι μη μηδενικό το πολύ μέσα σε ένα πεπερασμένο διάστημα της μορφής $0 \leq n \leq P-1$. Προσδιορίστε το P και το διάστημα μη μηδενικών τιμών του $y[n]$ συναρτήσει των M και N .
- (ii) Υποθέστε ότι η είσοδος $x[n]$ είναι διάφορη του μηδενός μόνο στο διάστημα $N_1 \leq n \leq N_2$. Αποδείξτε ότι το $y[n]$ είναι μη μηδενικό το πολύ μέσα σε ένα πεπερασμένο διάστημα της μορφής $N_3 \leq n \leq N_4$. Προσδιορίστε τα N_3 και N_4 συναρτήσει των N_1 , N_2 , και M .

Υπόδειξη: Φτιάξτε ένα σκίτσο παρόμοιο με αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 5-5 στη Σελίδα 118.

Πρόβλημα.-5.6 Το μοναδιαίο βηματικό σήμα “ενεργοποιείται” τη χρονική στιγμή $n = 0$ και συνήθως συμβολίζεται με $u[n]$.

- (i) Σχεδιάστε το $u[n]$.
- (ii) Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μοναδιαία βηματική ακολουθία για να αναπαραστήσουμε άλλες ακολουθίες που είναι μηδέν για $n < 0$. Σχεδιάστε την ακολουθία $x[n] = (0.5)^n u[n]$.
- (iii) Ο “κινούμενος” μέσος όρος L -σημείων ορίζεται ως ακολούθως:

$$y[n] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[n-k]$$

Για την ακολουθία εισόδου $x[n] = (0.5)^n u[n]$, υπολογίστε την αριθμητική τιμή του $y[n]$ στο διάστημα $-5 \leq n \leq 10$, υποθέτοντας ότι $L = 4$.

- (iv) Για την ακολουθία εισόδου $x[n] = a^n u[n]$, βρείτε ένα γενικό τύπο για το $y[n]$ που θα ισχύει για οποιοδήποτε a , για οποιοδήποτε μήκος L και για κάθε

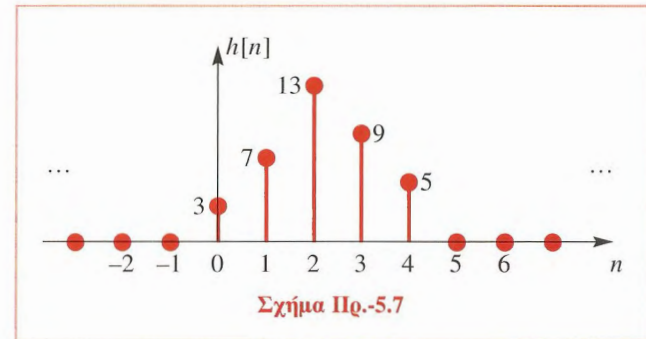
$n \geq 0$. Ο ακόλουθος τύπος μπορεί να αποδειχθεί πολύ χρήσιμος:

$$\sum_{k=M}^N \alpha^k = \frac{\alpha^M - \alpha^{N+1}}{1 - \alpha}$$

Πρόβλημα.-5.7 Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις για την απόκριση, στο πεδίο του χρόνου, των ψηφιακών FIR φίλτρων:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Όταν δοκιμάζονται με ένα κρουστικό σήμα εισόδου, $x[n] = \delta[n]$, η έξοδος του φίλτρου είναι το σήμα $h[n]$ που παρουσιάζεται στο Σχήμα Πρ.-5.7. Καθορίστε τους συντελεστές b_k της εξίσωσης διαφορών του FIR φίλτρου.



Πρόβλημα.-5.8 Εάν οι συντελεστές ενός FIR συστήματος είναι $\{b_k\} = \{13, -13, 13\}$ και το σήμα εισόδου είναι

$$x[n] = \begin{cases} 0 & \text{για άρτιο } n \\ 1 & \text{για περιττό } n \end{cases}$$

προσδιορίστε το σήμα εξόδου $y[n]$ για όλες τις τιμές του n . Δώστε την απάντησή σας είτε με ένα διάγραμμα είτε με ένα μαθηματικό τύπο.

Πρόβλημα.-5.9 Για κάθε ένα από τα ακόλουθα συστήματα, καθορίστε εάν το σύστημα είναι ή δεν είναι (1) γραμμικό, (2) χρονικά αμετάβλητο και (3) αιτιατό.

(i) $y[n] = x[n] \cos(0.2\pi n)$

(ii) $y[n] = x[n] - x[n - 1]$

(iii) $y[n] = |x[n]|$

(iv) $y[n] = Ax[n] + B$, όπου A και B σταθερές.

Πρόβλημα.-5.10 Υποθέστε ότι το \mathcal{S} είναι ένα γραμμικό, χρονικά-αμετάβλητο σύστημα του οποίου η ακριβής μορφή είναι άγνωστη. Εξετάζουμε το σύστημα εφαρμόζοντας στην είσοδό του κάποια σήματα και ελέγχοντας την έξοδό του. Υποθέστε ότι τα αποτελέσματα δίνονται από τα ακόλουθα ζεύγη εισόδων-εξόδων:

Είσοδος: $x[n]$	Έξοδος: $y[n]$
$\delta[n] - \delta[n - 1]$	$\delta[n] - \delta[n - 1] + 2\delta[n - 3]$
$\cos(\pi n/2)$	$2 \cos(\pi n/2 - \pi/4)$

(i) Σχεδιάστε το σήμα:

$$y[n] = \delta[n] - \delta[n - 1] + 2\delta[n - 3].$$

(ii) Χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα και τη χρονική αμεταβλητότητα του συστήματος για να βρείτε την έξοδο όταν η είσοδος είναι

$$x[n] = 7\delta[n] - 7\delta[n - 2]$$

Πρόβλημα.-5.11 Ένα γραμμικό χρονικά-αμετάβλητο σύστημα έχει κρουστική απόκριση

$$h[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n - 1] + 4\delta[n - 2] + \delta[n - 4]$$

(i) Κάντε το σχηματικό διάγραμμα της δομής απευθείας υλοποίησης του συστήματος.

(ii) Κάντε το σχηματικό διάγραμμα της δομής ανάστροφης απευθείας υλοποίησης του συστήματος.

Πρόβλημα.-5.12 Για ένα συγκεκριμένο ΓΧΑ σύστημα, όταν η είσοδος είναι η μοναδιαία βηματική ακολουθία $x_1[n] = u[n]$, η αντίστοιχη έξοδος είναι

$$y_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n - 1] - \delta[n - 2] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ -1 & n = 2 \\ 0 & n \geq 3 \end{cases}$$

Καθορίστε την έξοδο του όταν η είσοδος στο ΓΧΑ σύστημα είναι το $x_2[n] = 3u[n] - 2u[n - 4]$. Δώστε την απάντησή σας με τη μορφή σχέσης που εκφράζει την $y_2[n]$ συναρτήσει των δοθέντων γνωστών ακολουθιών, ή παραθέστε έναν κατάλογο τιμών για $-\infty < n < \infty$.

Πρόβλημα.-5.13 Για το FIR φίλτρο $y[n] = x[n] - ax[n - 1]$, καθορίστε το σήμα εξόδου για τις ακόλουθες περιπτώσεις.

(i) Το σήμα εισόδου είναι το $x[n] = a^n u[n]$.

(ii) Το σήμα εισόδου είναι το $x[n] = a^n (u[n] - u[n - 10])$.

Πρόβλημα.-5.14 Μια μορφή της διαδικασίας της αποσυνέλιξης αρχίζει με το σήμα εξόδου και την κρουστική απόκριση του συστήματος, από το οποίο θα έπρεπε να είναι δυνατό να βρεθεί το σήμα εισόδου.

(i) Εάν η έξοδος ενός FIR φίλτρου με $h[n] = \delta[n - 2]$ είναι

$$y[n] = u[n - 3] - u[n - 6],$$

προσδιορίστε το σήμα εισόδου $x[n]$.

(ii) Αν η έξοδος του FIR φίλτρου πρώτης τάξης είναι

$$y[n] = \delta[n] - \delta[n - 4],$$

προσδιορίστε το σήμα εισόδου $x[n]$.

- (iii) Εάν η έξοδος ενός συστήματος κινητού μέσου όρου 4-σημείων είναι

$$y[n] = -5\delta[n] - 5\delta[n - 2],$$

προσδιορίστε το σήμα εισόδου $x[n]$.

Πρόβλημα-5.15 Μια άλλη μορφή της διαδικασίας της αποσυνέλιξης αρχίζει με το σήμα εξόδου και το σήμα εισόδου, από τα οποία θα έπρεπε να είναι δυνατό να βρεθεί η κρουστική απόκριση.

- (i) Αν το σήμα εισόδου είναι $x[n] = u[n]$, βρείτε το FIR φίλτρο που θα δώσει σαν έξοδο το σήμα $y[n] = u[n - 1]$.
- (ii) Αν το σήμα εισόδου είναι $x[n] = u[n]$, βρείτε το FIR φίλτρο που θα δώσει σαν έξοδο το σήμα $y[n] = \delta[n]$.
- (iii) Αν το σήμα εισόδου είναι $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$, βρείτε το FIR φίλτρο που θα δώσει σαν έξοδο το σήμα $y[n] = \delta[n - 1]$.

Πρόβλημα-5.16 Μερικές φορές δεν είναι δυνατό να λύσουμε το πρόβλημα της αποσυνέλιξης για κάποιο δοθέν ζεύγος εισόδου-εξόδου. Για παράδειγμα, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει FIR φίλτρο που να μπορεί να επεξεργαστεί το σήμα εισόδου $x[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$ και να δώσει το σήμα εξόδου $y[n] = \delta[n]$.

Πρόβλημα-5.17 Υποθέστε ότι τρία συστήματα συνδέονται σε σειρά. Με άλλα λόγια, η έξοδος του \mathcal{S}_1 είναι η είσοδος στο \mathcal{S}_2 και η έξοδος του \mathcal{S}_2 είναι η είσοδος στο \mathcal{S}_3 . Τα τρία συστήματα ορίζονται ως ακολούθως:

$$\mathcal{S}_1: y_1[n] = x_1[n] - x_1[n - 1]$$

$$\mathcal{S}_2: y_2[n] = x_2[n] + x_2[n - 2]$$

$$\mathcal{S}_3: y_3[n] = x_3[n - 1] + x_3[n - 2]$$

Αρα $x_1[n] = x[n]$, $x_2[n] = y_1[n]$, $x_3[n] = y_2[n]$ και $y[n] = y_3[n]$. Επιθυμούμε να καθορίσουμε το ισοδύναμο σύστημα από την είσοδο $x[n]$ (στο \mathcal{S}_1) στην έξοδο $y[n]$, η οποία είναι η έξοδος του \mathcal{S}_3 .

- (i) Καθορίστε την κρουστική απόκριση $h_i[n]$ για κάθε ένα μεμονωμένο υποσύστημα \mathcal{S}_i .
- (ii) Καθορίστε την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συνολικού συστήματος, δηλαδή, βρείτε την $h[n]$ έτσι ώστε $y[n] = x[n] * h[n]$.
- (iii) Γράψτε μια εξίσωση διαφορών που να ορίζει το συνολικό σύστημα συναρτήσει των $x[n]$ και $y[n]$ μόνο.

Πρόβλημα-5.18 Θεωρήστε ένα σύστημα που περιγράφεται από το ακόλουθο πρόγραμμα σε Matlab

```
% xx.mat is a binary file containing the
% vector of input samples called "xx"
load xx
yy1 = conv(ones(1,4),xx);
yy2 = conv([1, -1, 1, 1],xx);
ww = yy1 + yy2;
yy = conv(ones(1,3),ww);
```

Το συνολικό σύστημα από την είσοδο xx στην έξοδο yy είναι ένα ΓΧΑ σύστημα που αποτελείται από τρία ΓΧΑ συστήματα.

- (i) Σχεδιάστε ένα σχηματικό διάγραμμα του συστήματος που υλοποιεί το πρόγραμμα που δίνεται παραπάνω. Βεβαιωθείτε για τις κρουστικές αποκρίσεις και τις εξισώσεις διαφορών των επί μέρους συστημάτων.
- (ii) Το συνολικό σύστημα είναι ένα ΓΧΑ σύστημα. Ποια είναι η κρουστική του απόκριση και ποια είναι η εξίσωση διαφορών που ικανοποιείται από την είσοδο $x[n]$ και την έξοδο $y[n]$;

Απόκριση Συχνότητας FIR Φίλτρων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στην κλάση των FIR συστημάτων. Δείξαμε ότι ο σταθμισμένος μέσος όρος ενός πεπερασμένου πλήθους τιμών της ακολουθίας εισόδου ορίζει ένα σύστημα διακριτού χρόνου και δείξαμε ότι τέτοια συστήματα είναι γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα. Δείξαμε επίσης ότι η κρουστική απόκριση ενός FIR συστήματος ορίζει πλήρως το σύστημα. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα εισάγουμε την έννοια της **απόκρισης συχνότητας** ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου FIR φίλτρου και θα δείξουμε ότι η απόκριση συχνότητας και η κρουστική απόκριση σχετίζονται μ' ένα μοναδικό τρόπο. Είναι αξιοσημείωτο ότι στα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα (ΓΧΑ) συστήματα, όταν η είσοδος είναι ένα μιγαδικό ημιτονοειδές, το αντίστοιχο σήμα εξόδου είναι ένα άλλο μιγαδικό ημιτονοειδές της ίδιας συχνότητας, αλλά με διαφορετικό μέτρο και φάση. Η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας περιγράφει την απόκριση ενός ΓΧΑ

συστήματος σε όλες τις συχνότητες διέγερσης, δίνοντας τη μεταβολή του μέτρου και της φάσης που υφίστανται όλα τα ημιτονοειδή που πιθανώς εφαρμοστούν στην είσοδό του. Επιπλέον, εφόσον τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα υπακούουν στην αρχή της υπέρθεσης, η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας αποτελεί έναν πλήρη χαρακτηρισμό της συμπεριφοράς του συστήματος για οποιαδήποτε είσοδο που μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα ημιτονοειδών. Αφού σχεδόν οποιοδήποτε σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να παρασταθεί από μια υπέρθεση ημιτονοειδών, η απόκριση συχνότητας αρκεί για να παραστήσουμε σχεδόν οποιοδήποτε σήμα.

6-1 Απόκριση των FIR συστημάτων σε Ημιτονοειδής Διεγέρσεις

Τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα συμπεριφέρονται με έναν ιδιαίτερα απλό τρόπο όταν η είσοδος είναι

μια μιγαδική εκθετική ακολουθία. Για να γίνει αυτό αντιληπτό, θεωρήστε το ακόλουθο FIR σύστημα

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (6.1)$$

και υποθέστε ότι η είσοδος είναι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα με κανονικοποιημένη γωνιακή συχνότητα $\hat{\omega}$

$$x[n] = Ae^{j\phi} e^{j\hat{\omega}n} \quad -\infty < n < \infty$$

Θυμηθείτε ότι αυτό το σήμα διακριτού χρόνου θα μπορούσε να προκύψει με δειγματοληψία του σήματος συνεχούς χρόνου

$$x(t) = Ae^{j\phi} e^{j\omega t}$$

Αν $x[n] = x(nT_s)$, τότε ω και $\hat{\omega}$ σχετίζονται με τη σχέση $\hat{\omega} = \omega T_s$, όπου T_s η περίοδος δειγματοληψίας. Για τέτοιες εισόδους, η αντίστοιχη έξοδος είναι

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^M b_k Ae^{j\phi} e^{j\hat{\omega}(n-k)} \\ &= \left(\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} \right) Ae^{j\phi} e^{j\hat{\omega}n} \\ &= \mathcal{H}(\hat{\omega}) Ae^{j\phi} e^{j\hat{\omega}n} \quad -\infty < n < \infty \end{aligned} \quad (6.2)$$

όπου

$$\mathcal{H}(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} \quad (6.3)$$

Επειδή έχουμε παραστήσει τη συχνότητα του μιγαδικού εκθετικού σήματος με το γενικό σύμβολο $\hat{\omega}$, έχουμε πάρει τη Σχέση (6.3) που είναι συνάρτηση του $\hat{\omega}$. Δηλαδή, η Σχέση (6.3) περιγράφει την απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος σε ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα μιας οποιασδήποτε συχνότητας $\hat{\omega}$. Η ποσότητα $\mathcal{H}(\hat{\omega})$ που ορίζεται από τη Σχέση (6.3) ονομάζεται *συνάρτηση απόκρισης συχνότητας* του συστήματος. (Γενικά, χρησιμοποιούμε τη συντόμηση *απόκριση συχνότητας*.) Ωστόσο, υπάρχει ένα ζήτημα στην

αναπαράσταση της απόκρισης συχνότητας, ένα ζήτημα που τίθεται από τη συμβατότητά της με τον μετασχηματισμό- z (πρόκειται να παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 7). Το δεξιό μέλος της Σχέσης (6.3) περιέχει δυνάμεις του μιγαδικού εκθετικού $e^{j\hat{\omega}}$. Αυτό ισχύει για πολλές εκφράσεις της απόκρισης συχνότητας. Επομένως, επιλέγουμε να χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $H(e^{j\hat{\omega}})$ αντί του $\mathcal{H}(\hat{\omega})$ για να τονίζουμε την παρουσία του $e^{j\hat{\omega}}$. Η συνάρτηση $H(e^{j\hat{\omega}})$ εξακολουθεί να εξαρτάται από τη μεταβλητή $\hat{\omega}$. Επιπλέον, αφού η ακολουθία της κρουστικής απόκρισης ενός FIR φίλτρου είναι η ίδια με την ακολουθία των συντελεστών του φίλτρου, μπορούμε να εκφράσουμε την απόκριση συχνότητας είτε με τους συντελεστές του φίλτρου b_k είτε με την κρουστική απόκριση $h[k]$, δηλαδή:

Η Απόκριση Συχνότητας ενός FIR Συστήματος

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} = \sum_{k=0}^M h[k] e^{-j\hat{\omega}k} \quad (6.4)$$

Διάφορες σημαντικές παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν σχετικά με τις Σχέσεις (6.2) και (6.4). Καταρχήν, η ακριβής εξήγηση της Σχέσης (6.2) είναι η ακόλουθη: Όταν η είσοδος είναι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου, η έξοδος ενός ΓΧΑ FIR φίλτρου είναι επίσης ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου με διαφορετικό μιγαδικό πλάτος, αλλά την ίδια συχνότητα $\hat{\omega}$. Η απόκριση συχνότητας πολλαπλασιάζει το σήμα και συνεπώς αλλάζει το μιγαδικό πλάτος. Ενώ είναι δελεαστικό να εκφράσουμε το παραπάνω με τη μαθηματική έκφραση $y[n] = H(e^{j\hat{\omega}})x[n]$, προτείνουμε να μη γίνεται ποτέ αυτό διότι είναι πολύ εύκολο να ξεχάσουμε ότι η μαθηματική έκφραση αυτή ισχύει *μόνο* για μιγαδικά εκθετικά σήματα συχνότητας $\hat{\omega}$. Η έκφραση $y[n] = H(e^{j\hat{\omega}})x[n]$ δεν έχει κανένα νόημα για κανένα άλλο σήμα, εκτός από τα σήματα της μορφής $x[n] = Ae^{j\phi} e^{j\hat{\omega}n}$. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να κατανοήσουμε αυτό το σημείο.

Ένα δεύτερο σημαντικό σημείο είναι ότι η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}})$ είναι μιγαδική, επομένως μπορεί

να εκφραστεί είτε ως $H(e^{j\hat{\omega}}) = |H(e^{j\hat{\omega}})|e^{j\angle H(e^{j\hat{\omega}})}$, είτε ως $H(e^{j\hat{\omega}}) = \Re\{H(e^{j\hat{\omega}})\} + j\Im\{H(e^{j\hat{\omega}})\}$. Ο τρόπος με τον οποίο επηρεάζεται το μέτρο και η φάση του μιγαδικού εκθετικού σήματος εισόδου από το ΓΧΑ σύστημα, καθορίζεται πλήρως από τη συνάρτηση απόκρισης συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}})$. Συγκεκριμένα, αν η είσοδος είναι η $x[n] = Ae^{j\phi}e^{j\hat{\omega}n}$, τότε χρησιμοποιώντας την πολική μορφή αναπαράστασης της $H(e^{j\hat{\omega}})$, παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} y[n] &= |H(e^{j\hat{\omega}})|e^{j\angle H(e^{j\hat{\omega}})} \cdot Ae^{j\phi}e^{j\hat{\omega}n} \\ &= (|H(e^{j\hat{\omega}})|A) \cdot e^{j(\angle H(e^{j\hat{\omega}})+\phi)}e^{j\hat{\omega}n} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Η μορφή του μέτρου και της φάσης της απόκρισης συχνότητας είναι πιο εύχρηστη, αφού ο πολλαπλασιασμός εκτελείται πιο εύκολα στην πολική μορφή αναπαράστασης. Η φάση της απόκρισης συχνότητας απλά προστίθεται στη φάση της εισόδου, παράγοντας έτσι μια πρόσθετη μετατόπιση φάσης στο μιγαδικό εκθετικό σήμα. Αφού το μέτρο της απόκρισης συχνότητας πολλαπλασιάζεται με το μέτρο του μιγαδικού εκθετικού σήματος, αυτό το τμήμα, της απόκρισης συχνότητας, ελέγχει το μέγεθος της εξόδου. Άρα, το $|H(e^{j\hat{\omega}})|$ αναφέρεται επίσης και ως κέρδος του συστήματος.



Παράδειγμα 6-1: Απόκριση Συχνότητας

Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα για το οποίο οι συντελεστές της εξίσωσης διαφορών είναι $\{b_k\} = \{1, 2, 1\}$. Αντικαθιστώντας στη Σχέση (6.3) παίρνουμε:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = 1 + 2e^{-j\hat{\omega}} + e^{-j2\hat{\omega}}$$

Για να πάρουμε τους τύπους για το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας αυτού του FIR φίλτρου, χειριζόμαστε την παραπάνω εξίσωση ως εξής:

$$\begin{aligned} H(e^{j\hat{\omega}}) &= 1 + 2e^{-j\hat{\omega}} + e^{-j2\hat{\omega}} \\ &= e^{-j\hat{\omega}}(e^{j\hat{\omega}} + 2 + e^{-j\hat{\omega}}) \\ &= e^{-j\hat{\omega}}(2 + 2\cos\hat{\omega}) \end{aligned}$$

Αφού, $(2 + 2\cos\hat{\omega}) \geq 0$ για συχνότητες $-\pi < \hat{\omega} \leq \pi$, το μέτρο είναι $|H(e^{j\hat{\omega}})| = (2 + 2\cos\hat{\omega})$ και η φάση είναι $\angle H(e^{j\hat{\omega}}) = -\hat{\omega}$. ■



Παράδειγμα 6-2: Μιγαδική Εκθετική Είσοδος

Θεωρήστε τη μιγαδική είσοδο $x[n] = 2e^{j\pi/4}e^{j\pi n/3}$. Αν αυτό το σήμα εφαρμοστεί στην είσοδο του συστήματος του Παραδείγματος 6-1, τότε $|H(e^{j\pi/3})| = 2 + 2\cos(\pi/3) = 3$ και $\angle H(e^{j\pi/3})$. Επομένως, η έξοδος του συστήματος, για τη δοσμένη είσοδο, θα είναι:

$$\begin{aligned} y[n] &= 3e^{-j\pi/3} \cdot 2e^{j\pi/4}e^{j\pi n/3} \\ &= (3 \cdot 2) \cdot e^{(j\pi/4 - j\pi/3)}e^{j\pi n/3} \\ &= 6e^{-j\pi/12}e^{j\pi n/3} = 6e^{j\pi/4}e^{j\pi(n-1)/3} \end{aligned}$$

Άρα, για αυτό το σύστημα και τη δοσμένη είσοδο $x[n]$, η έξοδος είναι ίση με την είσοδο πολλαπλασιασμένη επί 3 και η μετατόπιση φάσης αντιστοιχεί σε μια καθυστέρηση ενός δείγματος. ■



Άσκηση 6.1: Όταν οι συντελεστές της εξίσωσης διαφορών είναι συμμετρικοί ($b_0 = b_M, b_1 = b_{M-1}$, κ.λ.π.), μπορούμε να χειριστούμε την απόκριση συχνότητας όπως στο Παράδειγμα 6-1. Ακολουθώντας τους χειρισμούς εκείνου του παραδείγματος, δείξτε ότι η απόκριση συχνότητας ενός FIR φίλτρου με συντελεστές $\{b_k\} = \{1, -2, 4 - 2, 1\}$ μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = [4 - 4\cos(\hat{\omega}) + 2\cos(2\hat{\omega})]e^{-j2\hat{\omega}}$$

6-2 Υπέρθωση και Απόκριση Συχνότητας

Η αρχή της υπέρθωσης βοηθάει πολύ στην εύρεση της εξόδου ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος όταν η είσοδος είναι ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών

$$\begin{aligned}
y[n] &= H(e^{j0})A_0e^{j0n} + H(e^{j\hat{\omega}_1})\frac{A_1}{2}e^{j\phi_1}e^{j\hat{\omega}_1n} + H^*(e^{j\hat{\omega}_1})\frac{A_1}{2}e^{-j\phi_1}e^{-j\hat{\omega}_1n} \\
&= H(e^{j0})A_0 + |H(e^{j\hat{\omega}_1})|e^{j\angle H(e^{j\hat{\omega}_1})}\frac{A_1}{2}e^{j\phi_1}e^{j\hat{\omega}_1n} + |H(e^{j\hat{\omega}_1})|e^{-j\angle H(e^{j\hat{\omega}_1})}\frac{A_1}{2}e^{-j\phi_1}e^{-j\hat{\omega}_1n} \\
&= H(e^{j0})A_0 + |H(e^{j\hat{\omega}_1})|\frac{A_1}{2}e^{j(\hat{\omega}_1n+\phi_1+\angle H(e^{j\hat{\omega}_1}))} + |H(e^{j\hat{\omega}_1})|\frac{A_1}{2}e^{-j(\hat{\omega}_1n+\phi_1+\angle H(e^{j\hat{\omega}_1}))} \\
&= H(e^{j0})A_0 + |H(e^{j\hat{\omega}_1})|A_1 \cos(\hat{\omega}_1n + \phi_1 + \angle H(e^{j\hat{\omega}_1}))
\end{aligned} \tag{6.6}$$

σημάτων. Για το λόγο αυτό η απόκριση συχνότητας είναι τόσο σημαντική στην ανάλυση και στον σχεδιασμό των ΓΧΑ συστημάτων. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι το άθροισμα ενός συνημιτονοειδούς σήματος συγκεκριμένης κανονικοποιημένης συχνότητας $\hat{\omega}_1$ και μια συνεχούς συνιστώσας,

$$x[n] = A_0 + A_1 \cos(\hat{\omega}_1n + \phi_1)$$

Αν αναπαράστησουμε το σήμα με μιγαδικά εκθετικά σήματα, το σήμα απαρτιζείται από τρία μιγαδικά εκθετικά σήματα,

$$x[n] = A_0e^{j0n} + \frac{A_1}{2}e^{j\phi_1}e^{j\hat{\omega}_1n} + \frac{A_1}{2}e^{-j\phi_1}e^{-j\hat{\omega}_1n}$$

με συχνότητες $\hat{\omega} = 0$, $\hat{\omega}_1$, και $-\hat{\omega}_1$. Από την υπέρθεση, μπορούμε να καθορίσουμε την έξοδο που παράγεται από κάθε όρο ξεχωριστά και στη συνέχεια να τις προσθέσουμε για να πάρουμε την έξοδο $y[n]$ που αντιστοιχεί στην $x[n]$. Επειδή οι όροι του σήματος εισόδου είναι όλοι μιγαδικά εκθετικά σήματα, είναι εύκολο να βρούμε τις αντίστοιχες εξόδους τους αν γνωρίζουμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος. Απλά πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο με την $H(e^{j\hat{\omega}})$ υπολογισμένη στην αντίστοιχη συχνότητα, δηλαδή:

$$\begin{aligned}
y[n] &= H(e^{j0})A_0e^{j0n} \\
&+ H(e^{j\hat{\omega}_1})\frac{A_1}{2}e^{j\phi_1}e^{j\hat{\omega}_1n} + H(e^{-j\hat{\omega}_1})\frac{A_1}{2}e^{-j\phi_1}e^{-j\hat{\omega}_1n}
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ένα σταθερό σήμα είναι ένα μιγαδικό εκθετικό με συχνότητα

$\hat{\omega} = 0$. Αν εκφράσουμε την $H(e^{j\hat{\omega}_1})$ ως $H(e^{j\hat{\omega}_1}) = |H(e^{j\hat{\omega}_1})|e^{j\angle H(e^{j\hat{\omega}_1})}$, τότε τα αλγεβρικά βήματα¹ στην Σχέση (6.6) δείχνουν ότι η $y[n]$ μπορεί τελικά να εκφραστεί σαν ένα συνημιτονικό σήμα. Παρατηρήστε ότι η αλλαγή του μέτρου και της φάσης του συνημιτονικού σήματος εισόδου προκύπτει από την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}})$ στις θετικές συχνότητες, αλλά παρατηρήστε επίσης ότι ήταν σημαντικό να εκφράσουμε τη $x[n]$ ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε την απόκριση συχνότητας για να βρούμε την έξοδο που οφείλεται σε κάθε όρο χωριστά.



Παράδειγμα 6-3: Συνημιτονική Είσοδος

Για το FIR φίλτρο με συντελεστές $\{b_k\} = \{1, 2, 1\}$, βρείτε την έξοδο όταν η είσοδος είναι:

$$x[n] = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{2}\right)$$

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος, που προσδιορίστηκε στο Παράδειγμα 6-1, είναι:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = (2 + 2 \cos \hat{\omega})e^{-j\hat{\omega}}$$

Παρατηρήστε ότι $H(e^{-j\hat{\omega}}) = H^*(e^{j\hat{\omega}})$, δηλαδή, το $H(e^{j\hat{\omega}})$ υπακούει στη συζυγή συμμετρία. Η λύση του προβλήματος

¹Υποθέτουμε ότι η $H(e^{j\hat{\omega}})$ έχει την ιδιότητα της *συζυγούς συμμετρίας* $H(e^{-j\hat{\omega}}) = H^*(e^{j\hat{\omega}})$, η οποία ισχύει πάντα όταν οι συντελεστές του φίλτρου είναι πραγματικοί (δες Ενότητα 6-4.3).

απαιτεί μόνο τον υπολογισμό της $H(e^{j\hat{\omega}})$ στη συχνότητα $\hat{\omega} = \pi/3$:

$$\begin{aligned} H(e^{j\pi/3}) &= e^{-j\pi/3} (2 + 2\cos(\pi/3)) \\ &= e^{-j\pi/3} (2 + 2(\frac{1}{2})) = 3e^{-j\pi/3} \end{aligned}$$

Επομένως, το μέτρο είναι $|H(e^{j\pi/3})| = 3$ και η φάση είναι $\angle H(e^{j\pi/3}) = -\pi/3$, άρα η έξοδος είναι:

$$\begin{aligned} y[n] &= (3)(2) \cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 6 \cos\left(\frac{\pi}{3}(n-1) - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι το μέτρο της απόκρισης συχνότητας πολλαπλασιάζει το πλάτος του συνημιτονικού σήματος και η φάση της απόκρισης συχνότητας προστίθεται στη φάση του συνημιτονικού σήματος. Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε επίσης να λυθεί με τη Γραφική Διεπαφή Χρήστη DLTI του Matlab. ■



Επίδειξη: Γραφική Διεπαφή DLTI

Αν το σήμα εισόδου αποτελείται από πολλά μιγαδικά εκθετικά σήματα, η απόκριση συχνότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε χωριστά την έξοδο του κάθε όρου και να προσθέσουμε τα επιμέρους αποτελέσματα για να καθορίσουμε τη συνολική έξοδο. Αυτή είναι ουσιαστικά η εφαρμογή της αρχής της υπέρθεσης στην πράξη. Αν μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα σήμα με μιγαδικούς εκθετικούς όρους, η απόκριση συχνότητας αποτελεί ένα πολύ απλό και διαισθητικό μέσο για να καθορίσουμε την επίδραση ενός ΓΧΑ συστήματος στο σήμα εισόδου. Για παράδειγμα, αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι ένα πραγματικό σήμα το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$\begin{aligned} x[n] &= X_0 + \sum_{k=1}^N \left(\frac{X_k}{2} e^{j\hat{\omega}_k n} + \frac{X_k^*}{2} e^{-j\hat{\omega}_k n} \right) \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^N |X_k| \cos(\hat{\omega}_k n + \angle X_k) \end{aligned}$$

τότε προκύπτει ότι αν $H(e^{-j\hat{\omega}}) = H^*(e^{j\hat{\omega}})$, η αντίστοιχη έξοδος είναι η $y[n]$ της Σχέσης (6.7).

Αυτό σημαίνει ότι, κάθε μιγαδικός εκθετικός όρος ξεχωριστά τροποποιείται από την απόκριση συχνότητας υπολογισμένη στη συχνότητα αυτού του όρου.



Παράδειγμα 6-4: Τρεις Ημιτονοειδής Είσοδοι

Για το FIR φίλτρο με συντελεστές $\{b_k\} = \{1, 2, 1\}$, να βρείτε την έξοδο όταν η είσοδος είναι

$$x[n] = 4 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cos\left(\frac{7\pi}{8}n\right) \quad (6.8)$$

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος υπολογίστηκε στο Παράδειγμα 6-1 και είναι η ίδια απόκριση συχνότητας με αυτή του Παραδείγματος 6-3. Η είσοδος στο παράδειγμα αυτό διαφοροποιείται από αυτή του παραδείγματος 6-3 με την πρόσθεση μιας σταθεράς (DC) και ενός πρόσθετου συνημιτονικού σήματος συχνότητας $7\pi/8$. Η λύση χρησιμοποιώντας την αρχή της υπέρθεσης επομένως απαιτεί να υπολογίσουμε την $H(e^{j\hat{\omega}})$ στις συχνότητες 0, $\pi/3$ και $7\pi/8$. Άρα

$$H(e^{j0}) = 4$$

$$H(e^{j\pi/3}) = 3e^{-j\pi/3}$$

$$H(e^{j7\pi/8}) = 0.1522e^{-j7\pi/8}$$

Άρα η έξοδος είναι

$$\begin{aligned} y[n] &= 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \frac{7\pi}{8} \cdot 3 \cos\left(\frac{7\pi}{8}n - \frac{7\pi}{8}\right) \\ &= 16 + 9 \cos\left(\frac{\pi}{3}(n-1) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + 0.4567 \cos\left(\frac{7\pi}{8}(n-1)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y[n] &= H(e^{j0})X_0 + \sum_{k=1}^N \left(H(e^{j\hat{\omega}_k}) \frac{X_k}{2} e^{j\hat{\omega}_k n} + H(e^{-j\hat{\omega}_k}) \frac{X_k^*}{2} e^{-j\hat{\omega}_k n} \right) \\
 &= H(e^{j0})X_0 + \sum_{k=1}^N |H(e^{j\hat{\omega}_k})| |X_k| \cos(\hat{\omega}_k n + \angle X_k + \angle H(e^{j\hat{\omega}_k}))
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

Παρατηρήστε επίσης ότι στη περίπτωση αυτή, ο σταθερός όρος πολλαπλασιάζεται επί 4, ο όρος με συχνότητα $\hat{\omega} = \pi/3$ πολλαπλασιάζεται επί 3, αλλά ο όρος με συχνότητα $\hat{\omega} = 7\pi/8$ πολλαπλασιάζεται επί 0.1522. Επειδή το μέτρο της απόκρισης συχνότητας (κέρδος) είναι τόσο μικρό στη συχνότητα $\hat{\omega} = 7\pi/8$, ο όρος αυτής της συχνότητας ουσιαστικά *φιλτράρεται* από το σήμα εισόδου. ■

Τα παραδείγματα αυτής της ενότητας χρησιμοποιούν μια προσέγγιση για τη λύση προβλημάτων η οποία ονομάζεται συχνά και προσέγγιση του *πεδίου συχνότητας*. Όπως δείχνουν τα παραδείγματα αυτά, όταν η είσοδος είναι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα δε χρειάζεται να ασχοληθούμε με την περιγραφή του συστήματος στο *πεδίο του χρόνου* (δηλαδή, με την εξίσωση διαφορών ή την κρουστική απόκριση). Μπορούμε να δουλέψουμε αποκλειστικά με την περιγραφή του συστήματος στο πεδίο της συχνότητας (δηλαδή, την απόκριση συχνότητας), αν σκεφτούμε πως επηρεάζεται το φάσμα του σήματος από το σύστημα αντί να λάβουμε υπόψη τι συμβαίνει ξεχωριστά σε κάθε δείγμα του σήματος εισόδου. Θα έχουμε την ευκαιρία να “επισκεφθούμε” πολλές φορές και το πεδίο του χρόνου και το πεδίο της συχνότητας στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου.

Επίδειξη: FIR Συστήματα

6-3 Μεταβατική Απόκριση και Απόκριση Μόνιμης Κατάστασης

Στην Ενότητα 6-1, δείξαμε ότι αν η είσοδος είναι

$$x[n] = X e^{j\hat{\omega}n} \quad -\infty < n < \infty \tag{6.9}$$

όπου $X = A e^{j\phi}$, τότε η έξοδος του ΓΧΑ FIR συστήματος είναι

$$y[n] = H(e^{j\hat{\omega}}) X e^{j\hat{\omega}n} \quad -\infty < n < \infty \tag{6.10}$$

όπου

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} \tag{6.11}$$

Στη Σχέση (6.9), η συνθήκη ότι το σήμα $x[n]$ θα πρέπει να είναι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα που υπάρχει για κάθε τιμή του n στο διάστημα $-\infty < n < \infty$ είναι σημαντική. Χωρίς αυτή τη συνθήκη, δεν θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο απλό αποτέλεσμα της Σχέσης (6.10). Ωστόσο, η συνθήκη αυτή φαίνεται να είναι μη πρακτική. Σε μια πρακτική υλοποίηση δεν θα μπορούσαμε να έχουμε πραγματικά σήματα εισόδου τα οποία υπάρχουν από το $-\infty$! Ευτυχώς, μπορούμε να αποφύγουμε αυτή τη συνθήκη και συγχρόνως να μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα πλεονεκτήματα της Σχέσης (6.10). Για να δούμε πώς γίνεται αυτό, ας θεωρήσουμε το ακόλουθο “ξαφνικά γεννόμενο” μιγαδικό εκθετικό σήμα που αρχίζει τη χρονική στιγμή $n = 0$ και παίρνει μη μηδενικές τιμές μόνο στο διάστημα $0 \leq n$:

$$x[n] = X e^{j\hat{\omega}n} u[n] = \begin{cases} X e^{j\hat{\omega}n} & 0 \leq n \\ 0 & n < 0 \end{cases} \tag{6.12}$$

Παρατηρήστε ότι ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού εκθετικού σήματος με την μοναδιαία βηματική ακολουθία είναι ένας κατάλληλος τρόπος για να δημιουργήσουμε ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα όπως το παραπάνω. Για το σήμα αυτό, η έξοδος του ΓΧΑ FIR συστήματος είναι:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k X e^{j\hat{\omega}(n-k)} u[n-k] \quad (6.13)$$

Παίρνοντας υπόψη μας ότι $u[n-k] = 0$ για $k > n$, μπορούμε να γράψουμε το άθροισμα στη Σχέση (6.13) ως ακολούθως

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^n b_k e^{-j\hat{\omega}k} \right) X e^{j\hat{\omega}n} & 0 \leq n < M \\ \left(\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} \right) X e^{j\hat{\omega}n} & M \leq n \end{cases} \quad (6.14)$$

Αυτό σημαίνει, ότι όταν εφαρμόζουμε στην είσοδο του συστήματος ξαφνικά ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα, μπορούμε να ορίσουμε την έξοδο του συστήματος σε τρεις διαφορετικές περιοχές. Στην πρώτη περιοχή, $n < 0$, η είσοδος είναι μηδενική και επομένως και η έξοδος του συστήματος θα είναι επίσης μηδέν. Η δεύτερη περιοχή είναι η μεταβατική περιοχή της οποίας η διάρκεια είναι M δείγματα (δηλαδή, η τάξη του FIR συστήματος). Στην περιοχή αυτή, ο μιγαδικός πολλαπλασιαστής $e^{j\hat{\omega}n}$ εξαρτάται από την τιμή του n . Συχνά, η περιοχή αυτή καλείται **μεταβατικό** τμήμα της εξόδου. Στην τρίτη περιοχή, $M \leq n$, η έξοδος ταυτίζεται με την έξοδο που θα είχε το σύστημα αν η είσοδος είχε ορισθεί για κάθε τιμή του n . Επομένως,

$$y[n] = H(e^{j\hat{\omega}}) X e^{j\hat{\omega}n} \quad M \leq n \quad (6.15)$$

Το τμήμα αυτό της εξόδου ονομάζεται τμήμα **μόνιμης-κατάστασης**. Αν και έχουμε ορίσει ότι το τμήμα της μόνιμης κατάστασης της εξόδου του συστήματος υπάρχει για κάθε $n \geq M$, θα πρέπει να τονίσουμε στο σημείο αυτό ότι η

Σχέση (6.15) ισχύει μόνο αν η είσοδος είναι η $X e^{j\hat{\omega}n}$. Αν, κάποια χρονική στιγμή $n > M$, το σήμα εισόδου αλλάξει συχνότητα ή μηδενιστεί, θα έχουμε την εμφάνιση μιας άλλης μεταβατικής περιοχής.



Παράδειγμα 6-5: Μόνιμη-Κατάσταση Εξόδου

Θα διασαφηνίσουμε την συζήτηση που κάναμε παραπάνω με την παράθεση ενός απλού παραδείγματος. Θεωρήστε το σύστημα της Άσκησης 6.1, του οποίου οι συντελεστές είναι η ακολουθία $\{b_k\} = \{1, -2, 4, -2, 1\}$. Η απόκριση συχνότητας αυτού του συστήματος είναι

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = [4 - 4 \cos(\hat{\omega}) + 2 \cos(2\hat{\omega})] e^{-j2\hat{\omega}}$$

Αν εφαρμόσουμε αφινιδίως στην είσοδο του συστήματος το συνημιτονικό σήμα

$$x[n] = \cos(0.2\pi n - \pi) u[n]$$

το οποίο μπορούμε να το παραστήσουμε σαν το άθροισμα δύο αφινιδίως εφαρμοζόμενων μιγαδικών εκθετικών σημάτων. Επομένως, η απόκριση συχνότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί όπως είπαμε στην Ενότητα 6-2 για να υπολογίσουμε την έξοδο μόνιμης κατάστασης. Αφού η $H(e^{j\hat{\omega}})$ στο $\hat{\omega} = 0.2\pi$ είναι

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = [4 - 4 \cos(0.2\pi) + 2 \cos(0.4\pi)] e^{-j2(0.2\pi)},$$

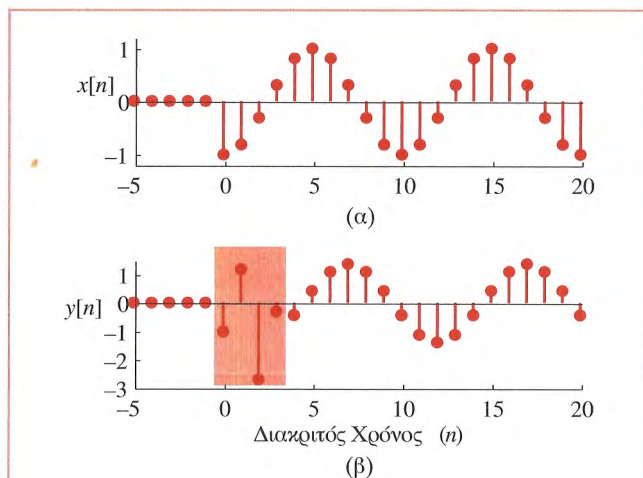
και $M = 4$, η έξοδος μόνιμης-κατάστασης είναι η ακόλουθη

$$y[n] = 1.382 \cos(0.2\pi(n-2) - \pi) \quad 4 \leq n$$

Η απόκριση συχνότητας μας επέτρεψε να βρούμε μια απλή έκφραση της εξόδου του συστήματος η οποία ισχύει παντού στην περιοχή μόνιμης κατάστασης. Αν επιθυμούμε να βρούμε τις τιμές της εξόδου στην μεταβατική περιοχή, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση διαφορών του συστήματος.

Τα σήματα εισόδου και εξόδου αυτού του παραδείγματος φαίνονται στο Σχήμα 6-1. Αφού για το σύστημα έχουμε ότι

$M = 4$, η μεταβατική περιοχή αντιστοιχεί στο διάστημα $0 \leq n \leq 3$ (σκιασμένη περιοχή) και η περιοχή μόνιμης-κατάστασης αντιστοιχεί στο διάστημα $n \geq 4$. Παρατηρήστε επίσης ότι το σήμα εξόδου στη περιοχή μόνιμης κατάστασης είναι απλώς μια σταθμισμένη και καθυστερημένη (κατά 2-δείγματα) εκδοχή του σήματος εισόδου. ■



Σχήμα 6-1: (α) Σήμα εισόδου $x[n] = \cos(0.2\pi n - \pi)u[n]$ και (β) σήμα εξόδου $y[n]$ του FIR συστήματος με συντελεστές $\{1, -2, 4, -2, 1\}$. Η μεταβατική περιοχή είναι η σκιασμένη περιοχή στο (β) (Παρατηρήστε την διαφορετική βαθμονόμηση των κατακόρυφων αξόνων).

6-4 Ιδιότητες της Απόκρισης Συχνότητας

Η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας $H(e^{j\omega})$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση της κανονικοποιημένης μεταβλητής συχνότητας ω . Η συνάρτηση αυτή έχει ενδιαφέρουσες ιδιότητες, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για απλοποίηση του προβλήματος ανάλυσης.

6-4.1 Σχέση της Κρουστικής Απόκρισης και της Εξίσωσης Διαφορών

Μπορούμε να υπολογίσουμε την $H(e^{j\omega})$ απευθείας από τους συντελεστές του φίλτρου $\{b_k\}$. Πράγματι, αν συγκρίνουμε την Σχέση (6.1) με τη Σχέση (6.4), βλέπουμε ότι δεδομένης της εξίσωσης διαφορών, είναι εύκολο να εκφράσουμε τη $H(e^{j\omega})$ παρατηρώντας ότι κάθε όρος $b_k x[n-k]$ στη Σχέση (6.1) αντιστοιχεί σε ένα όρο $b_k e^{-j\omega k}$ ή $h[k]e^{-j\omega k}$ της Σχέσης (6.4) και αντίστροφα. Έτσι, η $H(e^{j\omega})$ μπορεί να οριστεί απευθείας από την κρουστική απόκριση, αφού η κρουστική απόκριση του FIR συστήματος αποτελείται από την ακολουθία των συντελεστών του φίλτρου, δηλαδή $h[k] = b_k$ για $k = 0, 1, \dots, M$. Για να τονίσουμε αυτό το σημείο μπορούμε να γράψουμε την αντιστοιχία:

$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο Χρόνου} & \leftrightarrow & \text{Πεδίο Συχνότητας} \\ h[n] = \sum_{k=0}^M h[k]\delta[n-k] & \leftrightarrow & H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M h[k]e^{-j\omega k} \end{array}$$

Για την περίπτωση των FIR φίλτρων, η διαδικασία της μετάβασης από την εξίσωση διαφορών ή την κρουστική απόκριση στην απόκριση συχνότητας είναι πολύ απλή. Είναι επίσης πολύ εύκολο να μεταβούμε από την απόκριση συχνότητας στην εξίσωση διαφορών ή στην κρουστική απόκριση του φίλτρου εκφράζοντας την $H(e^{j\omega})$ σε μια μορφή δυνάμεων του $e^{-j\omega}$. Τα σημεία αυτά παρουσιάζονται και επεξηγούνται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 6-6: $h[n] \leftrightarrow H(e^{j\omega})$

Θεωρήστε το FIR φίλτρο που ορίζεται από την ακόλουθη κρουστική απόκριση:

$$h[n] = -\delta[n] + 3\delta[n-1] - \delta[n-2]$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία των συντελεστών του φίλτρου είναι $\{b_k\} = \{-1, 3, -1\}$ και επομένως η εξίσωση

διαφορών που αντιστοιχεί σ' αυτή την κρουστική απόκριση είναι η:

$$y[n] = -x[n] + 3x[n-1] - x[n-2]$$

και η απόκριση συχνότητας του συστήματος θα είναι:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = -1 + 3e^{-j\hat{\omega}} - e^{-j2\hat{\omega}}$$

Παράδειγμα 6-7: Η Εξίσωση Διαφορών από την $H(e^{j\hat{\omega}})$

Υποθέστε ότι η απόκριση συχνότητας δίνεται από τη σχέση

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = e^{-j\hat{\omega}} (3 - 2 \cos \hat{\omega})$$

Αφού $\cos \hat{\omega} = \frac{1}{2}(e^{j\hat{\omega}} + e^{-j\hat{\omega}})$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} H(e^{j\hat{\omega}}) &= e^{-j\hat{\omega}} \left[3 - 2 \left(\frac{e^{j\hat{\omega}} + e^{-j\hat{\omega}}}{2} \right) \right] \\ &= -1 + 3e^{-j\hat{\omega}} - e^{-j2\hat{\omega}} \end{aligned}$$

που αντιστοιχεί στην ακόλουθη εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = -x[n] + 3x[n-1] - x[n-2]$$

Επομένως, εκφράζοντας την $H(e^{j\hat{\omega}})$ σε μορφή δυνάμεων του $e^{-j\hat{\omega}}$, είναι πολύ εύκολο να ορισθεί η κρουστική απόκριση.



Άσκηση 6.2:

Χρησιμοποιήστε την κατάλληλη αντίστροφη σχέση του Euler για να βρείτε την κρουστική απόκριση και στην συνέχεια την εξίσωση διαφορών που αντιστοιχούν στην απόκριση συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}}) = 2j \sin(\hat{\omega}/2)e^{-j\hat{\omega}/2}$.

6-4.2 Περιοδικότητα της $H(e^{j\hat{\omega}})$

Μια σημαντική ιδιότητα των ΓΧΑ συστημάτων διακριτικού χρόνου είναι ότι η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}})$ είναι πάντα μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π . Αυτό μπορούμε να το δούμε αν θεωρήσουμε μια συχνότητα $\hat{\omega} + 2\pi$, με $\hat{\omega}$ μια οποιαδήποτε συχνότητα. Πράγματι, αντικαθιστώντας στη Σχέση (6.3) παίρνουμε

$$\begin{aligned} H(e^{j(\hat{\omega}+2\pi)}) &= \sum_{k=0}^M b_k e^{-j(\hat{\omega}+2\pi)k} \\ &= \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} e^{-j2\pi k} = H(e^{j\hat{\omega}}) \end{aligned}$$

αφού $e^{-j2\pi k} = 1$ όταν k είναι ακέραιος. Το γεγονός ότι η $H(e^{j\hat{\omega}})$ έχει αυτή την ιδιότητα δεν θα πρέπει να μας εκπλήσει, αφού, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 4, μια αλλαγή κατά 2π στην συχνότητα του σήματος εισόδου δεν εντοπίζεται, δηλαδή:

$$x[n] = X e^{j(\hat{\omega}+2\pi)n} = X e^{j\hat{\omega}n} e^{j2\pi n} = X e^{j\hat{\omega}n}$$

Δηλαδή, δύο μιγαδικά εκθετικά σήματα με συχνότητες που διαφέρουν κατά 2π δεν μπορούν να διακριθούν μεταξύ τους μόνο από τα δείγματά τους, επομένως δεν υπάρχει λόγος να περιμένουμε ένα σύστημα διακριτού χρόνου να συμπεριφέρεται διαφορετικά για δύο τέτοιες συχνότητες. Γι' αυτό το λόγο, αρκεί πάντα να καθορίζουμε την απόκριση συχνότητας μόνο για το διάστημα μιας περιόδου, π.χ. στο διάστημα, $-\pi < \hat{\omega} \leq \pi$.

6-4.3 Συζυγής Συμμετρία

Η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}})$ είναι μιγαδική, αλλά συνήθως έχει μια συμμετρία στο μέτρο και τη φάση της η οποία μας επιτρέπει να συγκεντρωθούμε μόνο στο μισό της περιόδου όταν κάνουμε την γραφική της παράσταση. Αυτή είναι η ιδιότητα της **συζυγούς συμμετρίας**.

$$H(e^{-j\hat{\omega}}) = H^*(e^{j\hat{\omega}}) \quad (6.16)$$

η οποία ισχύει όταν οι συντελεστές του φίλτρου είναι πραγματικοί έτσι ώστε $b_k = b_k^*$ (ισοδύναμα $h[k] = h^*[k]$). Μπορούμε να αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα για την περίπτωση των FIR συστημάτων ως εξής:

$$\begin{aligned} H^*(e^{j\hat{\omega}}) &= \left(\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} \right)^* \\ &= \sum_{k=0}^M b_k^* e^{+j\hat{\omega}k} \\ &= \sum_{k=0}^M b_k e^{-j(-\hat{\omega})k} = H(e^{-j\hat{\omega}}) \end{aligned}$$

Η ιδιότητα της συζυγούς συμμετρίας προϋποθέτει ότι η συνάρτηση μέτρου είναι άρτια συνάρτηση του $\hat{\omega}$ και το φανταστικό μέρος είναι περιττή συνάρτηση του $\hat{\omega}$, δηλαδή,

$$\begin{aligned} |H(e^{-j\hat{\omega}})| &= |H(e^{j\hat{\omega}})| \\ \angle H(e^{-j\hat{\omega}}) &= -\angle H(e^{j\hat{\omega}}) \end{aligned}$$

Ομοίως, το πραγματικό μέρος είναι άρτια συνάρτηση του $\hat{\omega}$ και το φανταστικό μέρος είναι περιττή συνάρτηση $\hat{\omega}$, δηλαδή,

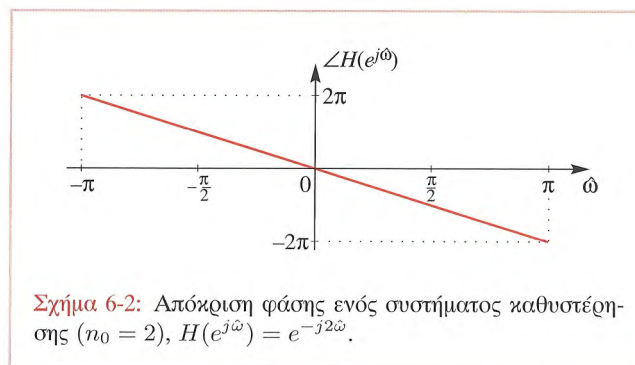
$$\begin{aligned} \Re\{H(e^{-j\hat{\omega}})\} &= \Re\{H(e^{j\hat{\omega}})\} \\ \Im\{H(e^{-j\hat{\omega}})\} &= -\Im\{H(e^{j\hat{\omega}})\} \end{aligned}$$

Για αυτούς τους λόγους, τα διαγράμματα της απόκρισης συχνότητας συχνά παρουσιάζονται μόνο στο μισό της περιόδου, $0 \leq \hat{\omega} \leq \pi$, αφού η περιοχή που αντιστοιχεί στις αρνητικές συχνότητες μπορεί να κατασκευαστεί βάσει συμμετρίας. Οι παραπάνω συμμετρίες παρουσιάζονται στις γραφικές παραστάσεις της Ενότητας 6-5.



Άσκηση 6.3:

Αποδείξτε ότι αν η απόκριση συχνότητας ικανοποιεί την ιδιότητα της συζυγούς συμμετρίας, το μέτρο της είναι άρτια συνάρτηση του $\hat{\omega}$ και η φάση της είναι περιττή συνάρτηση του $\hat{\omega}$.



6-5 Γραφική Παράσταση της Απόκρισης Συχνότητας

Δύο σημαντικά σημεία πρέπει να τονιστούν για την απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος. Το πρώτο είναι ότι για ένα δοσμένο σύστημα, η απόκριση συχνότητας μεταβάλλεται με τη συχνότητα, έτσι ώστε το σύστημα να συμπεριφέρεται διαφορετικά, σε ημίτονα διαφορετικών συχνοτήτων. Το δεύτερο σημαντικό σημείο είναι ότι με κατάλληλη επιλογή των συντελεστών b_k , μπορούμε να πραγματοποιήσουμε μια μεγάλη ποικιλία διαφορετικών αποκρίσεων συχνότητας. Για να οπτικοποιήσουμε τις μεταβολές της απόκρισης συχνότητας σε σχέση με τη συχνότητα, είναι χρήσιμο να κάνουμε την γραφική παράσταση της $H(e^{j\hat{\omega}})$ συναρτήσει της $\hat{\omega}$. Θα δούμε ότι η γραφική παράσταση μας επιτρέπει να δούμε, με μια ματιά, τον τρόπο με τον οποίο επιδρά το σύστημα στα μιγαδικά εκθετικά σήματα και στα ημίτονα διαφορετικών συχνοτήτων. Υπάρχουν αρκετά παραδείγματα σε αυτή την ενότητα για να παρουσιάσουν την αξία των γραφικών παραστάσεων της απόκρισης συχνότητας.

6-5.1 Σύστημα Καθυστέρησης

Το σύστημα καθυστέρησης είναι ένα απλό FIR φίλτρο που δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = x[n - n_0]$$

Έχει μόνο έναν μη μηδενικό συντελεστή, $b_{n_0} = 1$, οπότε η απόκριση συχνότητας του θα είναι:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = e^{-j\hat{\omega}n_0} \quad (6.17)$$

Για το παραπάνω φίλτρο, είναι εύκολο να κάνουμε τη γραφική παράσταση της απόκρισης συχνότητάς του. Η απόκριση μέτρου είναι ίση με τη μονάδα για όλες τις συχνότητες και η φάση δίνεται από την εξίσωση μιας ευθείας με κλίση ίση με $-n_0$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6-2. Αποτέλεσμα των παραπάνω είναι ότι μπορούμε σε όλα τα φίλτρα να συσχετίσουμε την ιδιότητα της γραμμικής φάσης με τη χρονική καθυστέρηση. Αφού η χρονική καθυστέρηση επηρεάζει, με προβλέψιμο τρόπο, το σήμα, συχνά θεωρούμε τη γραμμική φάση ως την ιδανική απόκριση φάσης.

6-5.2 Σύστημα Διαφορών Πρώτης Τάξης

Ως ένα άλλο απλό παράδειγμα, θεωρήστε το σύστημα διαφορών πρώτης τάξης:

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Η απόκριση συχνότητας αυτού του ΓΧΑ συστήματος είναι

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = 1 - e^{-j\hat{\omega}} = 1 - \cos \hat{\omega} + j \sin \hat{\omega}$$

και τα διαφορετικά τμήματα των μιγαδικών παραστάσεων είναι:

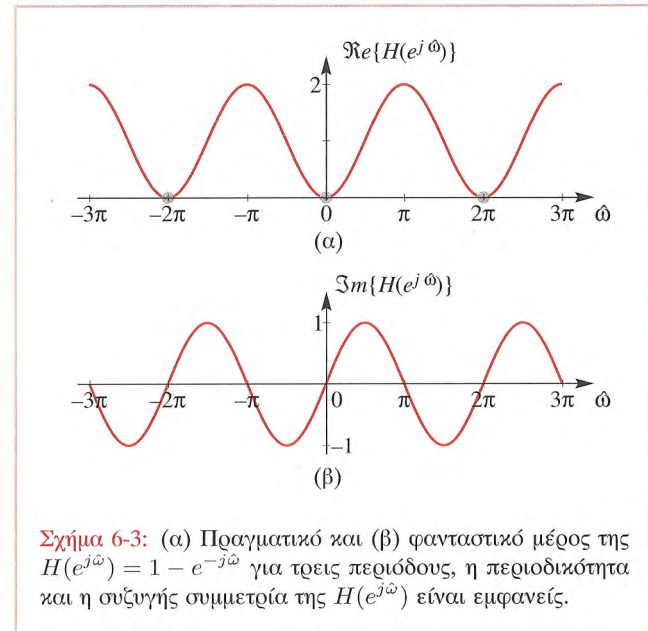
$$\Re\{H(e^{j\hat{\omega}})\} = (1 - \cos \hat{\omega})$$

$$\Im\{H(e^{j\hat{\omega}})\} = \sin \hat{\omega}$$

$$\begin{aligned} |H(e^{j\hat{\omega}})| &= [(1 - \cos \hat{\omega})^2 + \sin^2 \hat{\omega}]^{1/2} \\ &= [2(1 - \cos \hat{\omega})]^{1/2} = 2|\sin(\hat{\omega}/2)| \end{aligned}$$

$$\angle H(e^{j\hat{\omega}}) = \arctan\left(\frac{\sin \hat{\omega}}{1 - \cos \hat{\omega}}\right)$$

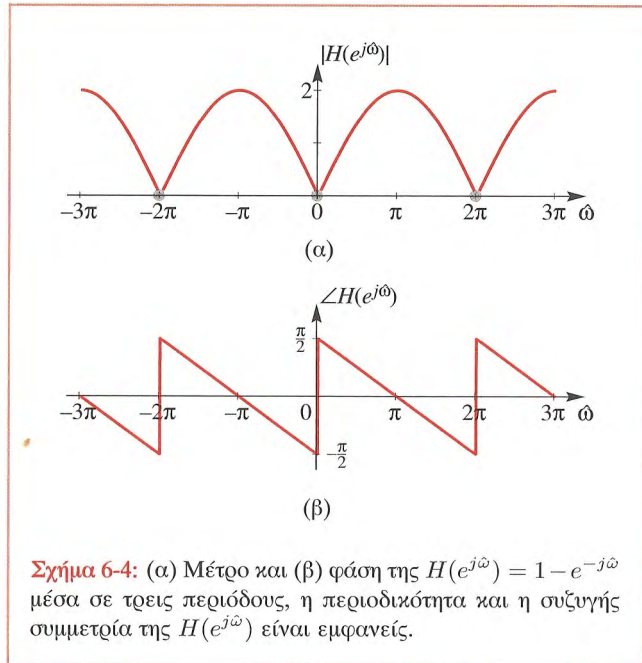
Τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των αποκρίσεων συχνότητας παρουσιάζονται στο Σχήμα 6-3, ενώ οι αποκρίσεις μέτρου και φάσης φαίνονται στο Σχήμα 6-4.



Σχήμα 6-3: (α) Πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος της $H(e^{j\hat{\omega}}) = 1 - e^{-j\hat{\omega}}$ για τρεις περιόδους, η περιοδικότητα και η συζυγής συμμετρία της $H(e^{j\hat{\omega}})$ είναι εμφανείς.

Όλες οι γραφικές παραστάσεις σχεδιάζονται στο διάστημα $-3\pi < \hat{\omega} < 3\pi$, παρόλο που κανονικά θα χρειαζόταν να σχεδιάσουμε την απόκριση συχνότητας ενός διακριτού χρόνου συστήματος μόνο στο $-\pi < \hat{\omega} < \pi$, ή (λόγω συζυγούς συμμετρίας) στο διάστημα $0 \leq \hat{\omega} < \pi$. Οι γραφικές παραστάσεις επιβεβαιώνουν ότι η $H(e^{j\hat{\omega}})$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και ότι ικανοποιούν τις ιδιότητες της συζυγούς συμμετρίας που περιγράφηκαν στην Ενότητα 6-4.3.

Η χρησιμότητα των γραφικών παραστάσεων του μέτρου και της φάσης της $H(e^{j\hat{\omega}})$ είναι προφανής ακόμη και γι' αυτό το απλό παράδειγμα. Στο Σχήμα 6-4, έχουμε ότι $H(e^{j0}) = 0$, οπότε εύκολα βλέπουμε ότι το σύστημα απομακρύνει πλήρως τους όρους με $\hat{\omega} = 0$ (δηλαδή τη συνεχή συνιστώσα). Επίσης, μπορούμε να δούμε ότι το σύστημα τονίζει τις υψηλότερες συχνότητες (κοντά στο $\hat{\omega} = \pi$) σε σχέση με τις χαμηλότερες συχνότητες, επομένως αυτό αποτελεί ένα *υψηλεπερατό φίλτρο*. Αυτός



είναι ένας άλλος τυπικός τρόπος με τον οποίο μπορούμε να σκεφτόμαστε τα συστήματα στο πεδίο της συχνότητας.

Το πραγματικό και φανταστικό μέρος, οι αποκρίσεις του μέτρου και της φάσης μπορούν πάντα να καθοριστούν, όπως περιγράψαμε παραπάνω, με τυπικούς χειρισμούς των μιγαδικών αριθμών. Ωστόσο, υπάρχει μια πιο απλή προσέγγιση για να βρούμε τις αποκρίσεις μέτρου και φάσης όταν η ακολουθία των συντελεστών είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική ως προς ένα κεντρικό σημείο. Ο παρακάτω αλγεβρικός χειρισμός της $H(e^{j\hat{\omega}})$ είναι δυνατός διότι οι συντελεστές $\{b_k\}$ ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη συμμετρίας:

$$b_k = -b_{M-k}$$

Το τριζ, που χρησιμοποιήσαμε ήδη και στο Παράδειγμα 6-1 της Σελίδας 147, είναι να βγάλουμε κοινό παράγοντα ένα εκθετικό του οποίου η φάση είναι ίση με το μισό της τάξης του φίλτρου ($M/2$) επί $\hat{\omega}$ και στη συνέχεια να

χρησιμοποιήσουμε τον αντίστροφο τύπο του Euler για να συνδυάσουμε τα μιγαδικά εκθετικά θετικής και αρνητικής συχνότητας. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} H(e^{j\hat{\omega}}) &= 1 - e^{-j\hat{\omega}} \\ &= e^{-j\hat{\omega}/2} \left(e^{j\hat{\omega}/2} - e^{-j\hat{\omega}/2} \right) \\ &= 2je^{-j\hat{\omega}/2} \sin(\hat{\omega}/2) \\ &= 2 \sin(\hat{\omega}/2) e^{j(\pi/2 - \hat{\omega}/2)} \end{aligned}$$

Η μορφή της $H(e^{j\hat{\omega}})$ πλησιάζει πολύ την πολική μορφή, αλλά αφού το $\sin(\hat{\omega}/2)$ είναι αρνητικό για $-\pi < \hat{\omega} < 0$ πρέπει να γράψουμε $|H(e^{j\hat{\omega}})| = 2|\sin(\hat{\omega}/2)|$ και να απαλείψουμε το αλγεβρικό πρόσημο² στην απόκριση φάσης για $-\pi < \hat{\omega} < 0$, δηλαδή:

$$\angle H(e^{j\hat{\omega}}) = \begin{cases} \pi/2 - \hat{\omega}/2 & 0 < \hat{\omega} < \pi \\ -\pi + \pi/2 - \hat{\omega}/2 & -\pi < \hat{\omega} < 0 \end{cases}$$

Η αναπαράσταση αυτή της φάσης είναι συμβατή με τη γραφική παράσταση της φάσης του Σχήματος 6-4, που παρουσιάζει ορισμένα γραμμικά τμήματα. Παρατηρήστε επίσης ότι η γραφική παράσταση της απόκρισης φάσης παρουσιάζει ασυνέχειες στο $\hat{\omega} = 0$ και στα $\hat{\omega} = \pm 2\pi$. Το μέγεθος αυτών των ασυνεχειών είναι π , αφού αντιστοιχούν σε αλλαγή προσήμου της $H(e^{j\hat{\omega}})$.

Παράδειγμα 6-8: Οι Διαφορές Πρώτης Τάξης Απομακρύνουν τη Συνεχί Συνιστώσα

Υποθέτουμε ότι η είσοδος σε ένα σύστημα διαφορών πρώτης τάξης είναι $x[n] = 4 + 2 \cos(0.3\pi n - \pi/4)$. Αφού

²Θυμηθείτε ότι $-1 = e^{\pm j\pi}$, οπότε μπορούμε να προσθέσουμε είτε το $+\pi$ είτε το $-\pi$ στη φάση για $-\pi < \hat{\omega} < 0$. Σε αυτή την περίπτωση, προσθέτουμε το $-\pi$ έτσι ώστε η φάση που προκύπτει να παραμένει μέσα στο $-\pi, +\pi$ για όλες τις συχνότητες $\hat{\omega}$.

η έξοδος σχετίζεται με την είσοδο με την εξίσωση $y[n] = x[n] - x[n - 1]$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} y[n] &= 4 + 2 \cos(0.3\pi n - \pi/4) \\ &\quad - 4 - 2 \cos(0.3\pi(n - 1) - \pi/4) \\ &= 2 \cos(0.3\pi n - \pi/4) - 2 \cos(0.3\pi n - 0.55\pi) \end{aligned}$$

Από αυτό το αποτέλεσμα, βλέπουμε ότι το σύστημα διαφορών πρώτης τάξης απομακρύνει τη συνεχή συνιστώσα και αφήνει δύο συνημιτονικά σήματα ίδιας συχνότητας, τα οποία θα μπορούσαν να συνδυαστούν με την πρόσθεση φασόρων. Ωστόσο, η λύση χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση απόκρισης συχνότητας είναι πιο απλή. Αφού το σύστημα διαφορών πρώτης τάξης έχει απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = 2 \sin(\hat{\omega}/2) e^{j(\pi/2 - \hat{\omega}/2)}$$

η έξοδος του συστήματος, για τη δοσμένη είσοδο, είναι

$$\begin{aligned} y[n] &= 4H(e^{j0}) \\ &\quad + 2|H(e^{j0.3\pi})| \cos(0.3\pi n - \pi/4 + \angle H(e^{j0.3\pi})) \end{aligned}$$

Επομένως, αφού $H(e^{j0}) = 0$ και

$$\begin{aligned} H(e^{j0.3\pi}) &= 2j \sin(0.3\pi/2) e^{-j0.3\pi/2} \\ &= 0.908 e^{j(\pi/2 - 0.15\pi)} \end{aligned}$$

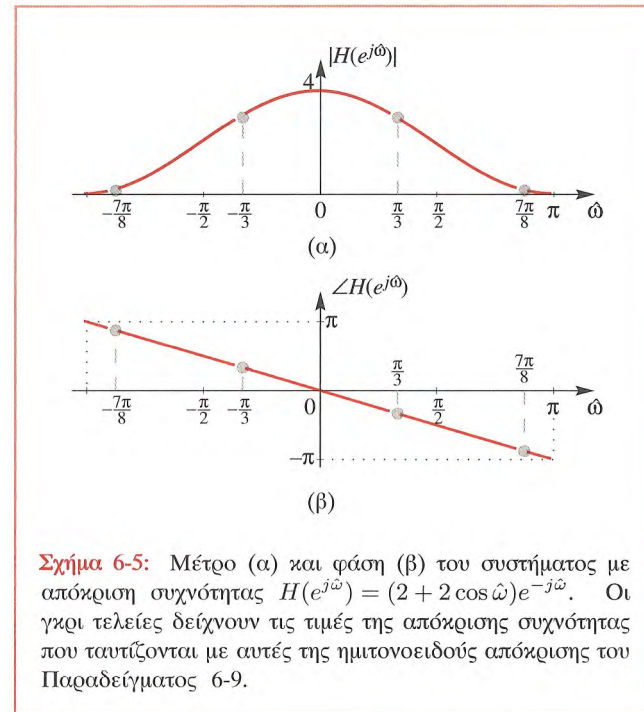
η έξοδος θα είναι

$$\begin{aligned} y[n] &= (0.908)(2) \cos(0.3\pi n - \pi/4 + \pi/2 - 0.3\pi/2) \\ &= 1.816 \cos(0.3\pi n + 0.1\pi) \end{aligned}$$

6-5.3 Ένα Απλό Φίλτρο Διέλευσης χαμηλών Συχνοτήτων

Στα Παραδείγματα 6-1, 6-3 και 6-4, η απόκριση συχνότητας του συστήματος ήταν

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = 1 + 2e^{-j\hat{\omega}} + e^{-j2\hat{\omega}} = (2 + 2 \cos \hat{\omega}) e^{-j\hat{\omega}}$$



Σχήμα 6-5: Μέτρο (α) και φάση (β) του συστήματος με απόκριση συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}}) = (2 + 2 \cos \hat{\omega}) e^{-j\hat{\omega}}$. Οι γκρι τελείες δείχνουν τις τιμές της απόκρισης συχνότητας που ταυτίζονται με αυτές της ημιτονοειδούς απόκρισης του Παραδείγματος 6-9.

Αφού ο όρος $(2 + 2 \cos \hat{\omega}) \geq 0$ για κάθε $\hat{\omega}$, προκύπτει ότι

$$|H(e^{j\hat{\omega}})| = (2 + 2 \cos \hat{\omega})$$

και

$$\angle H(e^{j\hat{\omega}}) = -\hat{\omega}$$

Οι γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων φαίνονται στο Σχήμα 6-5 για το διάστημα $-\pi < \hat{\omega} < \pi$. Το Σχήμα 6-5 δείχνει με μια ματιά ότι το σύστημα έχει μια καθυστέρηση ενός δείγματος και ότι τείνει να ευνοεί τις χαμηλές συχνότητες (κοντά στο $\hat{\omega} = 0$) με μεγάλο κέρδος, ενώ υποβαθμίζει τις υψηλές συχνότητες (κοντά στο $\hat{\omega} = \pi$). Επίσης υπάρχει μια σταδιακή μείωση του κέρδους από το $\hat{\omega} = 0$ στο $\hat{\omega} = \pi$, οπότε οι μεσαίες συχνότητες έχουν περισσότερο κέρδος από ό,τι οι υψηλές, αλλά λιγότερο από ό,τι οι χαμηλές συχνότητες. Τα φίλτρα με απόκριση

μέτρου που υποβαθμίζει τις υψηλές συχνότητες της εισόδου ονομάζονται **κατωπερατά φίλτρα**.

Παράδειγμα 6-9: Κατωπερατό Φίλτρο

Αν επαναλάβουμε το Παράδειγμα 6-4, μπορούμε να δείξουμε πώς η γραφική παράσταση της $H(e^{j\omega})$ μας διευκολύνει να βρούμε την έξοδο ενός φίλτρου για ημιτονοειδείς εισόδους. Στο Παράδειγμα 6-4, η είσοδος ήταν η

$$x[n] = 4 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cos\left(\frac{7\pi}{8}n\right) \quad (6.18)$$

και οι συντελεστές του φίλτρου ήταν $\{b_k\} = \{1, 2, 1\}$. Το Σχήμα 6-5 δείχνει την απόκριση συχνότητας του συστήματος, που είναι ένα κατωπερατό φίλτρο. Για να βρούμε το σήμα εξόδου, πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές της $H(e^{j\omega})$ στις συχνότητες $0, \pi/3$ και $7\pi/8$. Οι τιμές αυτές είναι

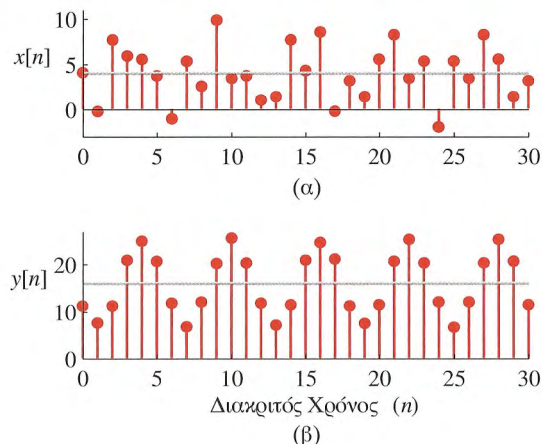
$$H(e^{j0}) = 4$$

$$H(e^{j\pi/3}) = 3e^{-j\pi/3}$$

$$H(e^{j7\pi/8}) = 0.1522e^{-j7\pi/8}$$

και σημειώνονται με γκρι τελείες στις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 6-5. Όπως στο Παράδειγμα 6-4, η έξοδος είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} y[n] &= 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + 0.1522 \cdot 3 \cos\left(\frac{7\pi}{8}n - \frac{7\pi}{8}\right) \\ &= 16 + 9 \cos\left(\frac{\pi}{3}(n-1) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + 0.4567 \cos\left(\frac{7\pi}{8}(n-1)\right) \end{aligned}$$



Σχήμα 6-6: Είσοδος και έξοδος του συστήματος με απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega}) = (2 + 2 \cos \omega)e^{-j\omega}$. (α) Τμήμα του σήματος εισόδου $x[n]$ της Σχέσης (6.18) και (β) το αντίστοιχο τμήμα του σήματος εξόδου.

Η γραφική παράσταση της απόκρισης συχνότητας δείχνει ότι όλες οι συχνότητες κοντά στο $\omega = \pi$ αποσβένονται από το σύστημα. Επίσης, το διάγραμμα της γραμμικής φάσης με κλίση -1 δείχνει ότι σε όλες τις συχνότητες υπάρχει μια χρονική καθυστέρηση ενός δείγματος. Η έξοδος αυτού του απλού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων φαίνεται στο Σχήμα 6-6 (β). Παρατηρήστε ότι η συνεχής συνιστώσα παρουσιάζεται και στις δύο γραφικές παραστάσεις ως μια γκρι οριζόντια γραμμή. Η έξοδος φαίνεται να είναι το άθροισμα μιας σταθερής συνιστώσας (16) και ενός συνημιτόνου πλάτους 9 και περιόδου 6. Μια πιο λεπτομερής παρατήρηση αποκαλύπτει ότι αυτό δεν είναι ακριβώς έτσι, γιατί υπάρχει ένας τρίτος όρος εξόδου στη συχνότητα $\omega = 7\pi/8$ που είναι ελάχιστα ορατός στο Σχήμα 6-6 (β). Το μέγεθος αυτού του όρου είναι περίπου 5% του μεγέθους του αντίστοιχου όρου συχνότητας $\omega = \pi/3$. ■

6-6 ΓΧΑ Συστήματα Συνδεδεμένα σε Σειρά

Στην Ενότητα 5-7, δείξαμε ότι αν δυο ΓΧΑ συστήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά (δηλαδή, η έξοδος του πρώτου είναι είσοδος στο δεύτερο), τότε η συνολική κρουστική απόκριση είναι η συνέλιξη των δύο επιμέρους κρουστικών αποκρίσεων και έτσι το σε σειρά σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα συνολικό σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση είναι η συνέλιξη των δύο επιμέρους κρουστικών αποκρίσεων. Σε αυτή την ενότητα, θα δείξουμε ότι η απόκριση συχνότητας της σε σειρά σύνδεσης δύο ΓΧΑ συστημάτων ισούται με το γινόμενο των αποκρίσεων συχνότητας των επιμέρους συστημάτων.



Επίδειξη: Συνδέοντας FIR Φίλτρα σε Σειρά

Το Σχήμα 6-7 (α) δείχνει δύο ΓΧΑ συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά. Για να βρούμε την απόκριση συχνότητας του συνολικού συστήματος (από την είσοδο $x[n]$ ως την έξοδο $y_2[n]$), θέτουμε

$$x[n] = e^{j\omega n}$$

Τότε, η έξοδος του πρώτου ΓΧΑ συστήματος είναι

$$w_1[n] = H_1(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

και η έξοδος του δεύτερου συστήματος είναι

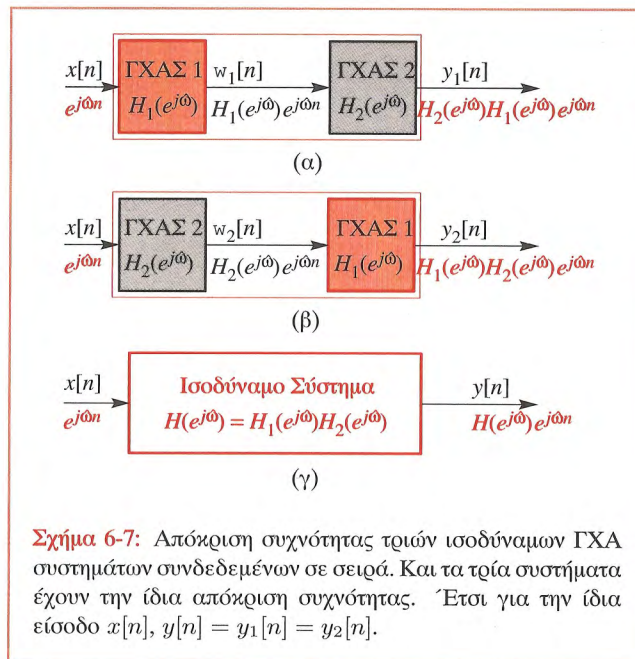
$$y_1[n] = H_2(e^{j\omega}) (H_1(e^{j\omega})e^{j\omega n}) = H_2(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

Με μια ανάλογη ανάλυση του Σχήματος 6-7 (β), προκύπτει ότι

$$y_2[n] = H_1(e^{j\omega}) (H_2(e^{j\omega})e^{j\omega n}) = H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

Από την αντιμεταθετική ιδιότητα του μιγαδικού πολλαπλασιασμού ($H_2(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$), προκύπτει ότι $y_1[n] = y_2[n]$. Δηλαδή, τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους και είναι επίσης ισοδύναμα με το ΓΧΑ σύστημα που έχει απόκριση συχνότητας:

$$H(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega}) \quad (6.19)$$



Σχήμα 6-7: Απόκριση συχνότητας τριών ισοδύναμων ΓΧΑ συστημάτων συνδεδεμένων σε σειρά. Και τα τρία συστήματα έχουν την ίδια απόκριση συχνότητας. Έτσι για την ίδια είσοδο $x[n]$, $y[n] = y_1[n] = y_2[n]$.

Η έξοδος $y[n]$ κάθε συστήματος που έχει απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ που δίνεται από την Σχέση (6.19) θα είναι η ίδια τόσο με την $y_1[n]$ όσο και με την $y_2[n]$. Αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα 6-7 (γ).

Υπενθυμίζεται από την Ενότητα 5-7 στην Σελίδα 135 ότι η συνολική κρουστική απόκριση είναι $h_1[n] * h_2[n]$. Μπορούμε να ανακεφαλαιώσουμε με την αντιστοιχία:

$$\boxed{\text{Συνέλιξη} \longleftrightarrow \text{Πολλαπλασιασμός}} \quad (6.20)$$

$$h_1[n] * h_2[n] \longleftrightarrow H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$$

Αυτό σημαίνει ότι, η συνέλιξη των κρουστικών αποκρίσεων αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό των αποκρίσεων συχνότητας των συνδεδεμένων σε σειρά συστημάτων. Η αντιστοιχία που φαίνεται στην (6.20) είναι χρήσιμη γιατί προσφέρει έναν άλλο τρόπο αναπαράστασης και χειρισμού των ΓΧΑ συστημάτων. Το σημείο αυτό διασαφηνίζεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 6-10: Σύνδεσμολογία σε Σειρά

Υποθέστε ότι το πρώτο σύστημα σε μια συνδεσμολογία δύο συστημάτων σε σειρά, ορίζεται από το σύνολο συντελεστών $\{2, 4, 4, 2\}$ και το δεύτερο σύστημα ορίζεται από το σύνολο συντελεστών $\{1, -2, 1\}$. Οι αποκρίσεις συχνότητας καθενός συστήματος, είναι:

$$H_1(e^{j\omega}) = 2 + 4e^{-j\omega} + 4e^{-j\omega 2} + 2e^{-j\omega 3}$$

και

$$H_2(e^{j\omega}) = 1 - 2e^{-j\omega} + e^{-j\omega 2}$$

Η συνολική απόκριση συχνότητας είναι

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega}) \\ &= (2 + 4e^{-j\omega} + 4e^{-j\omega 2} + 2e^{-j\omega 3})(1 - 2e^{-j\omega} + e^{-j\omega 2}) \\ &= 2 + 0e^{-j\omega} - 2e^{-j\omega 2} - 2e^{-j\omega 3} + 0e^{-j\omega 4} + 2e^{-j\omega 5} \end{aligned}$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση του ισοδύναμου συνολικού συστήματος είναι:

$$h[n] = 2\delta[n] - 2\delta[n - 2] - 2\delta[n - 3] + 2\delta[n - 5]$$

Το παράδειγμα αυτό αποδεικνύει ότι η συνέλιξη δύο κρουστικών αποκρίσεων είναι ισοδύναμη με τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων αποκρίσεων συχνότητας. Σημειώστε ότι, για τα FIR συστήματα, η απόκριση συχνότητας είναι απλά ένα πολυώνυμο της μεταβλητής $e^{-j\omega}$. Έτσι, ο πολλαπλασιασμός δυο αποκρίσεων συχνότητας απαιτεί πολλαπλασιασμό πολυωνύμων. Αυτό το αποτέλεσμα προσφέρει την θεωρητική βάση για το “συνθετικό” αλγόριθμο πολλαπλασιασμού πολυωνύμων που αναφέρθηκε στη Σελίδα 123 της Ενότητας 5-3.3.1.



Άσκηση 6.4: Υποθέστε ότι δύο συστήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά. Το πρώτο σύστημα ορίζεται από το σύνολο των συντελεστών $\{1, 2, 3, 4\}$, και το δεύτερο σύστημα ορίζεται από τους συντελεστές $\{-1, 1, -1\}$. Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας και την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος.

6-7 Φίλτρο Τρέχουσας Μέσης Τιμής

Ένα απλό γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[n - k] \\ &= \frac{1}{L} (x[n] + x[n - 1] + \dots + x[n - L + 1]) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Το σύστημα της Σχέσης (6.21) ονομάζεται *φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής L-σημείων*, γιατί η έξοδος του τη χρονική στιγμή n ισούται με τη μέση τιμή του $x[n]$ και των $L - 1$ προηγούμενων δειγμάτων του σήματος εισόδου. Το σύστημα που ορίζεται από την Σχέση (6.21) μπορεί να υλοποιηθεί στο περιβάλλον Matlab για $L = 11$ με τις ακόλουθες δηλώσεις:

```
bb = ones(11, 1)/11;
yy = conv(bb, xx);
```

όπου xx είναι ένα διάνυσμα που περιέχει τα δείγματα της εισόδου. Το διάνυσμα bb περιέχει τους 11 συντελεστές του φίλτρου οι οποίοι, σε αυτή την περίπτωση, έχουν όλοι το ίδιο μέγεθος. Χρησιμοποιώντας την Σχέση (6.4) της Σελίδας 146 η απόκριση συχνότητας του φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής L -σημείων είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} e^{-j\omega k} \quad (6.22)$$

Μπορούμε να βρούμε έναν απλό τύπο για το μέτρο και την φάση του φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο τύπο του αθροίσματος των L πρώτων στοιχείων γεωμετρικής προόδου:

$$\sum_{k=0}^{L-1} \alpha^k = \frac{1 - \alpha^L}{1 - \alpha} \quad (\text{για } \alpha \neq 1) \quad (6.23)$$

Καταρχήν θέτουμε $e^{-j\omega}$ στη θέση του α και στη συνέχεια

εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} e^{-j\hat{\omega}k} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{L} \left(\frac{1 - e^{-j\hat{\omega}L}}{1 - e^{-j\hat{\omega}}} \right) \\ &= \frac{1}{L} \left(\frac{e^{-j\hat{\omega}L/2} (e^{j\hat{\omega}L/2} - e^{-j\hat{\omega}L/2})}{e^{-j\hat{\omega}/2} (e^{j\hat{\omega}/2} - e^{-j\hat{\omega}/2})} \right) \\ &= \left(\frac{\sin(\hat{\omega}L/2)}{L \sin(\hat{\omega}/2)} \right) e^{-j\hat{\omega}(L-1)/2} \quad (6.25) \end{aligned}$$

Ο αριθμητής και ο παρονομαστής απλοποιούνται χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler για τα ημίτονα. Είναι βολικό να εκφράσουμε την Σχέση (6.25) στην μορφή

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = D_L(e^{j\hat{\omega}}) e^{-j\hat{\omega}(L-1)/2} \quad (6.26)$$

όπου

$$D_L(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin(\hat{\omega}L/2)}{L \sin(\hat{\omega}/2)} \quad (6.27)$$

Η συνάρτηση $D_L(e^{j\hat{\omega}})$ είναι γνωστή σαν συνάρτηση του *Dirichlet* και ο δείκτης L δηλώνει ότι προέρχεται από ένα φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής L -σημείων. Στο Matlab, μπορεί να υπολογιστεί με την βοήθεια της συνάρτησης `diric`.

6-7.1 Σχεδιάζοντας την Απόκριση Συχνότητας

Η απόκριση συχνότητας ενός φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής 11-σημείων δίνεται από την σχέση

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = D_{11}(e^{j\hat{\omega}}) e^{-j\hat{\omega}5} \quad (6.28)$$

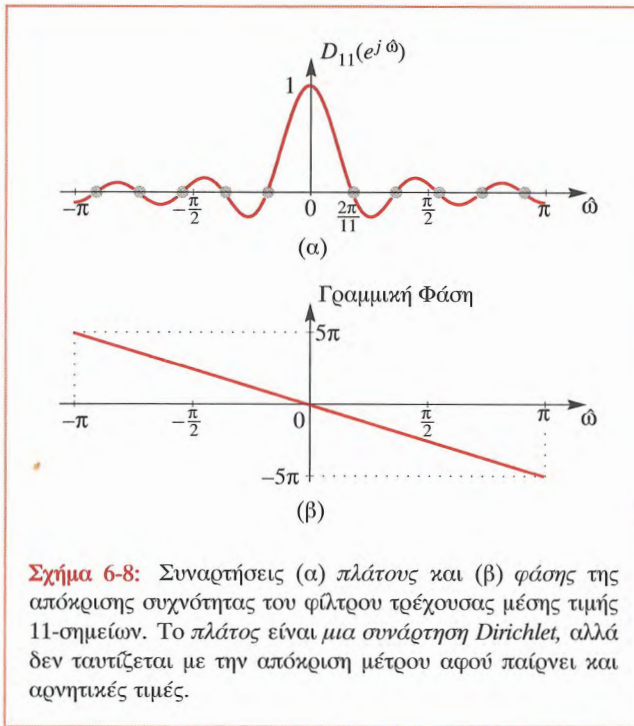
όπου, στην περίπτωση αυτή, $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ είναι η συνάρτηση Dirichlet που προκύπτει από την Σχέση (6.27) για $L = 11$, δηλαδή,

$$D_{11}(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin(11\hat{\omega}/2)}{11 \sin(\hat{\omega}/2)} \quad (6.29)$$

Όπως φαίνεται από την Σχέση (6.28), η συνάρτηση της απόκρισης συχνότητας, $H(e^{j\hat{\omega}})$, μπορεί να εκφραστεί ως το

γινόμενο της πραγματικής συνάρτησης πλάτους $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ και του μιγαδικού εκθετικού συντελεστή $e^{-j5\hat{\omega}}$. Ο τελευταίος έχει μέτρο ίσο με την μονάδα και όρισμα ίσο με $-5\hat{\omega}$. Στο Σχήμα 6-8(α) φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης πλάτους, $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$. Η συνάρτηση φάσης $-5\hat{\omega}$ φαίνεται στο κάτω μέρος του σχήματος. Χρησιμοποιούμε τον όρο *πλάτος* αντί για μέτρο, γιατί το $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Μπορούμε να κάνουμε μια γραφική παράσταση του μέτρου $|H(e^{j\hat{\omega}})|$ παίρνοντας την απόλυτη τιμή της $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$. Πρέπει πρώτα να σκεφτούμε την αναπαράσταση του πλάτους, γιατί είναι ευκολότερο να εξετάσουμε τις ιδιότητες της συνάρτησης πλάτους και της συνάρτησης φάσης. Το Σχήμα 6-8 παρουσιάζει μια μόνο περίοδο, η οποία είναι στο διάστημα $-\pi < \hat{\omega} < \pi$. Η απόκριση συχνότητας, βέβαια, είναι περιοδική με περίοδο 2π , οπότε τα διαγράμματα στο Σχήμα 6-8 απλά θα επαναλαμβάνονται με αυτή την περίοδο. Στην περίπτωση του φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής 11-σημείων, η απόκριση της φάσης είναι εύκολο να σχεδιαστεί, αφού είναι μια ευθεία γραμμή με κλίση ίση με -5 . Ο απόκριση πλάτους είναι κάτι πιο περίπλοκο. Παρατηρήστε ότι $D_{11}(e^{-j\hat{\omega}}) = D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$, δηλαδή, η $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ είναι μια άρτια συνάρτηση του $\hat{\omega}$ γιατί είναι ο λόγος δύο περιττών συναρτήσεων. Αφού η $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ είναι άρτια και περιοδική με περίοδο 2π χρειάζεται να θεωρήσουμε τις τιμές της μόνο στο διάστημα $0 \leq \hat{\omega} \leq \pi$. Όλες οι υπόλοιπες τιμές προκύπτουν από την συμμετρία και την περιοδικότητα.

Ο αριθμητής είναι ίσος με το $\sin(11\hat{\omega}/2)$, το οποίο, βέβαια, ταλαντώνεται μεταξύ του $+1$ και του -1 και είναι μηδέν όταν $11\hat{\omega}/2 = \pi k$, όπου k ακέραιος. Λύνοντας ως προς $\hat{\omega}$, η $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ μηδενίζεται στις συχνότητες $\hat{\omega}_k = 2\pi k/11$ όπου το k είναι ένας μη μηδενικός ακέραιος. Ο παρονομαστής της $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ είναι ίσος με το $11 \sin(\hat{\omega}/2)$, το οποίο μηδενίζεται για $\hat{\omega} = 0$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή του 11 στο $\hat{\omega} = \pi$. Επομένως, η $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ παίρνει μεγάλες τιμές κοντά στο $\hat{\omega} = 0$, όπου ο παρονομαστής είναι μικρός, και μειώνεται το πλάτος της καθώς το $\hat{\omega}$ αυξάνει προς το π . Η συμπεριφορά της για $\hat{\omega} = 0$ έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον επειδή, σε αυτή την συχνότητα, η $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ είναι αόριστη,



Σχήμα 6-8: Συναρτήσεις (α) πλάτους και (β) φάσης της απόκρισης συχνότητας του φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής 11-σημείων. Το πλάτος είναι μια συνάρτηση Dirichlet, αλλά δεν ταυτίζεται με την απόκριση μέτρου αφού παίρνει και αρνητικές τιμές.

δηλαδή:

$$D_{11}(e^{j0}) = \frac{0}{0}$$

Χρησιμοποιώντας ωστόσο τον κανόνα του Γ'Hôpital, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι $\lim_{\hat{\omega} \rightarrow 0} D_{11}(e^{j\hat{\omega}}) = 1$.

Επομένως, η συνάρτηση $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) Η $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ είναι μια άρτια περιοδική συνάρτηση του $\hat{\omega}$ με περίοδο 2π .
- (ii) Η $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ έχει μέγιστη τιμή ίση με τη μονάδα στη συχνότητα $\hat{\omega} = 0$.
- (iii) Η $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ φθίνει καθώς αυξάνει το $\hat{\omega}$, φτάνοντας την μικρότερη μη μηδενική τιμή πλάτους της στη συχνότητα $\hat{\omega} = \pm\pi$.

- (iv) Η $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ έχει μηδενικά στα μη μηδενικά ακέραια πολλαπλάσια του $2\pi/11$. Στη γενική περίπτωση, τα μηδενικά της $D_L(e^{j\hat{\omega}})$ βρίσκονται στα μη μηδενικά πολλαπλάσια του $2\pi/L$.

Ο συνδιασμός των γραφικών παραστάσεων πλάτους και φάσης του Σχήματος 6-8 προσδιορίζει πλήρως την απόκριση συχνότητας του φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής 11-σημείων. Κανονικά, ωστόσο, η απόκριση συχνότητας αναπαρίσταται στη μορφή

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = |H(e^{j\hat{\omega}})|e^{j\angle H(e^{j\hat{\omega}})}$$

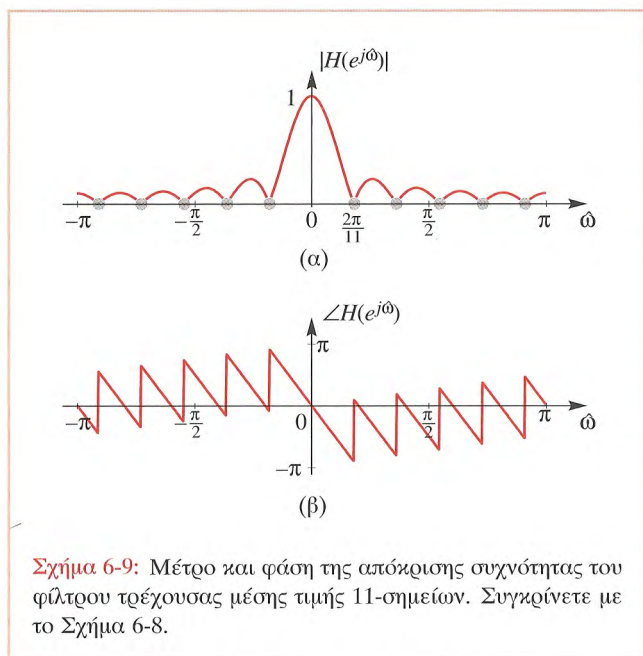
Αυτό θα απαιτούσε την σχεδίαση του μέτρου $|H(e^{j\hat{\omega}})|$ και της φάσης $\angle H(e^{j\hat{\omega}})$ συναρτήσει του $\hat{\omega}$. Είναι εύκολο να δούμε από την Σχέση (6.28) ότι $|H(e^{j\hat{\omega}})| = |D_{11}(e^{j\hat{\omega}})|$. Το επάνω μέρος του Σχήματος 6-9 δείχνει ότι για το φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής 11-σημείων $|H(e^{j\hat{\omega}})| = |D_{11}(e^{j\hat{\omega}})|$. Από την άλλη μεριά, είναι πιο πολύπλοκο να σχεδιάσουμε την απόκριση φάσης, $\angle H(e^{j\hat{\omega}})$, απ' ό,τι την γραμμική συνάρτηση που φαίνεται στο Σχήμα 6-8 (β). Αυτό οφείλεται σε δύο λόγους:

- (i) Το αλγεβρικό πρόσημο της $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ πρέπει να ενσωματωθεί στην συνάρτηση της φάσης, αφού η $|H(\hat{\omega})| = |D_{11}(e^{j\hat{\omega}})|$ αποβάλλει το πρόσημο της $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$.
- (ii) Είναι γενικά ευκολότερο να σχεδιάσουμε την κύρια τιμή της συνάρτησης φάσης.

Το πρόσημο της $D_{11}(e^{j\hat{\omega}})$ μπορεί να ενσωματωθεί στην φάση αν παρατηρήσουμε ότι $D_{11}(e^{j\hat{\omega}}) = |D_{11}(e^{j\hat{\omega}})|e^{\pm j\pi}$ όταν $D_{11}(e^{j\hat{\omega}}) < 0$. Η κύρια τιμή της γωνίας ενός μιγαδικού αριθμού ορίζεται να είναι μια γωνία μεταξύ $-\pi$ και $+\pi$ ακτινίων. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$e^{j(\theta \pm 2\pi k)} = e^{j\theta} e^{\pm j2\pi k} = e^{j\theta}$$

όπου k είναι οποιοσδήποτε ακέραιος, βλέπουμε ότι μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ακέραια πολλαπλάσια του 2π από την γωνία ενός μιγαδικού αριθμού χωρίς να αλλάξει η τιμή του. Μπορούμε πάντα



να βρούμε ένα πολλαπλάσιο του 2π , το οποίο, όταν προστεθεί ή αφαιρεθεί από το θ , θα μας δώσει ένα αποτέλεσμα μέσα στο διάστημα $-\pi < \theta \leq +\pi$. Αυτό ονομάζεται *μείωση του θ modulo 2π* . Η κύρια τιμή είναι γενικά αυτό που υπολογίζεται όταν μια συνάρτηση τόξου εφαπτομένης υπολογίζεται στο Matlab ή σε άλλα περιβάλλοντα λογισμικού. Στο Σχήμα 6-8 (β), μπορούσαμε να σχεδιάσουμε μια γωνία της οποίας οι τιμές να βρίσκονται έξω από το διάστημα της κύριας τιμής απλά επειδή είχαμε μια εξίσωση για την γωνία. Ένα διάγραμμα σαν αυτό του Σχήματος 6-9 θα μπορούσε να παραχθεί χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο κώδικα στο Matlab

```
omega = -pi:(pi/500):pi;
bb = ones(1, 11)/11;
HH = freqz(bb, 1, omega);
subplot(2, 1, 1), plot(omega, abs(HH))
subplot(2, 1, 2), plot(omega, angle(HH))
```

Η συνάρτηση `angle` του Matlab χρησιμοποιεί το τόξο εφαπτομένης για να επιστρέψει την κύρια τιμή της γωνίας

η οποία ορίζεται από το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των στοιχείων του διανύσματος HH .

Στο Σχήμα 6-9, η καμπύλη της φάσης φαίνεται να έχει ασυνέχειες που βρίσκονται στα μηδενικά της $D_{11}(e^{j\omega})$. Αυτές οι ασυνέχειες οφείλονται στο συνδυασμό πολλαπλάσιων του π τα οποία προστίθενται στη φάση λόγω του αρνητικού προσήμου της $D_{11}(e^{j\omega})$ στα διαστήματα $2\pi/11 < |\omega| < 4\pi/11$, $6\pi/11 < |\omega| < 8\pi/11$, $10\pi/11 < |\omega| < \pi$ και στα πολλαπλάσια του 2π τα οποία προστίθενται έμμεσα στον υπολογισμό της κύριας τιμής. Η εξίσωση για την καμπύλη της φάσης, που είναι σχεδιασμένη στο Σχήμα 6-9, για τις συχνότητες $0 \leq \omega \leq \pi$ είναι η ακόλουθη:

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -5\omega & 0 \leq \omega < 2\pi/11 \\ -5\omega + \pi & 2\pi/11 < \omega < 4\pi/11 \\ -5\omega + 2\pi & 4\pi/11 < \omega < 6\pi/11 \\ -5\omega + \pi + 2\pi & 6\pi/11 < \omega < 8\pi/11 \\ -5\omega + 4\pi & 8\pi/11 < \omega < 10\pi/11 \\ -5\omega + \pi + 4\pi & 10\pi/11 < \omega \leq \pi \end{cases}$$

Οι τιμές για $-\pi < \omega < 0$ μπορούν να συμπληρωθούν αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $\angle H(e^{-j\omega}) = -\angle H(e^{j\omega})$.

Άσκηση 6.5: Δοκιμάστε να δείτε αν καταλαβαίνεται γιατί η κύρια τιμή της $\angle H(e^{j\omega})$ είναι όπως φαίνεται στο Σχήμα 6-9 για το φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής 11-σημείων.

6-7.2 Αποκρίσεις Μέτρου και Φάσης

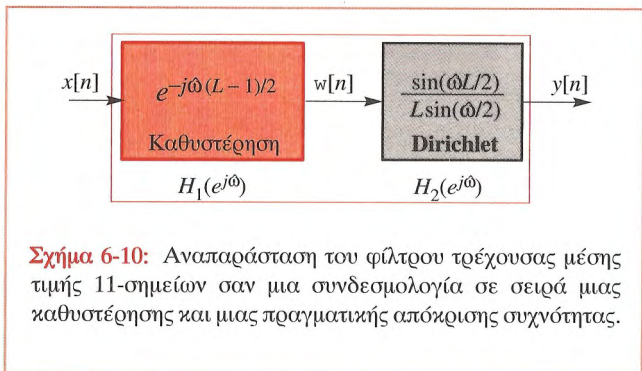
Από την Εξίσωση (6.25) βλέπουμε ότι η $H(e^{j\omega})$ είναι το γινόμενο δύο συναρτήσεων, δηλαδή, $H(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega})$ όπου

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(L-1)/2} \quad (6.30)$$

και

$$H_2(e^{j\hat{\omega}}) = D_L(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin(\hat{\omega}L/2)}{L\sin(\hat{\omega}/2)} \quad (6.31)$$

η οποία είναι η συνάρτηση Dirichlet που ορίσαμε προηγουμένως. Το τμήμα $H_1(e^{j\hat{\omega}})$ συνεισφέρει μόνο στην φάση του $H(e^{j\hat{\omega}})$ και παρατηρούμε ότι αυτή η συνάρτηση φάσης είναι μια γραμμική συνάρτηση του $\hat{\omega}$. Νωρίτερα είδαμε ότι η γραμμική φάση όπως η $\angle H_1(e^{j\hat{\omega}}) = -\hat{\omega}(L-1)/2$ αντιστοιχεί σε μια χρονική καθυστέρηση $(L-1)/2$ δειγμάτων. Η συνεισφορά της γραμμικής φάσης (με κλίση $-(L-1)/2 = -5$) φαίνεται καθαρά στο Σχήμα 6-8(β). Η απόκριση συχνότητας του δεύτερου τμήματος $H_2(e^{j\hat{\omega}})$ είναι πραγματική. Συνεισφέρει στο μέτρο της $H(e^{j\hat{\omega}})$ και όταν είναι αρνητικό, συνεισφέρει επίσης κατά $\pm\pi$ στην φάση της $H(e^{j\hat{\omega}})$ προκαλώντας ασυνέχειες στα πολλαπλάσια του $2\pi/11$.



Σχήμα 6-10: Αναπαράσταση του φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής 11-σημείων σαν μια συνδεσμολογία σε σειρά μιας καθυστέρησης και μιας πραγματικής απόκρισης συχνότητας.

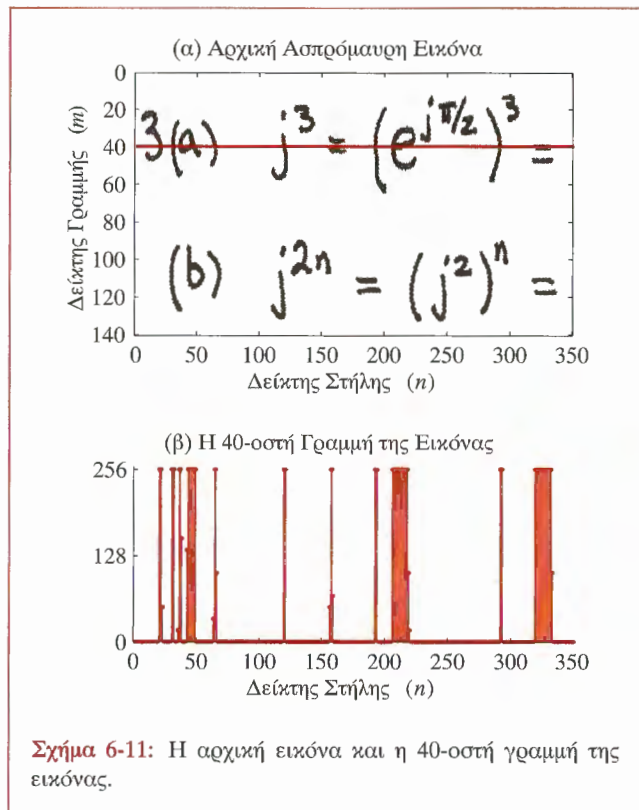
Η αναπαράσταση γινομένου μας προτρέπει να κάνουμε το σχηματικό διάγραμμα του Σχήματος 6-10, το οποίο δείχνει ότι το φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής μπορεί να θεωρηθεί ως ο συνδυασμός σε σειρά μιας καθυστέρησης η οποία ακολουθείται από ένα “κατωπερατό φίλτρο” το οποίο τονίζει τις χαμηλές συχνότητες. Το συνολικό σύστημα τρέχουσας μέσης τιμής μπορεί να υλοποιηθεί μόνο από την εξίσωση διαφορών της Σχέσης (6.21) στην Σελίδα 160. Πάγ’ όλα αυτά, το σχηματικό διάγραμμα του

Σχήματος 6-10 είναι χρήσιμο για να σκεφτούμε το σύστημα μ’ ένα διαφορετικό τρόπο. Το σύστημα δεν μπορεί να υλοποιηθεί από αυτή την σε σειρά συνδεσμολογία γιατί η $H_2(e^{j\hat{\omega}}) = D_L(e^{j\hat{\omega}})$ δεν μπορεί ποτέ να υλοποιηθεί από μόνη της. Όταν ο $(L-1)/2$ είναι ακέραιος, το $w[n] = x[n - (L-1)/2]$ είναι μια καθυστέρηση στο Σχήμα 6-10. Στην περίπτωση κατά την οποία ο $(L-1)/2$ δεν είναι ακέραιος απαιτεί ειδική ερμηνεία, η οποία θα παρουσιαστεί στην Ενότητα 6-8.2. Για την παρούσα συζήτηση, θα υποθέσουμε ότι το L είναι ένας περιττός ακέραιος, έτσι ώστε ο $(L-1)/2$ να είναι επίσης ένας ακέραιος.

6-7.3 Πείραμα: Εξομάλυνση Εικόνας

Ως ένα απλό πείραμα για να δείξουμε το αποτέλεσμα του φιλτραρίσματος του συστήματος τρέχουσας μέσης τιμής, σκεφτείτε την εικόνα που φαίνεται στο πάνω μέρος του Σχήματος 6-11. Η εικόνα είναι ένα διακριτό σήμα δύο διαστάσεων το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένα μητρώο δύο διαστάσεων δειγμάτων $x_i[m, n]$. Σε μια εικόνα, κάθε δείγμα καλείται *εικονοστοιχείο*. Μια οριζόντια γραμμή (για $m=40$) που αποσπάρθηκε από την εικόνα παράγει το μονοδιάστατο σήμα $x[n] = x_i[40, n]$, το οποίο είναι σχεδιασμένο στο κάτω μέρος του Σχήματος 6-11. Η θέση στην εικόνα από την οποία αποσπάρθηκε το $x[n]$ φαίνεται με την έγχρωμη γραμμή στην εικόνα. Οι τιμές στο σήμα της εικόνας είναι όλες θετικοί ακέραιοι στο διάστημα $0 \leq x_i[m, n] \leq 255$. Αυτοί οι αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν από δυαδικούς αριθμούς των 8 bits³. Αν συγκρίνετε το μονοδιάστατο γράφημα με τα επίπεδα του γκρι στην περιοχή γύρω από την γραμμή, θα δείτε ότι οι σκούρες περιοχές στην εικόνα έχουν μεγάλες τιμές (κοντά στο 255) και οι φωτεινές έχουν χαμηλές τιμές (κοντά στο μηδέν). Αυτό στην πραγματικότητα είναι μια “αρνητική” εικόνα, αλλά είναι κατάλληλη αφού είναι η αποτύπωση μιας χειρόγραφης λύσης μιας άσκησης. Ένα φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής 11-σημείων εφαρμόστηκε

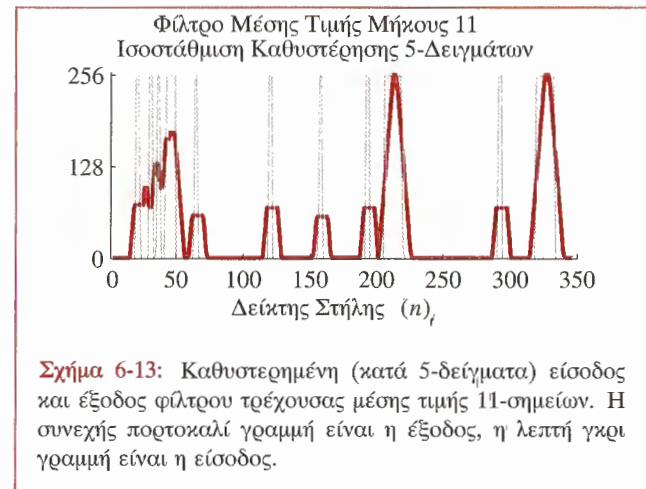
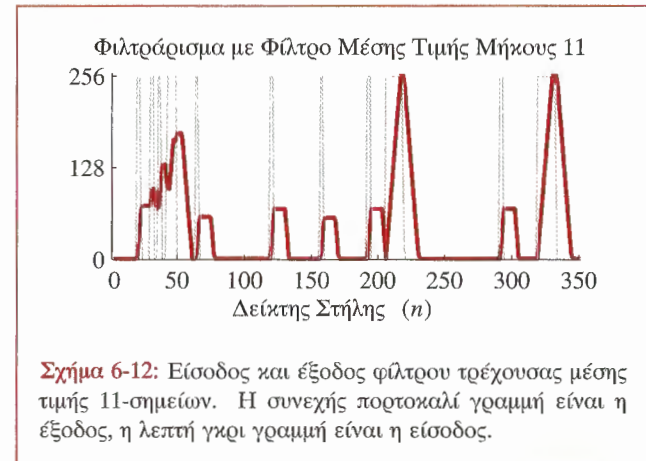
³Συνήθως λέμε ότι το συνολικό δυναμικό εύρος των τιμών μιας τέτοιας εικόνας είναι 8 bits.



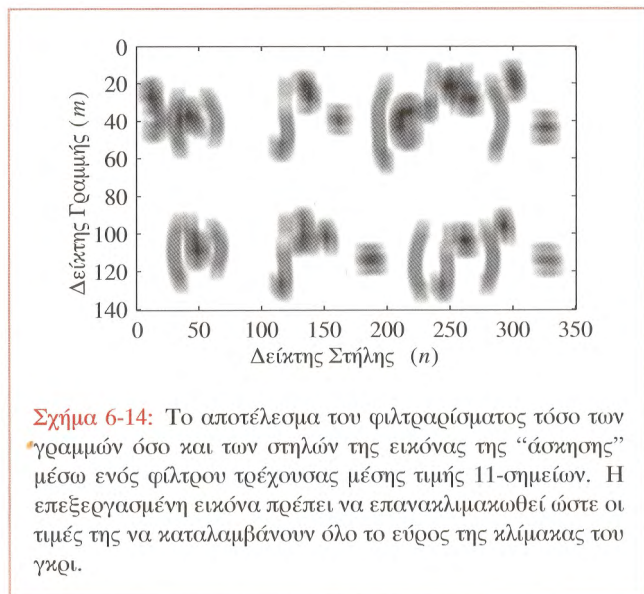
στο $x[n]$, και η είσοδος και η έξοδος σχεδιάστηκαν στο ίδιο γράφημα (Σχήμα 6-12).

Παρατηρήστε ότι η έξοδος $y[n]$ φαίνεται να είναι μια πιο ομαλή έκδοση του $x[n]$ με μια μικρή μετατόπιση προς τα δεξιά. Αυτή η μετατόπιση είναι η καθυστέρηση 5-δειγμάτων που περιμένουμε για ένα φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής 11-σημείων. Η ομαλότητα είναι αποτέλεσμα της σχετικής εξασθένισης των υψηλότερων συχνοτήτων του σήματος που αντιστοιχούν στις ακμές των χειρόγραφων χαρακτήρων της εικόνας. Για να επιβεβαιώσουμε το αποτέλεσμα της καθυστέρησης του συστήματος, το Σχήμα 6-13 δείχνει ένα γράφημα του $w[n] = x[n-5]$ και του $y[n]$. Τώρα βλέπουμε

ότι η έξοδος φαίνεται να είναι ευθυγραμμισμένη με την είσοδο.



Το φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής 11-σημείων μπορεί πρώτα να εφαρμοστεί πάνω σε όλες τις γραμμές και



στη συνέχεια πάνω σε όλες τις στήλες της εικόνας για να πάρουμε μια οπτική εκτίμηση της επίδρασης του κατωπερατού φιλτραρίσματος⁴.

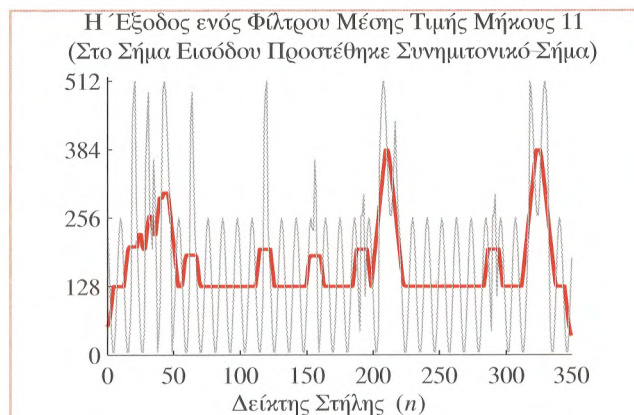
Κάθε γραμμή φιλτράρεται χρησιμοποιώντας ένα μονοδιάστατο φίλτρο μέσου όρου και στη συνέχεια γίνεται επεξεργασία κάθε στήλης αυτής της φιλτραρισμένης εικόνας. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 6-14, όπου είναι προφανές ότι το χαμηλοπερατό φίλτρο έχει θολώσει την εικόνα. Όπως έχουμε δει, το φίλτρο εξασθενεί τις υψηλές συχνότητες της εικόνας. Έτσι, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι οξείες ακμές σε μια εικόνα πρέπει να σχετίζονται με υψηλές συχνότητες.

Ως ένα άλλο παράδειγμα του αποτελέσματος του φιλτραρίσματος, το σήμα της εικόνας παραμορφώθηκε προσθέτοντας ένα σήμα συνημιτόνου συν μια σταθερά για να δημιουργηθεί μια νέα είσοδος:

$$x_1[n] = x[n] + 128 \cos(2\pi n/11) + 128$$

⁴Στο περιβάλλον Matlab, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση `filter2()` για φιλτράρισμα δύο διαστάσεων.

Αυτό το αλλοιωμένο σήμα $x_1[n]$ φιλτραρίστηκε με ένα φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής 11-σημείων. Η καθυστερημένη είσοδος $x_1[n-5]$ και η αντίστοιχη έξοδος φαίνονται στο Σχήμα 6-15. Συγκρίνοντας

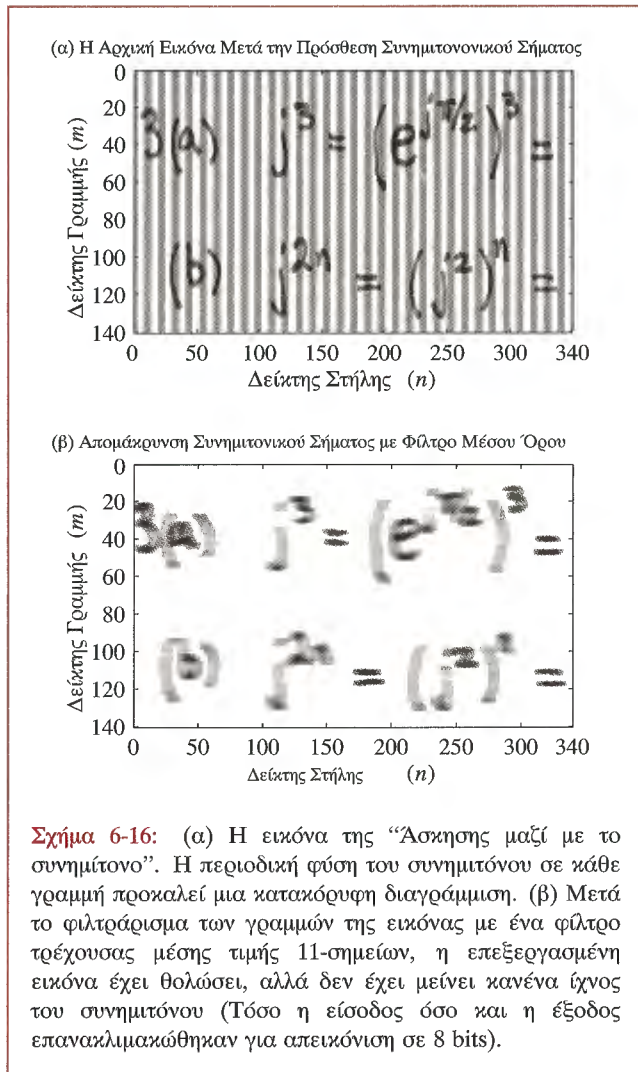


Σχήμα 6-15: Το αποτέλεσμα του φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής 11-σημείων έχοντας προσθέσει το $\cos(2\pi n/11)$ στην γραμμή της εικόνας. Η συνεχής γραμμή είναι η έξοδος, η λεπτή γκρι γραμμή είναι η είσοδος.

τα Σχήματα 6-13 και 6-15, είναι εμφανές ότι η έξοδος είναι η ίδια για το $x[n]$ και το $x_1[n]$ ⁵. Η αιτία είναι εμφανής: η $\hat{\omega} = 2\pi/11$ είναι μια από τις συχνότητες που αφαιρούνται πλήρως από το φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής, γιατί $H(e^{j2\pi/11}) = 0$. Αφού το σύστημα είναι γραμμικό χρονικά αμετάβλητο και υπακούει στην αρχή της υπέρθεσης, η έξοδος εξαιτίας του $x_1[n]$ πρέπει να είναι ίδια με την έξοδο εξαιτίας μόνο του $x[n]$. Αν το συνημίτονο προστεθεί σε κάθε γραμμή μιας εικόνας, είναι ορατό σαν κατακόρυφες ρίγες (Σχήμα 6-16 (α)).

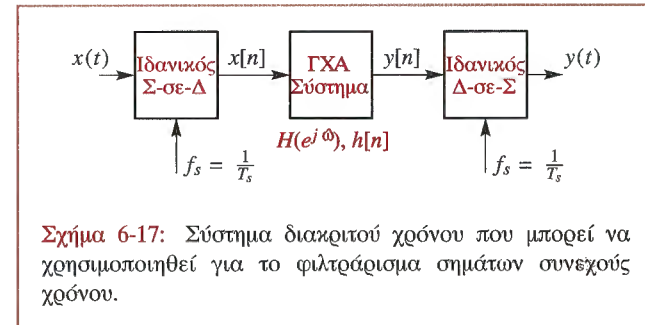
Όταν γίνεται επεξεργασία κάθε γραμμής από ένα φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής, το συνημίτονο θα απομακρυνθεί, αλλά η εικόνα θα θολώσει οριζοντίως (Σχήμα 6-16 (β)).

⁵Μια προσεκτική σύγκριση αποκαλύπτει ότι υπάρχει μια μικρή διαφορά στην περιοχή μετάβασης $0 \leq n \leq 9$.



6-8 Φιλτράροντας Δειγματοληπτημένα Σήματα Συνεχούς Χρόνου

Τα φίλτρα διακριτού χρόνου μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να φιλτράρουν σήματα συνεχούς χρόνου τα οποία έχουν δειγματοληπτηθεί. Σε αυτή την ενότητα, μελετάμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της απόκρισης συχνότητας του φίλτρου διακριτού χρόνου και της ενεργούς απόκρισης συχνότητας που εφαρμόζεται στο σήμα συνεχούς χρόνου. Όταν η είσοδος ενός συστήματος διακριτού χρόνου είναι μια ακολουθία που έχει προκύψει από τη δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας πάνω στην δειγματοληψία και στην ανακατασκευή για να ερμηνεύσουμε την επίδραση του φίλτρου πάνω στο αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου.



Ας θεωρήσουμε το σύστημα που απεικονίζεται στο Σχήμα 6-17 και ας υποθέσουμε ότι η είσοδος είναι το μιγαδικό ημίτονο

$$x(t) = X e^{j\omega t}$$

με $X = A e^{j\phi}$. Μετά την δειγματοληψία, η ακολουθία εισόδου στο φίλτρο διακριτού χρόνου είναι η ακόλουθη:

$$x[n] = x(nT_s) = X e^{j\omega n T_s} = X e^{j\omega n}$$



Επίδειξη: Συνδεδεσμένες FIR Φίλτρων σε Σειρά

Η σχέση μεταξύ της συχνότητας διακριτού χρόνου $\hat{\omega}$ και των συχνοτήτων συνεχούς χρόνου ω και f είναι:

$$\hat{\omega} = \omega T_s = \frac{2\pi f}{f_s} \quad (6.32)$$

Αν η συχνότητα του σήματος συνεχούς χρόνου ικανοποιεί την συνθήκη του θεωρήματος δειγματοληψίας, δηλαδή, $|\omega| < \pi/T_s$, τότε δεν θα υπάρξει καμία αναδίπλωση και η κανονικοποιημένη συχνότητα διακριτού χρόνου είναι τέτοια ώστε $|\hat{\omega}| < \pi$.

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος διακριτού χρόνου μας δίνει ένα γρήγορο τρόπο για να υπολογίσουμε την έξοδο $y[n]$ του συστήματος του Σχήματος 6-17.

$$y[n] = H(e^{j\hat{\omega}})X e^{j\hat{\omega}n}$$

Αν τώρα κάνουμε την αντικατάσταση $\hat{\omega} = \omega T_s$, τότε μπορούμε να εκφράσουμε την έξοδο $y[n]$ σε σχέση με την αναλογική συχνότητα ω ως ακολούθως:

$$y[n] = H(e^{j\omega T_s})X e^{j\omega T_s n}$$

Τελικά, αφού δεν συνέβη καμία αναδίπλωση κατά την αρχική δειγματοληψία, ο ιδανικός μετατροπέας διακριτού σήματος σε συνεχές θα ανακατασκευάσει την αρχική συχνότητα, δίνοντας

$$y(t) = H(e^{j\omega T_s})X e^{j\omega t}$$

Θυμηθείτε ότι αυτός ο τύπος για την έξοδο $y(t)$ είναι σωστός μόνο για συχνότητες οι οποίες ικανοποιούν $-\pi/T_s < \omega < \pi/T_s$ και υπενθυμίζεται ότι ο ιδανικός μετατροπέας διακριτού σήματος σε συνεχές, ανακατασκευάζει όλες τις συνιστώσες ψηφιακών συχνοτήτων που ανήκουν στη ζώνη $|\hat{\omega}| < \pi$ ως αναλογικές συχνότητες στην ζώνη $|\omega| < \pi/T_s$. Όσο δεν υπάρχει αναδίπλωση, το σύνολο συχνοτήτων του σήματος εισόδου $x(t)$ ταυριάζει με το σύνολο συχνοτήτων της εξόδου $y(t)$. Έτσι, το συνολικό σύστημα του Σχήματος 6-17 συμπεριφέρεται σαν να είναι ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα

συνεχούς χρόνου του οποίου η απόκριση συχνότητας είναι $H(e^{j(\omega T_s)})$.

Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουμε την ανάλυση του συστήματος του Σχήματος 6-17. Μόλις δειξαμε ότι το σύστημα του Σχήματος 6-17 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτελεστούν λειτουργίες γραμμικού χρονικά αμετάβλητου φιλτραρίσματος σε σήματα συνεχούς χρόνου. Επιπλέον, είναι φανερό από την ανάλυση αυτή ότι το σχηματικό διάγραμμα του Σχήματος 6-17 αντιπροσωπεύει έναν άπειρο αριθμό συστημάτων. Αυτό είναι σωστό για δύο λόγους. Πρώτον, για κάθε δοσμένο σύστημα διακριτού χρόνου, μπορούμε να αλλάξουμε την περίοδο δειγματοληψίας T_s (αποφεύγοντας βέβαια την αναδίπλωση της εισόδου) και να αποκτήσουμε ένα νέο σύστημα. Εναλλακτικά, αν σταθεροποιήσουμε την περίοδο δειγματοληψίας, μπορούμε να αλλάξουμε το σύστημα διακριτού χρόνου ώστε να μεταβάλλει την συνολική απόκριση. Σε μια ειδική περίπτωση, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να διαλέξουμε τον ρυθμό δειγματοληψίας ώστε να αποφύγουμε την αναδίπλωση και στη συνέχεια να σχεδιάσουμε ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο φίλτρο διακριτού χρόνου του οποίου η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega T_s})$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες επιλογής συχνοτήτων.



Άσκηση 6.6: Γενικά, όταν χρησιμοποιούμε το σύστημα του Σχήματος 6-17 για να φιλτράρουμε σήματα συνεχούς χρόνου, θα επιθυμούσαμε να διαλέξουμε την συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 1/T_s$ να είναι όσο το δυνατόν χαμηλότερη. Γιατί;

6-8.1 Παράδειγμα: Κατωπερατό Φίλτρο Τρέχουσας Μέσης Τιμής

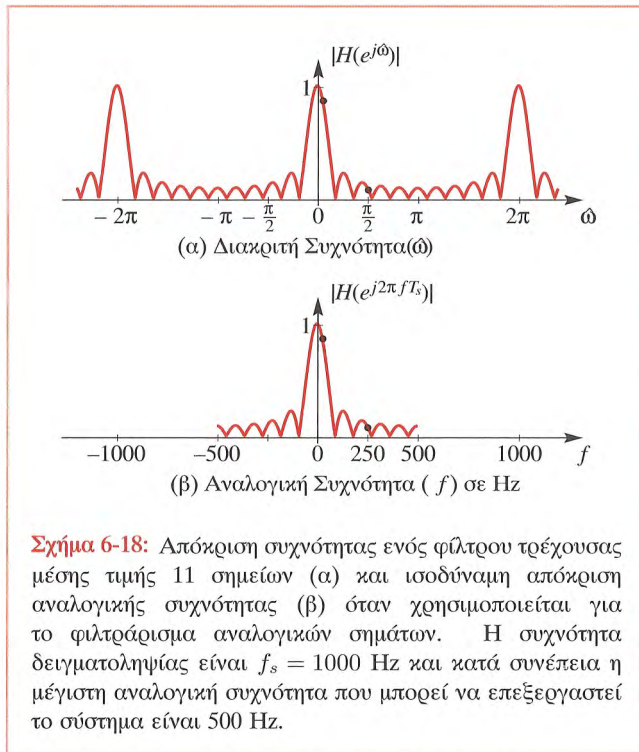
Ως παράδειγμα, χρησιμοποιούμε στη θέση του φίλτρου του Σχήματος 6-17, το ακόλουθο φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής 11 σημείων

$$y[n] = \frac{1}{11} \sum_{k=0}^{10} x[n-k].$$

Η απόκριση συχνότητας αυτού του συστήματος διακριτού χρόνου είναι η ακόλουθη:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin(\hat{\omega}11/2)}{11 \sin(\hat{\omega}/2)} e^{-j\hat{\omega}5}$$

Το μέτρο αυτής της απόκρισης συχνότητας φαίνεται στο



πάνω μέρος του Σχήματος 6-18.

Υποθέτοντας ότι χρησιμοποιείται το σύστημα αυτό στη θέση του συστήματος διακριτού χρόνου του Σχήματος 6-17 με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 1000$, θέλουμε να απαντήσουμε στις ακόλουθες ερωτήσεις: Ποιά είναι η

ισοδύναμη απόκριση αναλογικής συχνότητας και πώς θα επιδράσει το σύστημα στο σήμα

$$x(t) = \cos(2\pi(25)t) + \sin(2\pi(250)t);$$

Η απάντηση στην ερώτηση για την απόκριση συχνότητας είναι εύκολη. Η ισοδύναμη απόκριση αναλογικής συχνότητας θα είναι:

$$H(e^{j\omega T_s}) = H(e^{j\omega/1000}) = H(e^{j2\pi f/1000})$$

όπου η συχνότητα f είναι σε Hz. Η γραφική παράσταση της απόκρισης συχνότητας συναρτήσει της αναλογικής συχνότητας f , φαίνεται στο κάτω μέρος του Σχήματος 6-18. Παρατηρήστε ότι η απόκριση συχνότητας του συνολικού συστήματος σταματάει απότομα στο $|f| = f_s/2 = 500$ Hz, αφού ο ιδανικός μετατροπέας διακριτού σήματος σε συνεχές δεν ανακατασκευάζει συχνότητες μεγαλύτερες του $f_s/2$.

Η απάντηση στη δεύτερη ερώτηση είναι επίσης εύκολη αν παρακολουθήσουμε τις δυο συχνότητες του σήματος εισόδου μέσω των τριών συστημάτων του Σχήματος 6-17. Η είσοδος $x(t)$ περιέχει τις συχνότητες $\omega = 2\pi(25)$ και $\omega = 2\pi(250)$. Αφού $f_s = 1000 > 2(250) > 2(25)$, δεν υπάρχει καμία αναδίπλωση⁶, έτσι οι ίδιες συχνότητες εμφανίζονται στο σήμα εξόδου $y(t)$. Οι αλλαγές στο μέτρο και στη φάση βρίσκονται υπολογίζοντας την ισοδύναμη απόκριση συχνότητας στα 25 και στα 250 Hz αντίστοιχα.

$$\begin{aligned} H(e^{j2\pi(25)/1000}) &= \frac{\sin(\pi(25)(11)/1000)}{11 \sin(\pi(25)/1000)} e^{-j2\pi(25)(5)/1000} \\ &= 0.8811e^{-j\pi/4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(e^{j2\pi(250)/1000}) &= d\text{sty} \frac{\sin(\pi(250)(11)/1000)}{11 \sin(\pi(250)/1000)} e^{-j2\pi(250)(5)/1000} \\ &= 0.0909e^{-j\pi/2} \end{aligned}$$

⁶Όταν υπάρχει αναδίπλωση το σήμα εξόδου $y(t)$ θα έχει διαφορετικές συχνότητες από την είσοδο.

Οι τιμές αυτές μπορούν να επαληθευτούν από τις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 6-18. Έτσι η τελική έξοδος είναι

$$y(t) = 0.8811 \cos(2\pi(25)t - \pi/4) + 0.0909 \sin(2\pi(250)t - \pi/2)$$

Τα κατωπερατά χαρακτηριστικά του φίλτρου έχουν μειώσει σημαντικά την συνιστώσα των 250 Hz, ενώ η συνιστώσα των 25 Hz έχει υποστεί μόνο μια μικρή μείωση αφού βρίσκεται κοντά στα 0 Hz και ανήκει στη ζώνη διάβασης του φίλτρου.



Άσκηση 6.7: Θεωρήστε το ίδιο σήμα εισόδου και το ίδιο σύστημα διακριτού χρόνου. Μελετήστε ξανά το παράδειγμα αυτής της ενότητας, αλλά χρησιμοποιήστε ρυθμό δειγματοληψίας $f_s = 500$ Hz.

6-8.2 Ερμηνεία της Καθυστέρησης

Έχουμε δει ότι η απόκριση συχνότητας της μορφής $H(e^{j\hat{\omega}}) = e^{-j\hat{\omega}n_0}$ συνεπάγεται μια χρονική καθυστέρηση n_0 δειγμάτων. Αν n_0 ένας ακέραιος, η ερμηνεία είναι προφανής. Αν η είσοδος του συστήματος είναι $x[n]$, η αντίστοιχη έξοδος είναι $y[n] = x[n - n_0]$. Όμως, αν το n_0 δεν είναι ακέραιος, η ερμηνεία είναι λιγότερο προφανής. Ένα παράδειγμα που μπορεί να συμβεί αυτό είναι το σύστημα τρέχουσας μέσης τιμής L σημείων του οποίου η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = D_L(e^{j\hat{\omega}})e^{-j\hat{\omega}(L-1)/2}$$

όπου $D_L(e^{j\hat{\omega}})$ είναι η πραγματική συνάρτηση

$$D_L(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin(\hat{\omega}L/2)}{L \sin(\hat{\omega}/2)}$$

Έτσι, το φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής L -σημείων περιλαμβάνει μια καθυστέρηση $\frac{1}{2}(L-1)$ δειγμάτων. Αν το L είναι ένας περιττός ακέραιος, αυτή η καθυστέρηση μετατοπίζει την έξοδο κατά $\frac{1}{2}(L-1)$ δείγματα σε σχέση με

την είσοδο. Όμως, αν το L είναι ένας άρτιος ακέραιος, τότε το $\frac{1}{2}(L-1)$ δεν είναι ακέραιος. Η ανάλυση που κάνουμε σ' αυτή την ενότητα προσφέρει μια χρήσιμη ερμηνεία του παράγοντα καθυστέρησης.

Υποθέστε ότι η είσοδος του ιδανικού μετατροπέα διακριτού σήματος σε συνεχές είναι

$$x(t) = X e^{j\omega t}$$

και ότι δεν υπάρχει αναδίπλωση. Έτσι, η είσοδος στο σύστημα τρέχουσας μέσης τιμής L -σημείων θα είναι

$$x[n] = X e^{j\omega n T_s} = X e^{j\hat{\omega} n}$$

όπου $\hat{\omega} = \omega T_s$. Η έξοδος τώρα του συστήματος τρέχουσας μέσης τιμής L -σημείων είναι

$$y[n] = H(e^{j\hat{\omega}}) X e^{j\hat{\omega} n} = D_L(e^{j\hat{\omega}}) e^{-j\hat{\omega}(L-1)/2} X e^{j\hat{\omega} n}$$

Τέλος, αν $\omega < \pi/T_s$ (δηλαδή αν δεν συμβαίνει αναδίπλωση κατά την δειγματοληψία), τότε ο ιδανικός μετατροπέας θα ανακατασκευάσει το μιγαδικό εκθετικό σήμα

$$\begin{aligned} y(t) &= D_L(e^{j\hat{\omega}}) X e^{-j\hat{\omega}(L-1)/2} e^{j\omega t} \\ &= D_L(e^{j\omega T_s}) X e^{-j\omega T_s(L-1)/2} e^{j\omega t} \\ &= D_L(e^{j\omega T_s}) X e^{j\omega(t - T_s(L-1)/2)} \end{aligned}$$

Έτσι, ανεξάρτητα από το αν το $\frac{1}{2}(L-1)$ είναι ή δεν είναι ακέραιος, ο παράγοντας καθυστέρησης $e^{-j\hat{\omega}(L-1)/2}$ αντιστοιχεί σε μια καθυστέρηση $\frac{1}{2}T_s(L-1)$ δευτερολέπτων σε σχέση με τα σήματα συνεχούς χρόνου που δειγματοληπούνται με περίοδο δειγματοληψίας T_s .

Παράδειγμα 6-11: Χρονική Καθυστέρηση ενός FIR Φίλτρου

Για να κατανοήσουμε την επίδραση της μη ακέραιας καθυστέρησης με το φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής, θεωρήστε το συνημιτονικό σήμα $x[n] = \cos(0.2\pi n)$, το οποίο θα μπορούσε να προκύψει στο Σχήμα 6-17 από την

δειγματοληψία του σήματος $x(t) = \cos(200\pi t)$ με ρυθμό δειγματοληψίας $f_s = 1000$ Hz. Το Σχήμα 6-19 (α) δείχνει τα $x(t)$ και $x[n]$. Αν το $x[n]$ είναι η είσοδος ενός συστήματος τρέχουσας μέσης τιμής 5- σημείων, το τμήμα της εξόδου που αντιστοιχεί στην απόκριση μόνιμης κατάστασης του συστήματος, είναι

$$\begin{aligned} y_5[n] &= \frac{\sin(0.2\pi(5/2))}{5 \sin(0.2\pi/2)} \cos(0.2\pi n - 0.2\pi(2)) \\ &= 0.6472 \cos(0.2\pi(n - 2)) \end{aligned}$$

Για αυτή την έξοδο του συστήματος, η έξοδος του μετατροπέα του Σχήματος 6-17 (β) θα ήταν

$$y_5(t) = 0.6472 \cos(200\pi(t - 0.002))$$

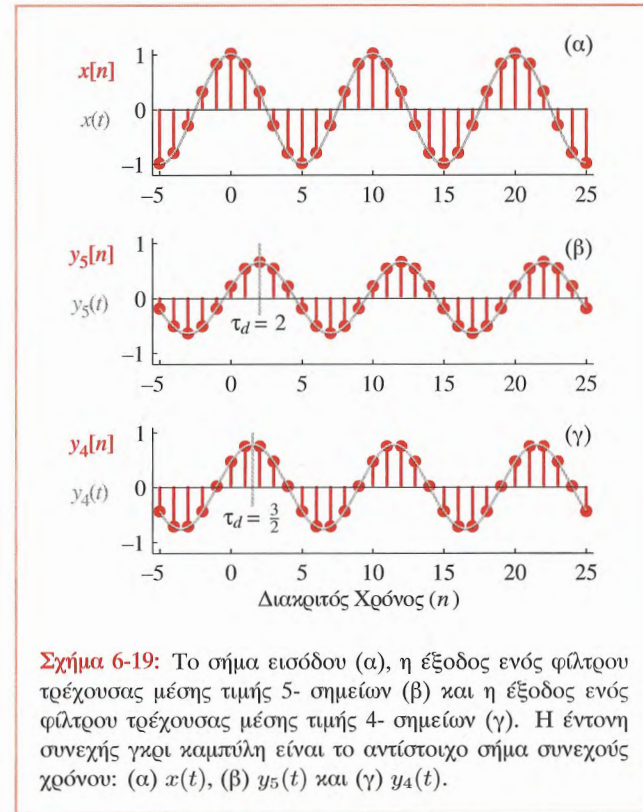
Η καθυστέρηση είναι 2 δείγματα. Από την άλλη πλευρά, αν το ίδιο σήμα $x[n]$ εφαρμοστεί στην είσοδο ενός συστήματος τρέχουσας μέσης τιμής 4-σημείων, το τμήμα της εξόδου που αντιστοιχεί στην απόκριση μόνιμης κατάστασης του συστήματος (Σχήμα 6-19 (γ)) είναι

$$\begin{aligned} y_4[n] &= \frac{\sin(0.2\pi(4/2))}{4 \sin(0.2\pi/2)} \cos(0.2\pi n - 0.2\pi(3/2)) \\ &= 0.7694 \cos(0.2\pi(n - \frac{3}{2})) \end{aligned}$$

Η καθυστέρηση τώρα είναι $3/2$ δείγματα, και έτσι δεν μπορούμε να γράψουμε το $y_4[n]$ σαν μια ακέραια μετατόπιση σε σχέση με την ακολουθία εισόδου. Σε αυτή την περίπτωση, η καθυστέρηση των “ $3/2$ δειγμάτων” που εισάγεται από το σύστημα μπορεί να ερμηνευτεί σύμφωνα με την αντίστοιχη έξοδο του μετατροπέα του Σχήματος 6-17(γ), η οποία στην περίπτωση αυτή θα ήταν

$$y_4(t) = 0.7694 \cos(200\pi(t - 0.0015))$$

Το Σχήμα 6-19 δείχνει την είσοδο και τις αντίστοιχες εξόδους $y_5[n]$ και $y_5(t)$ καθώς και τις $y_4[n]$ και $y_4(t)$. Σε κάθε περίπτωση, η συνεχής καμπύλη αντιστοιχεί στο συνεχές χρόνο συνημιτονικό σήμα το οποίο θα ανακατασκευαζόταν από τον ιδανικό μετατροπέα



Σχήμα 6-19: Το σήμα εισόδου (α), η έξοδος ενός φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής 5- σημείων (β) και η έξοδος ενός φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής 4- σημείων (γ). Η έντονη συνεχής γκρι καμπύλη είναι το αντίστοιχο σήμα συνεχούς χρόνου: (α) $x(t)$, (β) $y_5(t)$ και (γ) $y_4(t)$.

ψηφιακού σήματος σε αναλογικό για το δοσμένο σήμα διακριτού χρόνου. ■

Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

1. Και οι δύο εξοδοί είναι μικρότερες από την είσοδο. Αυτό συμβαίνει γιατί και στις δύο περιπτώσεις $D_L(e^{j0.2\pi}) < 1$.
2. Οι κάθετες γκρι γραμμές στις δύο χαμηλότερες γραφικές παραστάσεις δείχνουν τις ακμές των συνημιτονικών σημάτων εξόδου που αντιστοιχούν στην ακμή της εισόδου την χρονική στιγμή $n=0$. Παρατηρήστε ότι η καθυστέρηση είναι $(5 - 1)/2 = 2$ δείγματα

για το φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής 5-σημείων και $(4 - 1)/2 = 3/2$ δείγματα για το φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής 4-σημείων.

3. Ουσιαστικά η κλασματική καθυστέρηση αντιστοιχεί σε παρεμβολή του συνημιτονικού σήματος σε σημεία στο μέσον μεταξύ των αρχικών δειγμάτων.

6-9 Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι

Αυτό το κεφάλαιο εισήγαγε την έννοια της απόκρισης συχνότητας για την κλάση των FIR φίλτρων. Η απόκριση συχνότητας εφαρμόζεται σε κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα, όπως θα δούμε και στα επόμενα κεφάλαια. Η Γραφική Διεπαφή Χρήστη του Matlab που φαίνεται στο Σχήμα 6-20 ενσωματώνει τα βασικά αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου. Δείχνει ότι ο υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας είναι αρκετός για να προβλέψουμε πώς θα επιδράσει ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα πάνω σε μια ημιτονοειδή διέγερση. Όταν το φίλτρο αλλάζει, αλλάζει η απόκριση συχνότητας και έτσι οι συνιστώσες της ημιτονικής συχνότητας αντιμετωπίζονται με διαφορετικό τρόπο.



Επίδειξη: *DLTI: Ημιτονικές εισοδοί-έξοδοι*

Αυτό το κεφάλαιο διεύρυνε τη συζήτηση που κάναμε στο Κεφαλαίο 5, το οποίο εισήγαγε τα βασικά στοιχεία για τα FIR φίλτρα. Ιδιαίτερα οι εργαστηριακές ασκήσεις, απαιτούν ο φοιτητής να γνωρίζει τα θέματα που διαπραγματεύθηκαν στα δυο αυτά κεφάλαια. Η Εργαστηριακή Άσκηση #8 είναι ένα πείραμα με την απόκριση συχνότητας των FIR φίλτρων.



Εργ. Ασκ.: #8 Ζωνοπερατά Φίλτρα και Φίλτρα Ακύρωσης

Δύο επιπλέον εργαστηριακές ασκήσεις που αναφέρονται στο φιλτράρισμα των FIR συστημάτων βρίσκονται μετά το Κεφάλαιο 7 στο CD-ROM. Η Εργαστηριακή Άσκηση

#9 χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα της Εργαστηριακής Άσκησης #8 για την υλοποίηση ενός συστήματος που αποκωδικοποιεί τονικά σήματα αφής. Τέλος, η Εργαστηριακή Άσκηση #10 χρησιμοποιεί φίλτρα για να υλοποιήσει ένα σύστημα που προσδιορίζει ποια νότα παίζεται σε ένα πιάνο.



Εργ. Ασκ.: #9 Τονικά Σήματα Αφής



Εργ. Ασκ.: #10 Φιλτράρισμα Μουσικής Οκτάβας

Το CD-ROM περιέχει επίσης τις ακόλουθες επιδείξεις κατωπερατού και υψηπερατού φιλτραρίσματος:

- (i) Φιλτράρισμα φωτογραφιών για να δείξουμε ότι το κατωπερατό φιλτράρισμα θολώνει ενώ το υψηπερατό βελτιώνει τις εικόνες.
- (ii) Σειριακή επεξεργασία εικόνων για να δείξουμε ότι ένα υψηπερατό φίλτρο μπορεί να ακυρώσει τις συνέπειες ενός κατωπερατού φίλτρου.



Επίδειξη: *Συνδέοντας σε Σειρά FIR Φίλτρα*

- (iii) Φιλτράρισμα ηχητικών σημάτων για την απεικόνιση της έμφασης του μπάσου και του τρέμουλου.



Επίδειξη: *FIR Συστήματα*

Τέλος, υπενθυμίζεται στον αναγνώστη ο μεγάλος αριθμός λυμένων ασκήσεων που υπάρχουν στο CD-ROM που είναι διαθέσιμες για επανάληψη και εξάσκηση.

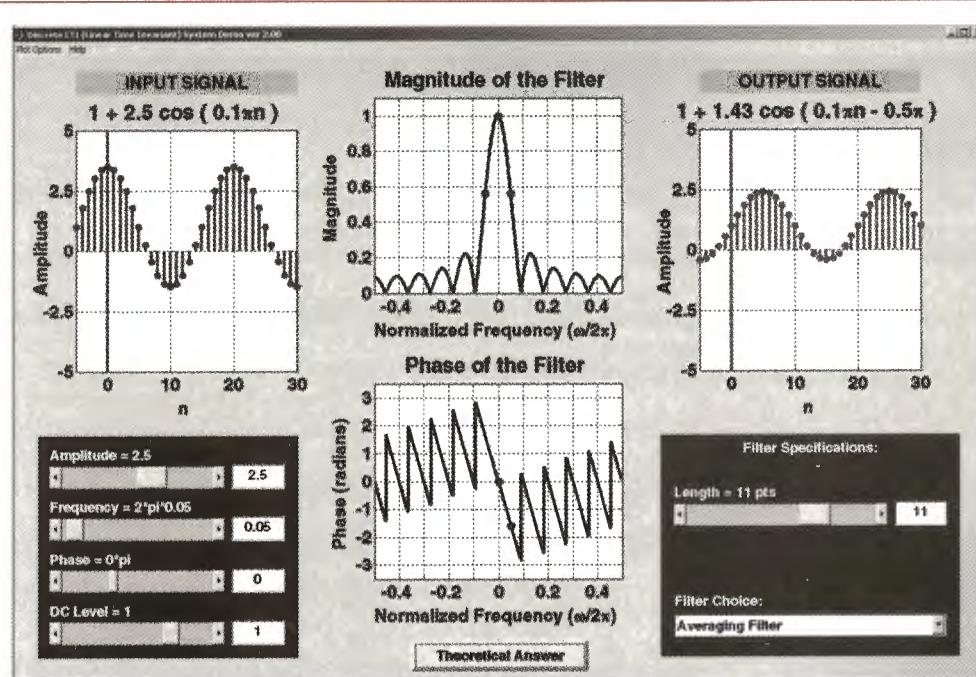


Υπόδειξη: *Εκατοντάδες Λυμένων Προβλημάτων*

6-10 Προβλήματα

Πρόβλημα.-6.1 Υποθέστε ότι το σήμα εισόδου ενός FIR συστήματος είναι

$$x[n] = e^{j(0.4\pi n - 0.5\pi)}$$



Σχήμα 6-20: Γραφική διεπαφή χρήστη για το DLTIdemo που διασαφηνίζει την έννοια *ημιτονική είσοδος παράγει ημιτονική έξοδο*. Ο χρήστης μπορεί να επιλέξει το ΓΧΑ σύστημα όπως επίσης και την συχνότητα, το πλάτος και την φάση της ημιτονικής εισόδου που επιθυμεί να χρησιμοποιήσει.

Αν ορίσουμε ένα νέο σήμα $y[n]$ να είναι οι διαφορές πρώτης τάξης $y[n] = x[n] - x[n - 1]$, είναι δυνατό να εκφράσουμε το $y[n]$ στην μορφή

$$y[n] = Ae^{j(\omega_0 n + \phi)}$$

Καθορίστε τις αριθμητικές τιμές των A , ϕ , και ω_0 .

Πρόβλημα.-6.2 Υποθέστε ότι ένα σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση εισόδου-εξόδου

$$y[n] = (x[n])^2$$

(i) Καθορίστε την έξοδο όταν η είσοδος είναι το μιγαδικό εκθετικό σήμα

$$x[n] = Ae^{j\phi} e^{j\omega n}$$

(ii) Είναι η έξοδος της μορφής

$$y[n] = H(e^{j\omega}) Ae^{j\phi} e^{j\omega n};$$

Αν όχι, γιατί;

Πρόβλημα.-6.3 Υποθέστε ότι ένα σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από την σχέση εισόδου-εξόδου

$$y[n] = x[-n]$$

- (i) Καθορίστε την έξοδο όταν η είσοδος είναι το μιγαδικό εκθετικό σήμα

$$x[n] = Ae^{j\phi} e^{j\omega n}$$

- (ii) Είναι η έξοδος της μορφής

$$y[n] = H(e^{j\omega}) Ae^{j\phi} e^{j\omega n}$$

Αν όχι, γιατί;

Πρόβλημα.-6.4 Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$y[n] = 2x[n] - 3x[n-1] + 2x[n-2]$$

- (i) Βρείτε την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ και στη συνέχεια εκφράστε σε πολικές συντεταγμένες (μέτρο και φάση).
- (ii) Η $H(e^{j\omega})$ είναι μια περιοδική συνάρτηση του ω . Προσδιορίστε την περίοδο της.
- (iii) Σχεδιάστε το μέτρο και την φάση της $H(e^{j\omega})$ συναρτήσει του ω για $-\pi < \omega < 3\pi$. Κάντε το πρώτα με το χέρι και μετά επαληθεύστε το χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `freqz` του Matlab.
- (iv) Βρείτε όλες τις συχνότητες $\hat{\omega}$, για τις οποίες η απόκριση εξόδου στην είσοδο $e^{j\hat{\omega}n}$ είναι μηδέν.
- (v) Όταν η είσοδος του συστήματος είναι η $x[n] = \sin(\pi n/13)$, καθορίστε το σήμα εξόδου και εκφράστε το στην ακόλουθη μορφή $y[n] = A \cos(\hat{\omega}_0 n + \phi)$.

Πρόβλημα.-6.5 Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο φίλτρο περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

- (i) Βρείτε μια έκφραση της απόκρισης συχνότητας αυτού του συστήματος.

- (ii) Σχεδιάστε την απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) ως μια συνάρτηση της συχνότητας.

- (iii) Καθορίστε την έξοδο όταν η είσοδος είναι $x[n] = 10 + 4 \cos(0.5\pi n + \pi/4)$.

- (iv) Καθορίστε την έξοδο όταν η είσοδος είναι η μοναδιαία κρουστική ακολουθία, $\delta[n]$.

- (v) Καθορίστε την έξοδο όταν η είσοδος είναι η μοναδιαία βηματική ακολουθία, $u[n]$.

Πρόβλημα.-6.6 Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο φίλτρο περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] - x[n-2]$$

- (i) Βρείτε μια έκφραση της απόκρισης συχνότητας αυτού του συστήματος.
- (ii) Σχεδιάστε την απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) συναρτήσει της συχνότητας.
- (iii) Καθορίστε την έξοδο όταν η είσοδος είναι $x[n] = 4 + \cos(0.25\pi n - \pi/4)$.
- (iv) Το σήμα $x_1[n] = (4 + \cos(0.25\pi n - \pi/4)) u[n]$ είναι μηδέν για $n < 0$, έτσι “ξεκινάει” τη χρονική στιγμή $n = 0$. Αν το σήμα εισόδου είναι το $x_1[n]$, για ποιες τιμές του n η αντίστοιχη έξοδος θα είναι ίση με την έξοδο που βρήκατε στο (iii);

Πρόβλημα.-6.7 Για καθεμία από τις ακόλουθες αποκρίσεις συχνότητας καθορίστε την αντίστοιχη κρουστική απόκριση

(i) $H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j3\omega}$

(ii) $H(e^{j\omega}) = 2e^{-j3\omega} \cos(\omega)$

(iii) $H(e^{j\omega}) = e^{-j4.5\omega} \frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega/2)}$

Πρόβλημα-6.8 Η απόκριση συχνότητας ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου φίλτρου δίνεται από τη σχέση

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = (1 + e^{-j\hat{\omega}})(1 - e^{j2\pi/3}e^{-j\hat{\omega}})(1 - e^{-j2\pi/3}e^{-j\hat{\omega}})$$

- (i) Γράψτε την εξίσωση διαφορών που δίνει τη σχέση μεταξύ της εισόδου $x[n]$ και της εξόδου $y[n]$.
- (ii) Ποια είναι η έξοδος αν η είσοδος είναι $x[n] = \delta[n]$;
- (iii) Αν η είσοδος είναι της μορφής $x[n] = Ae^{j\phi}e^{j\hat{\omega}n}$, για ποιες τιμές του $-\pi \leq \hat{\omega} \leq \pi$ θα είναι $y[n] = 0$ για κάθε n ;

Πρόβλημα-6.9 Η απόκριση συχνότητας ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου φίλτρου δίνεται από τη σχέση

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = (1 - e^{-j\hat{\omega}})(1 - \frac{1}{2}e^{j\pi/6}e^{-j\hat{\omega}})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi/6}e^{-j\hat{\omega}})$$

- (i) Γράψτε την εξίσωση διαφορών που δίνει τη σχέση μεταξύ της εισόδου $x[n]$ και της εξόδου $y[n]$.
- (ii) Ποια είναι η έξοδος αν η είσοδος είναι $x[n] = \delta[n]$;
- (iii) Αν η είσοδος είναι της μορφής $x[n] = Ae^{j\phi}e^{j\hat{\omega}n}$, για ποιες τιμές του $-\pi < \hat{\omega} \leq \pi$ θα είναι $y[n] = 0$ για κάθε n ;

Πρόβλημα-6.10 Υποθέστε ότι το \mathcal{S} είναι ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα του οποίου η ακριβής μορφή είναι άγνωστη. Έχει δοκιμαστεί παρατηρώντας τα σήματα εξόδου που αντιστοιχούν σε ξεχωριστές διαφορετικές δοκιμαστικές εισόδους. Υποθέστε ότι τα ακόλουθα ζευγάρια εισόδου-εξόδου ήταν τα αποτελέσματα των δοκιμών:

Είσοδος: $x[n]$	Έξοδος: $y[n]$
$\delta[n]$	$\delta[n] - \delta[n - 3]$
$\cos(2\pi n/3)$	0
$\cos(\pi n/3 + \pi/2)$	$2 \cos(\pi n/3 + \pi/2)$

- (i) Σχεδιάστε την γραφική παράσταση του σήματος $x[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n - 2] + \delta[n - 3]$.
- (ii) Καθορίστε την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι $x[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n - 2] + \delta[n - 3]$ και σχεδιάστε την γραφική της παράσταση.
- (iii) Καθορίστε την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι $x[n] = \cos(\pi(n - 3)/3)$.
- (iv) Η απόκριση συχνότητας ικανοποιεί ή όχι την ακόλουθη συνθήκη;

$$H(e^{j(\pi/2)}) = 0$$

Εξηγήστε.

Πρόβλημα-6.11 Η συνάρτηση Dirichlet ορίζεται από τη σχέση

$$D_L(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin(L\hat{\omega}/2)}{L \sin(\hat{\omega}/2)}$$

Για την περίπτωση του $L = 8$:

- (i) Σχεδιάστε την γραφική παράσταση του $D_8(e^{j\hat{\omega}})$ στο διάστημα $-3\pi \leq \hat{\omega} \leq +3\pi$. Σημειώστε όλα τα σημεία μηδενισμού.
- (ii) Καθορίστε την περίοδο της $D_8(e^{j\hat{\omega}})$.
- (iii) Βρείτε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

Πρόβλημα-6.12 Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο φίλτρο περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] - 3x[n - 1] + 3x[n - 2] - x[n - 3]$$

- (i) Βρείτε μια έκφραση για την απόκριση συχνότητας αυτού του συστήματος και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $(1 - a)^3 = 1 - 3a + 3a^2 - a^3$, δείξτε ότι η $H(e^{j\hat{\omega}})$ μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = 8 \sin^3(\hat{\omega}/2) e^{j(-\pi/2 - 3\hat{\omega}/2)}$$

- (ii) Σχεδιάστε την απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) συναρτήσει της συχνότητας.
- (iii) Ποια είναι η έξοδος αν η είσοδος είναι η $x[n] = 10 + 4 \cos(0.5\pi n + \pi/4)$;
- (iv) Ποια είναι η έξοδος αν η είσοδος είναι η $x[n] = \delta[n]$;
- (v) Χρησιμοποιήστε την αρχή της υπέρθεσης για να βρείτε την έξοδο όταν $x[n] = 10 + 4 \cos(0.5\pi n + \pi/4) + 5\delta[n - 3]$.

Πρόβλημα.-6.13 Υποθέστε ότι τρία συστήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά, δηλαδή, η έξοδος του S_1 είναι είσοδος στο S_2 , και η έξοδος του S_2 είναι είσοδος στο S_3 . Αυτά τα τρία συστήματα καθορίζονται ως εξής:

$$S_1: y_1[n] = x_1[n] - x_1[n - 1]$$

$$S_2: y_2[n] = x_2[n] + x_2[n - 2]$$

$$S_3: y_3[n] = x_3[n - 1] + x_3[n - 2]$$

όπου η έξοδος του S_i είναι η $y_i[n]$ και η είσοδό του είναι η $x_i[n]$.

- (i) Καθορίστε το ισοδύναμο σύστημα από την είσοδο $x[n]$ (στο S_1) στην έξοδο $y[n]$, η οποία είναι η έξοδος του S_3 . Άρα, η $x[n]$ είναι η $x_1[n]$ και η $y[n]$ είναι η $y_3[n]$.
- (ii) Χρησιμοποιήστε την απόκριση συχνότητας για να γράψετε μια εξίσωση διαφορών η οποία προσδιορίζει το συνολικό σύστημα σε σχέση μόνο με το $x[n]$ και το $y[n]$.

Πρόβλημα.-6.14 Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο φίλτρο περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{1}{4} (x[n] + x[n - 1] + x[n - 2] + x[n - 3])$$

- (i) Ποια είναι η κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος;

- (ii) Βρείτε μια έκφραση της απόκρισης συχνότητας του συστήματος.
- (iii) την απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) σαν συνάρτηση της συχνότητας.
- (iv) Υποθέστε ότι η είσοδος είναι

$$x[n] = 5 + 4 \cos(0.2\pi n) + 3 \cos(0.5\pi n)$$

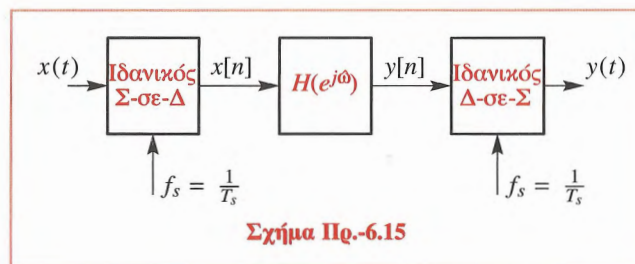
για $-\infty < n < \infty$. Βρείτε μια έκφραση της εξόδου στην μορφή $y[n] = A + B \cos(\omega_0 n + \phi_0)$.

- (v) Υποθέστε ότι η είσοδος είναι η

$$x_1[n] = [5 + 4 \cos(0.2\pi n) + 3 \cos(0.5\pi n)] u[n]$$

όπου $u[n]$ η μοναδιαία βηματική ακολουθία. Για ποιες τιμές του n η έξοδος $y_1[n]$ είναι ίση με την έξοδο $y[n]$ στο (iv);

Πρόβλημα.-6.15 Στο Σχήμα Πρ.-6.15, φαίνεται ένα σύστημα για φιλτράρισμα σημάτων συνεχούς χρόνου



Η είσοδος στον μετατροπέα συνεχούς σήματος σε διακριτό σε αυτό το σύστημα είναι

$$x(t) = 10 + 8 \cos(200\pi t) + 6 \cos(500\pi t + \pi/4)$$

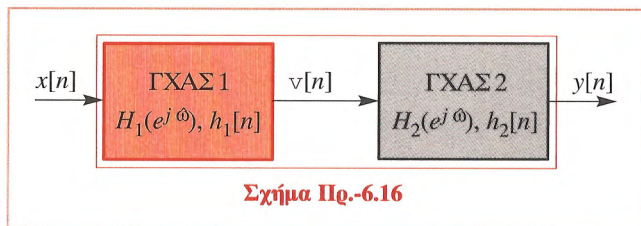
για $-\infty < t < \infty$. Η κρουστική απόκριση του γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος είναι

$$h[n] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \delta[n-k]$$

Αν $f_s = 1000$ δείγματα/δευτερόλεπτο, καθορίστε μια έκφραση για το $y(t)$, την έξοδο του μετατροπέα Δ-σε-Σ.

Υπόδειξη: Εδώ μπορούν να εφαρμοστούν, τα αποτελέσματα του Πρόβλημα.-6.14.

Πρόβλημα.-6.16 Το διάγραμμα που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-6.16 απεικονίζει την σύνδεση σε σειρά δυο γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων, όπου το πρώτο σύστημα είναι ένα φίλτρο κινούμενου μέσου όρου 3-σημείων και το δεύτερο είναι ένα σύστημα διαφορών πρώτης τάξης.



- (i) Αν η είσοδος είναι της μορφής $x[n] = 10 + x_1[n]$, η έξοδος, $y[n]$, του συνολικού συστήματος θα είναι της μορφής $y[n] = y_1[n]$, όπου $y_1[n]$ η έξοδος που οφείλεται μόνο στο $x_1[n]$. Εξηγήστε γιατί ισχύει αυτό.
- (ii) Καθορίστε την συνάρτηση απόκρισης συχνότητας του συνολικού συστήματος.
- (iii) Σχεδιάστε τις συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας (μέτρο και φάση) των μεμονωμένων συστημάτων και του συνολικού συστήματος για $-\pi < \hat{\omega} \leq \pi$.
- (iv) Βρείτε μια εξίσωση διαφορών που συσχετίζει το $y[n]$ με το $x[n]$ για το συνολικό σύστημα.

Πρόβλημα.-6.17 Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$y[n] = -x[n] + 2x[n-2] - x[n-4]$$

- (i) Βρείτε και σχεδιάστε την κρουστική απόκριση $h[n]$.
- (ii) Καθορίστε μια εξίσωση για την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}})$ και εκφράστε την στη μορφή

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = R(e^{j\hat{\omega}})e^{-j\hat{\omega}n_0}$$

όπου $R(e^{j\hat{\omega}})$ είναι μια πραγματική συνάρτηση και το n_0 ένας ακέραιος.

- (iii) Σχεδιάστε προσεκτικά τη γραφική παράσταση της $|H(e^{j\hat{\omega}})|$ για $-\pi < \hat{\omega} < \pi$.
- (iv) Σχεδιάστε προσεκτικά τη γραφική παράσταση της κύριας τιμής της $\angle H(e^{j\hat{\omega}})$ για $-\pi < \hat{\omega} \leq \pi$.

Πρόβλημα.-6.18 Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα έχει την ακόλουθη απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = (1 - e^{j\pi/2}e^{-j\hat{\omega}})(1 - e^{-j\pi/2}e^{-j\hat{\omega}})(1 + e^{-j\hat{\omega}})$$

Η είσοδος στο σύστημα είναι η

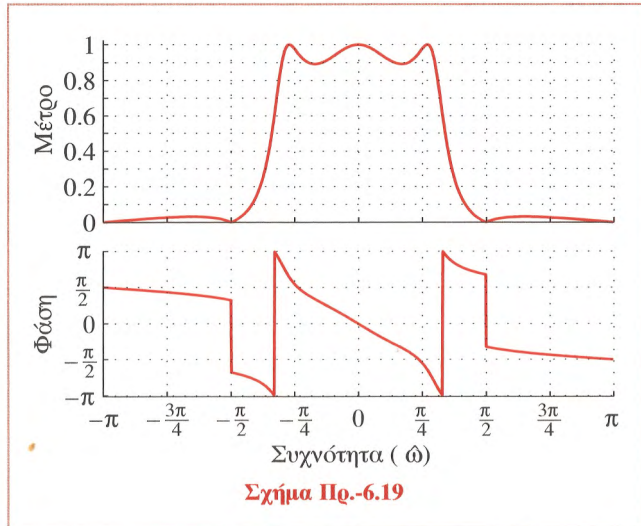
$$x[n] = 5 + 20 \cos(0.5\pi n + 0.25\pi) + 10\delta[n-3]$$

Χρησιμοποιήστε την αρχή της υπέρθεσης για να καθορίσετε την αντίστοιχη έξοδο $y[n]$ του γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος για $-\infty < n < \infty$.

Πρόβλημα.-6.19 Η απόκριση συχνότητας ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος είναι σχεδιασμένη στο Σχήμα Πρ.-6.19.

- (i) Χρησιμοποιήστε αυτές τις γραφικές παραστάσεις για να βρείτε την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι

$$x[n] = 10 + 10 \cos(0.2\pi n) + 10 \cos(0.5\pi n)$$



Σχήμα Πρ.-6.19

- (ii) Εξηγήστε γιατί η καμπύλη της φάσης της απόκρισης είναι ασυνεχής στις συχνότητες γύρω από το $\hat{\omega} = 2\pi(0.17)$ και γύρω από το $\hat{\omega} = 0.5\pi$.

Πρόβλημα.-6.20 Στην συνδεσμολογία σε σειρά που φαίνεται στο Πρόβλημα.-6.16, τα δυο συστήματα ορίζονται ως ακολούθως

$$H_1(e^{j\hat{\omega}}) = 1 + 2e^{-j\hat{\omega}} + e^{-j\hat{\omega}2} \quad \text{και}$$

$$h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3]$$

- (i) Καθορίστε την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}})$ του συνολικού συστήματος (δηλαδή, από την είσοδο $x[n]$ στην έξοδο $y[n]$). Απλοποιήστε την απάντησή σας όσο το δυνατόν περισσότερο.
- (ii) Καθορίστε και σχεδιάστε την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συνολικού συστήματος.

- (iii) Γράψτε την εξίσωση διαφορών που συσχετίζει το $y[n]$ με το $x[n]$.

Πρόβλημα.-6.21 Η είσοδος του μετατροπέα Σ-σε-Δ που φαίνεται στο Πρόβλημα.-6.15 είναι η ακόλουθη

$$x(t) = 10 + 20 \cos(\omega_0 t + \pi/3) \quad -\infty < t < \infty$$

- (i) Υποθέστε ότι η κρουστική απόκριση του γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος είναι $h[n] = \delta[n]$. Αν $\omega_0 = 2\pi(500)$, για ποιες τιμές του $f_s = 1/T_s$ θα είναι αληθές ότι $y(t) = x(t)$;
- (ii) Τώρα υποθέστε ότι η κρουστική απόκριση του γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος αλλάζει και γίνεται $h[n] = \delta[n-10]$. Καθορίστε το ρυθμό δειγματοληψίας $f_s = 1/T_s$ και ένα εύρος τιμών για το ω_0 έτσι ώστε η έξοδος του συνολικού συστήματος να είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t - 0.001) \\ &= 10 + 20 \cos(\omega_0(t - 0.001) + \pi/3) \end{aligned}$$

για $-\infty < t < \infty$.

- (iii) Υποθέστε ότι το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα είναι ένα φίλτρο κινούμενου μέσου όρου 5-σημείων του οποίου η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin(5\hat{\omega}/2)}{5 \sin(\hat{\omega}/2)} e^{-j\hat{\omega}2}$$

Αν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι $f_s = 2000$ δείγματα/ δευτερόλεπτο, καθορίστε όλες τις τιμές του ω_0 για τις οποίες η έξοδος είναι ίση με μια σταθερά, δηλαδή, $y(t) = A$ για $-\infty < t < \infty$. Επίσης, καθορίστε την σταθερά A σ' αυτήν την περίπτωση.

Μετασχηματισμός-z

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τον μετασχηματισμό-z, με τη βοήθεια του οποίου χειριζόμαστε πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις για την ανάλυση των συστημάτων διακριτού χρόνου. Θα αποδείξουμε ότι η συνέλιξη ενός FIR συστήματος είναι ισοδύναμη με έναν πολυωνυμικό πολλαπλασιασμό και ότι κοινές αλγεβρικές πράξεις, όπως είναι ο πολλαπλασιασμός, η διαίρεση και η παραγοντοποίηση πολυωνύμων μπορούν να ερμηνευθούν με τον συνδυασμό ή την αποσύνθεση ΓΧΑ συστημάτων. Οι πιο κοινοί μετασχηματισμοί-z είναι ρητές συναρτήσεις, δηλαδή ένα κλάσμα με αριθμητή και παρανομαστή πολυώνυμο. Οι ρίζες αυτών των πολυωνυμών είναι σημαντικές γιατί οι περισσότερες ιδιότητες των ψηφιακών φίλτρων μπορούν να επαναδιατυπωθούν με βάση τη θέση αυτών των ριζών.

Η μέθοδος του μετασχηματισμού-z που περιγράφεται σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρεται σε FIR φίλτρα και γενικά σε

ακολουθίες πεπερασμένου μήκους. Θα χρησιμοποιήσουμε την περίπτωση των FIR για να παρουσιάσουμε την σημαντική έννοια των “πεδίων παρουσίας” των σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τρεις τέτοιους χώρους-πεδία αναπαράστασης σημάτων και συστημάτων: το *πεδίο-n* ή *πεδίο χρόνου* (το πεδίο των ακολουθιών, των κρουστικών αποκρίσεων και των εξισώσεων διαφορών), το *πεδίο- ω* ή *πεδίο συχνότητας* (το πεδίο των αποκρίσεων συχνότητας και παραστάσεων φάσματος) και το *πεδίο-z* (το πεδίο των μετασχηματισμών-z, των τελεστών και των μηδενικών και των πόλων)¹. Η αξία του να έχουμε

¹Παραδοσιακά, τα συγγράμματα που αναφέρονται στα σήματα και συστήματα αναγνωρίζουν μόνο δύο πεδία: το πεδίο του χρόνου και το πεδίο της συχνότητας. Πολλοί συγγραφείς θεωρούν τα πεδία ω και z που προαναφέραμε ως ένα πεδίο, το “πεδίο της συχνότητας”. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι, όπως θα δούμε και εμείς αλλιώστε, το πεδίο- ω μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική περίπτωση του πεδίου-z. Όπως και να

τρία πεδία αναπαράστασης είναι ότι μια δύσκολη ανάλυση σε ένα πεδίο είναι συχνά πιο εύκολη σε κάποιο από τα άλλα δύο πεδία. Επομένως, θα κατανοήσουμε καλύτερα και θα αναπτύξουμε ικανότητες στο να μεταβαίνουμε από το ένα πεδίο στο άλλο. Για παράδειγμα, η συνδεσμολογία σε σειρά ΓΧΑ συστημάτων, η οποία στο πεδίο- n φαίνεται να απαιτεί την καινούργια (λιγότερο γνωστή) τεχνική της συνέλιξης, μετατρέπεται στο πεδίο- z στην πιο οικεία αλγεβρική πράξη του πολλαπλασιασμού πολυωνύμων. Είναι σημαντικό να επιστημόνουμε ότι το “πραγματικό” πεδίο είναι το πεδίο- n , όπου τα σήματα παράγονται και επεξεργάζονται και στο οποίο λαμβάνει χώρα η υλοποίηση των φίλτρων. Το πεδίο της συχνότητας έχει φυσική σημασία όταν αναλύουμε ήχους, αλλά σπάνια χρησιμοποιείται για υλοποίηση. Το πεδίο- z οφείλει την ύπαρξή του βασικά για την καταλληλότητά του στην μαθηματική ανάλυση και σύνθεση.

7-1 Ορισμός Μετασχηματισμού- z

Όπως γνωρίζουμε, ένα σήμα πεπερασμένου μήκους $x[n]$ μπορεί να παρασταθεί από τη σχέση

$$x[n] = \sum_{k=0}^N x[k] \delta[n-k] \quad (7.1)$$

Ο μετασχηματισμός- z ενός τέτοιου σήματος ορίζεται από τη σχέση:

$$X(z) = \sum_{k=0}^N x[k] z^{-k} \quad (7.2)$$

στην οποία υποθέτουμε ότι το z αναπαριστά οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό, δηλαδή, το z είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή του μετασχηματισμού- z $X(z)$.

έχει εμείς αισθανόμαστε, εξαιτίας του καθαρά διαφορετικού χαρακτήρα των μαθηματικών συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε στα δύο αυτά πεδία, ότι υπάρχει πλεονέκτημα στο να θεωρούμε τα πεδία ω και z ξεχωριστά, αλλά βεβαίως σχετιζόμενα, πεδία.

Παρόλο που ο παραπάνω τύπος αποτελεί τον κλασικό ορισμό του μετασχηματισμού- z^2 , είναι σημαντικό να επιστημόνουμε ότι το $X(z)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$X(z) = \sum_{k=0}^N x[k] (z^{-1})^k$$

μορφή η οποία τονίζει το γεγονός ότι ο $X(z)$ είναι απλά ένα πολυώνυμο τάξης N της μεταβλητής z^{-1} .

Όταν χρησιμοποιούμε τον πρώτο ορισμό για να καθορίσουμε τον μετασχηματισμό- z του σήματος $x[n]$, **μετασχηματίζουμε** το $x[n]$ σε μια καινούργια αναπαράσταση $X(z)$. Πράγματι, συχνά λέμε ότι “παίρνουμε τον μετασχηματισμό- z του $x[n]$.” Το μόνο που έχουμε να κάνουμε για να αποκτήσουμε το $X(z)$ είναι να κατασκευάσουμε ένα πολυώνυμο του οποίου οι συντελεστές είναι οι τιμές της ακολουθίας $x[n]$. Για την ακρίβεια, η k -οστή τιμή της ακολουθίας είναι ο συντελεστής της k -οστής δύναμης του z^{-1} στο πολυώνυμο $X(z)$. Μπορούμε να ανακτήσουμε το $x[n]$ από το $X(z)$ απλά παίρνοντας το συντελεστή της k -οστής δύναμης του z^{-1} και τοποθετώντας αυτόν τον συντελεστή στη k -στή θέση της ακολουθίας $x[n]$. Αυτή η πράξη μερικές φορές καλείται **αντίστροφος μετασχηματισμός- z** . Για να δώσουμε έμφαση σε αυτή τη μοναδική σχέση μεταξύ μιας ακολουθίας $x[n]$ και του μετασχηματισμού της θα χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο-}n & \xleftrightarrow{z} & \text{Πεδίο-}z \\ x[n] = \sum_{k=0}^N x[k] \delta[n-k] & \xleftrightarrow{z} & X(z) = \sum_{k=0}^N x[k] z^{-k} \end{array}$$

Γενικά, ένα **ζεύγος μετασχηματισμών- z** είναι η ακολουθία και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός- z της ακολουθίας, το οποίο θα συμβολίζουμε ως ακολούθως:

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad (7.3)$$

²Μερικοί συγγραφείς χρησιμοποιούν θετικές δυνάμεις του z στον ορισμό του μετασχηματισμού- z , αλλά αυτό δε συνηθίζεται στην επεξεργασία σημάτων.

Παρατηρήστε ότι το n είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή της ακολουθίας $x[n]$. Για αυτό λέμε ότι η Σχέση (7.1) παριστά το σήμα στο **πεδίο- n** . Από την στιγμή που το n είναι συχνά ένας δείκτης που μετράει τον χρόνο σε μια δειγματοληπτημένη κυματομορφή, αναφερόμαστε επίσης στην Σχέση (7.1) ως αναπαράσταση του σήματος στο **πεδίο του χρόνου**. Παρατηρούμε επίσης ότι το z είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή του μετασχηματισμού-z $X(z)$. Για αυτό το λόγο η δεύτερη σχέση αναπαριστά το σήμα στο **πεδίο-z** και επομένως **παιρνοντας τον μετασχηματισμό-z** ενός σήματος, μεταφερόμαστε από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο-z.

Ως ένα απλό, αλλά πολύ σημαντικό, παράδειγμα ενός ζεύγους μετασχηματισμού-z ας υποθέσουμε ότι $x[n] = \delta[n - n_0]$. Τότε, από τον ορισμό της Σχέσης (7.2), συμπεραίνουμε ότι $X(z) = z^{-n_0}$. Για να δώσουμε έμφαση σε αυτή την αντιστοιχία χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο-}n & \xleftrightarrow{z} & \text{Πεδίο-}z \\ x[n] = \delta[n - n_0] & \xleftrightarrow{z} & X(z) = z^{-n_0} \end{array} \quad (7.4)$$

Όταν μια ακολουθία ορίζεται με αριθμητικές τιμές, μπορούμε να πάρουμε τον μετασχηματισμό-z και να δημιουργήσουμε ένα πολυώνυμο, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 7-1: Ο Μετασχηματισμός-z ενός Σήματος

Θεωρήστε την ακολουθία $x[n]$ που δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

n	$n < -1$	-1	0	1	2	3	4	5	$n > 5$
$x[n]$	0	0	2	4	6	4	2	0	0

Ο μετασχηματισμός-z της ακολουθίας είναι:

$$X(z) = 2 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + 2z^{-4}$$

Αυτό το παράδειγμα μας δείχνει πώς μπορούμε να βρούμε τον μετασχηματισμό-z όταν μας δίνεται η ακολουθία. Το παράδειγμα που ακολουθεί επεξηγεί την έννοια του αντίστροφου μετασχηματισμού-z (δηλαδή, πώς βρούμε την ακολουθία αν μας δίνεται ο μετασχηματισμός-z).

Παράδειγμα 7-2: Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός-z

Θεωρήστε το μετασχηματισμό-z $X(z)$ που δίνεται από τη σχέση:

$$X(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-3} - z^{-5}$$

Μπορούμε να δώσουμε την $x[n]$ με μορφή πίνακα όπως στο Παράδειγμα 7-1, ή μπορούμε να βρούμε μια εξίσωση για τις τιμές της ακολουθίας συναρτήσει του n , της ακόλουθης μορφής:

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ -2 & n = 1 \\ 0 & n = 2 \\ 3 & n = 3 \\ 0 & n = 4 \\ -1 & n = 5 \\ 0 & n > 5 \end{cases}$$

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση της Σχέσης (7.1), η αντίστοιχη ακολουθία $x[n]$ είναι:

$$x[n] = \delta[n] - 2\delta[n - 1] + 3\delta[n - 3] - \delta[n - 5]$$

Σε αυτό το σημείο γνωρίζουμε έναν ορισμό του μετασχηματισμού-z, έχουμε μάθει πώς να τον υπολογίζουμε για μια δοσμένη ακολουθία και πώς να υπολογίζουμε την ακολουθία αν μας δίνεται ο μετασχηματισμός-z. Όμως

γιατί να θέλουμε να “μεταφερθούμε” από το πεδίο- n στο πεδίο- z ; Αυτή είναι η προφανής ερώτηση που μπορούμε να κάνουμε σε αυτό το σημείο και θα προσπαθήσουμε να δώσουμε την απάντηση στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου.

7-2 Μετασχηματισμός- z και τα Γραμμικά Συστήματα

Ο μετασχηματισμός- z είναι απαραίτητος στον σχεδιασμό, την ανάλυση και την υλοποίηση των ΓΧΑ συστημάτων. Ο βασικός λόγος για αυτό έχει να κάνει με τον ιδιαίτερο τρόπο με τον οποίο αποκρίνονται τα ΓΧΑ συστήματα στο σήμα εισόδου z^n για $-\infty < n < \infty$.

7-2.1 Ο Μετασχηματισμός- z ενός FIR Φίλτρου

ΑΣ θυμηθούμε ότι η γενική εξίσωση διαφορών ενός FIR φίλτρου είναι η ακόλουθη:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (7.5)$$

Μια διαφορετική αναπαράσταση της παραπάνω σχέσης εισόδου-εξόδου αποτελεί το ακόλουθο συνελικτικό άθροισμα:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

όπου $h[n]$ είναι η κρουστική απόκριση του FIR φίλτρου. Θυμηθείτε ότι η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι πανομοιότυπη με την ακολουθία των συντελεστών b_n της εξίσωσης διαφορών, όπως μπορούμε να δούμε και στον παρακάτω πίνακα:

n	$n < 0$	0	1	2	...	M	$n > M$
$h[n]$	0	b_0	b_1	b_2	...	b_M	0

ο οποίος μπορεί να παρασταθεί με τον παρακάτω συνεπτυγμένο τύπο:

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] \quad (7.6)$$

Για να κατανοήσουμε γιατί μας ενδιαφέρει ο μετασχηματισμός- z των FIR συστημάτων, ας υποθέσουμε ότι είσοδος στο σύστημα της Σχέσης (7.5) είναι το σήμα

$$x[n] = z^n \quad \text{για κάθε } n$$

όπου z είναι οποιοδήποτε μιγαδικός αριθμός. Θυμηθείτε ότι έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει εισόδους τέτοιας μορφής στο Κεφάλαιο 6, όπου χρησιμοποιήσαμε το $z = e^{j\omega}$.

Όσο αφορά την συζήτησή μας σχετικά με την απόκριση συχνότητας, η αναφορά “για όλα τα n ” αποτελεί μια πολύ σημαντική λεπτομέρεια. Αυτό γιατί θέλουμε, προς το παρόν, να αποφύγουμε οποιαδήποτε σκέψη για το τι θα μπορούσε να συμβεί αν είχαμε ως σημείο εκκίνησης μια χρονική στιγμή όπως το $n = 0$. Προς το παρόν θεωρούμε ότι το σήμα εφαρμόστηκε στην είσοδο την χρονική στιγμή $n = -\infty$ και υποθέτουμε επομένως ότι για πεπερασμένες τιμές του n , τα μεταβατικά φαινόμενα έχουν εξαφανιστεί, δηλαδή, ασχολούμαστε μόνο με το τμήμα που αφορά τη “μόνιμη κατάσταση” της εξόδου. Για την πιο γενική μιγαδική εκθετική είσοδο z^n , το αντίστοιχο σήμα εξόδου είναι:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^M b_k z^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^M b_k z^n z^{-k} = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) z^n \end{aligned}$$

Ο όρος μέσα στις παρενθέσεις είναι ένα πολυώνυμο του z^{-1} του οποίου η μορφή εξαρτάται από τους συντελεστές του FIR φίλτρου και καλείται **συνάρτηση μεταφοράς** του FIR φίλτρου. Από τον ορισμό του μετασχηματισμού- z , είναι φανερό ότι αυτό το πολυώνυμο είναι ο μετασχηματισμός- z της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της προηγούμενης ενότητας, ορίζουμε τη **συνάρτηση μεταφοράς** ενός FIR

φίλτρου ως ακολούθως:

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^M h[k] z^{-k} \quad (7.7)$$

Επομένως, έχουμε το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα:

Η Συνάρτηση Μεταφοράς $H(z)$ είναι ο Μετασχηματισμός-z της Κρουστικής Απόκρισης.

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] \xleftrightarrow{z} H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

Μόλις αποδείξαμε ότι για τα FIR φίλτρα, αν η είσοδος είναι το σήμα z^n για $-\infty < n < \infty$, τότε η αντίστοιχη έξοδος είναι:

$$y[n] = h[n] * z^n = H(z)z^n \quad (7.8)$$

Δηλαδή, το αποτέλεσμα της συνέλιξης της ακολουθίας $h[n]$ με την ακολουθία z^n είναι η $H(z)z^n$, όπου $H(z)$ είναι ο μετασχηματισμός-z της $h[n]$. Αυτό είναι ένα πολύ γενικό αποτέλεσμα. Στο Κεφάλαιο 8 θα δείξουμε ότι αυτό ισχύει για οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα και όχι μόνο για τα FIR φίλτρα. Επομένως, η πράξη της συνέλιξης, η οποία πραγματικά είναι συνώνυμη με τον ορισμό ενός ΓΧΑ συστήματος, φαίνεται να είναι στενά συνδεδεμένη με τον μετασχηματισμό-z.

Η Εξίσωση (7.7) είναι αρκετά γενική για να βρούμε **την αναπαράσταση του μετασχηματισμού-z** για οποιοδήποτε FIR φίλτρο, γιατί οι συντελεστές του πολυωνύμου ταυτίζονται με τους συντελεστές $\{b_k\}$ του φίλτρου στην εξίσωση διαφορών (7.5), ή ισοδύναμα, ταυτίζονται με την κρουστική απόκριση της Σχέσης (7.6). Επομένως η εξίσωση διαφορών ενός FIR φίλτρου μπορεί να μετασχηματιστεί εύκολα σε πολυώνυμο στο πεδίο-z αντικαθιστώντας απλά κάθε “καθυστέρηση” (δηλαδή το $x[n-k]$ της Εξίσωσης (7.5)) με το z^{-k} .

Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ είναι μια συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z . Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η $H(z)$ στη Σχέση (7.7) είναι ο μετασχηματισμός-z της κρουστικής απόκρισης και στην περίπτωση των FIR

φίλτρων, είναι ένα M -οστού βαθμού πολυώνυμο της μεταβλητής z^{-1} . Για αυτό το λόγο η $H(z)$ θα έχει μηδενισμούς (δηλαδή, τιμές z_0 τέτοιες ώστε $H(z_0) = 0$) οι οποίοι, όπως γνωρίζουμε από το βασικό θεώρημα της άλγεβρας, ορίζουν πλήρως το πολυώνυμο εκτός μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς.



Παράδειγμα 7-3: Μηδενικά της Συνάρτησης Μεταφοράς

Θεωρήστε το FIR φίλτρο

$$y[n] = 6x[n] - 5x[n-1] + x[n-2]$$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\begin{aligned} H(z) &= 6 - 5z^{-1} + z^{-2} \\ &= (3 - z^{-1})(2 - z^{-1}) = 6 \frac{(z - \frac{1}{3})(z - \frac{1}{2})}{z^2} \end{aligned}$$

Επομένως, τα μηδενικά της $H(z)$ είναι το $\frac{1}{3}$ και το $\frac{1}{2}$. Παρατηρήστε ότι το φίλτρο

$$w[n] = x[n] - \frac{5}{6}x[n-1] + \frac{1}{6}x[n-2]$$

έχει μια συνάρτηση μεταφοράς με τα ίδια μηδενικά, αλλά η πολλαπλασιαστική σταθερά της είναι 1 αντί για 6. Αυτό απλά σημαίνει ότι $w[n] = y[n]/6$. ■



Άσκηση 7.1: Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ενός FIR φίλτρου του οποίου η κρουστική απόκριση είναι:

$$h[n] = \delta[n] - 7\delta[n-2] - 3\delta[n-3]$$



Άσκηση 7.2: Βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$ ενός FIR φίλτρου του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(z) = 4(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})$$

Υπόδειξη: Εκτελέστε τους πολλαπλασιασμούς για να βρείτε ένα πολυώνυμο και στη συνέχεια βρείτε την κρουστική απόκριση με “αντίστροφο μετασχηματισμό-z.”

7-3 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού- z

Στην Ενότητα 7-1 δώσαμε τον γενικό ορισμό του μετασχηματισμού-z και αποδείξαμε ότι για ακολουθίες πεπερασμένου μήκους, είναι δυνατόν να μεταβούμε με μοναδικό τρόπο ανάμεσα στην ακολουθία και το μετασχηματισμό-z της ακολουθίας. Μέχρι αυτό το σημείο έχουμε δείξει ότι ο μετασχηματισμός-z είναι ένας μοναδικός τρόπος αναπαράστασης οποιασδήποτε ακολουθίας πεπερασμένου μήκους (συμπεριλαμβανομένης και της κρουστικής απόκρισης ενός FIR φίλτρου). Στην Ενότητα 7-2 αποδείξαμε ότι ο μετασχηματισμός-z προκύπτει με φυσικό τρόπο από την συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης με την μιγαδική ακολουθία z^n . Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε διάφορες ιδιότητες του μετασχηματισμού-z και θα καταδείξουμε τον τρόπο με τον οποίο ο μετασχηματισμός μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση των ακολουθιών άπειρου μήκους.

7-3.1 Η ιδιότητα της υπέρθεσης του Μετασχηματισμού-z

Ο Μετασχηματισμός-z είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Αυτό φαίνεται εύκολα αν θεωρήσουμε την ακολουθία $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$, όπου $x_1[n]$ και $x_2[n]$ υποθέτουμε ότι είναι ακολουθίες πεπερασμένου μήκους με μήκος μικρότερο ή ίσο του N . Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της Σχέσης (7.2), γράφουμε:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^N (ax_1[n] + bx_2[n]) z^{-n} \\ &= a \sum_{n=0}^N x_1[n] z^{-n} + b \sum_{n=0}^N x_2[n] z^{-n} \\ &= aX_1(z) + bX_2(z) \end{aligned}$$

Επομένως, δείξαμε ότι ο μετασχηματισμός-z ικανοποιεί την *ιδιότητα της υπέρθεσης*:

$$\begin{aligned} &\text{Ο Μετασχηματισμός-z είναι Γραμμικός.} \\ &ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z) \end{aligned} \quad (7.9)$$

Αυτή η ιδιότητα μας οδηγεί σε έναν άλλο τρόπο εξήγησης του μετασχηματισμού-z μιας ακολουθίας πεπερασμένου μήκους, όπως φαίνεται στο Παράδειγμα 7-4.



Παράδειγμα 7-4: Ο Μετασχηματισμός-z ενός Σήματος

Έχουμε αναφέρει ότι κάθε ακολουθία πεπερασμένου μήκους $x[n]$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως άθροισμα σταθμισμένων και χρονικά ολισθημένων κρουστικών ακολουθιών όπως φαίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$x[n] = \sum_{k=0}^N x[k] \delta[n - k] \quad (7.10)$$

Επιπλέον, ως θυμηθούμε από τη Σχέση (7.4) ότι για μια χρονικά ολισθημένη κρουστική ακολουθία έχουμε ότι:

$$\delta[n - k] \xrightarrow{z} z^{-k} \quad (7.11)$$

Επομένως εφαρμόζοντας τη Σχέση (7.11) σε κάθε μια κρουστική της Σχέσης (7.10) και προσθέτοντας στη συνέχεια τους μεμονωμένους μετασχηματισμούς-z, σύμφωνα με τη Σχέση(7.9), καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$X(z) = \sum_{k=0}^N x[k] z^{-k}$$



7-3.2 Η Ιδιότητα της Χρονικής Καθυστέρησης του Μετασχηματισμού-z

Άλλη μια σημαντική ιδιότητα του μετασχηματισμού-z είναι ότι η ποσότητα z^{-1} στο πεδίο-z αντιστοιχεί σε μια μοναδιαία χρονική μετατόπιση στο πεδίο-n. Θα παρουσιάσουμε αυτή την ιδιότητα με ένα αριθμητικό παράδειγμα. Θεωρούμε ένα σήμα $x[n]$ μήκους 6 το οποίο ορίζεται από τον παρακάτω πίνακα τιμών:

n	$n < 0$	0	1	2	3	4	5	$n > 5$
$x[n]$	0	3	1	4	1	5	9	0

Ο Μετασχηματισμός-z της $x[n]$ είναι το πολυώνυμο:

$$X(z) = 3 + z^{-1} + 4z^{-2} + z^{-3} + 5z^{-4} + 9z^{-5}$$

Σε αυτό το σημείο ας θυμηθούμε ότι οι τιμές του σήματος $x[n]$ είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου $X(z)$ και ότι οι εκθέτες αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές των τιμών της ακολουθίας. Για παράδειγμα ο όρος $4z^{-2}$ μας δείχνει ότι η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή $n = 2$ είναι 4, δηλαδή $x[2] = 4$.

Ας δούμε τώρα την επίδραση του πολλαπλασιασμού του πολυωνύμου με το z^{-1} :

$$\begin{aligned} Y(z) &= z^{-1}X(z) \\ &= z^{-1}(3 + z^{-1} + 4z^{-2} + z^{-3} + 5z^{-4} + 9z^{-5}) \\ &= 0z^0 + 3z^{-1} + z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4} + 5z^{-5} + 9z^{-6} \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο που προκύπτει είναι η αναπαράσταση του μετασχηματισμού-z ενός σήματος $y[n]$, το οποίο βρίσκεται χρησιμοποιώντας τους συντελεστές του πολυωνύμου και τους εκθέτες του $Y(z)$ για να καθορίσουμε τις τιμές του $y[n]$ σε όλες τις χρονικές στιγμές. Το αποτέλεσμα είναι ο ακόλουθος πίνακας τιμών για το $y[n]$:

n	$n < 0$	0	1	2	3	4	5	6	$n > 6$
$y[n]$	0	0	3	1	4	1	5	9	0

Κάθε ένα από τα δείγματα του σήματος έχει μετατοπισθεί κατά μία θέση στον πίνακα, δηλαδή $y[n] = x[n-1]$. Γενικά,

για κάθε ακολουθία πεπερασμένου μήκους ο πολλαπλασιασμός του πολυωνύμου του μετασχηματισμού-z με το z^{-1} απλά αφαιρεί 1 από κάθε εκθέτη του πολυωνύμου και έτσι δημιουργεί μια μοναδιαία καθυστέρηση. Επομένως, έχουμε την ακόλουθη θεμελιώδη σχέση:

$$\begin{aligned} &\text{Καθυστέρηση ενός Δείγματος} \\ &\text{πολλαπλασιάζει τον} \\ &\text{Μετασχηματισμό-z με το } z^{-1}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$x[n-1] \xrightarrow{z^{-1}} z^{-1}X(z)$$

την οποία θα αναφέρουμε ως την *ιδιότητα μοναδιαίας καθυστέρησης* του μετασχηματισμού-z.

Η ιδιότητα μοναδιαίας καθυστέρησης μπορεί να γενικευθεί για την περίπτωση κατά την οποία μετακινούμε περισσότερα από ένα δείγματα εφαρμόζοντας n_0 φορές τη Σχέση (7.12). Το γενικό αποτέλεσμα είναι το εξής:

$$\begin{aligned} &\text{Χρονική Καθυστέρηση} \\ &n_0 \text{ Δειγμάτων πολλαπλασιάζει τον} \\ &\text{Μετασχηματισμό-z με } z^{-n_0}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$x[n-n_0] \xrightarrow{z^{-n_0}} z^{-n_0}X(z)$$

7-3.3 Ένας Γενικός Τύπος για τον Μετασχηματισμό-z

Μέχρι τώρα έχουμε ορίσει τον μετασχηματισμό-z μόνο για σήματα πεπερασμένου μήκους

$$X(z) = \sum_{n=0}^N x[n]z^{-n}. \quad (7.14)$$

Ο ορισμός αυτός προϋποθέτει ότι η ακολουθία είναι μη μηδενική μόνο στο διάστημα $0 \leq n \leq N$. Είναι δυνατόν να επεκτείνουμε τον ορισμό σε σήματα άπειρου μήκους απλώς επεκτείνοντας το πάνω ή το κάτω όριο σε $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα, δηλαδή,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (7.15)$$

Ωστόσο, άπειρα αθροίσματα μπορεί να προκαλέσουν σοβαρές μαθηματικές δυσκολίες και απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή. Προσθέτοντας έναν άπειρο αριθμό μιγαδικών αριθμών μπορεί να οδηγηθούμε σε μη πεπερασμένο αποτέλεσμα. *Με μαθηματική ορολογία το άθροισμα μπορεί να μη συγκλίνει.* Παρόλο που θα εξετάσουμε την περίπτωση άπειρου μήκους στο Κεφάλαιο 8, η προσεκτική μαθηματική ανάπτυξη μιας ολοκληρωμένης θεωρίας για τον μετασχηματισμό- z στην ανάλυση σημάτων και συστημάτων θα ήταν καλύτερα να αφηθεί για ένα άλλο, πιο προχωρημένο μάθημα.

7-4 Ο Μετασχηματισμός- z ως Τελεστής

Η ιδιότητα καθυστέρησης, η οποία αναφέρθηκε στην Ενότητα 7-3.2, θεωρεί ότι η ποσότητα z^{-1} είναι κατά κάποιο τρόπο αντίστοιχη με μια καθυστέρηση ή χρονική μετατόπιση. Αυτή η άποψη οδηγεί σε μια χρήσιμη, αλλά συχνά πολύπλοκη, θεώρηση του μετασχηματισμού- z ως *τελεστή*. Για να δούμε πως προκύπτει αυτό θα θεωρήσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος μοναδιαίας καθυστέρησης.

7-4.1 Τελεστής Μοναδιαίας Καθυστέρησης

Το σύστημα μοναδιαίας καθυστέρησης είναι ένα από τα βασικά δομικά στοιχεία της εξίσωσης διαφορών των FIR συστημάτων. Στο πεδίο του χρόνου ο τελεστής μοναδιαίας καθυστέρησης D ορίζεται από τη σχέση

$$y[n] = D\{x[n]\} = x[n - 1] \quad (7.16)$$

Είναι απαραίτητο να βρούμε την αναπαράσταση του μετασχηματισμού- z αυτού του συστήματος, θεωρώντας ως είσοδο του συστήματος μοναδιαίας καθυστέρησης το σήμα:

$$x[n] = z^n \quad \text{για κάθε } n$$

όπου z είναι ένας μιγαδικός αριθμός. Με αυτό το σήμα ως είσοδο η έξοδος της μοναδιαίας καθυστέρησης είναι η παρακάτω:

$$\begin{aligned} y[n] &= D\{x[n]\} \\ &= D\{z^n\} = z^{n-1} = z^{-1}z^n = z^{-1}x[n] \end{aligned} \quad (7.17)$$

Με άλλα λόγια, το σήμα εισόδου πολλαπλασιάζεται με το z^{-1} *στην ειδική περίπτωση που το* $x[n] = z^n$.

Μιλώντας αυστηρά, η έκφραση $z^{-1}x[n]$ στη Σχέση (7.17) είναι “παραπλανητική”, γιατί πρέπει να θυμόμαστε ότι ισχύει μόνο για $x[n] = z^n$. Ωστόσο, συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε την ποσότητα z^{-1} εναλλακτικά με το σύμβολο D του τελεστή της μοναδιαίας καθυστέρησης, έτσι ώστε να μπορούμε να πούμε ότι για *κάθε* είσοδο $x[n]$ η επίδραση του συστήματος της μοναδιαίας καθυστέρησης *παριστάνεται* από τον τελεστή z^{-1} , δηλαδή,

$$y[n] = z^{-1}\{x[n]\} = x[n - 1]$$

Οι αγκύλες περιέχουν το σήμα στο οποίο δρα το z^{-1} όπως ακριβώς στη Σχέση (7.16). Επομένως, αν είμαστε προσεκτικοί στην ερμηνεία μας, μπορούμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο z^{-1} για να αναπαράστησουμε τον τελεστή καθυστέρησης και πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν το D και το z^{-1} εναλλακτικά.

Ξέρουμε από την ιδιότητα της καθυστέρησης από την Ενότητα 7-3.2, ότι αν $y[n] = x[n - 1]$, τότε $Y(z) = z^{-1}X(z)$, δηλαδή για *κάθε* πεπερασμένου μήκους ακολουθία, το z^{-1} πολλαπλασιάζει το $X(z)$ για να παράξει το $Y(z)$. Αυτός είναι ο ακριβής τρόπος με τον οποίο το z^{-1} αναπαριστά μια μοναδιαία καθυστέρηση, δηλαδή *δεν* είναι σωστό να γράψουμε $z^{-1}x[n]$ χωρίς τις αγκύλες γύρω από το $x[n]$, αφού αυτό αναμειγνύει το πεδίο- z με το πεδίο- n .

7-4.2 Τελεστικός Συμβολισμός

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα το οποίο υπολογίζει τις *διαφορές πρώτης τάξης* διαδοχικών τιμών του σήματος, δηλαδή,

$$y[n] = x[n] - x[n - 1]$$

Ο τελεστής μετασχηματισμός- z ο οποίος παριστά το σύστημα διαφορών πρώτης τάξης είναι ο $(1 - z^{-1})$, αφού μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη “τελεστική” εξίσωση

$$y[n] = (1 - z^{-1})\{x[n]\} = x[n] - x[n - 1] \quad (7.18)$$

Η Εξίσωση (7.18) έχει την ακόλουθη ερμηνεία: Ο τελεστής “1” αφήνει το σήμα $x[n]$ αμετάβλητο και ο τελεστής z^{-1} καθυστερεί το σήμα $x[n]$ πριν το αφαιρέσει από το $x[n]$.

Ένα άλλο απλό παράδειγμα θα μπορούσε να είναι ένα σύστημα το οποίο καθυστερεί το σήμα παραπάνω από ένα δείγμα (για παράδειγμα n_d δείγματα):

$$y[n] = x[n - n_d] \quad n_d \text{ ακέραιος}$$

Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση μεταφοράς είναι η $H(z) = z^{-n_d}$ και ο τελεστής είναι ο z^{-n_d} . Αυτή είναι μια προφανής γενίκευση της μοναδιαίας καθυστέρησης.



Άσκηση 7.3:

Προσδιορίστε τον τελεστή του μετασχηματισμού-z για το σύστημα διαφορών πρώτης τάξης περνώντας την είσοδο $x[n] = z^n$ μέσα από το σύστημα. Γράψτε το $y[n]$ ως $y[n] = H(z)\{x[n]\}$.

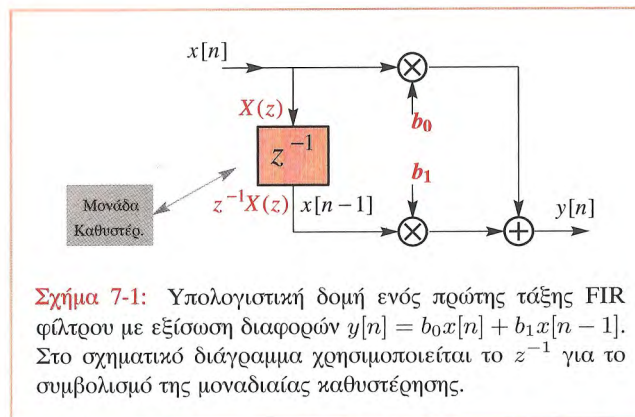
7-4.3 Τελεστικός Συμβολισμός σε Σχηματικά Διαγράμματα

Η έννοια του τελεστή καθυστέρησης (7.12) είναι πολύ χρήσιμη στα σχηματικά διαγράμματα των ΓΧΑ συστημάτων. Σε ένα σχηματικό διάγραμμα ενός FIR φίλτρου, ο μετασχηματισμός-z λειτουργεί ως εξής: Όλες οι μοναδιαίες καθυστερήσεις γίνονται, στο πεδίο του μετασχηματισμού, τελεστές z^{-1} και εξαιτίας της ιδιότητας της υπέρθεσης του μετασχηματισμού-z, οι βαθμωτοί πολλαπλασιαστές και αθροιστές διατηρούν την ίδια αναπαράσταση με αυτή που έχουν στο πεδίο του χρόνου. Στο Σχήμα 7-1 φαίνεται, σε μορφή σχηματικού διαγράμματος, η αναπαράσταση ενός FIR φίλτρου μήκους 2 στο πεδίο-z. Στο σχηματικό αυτό διάγραμμα, το z^{-1} αναπαριστά τον τελεστή της μοναδιαίας καθυστέρησης.



Άσκηση 7.4:

Σχεδιάστε ένα σχηματικό διάγραμμα όπως αυτό του Σχήματος 7-1 για το σύστημα διαφορών πρώτης τάξης: $y[n] = (1 - z^{-1})\{x[n]\}$



Σχήμα 7-1: Υπολογιστική δομή ενός πρώτης τάξης FIR φίλτρου με εξίσωση διαφορών $y[n] = b_0x[n] + b_1x[n - 1]$. Στο σχηματικό διάγραμμα χρησιμοποιείται το z^{-1} για το συμβολισμό της μοναδιαίας καθυστέρησης.

7-5 Συνέλιξη και Μετασχηματισμός-z

Στην Ενότητα 7-3.2, παρατηρήσαμε ότι μια μοναδιαία καθυστέρηση ενός σήματος στο πεδίο- n ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του αντίστοιχου μετασχηματισμού-z με το z^{-1} , στο πεδίο-z. Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος μοναδιαίας καθυστέρησης είναι

$$h[n] = \delta[n - 1]$$

και επομένως μια καθυστέρηση κατά ένα δείγμα ισοδυναμεί με τη συνέλιξη

$$y[n] = x[n] * \delta[n - 1] = x[n - 1]$$

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος μοναδιαίας καθυστέρησης είναι ο μετασχηματισμός-z της κρουστικής απόκρισής του, επόμενως

$$H(z) = z^{-1}$$

Επιπλέον, η ιδιότητα της μοναδιαίας καθυστέρησης της Σχέσης (7.12) δηλώνει ότι η καθυστέρηση κατά ένα δείγμα πολλαπλασιάζει το μετασχηματισμό-z με το z^{-1} . Δηλαδή,

$$Y(z) = z^{-1}X(z)$$

Παρατηρούμε, επομένως, ότι στην περίπτωση του συστήματος της μοναδιαίας καθυστέρησης, ο μετασχηματισμός-z της εξόδου είναι ίσος με τον μετασχηματισμό-z της εισόδου πολλαπλασιασμένο με τη συνάρτηση μεταφοράς του ΓΧΑ συστήματος, Δηλαδή:

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (7.19)$$

Το πιο σημαντικό όμως είναι ότι η Σχέση (7.19) ισχύει για κάθε ΓΧΑ σύστημα.

Για να δείξουμε ότι η συνέλιξη μετατρέπεται σε γινόμενο μετασχηματισμών-z, όπως φαίνεται στη Σχέση (7.19), θα πρέπει να θυμηθούμε ότι η διακριτή συνέλιξη δύο πεπερασμένου μήκους ακολουθιών $x[n]$ και $h[n]$ δίνεται από τη σχέση:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k] \quad (7.20)$$

όπου M είναι η τάξη του FIR φίλτρου. Για να αποδείξουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα της υπέρθεσης της Σχέσης (7.9) και την γενική ιδιότητα καθυστέρησης της Σχέσης (7.13) για να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό-z της $y[n]$ όπως αυτή δίνεται από τη Σχέση (7.20). Αυτό μας οδηγεί στους παρακάτω υπολογισμούς:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=0}^M h[k] (z^{-k} X(z)) \\ &= \left(\sum_{k=0}^M h[k] z^{-k} \right) X(z) = H(z)X(z). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Αν η $x[n]$ είναι μια ακολουθία πεπερασμένου μήκους, ο $X(z)$ είναι ένα πολυώνυμο, άρα η Σχέση (7.21) αποδεικνύει ότι η συνέλιξη είναι ισοδύναμη με τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων. Αυτό το αποτέλεσμα φαίνεται καλύτερα στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 7-5: Συνέλιξη και $H(z)X(z)$

Η μέθοδος του μετασχηματισμού-z μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε τη συνέλιξη των ακόλουθων σημάτων:

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n-1] - \delta[n-2] + \delta[n-3] - \delta[n-4] \\ h[n] &= \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 4\delta[n-3] \end{aligned}$$

Οι μετασχηματισμοί-z των ακολουθιών $x[n]$ και $y[n]$ είναι:

$$\begin{aligned} X(z) &= 0 + 1z^{-1} - 1z^{-2} + 1z^{-3} - 1z^{-4} \\ \text{και } H(z) &= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} \end{aligned}$$

Ο $X(z)$ και ο $H(z)$ είναι πολυώνυμα του z^{-1} , επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό-z της συνέλιξης πολλαπλασιάζοντας αυτά τα δύο πολυώνυμα, δηλαδή:

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) = \\ &= (1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3})(z^{-1} - z^{-2} + z^{-3} - z^{-4}) \\ &= z^{-1} + (-1 + 2)z^{-2} + (1 - 2 + 3)z^{-3} \\ &\quad + (-1 + 2 - 3 + 4)z^{-4} \\ &\quad + (-2 + 3 - 4)z^{-5} + (-3 + 4)z^{-6} + (-4)z^{-7} \\ &= z^{-1} + z^{-2} + 2z^{-3} + 2z^{-4} - 3z^{-5} + z^{-6} - 4z^{-7} \end{aligned}$$

Από την στιγμή που οι συντελεστές οποιουδήποτε πολυωνύμου είναι οι τιμές της ακολουθίας, με την θέση τους στην ακολουθία να υποδεικνύεται από τον εκθέτη του (z^{-1}), μπορούμε με “αντίστροφο μετασχηματισμό-z” του $Y(z)$ να πάρουμε:

$$\begin{aligned} y[n] &= \delta[n-1] + \delta[n-2] + 2\delta[n-3] + 2\delta[n-4] \\ &\quad - 3\delta[n-5] + \delta[n-6] - 4\delta[n-7] \end{aligned}$$

Τώρα εξετάζουμε το συνελκτικό άθροισμα για να υπολογίσουμε την έξοδο. Αν υπολογίσουμε μερικούς όρους, μπορούμε να ανακαλύψουμε ένα πρότυπο το οποίο μοιάζει με τον πολυωνυμικό πολλαπλασιασμό των

μετασχηματισμών-z.

$$y[0] = h[0]x[0] = 1(0) = 0$$

$$y[1] = h[0]x[1] + h[1]x[0] = 1(1) + 2(0) = 1$$

$$y[2] = h[0]x[2] + h[1]x[1] + h[2]x[0] \\ = 1(-1) + 2(1) + 3(0) = 1$$

$$y[3] = h[0]x[3] + h[1]x[2] + h[2]x[1] + h[3]x[0] \\ = 1(1) + 2(-1) + 3(1) = 2$$

$$y[4] = h[0]x[4] + h[1]x[3] + h[2]x[2] + h[3]x[1] \\ = 1(-1) + 2(1) + 3(-1) + 4(1) = 2$$

$$\vdots = \vdots$$

Παρατηρήστε ότι αθροιζόμενοι ο δείκτης της $h[k]$ και ο δείκτης της $x[n-k]$ κάθε γινομένου που συνεισφέρει στην $y[n]$ δίνουν πάντα την ίδια τιμή (δηλαδή n). Το ίδιο συμβαίνει στον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων αφού οι εκθέτες προστίθενται.

Στη Σελίδα 123 (Ενότητα 5-3.3.1) χρησιμοποιήσαμε ένα πίνακα για να υπολογίσουμε την συνέλιξη της $x[n]$ με την $h[n]$. Τώρα βλέπουμε ότι αυτό είναι επίσης μια διαδικασία πολλαπλασιασμού των πολυωνύμων $X(z)$ και $H(z)$. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται παρακάτω για το αριθμητικό παράδειγμα αυτής της ενότητας:

z	z^0	z^{-1}	z^{-2}	z^{-3}	z^{-4}	z^{-5}	z^{-6}	z^{-7}
$x[n], X(z)$	0	+1	-1	+1	-1	0	0	0
$h[n], H(z)$	1	2	3	4				
$X(z)$	0	+1	-1	+1	-1	0	0	0
$2z^{-1}X(z)$		0	+2	-2	+2	-2	0	0
$3z^{-2}X(z)$			0	+3	-3	+3	-3	0
$4z^{-3}X(z)$				0	+4	-4	+4	-4
$y[n], Y(z)$	0	+1	+1	+2	+2	-3	+1	-4

Στους μετασχηματισμούς-z $X(z)$, $H(z)$ και $Y(z)$, η δύναμη του z^{-1} υποδηλώνεται από την οριζόντια θέση των συντελεστών στον πίνακα. Κάθε γραμμή

παράγεται αν πολλαπλασιάσουμε την $x[n]$ γραμμή με μία τιμή της $h[n]$ και μετακινώντας το αποτέλεσμα τόσες θέσεις δεξιά όσο δηλώνει η δύναμη του z^{-1} . Η τελική απάντηση προκύπτει προσθέτοντας κάθε μία στήλη. Η τελευταία σειρά του πίνακα περιέχει την ακολουθία των τιμών της $y[n] = x[n] * h[n]$ ή, ισοδύναμα, τους συντελεστές του πολυωνύμου $Y(z)$. ■

Στην ενότητα αυτή, αποδείξαμε ότι η συνέλιξη και ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων είναι ουσιαστικά το ίδιο πράγμα³. Πραγματικά το πιο σημαντικό αποτέλεσμα της θεωρίας του μετασχηματισμού-z είναι το ακόλουθο:

Η συνέλιξη στο πεδίο-n αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στο πεδίο-z.

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad \xleftrightarrow{z} \quad Y(z) = H(z)X(z)$$

Αυτό το αποτέλεσμα θα δούμε ότι έχει πολλές εφαρμογές πολύ πιο πέρα της χρήσης του ως τη βάση για την εξήγηση και την υλοποίηση της συνέλιξης.



Άσκηση 7.5:

Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό-z της ακολουθίας:

$$x[n] = \delta[n-1] - \delta[n-2] + \delta[n-3] - \delta[n-4]$$

και τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = 1 - z^{-1}$ για να βρείτε την έξοδο ενός φίλτρου διαφορών πρώτης τάξεως όταν η είσοδος είναι η $x[n]$. Υπολογίστε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας πολυωνυμικό πολλαπλασιασμό και επίσης χρησιμοποιώντας την εξίσωση διαφορών:

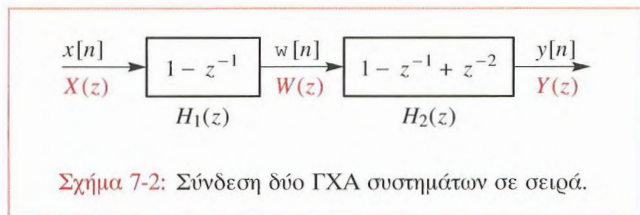
$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Ποιός είναι ο βαθμός του πολυωνύμου του μετασχηματισμού-z της εξόδου $y[n]$;

³στο MATLAB, δεν υπάρχει κάποια ιδιαίτερη συνάρτηση για τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων. Αντ' αυτού, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση `conv` αφού ο πολυωνυμικός πολλαπλασιασμός είναι ισοδύναμος με την διακριτή συνέλιξη των ακολουθιών των συντελεστών τους.

7-5.1 Σύνδεση Συστημάτων σε Σειρά

Μια από τις πιο βασικές εφαρμογές του μετασχηματισμού-z στο σχεδιασμό συστημάτων είναι η χρησιμοποίησή του στη δημιουργία εναλλακτικών φίλτρων τα οποία έχουν ακριβώς την ίδια συμπεριφορά εισόδου-εξόδου. Ένα πολύ σημαντικό παράδειγμα είναι η σύνδεση δύο ή περισσότερων ΓΧΑ συστημάτων σε σειρά. Στη μορφή ενός σχηματικού διαγράμματος, η σύνδεση σε σειρά σχεδιάζεται με την ένωση της εξόδου του ενός συστήματος με την είσοδο του άλλου. Το εισερχόμενο σήμα είναι το $x[n]$ και η συνολική έξοδος είναι η $y[n]$. Η ακολουθία $w[n]$ είναι ένα ενδιάμεσο σήμα το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως προσωρινό μέσο αποθήκευσης.



Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην Ενότητα 5-7 στη Σελίδα 135, αν $h_1[n]$ και $h_2[n]$ είναι οι κρουστικές αποκρίσεις του πρώτου και του δεύτερου συστήματος αντίστοιχα, τότε η συνολική κρουστική απόκριση από την είσοδο $x[n]$ στην έξοδο $y[n]$ του Σχήματος 7-2 είναι $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$. Επομένως, ο μετασχηματισμός-z της συνολικής κρουστικής απόκρισης της σύνδεσης σε σειρά των δύο συστημάτων είναι το γινόμενο των μεμονομένων μετασχηματισμών-z των δύο κρουστικών αποκρίσεων. Άρα:

*H H(z) δύο Συνδεδεμένων ΓΧΑ
Συστημάτων σε Σειρά ισούται με το
γινόμενο των μεμονομένων συναρτήσεων μεταφοράς.*

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] \xrightarrow{z} H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

Μια σημαντική συνέπεια αυτού του αποτελέσματος προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή, $H(z) = H_1(z)H_2(z) = H_2(z)H_1(z)$. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η σύνδεση σε σειρά είναι επίσης αντιμεταθετική διαδικασία και ότι δύο συστήματα μπορούν να συνδεθούν σε σειρά με οποιαδήποτε σειρά για να αποκτήσουμε την ίδια συνολική συνάρτηση μεταφοράς.



Παράδειγμα 7-6: H H(z) Σύνδεσμολογίας σε Σειρά

Για να δώσουμε ένα απλό παράδειγμα αυτής της ιδέας, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα το οποίο περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις διαφορών:

$$w[n] = 3x[n] - x[n - 1] \quad (7.22)$$

$$y[n] = 2w[n] - w[n - 1] \quad (7.23)$$

οι οποίες αντιστοιχούν σε μια σύνδεση σε σειρά δυο πρώτης τάξης συστημάτων όπως φαίνεται στο Σχήμα 7-2. Η έξοδος $w[n]$ του πρώτου συστήματος είναι η είσοδος του δεύτερου συστήματος και η συνολική έξοδος είναι η έξοδος του δεύτερου συστήματος. Το ενδιάμεσο σήμα $w[n]$ στη Σχέση (7.22) πρέπει να υπολογιστεί πριν από τα άλλα προκειμένου να χρησιμοποιηθεί στη Σχέση (7.23). Μπορούμε να συνδυάσουμε τα δύο φίλτρα σε μία εξίσωση διαφορών αντικαθιστώντας το $w[n]$ του πρώτου συστήματος στο δεύτερο, αυτό μας δίνει:

$$\begin{aligned} y[n] &= 2w[n] - w[n - 1] \\ &= 2(3x[n] - x[n - 1]) - (3x[n - 1] - x[n - 2]) \\ &= 6x[n] - 5x[n - 1] + x[n - 2] \end{aligned} \quad (7.24)$$

Επομένως αποδείξαμε ότι η σύνδεση σε σειρά δύο πρώτης τάξης συστημάτων είναι ισοδύναμη με ένα δεύτερης τάξης σύστημα. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η εξίσωση διαφορών της Σχέσης (7.24) ορίζει έναν αλγόριθμο υπολογισμού της εξόδου $y[n]$ ο οποίος είναι

διαφορετικός από τον αλγόριθμο που ορίσαμε στις Σχέσεις (7.22) και (7.23). Ωστόσο, η παραπάνω ανάλυση δείχνει ότι με απόλυτα ακριβή υπολογισμό, οι έξοδοι των δύο διαφορετικών υλοποιήσεων θα είναι ακριβώς οι ίδιες.

Όταν τα συστήματα είναι μεγαλύτερης τάξης, η διαδικασία που κάναμε παραπάνω είναι πολύ κουραστική. Ο μετασχηματισμός-z απλοποιεί αυτές τις διεργασίες σε πολλαπλασιασμό πολυωνύμων. Τα συστήματα πρώτης τάξης έχουν συναρτήσεις μεταφοράς

$$H_1(z) = 3 - z^{-1} \quad \text{και} \quad H_2(z) = 2 - z^{-1}$$

Επομένως, η συνολική συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(z) = (3 - z^{-1})(2 - z^{-1}) = 6 - 5z^{-1} + z^{-2}$$

η οποία αντιστοιχεί στην εξίσωση διαφορών της Σχέσης (7.24). Παρατηρήστε ότι, ακόμα και σε αυτό το απλό παράδειγμα, η λύση του προβλήματος στο πεδίο-z είναι πιο απλή και άμεση από ότι η λύση στο πεδίο-n. ■

 **Άσκηση 7.6:** Χρησιμοποιήστε το μετασχηματισμό-z για να συνδυάσετε τα συνδεδεμένα σε σειρά συστήματα

$$\begin{aligned} w[n] &= x[n] + x[n-1] \\ y[n] &= w[n] - w[n-1] + w[n-2] \end{aligned}$$

σε μια εξίσωση διαφορών (έξοδος $y[n]$, είσοδος $x[n]$).

7-5.2 Παραγοντοποίηση Πολυωνύμων-z

Αν μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε μετασχηματισμούς-z για να πάρουμε μεγαλύτερης τάξης συστήματα, θα πρέπει να μπορούμε επίσης να παραγοντοποιούμε τα πολυώνυμα των μετασχηματισμών-z έτσι ώστε να δημιουργούμε, από ένα μεγάλο σύστημα, μικρότερες αυτοτελείς μονάδες. Αφού η σύνδεση σε σειρά συστημάτων είναι ισοδύναμη με τον πολλαπλασιασμό των συναρτήσεων μεταφοράς τους, οι παράγοντες ενός πολυωνύμου $H(z)$ μεγάλης τάξης θα

αναπαριστούν συστήματα τα οποία αν συνδεθούν σε σειρά θα δίνουν το $H(z)$.

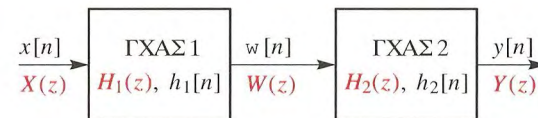


Παράδειγμα 7-7: Παραγοντοποίηση της $H(z)$

Θεωρήστε τον ακόλουθο μετασχηματισμό-z:

$$H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}$$

Μια από τις ρίζες της $H(z)$ είναι η $z = 1$, επομένως το



Σχήμα 7-3: Παραγοντοποίηση της $H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}$ σε ένα σύστημα πρώτης τάξης και σε ένα σύστημα δεύτερης τάξης.

πολυώνυμο $H_1(z) = (1 - z^{-1})$ είναι ένας παράγοντας της $H(z)$. Ο άλλος παράγοντας μπορεί να βρεθεί εκτελώντας την ακόλουθη διαίρεση:

$$H_2(z) = \frac{H(z)}{H_1(z)} = \frac{H(z)}{1 - z^{-1}} = 1 - z^{-1} + z^{-2}$$

Η παραγοντοποίηση της $H(z)$ ως

$$H(z) = (1 - z^{-1})(1 - z^{-1} + z^{-2})$$

δίνει το σύστημα του σχηματικού διαγράμματος που φαίνεται στο Σχήμα 7-3. Οι εξισώσεις διαφορών για αυτό το σύστημα είναι:

$$\begin{aligned} w[n] &= x[n] - x[n-1] \\ y[n] &= w[n] - w[n-1] + w[n-2] \end{aligned}$$

■

7-5.3 Αποσυνέλιξη

Η ιδιότητα της σύνδεσης σε σειρά μας οδηγεί σε μια ενδιαφέρουσα ερώτηση η οποία έχει πρακτική εφαρμογή. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο σύστημα μιας συνδεσμολογίας σε σειρά έτσι ώστε να ακυρώσουμε την επίδραση του πρώτου συστήματος στο σήμα εισόδου; Αυτό που θέλουμε είναι η έξοδος του δεύτερου συστήματος να είναι ίση με την είσοδο του πρώτου. Για να γίνει η διατύπωση πιο ακριβής υποθέστε ότι έχουμε τη σύνδεση σε σειρά δύο φίλτρων του $H_1(z)$ και του $H_2(z)$ και ότι το $H_1(z)$ είναι γνωστό. Είναι δυνατόν να βρούμε το $H_2(z)$ έτσι ώστε η έξοδος του συνολικού συστήματος να ταυτίζεται με την είσοδό του; Αν αυτό μπορεί να συμβεί, η ανάλυση του μετασχηματισμού-z μας δείχνει ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος θα πρέπει να είναι $H(z) = 1$, έτσι ώστε:

$$Y(z) = H_1(z)H_2(z)X(z) = H(z)X(z) = X(z)$$

Αφού το πρώτο σύστημα επεξεργάζεται την είσοδο μέσω συνέλιξης, το δεύτερο προσπαθεί να την ακυρώσει, για το λόγο αυτό η διαδικασία λέγεται *αποσυνέλιξη* ή αλλιώς *αντίστροφο φίλτράρισμα*. Αν $H_1(z)H_2(z) = 1$ τότε το $H_2(z)$ καλείται *αντίστροφο* του $H_1(z)$ (και αντιστρόφως).

Παράδειγμα 7-8: Αποσυνέλιξη

Αν χρησιμοποιήσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, μπορούμε να βρούμε μια λύση με τη βοήθεια του μετασχηματισμού-z. Υποθέστε ότι $H_1(z) = 1 + 0.1z^{-1} - 0.72z^{-2}$. Θέλουμε $H(z) = 1$, και επομένως ζητάμε

$$H_1(z)H_2(z) = 1$$

Αφού η $H_1(z)$ είναι γνωστή, μπορούμε να λύσουμε ως προς την $H_2(z)$ και παίρνουμε:

$$H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)} = \frac{1}{1 + 0.1z^{-1} - 0.72z^{-2}}$$

Τι προσπαθούμε να πετύχουμε με αυτό το παράδειγμα; Φαίνεται ότι για να γίνει η αποσυνέλιξη ενός FIR φίλτρου, το σύστημα που την προκαλεί θα πρέπει να έχει μια συνάρτηση μεταφοράς μη πολυωνυμική αλλά ρητή (λόγος πολυωνύμων). Αυτό σημαίνει ότι το αντίστροφο φίλτρο για ένα FIR φίλτρο δεν μπορεί να είναι FIR και ξαφνικά η αποσυνέλιξη δεν είναι τόσο απλή όσο φαινόταν. Από τη στιγμή που δεν έχουμε υποθέσει τίποτα άλλο εκτός από πολυωνυμικές συναρτήσεις μεταφοράς, δεν μπορούμε να δώσουμε τη λύση με τη μορφή μιας εξίσωσης διαφορών. Ωστόσο, στο Κεφάλαιο 8 θα δούμε ότι υπάρχουν άλλοι τύποι ΓΧΑ συστημάτων που έχουν ρητές συναρτήσεις μεταφοράς. Επομένως θα επανέλθουμε στο θέμα του αντίστροφου φιλτραρίσματος στο Κεφάλαιο 8.

7-6 Σχέση Ανάμεσα στο Πεδίο-z και το Πεδίο- $\hat{\omega}$

Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ έχει μια συναρτησιακή μορφή η οποία είναι ίδια με τη μορφή της απόκρισης συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}})$. Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί εύκολα για την περίπτωση των FIR φίλτρων, αν συγκρίνουμε τη Σχέση ορισμού της απόκρισης συχνότητας (6.3) με τη Σχέση ορισμού της συνάρτησης μεταφοράς (7.7):

$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο-}\hat{\omega} & \xleftrightarrow{z} & \text{Πεδίο-z} \\ H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} & \xleftrightarrow{z} & H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \end{array}$$

Είναι φανερό ότι υπάρχει μια αντιστοιχία ανάμεσα στα πεδία-z και $\hat{\omega}$ αν αντικαταστήσουμε $z = e^{j\hat{\omega}}$ στην $H(z)$.

Επίδειξη: Τρία Πεδία - FIR

Συγκεκριμένα, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να τονίσουμε ότι η σχέση μεταξύ της $H(e^{j\hat{\omega}})$ και του μετασχηματισμού-z $H(z)$ είναι η ακόλουθη:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = H(z)|_{z=e^{j\hat{\omega}}} \quad (7.25)$$

Η σχέση ανάμεσα στο πεδίο- z και στο πεδίο- $\hat{\omega}$ προκύπτει από την ακόλουθη σημαντική σχέση:

$$z = e^{j\hat{\omega}} \quad (7.26)$$

Για να δούμε γιατί η παραπάνω σχέση είναι το κλειδί, πρέπει μόνο να θυμηθούμε ότι όταν το σήμα z^n είναι η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος, η έξοδος είναι $y[n] = H(z)z^n$. Αν η τιμή του z είναι $z = e^{j\hat{\omega}}$, τότε

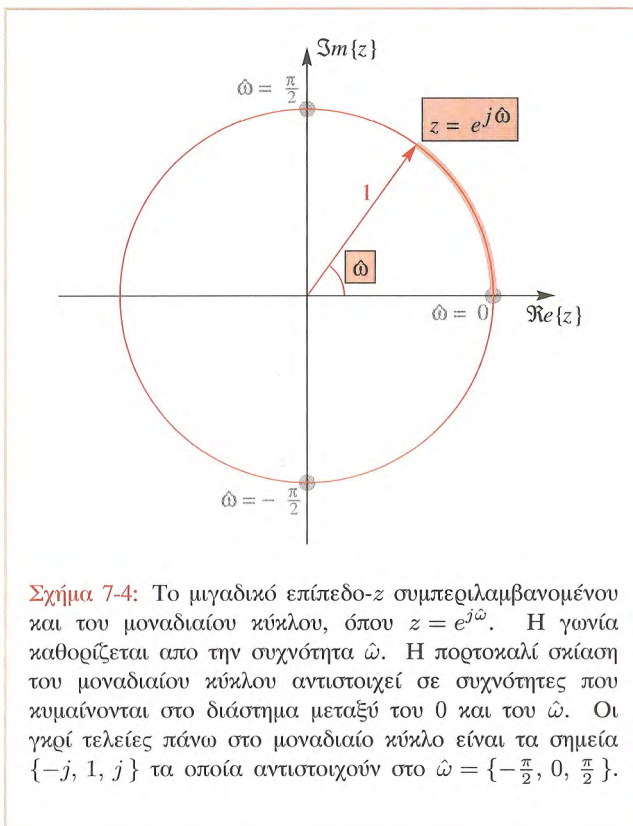
$$y[n] = H(e^{j\hat{\omega}})e^{j\hat{\omega}n}$$

όπου $H(e^{j\hat{\omega}})$ είναι προφανές ότι ταυτίζεται με αυτό που ονομάζουμε απόκριση συχνότητας.

7-6.1 Το Επίπεδο- z και ο Μοναδιαίος Κύκλος

Ο συμβολισμός $H(e^{j\hat{\omega}})$ τονίζει τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο πεδίο- $\hat{\omega}$ και το πεδίο- z αφού δηλώνει ακριβώς το γεγονός ότι η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}})$ προκύπτει από τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ σε συγκεκριμένο σύνολο τιμών του z . Θυμηθείτε ότι από τη στιγμή που η απόκριση συχνότητας είναι περιοδική με περίοδο 2π , χρειαζόμαστε να την υπολογίσουμε μόνο για μια περίοδο, όπως $-\pi < \hat{\omega} \leq \pi$. Αν αντικαταστήσουμε αυτές τις τιμές της $\hat{\omega}$ στη Σχέση (7.26), βλέπουμε ότι οι αντίστοιχες τιμές του z έχουν όλες μοναδιαίο μέτρο και ότι η γωνία $\hat{\omega}$ μεταβάλλεται από $-\pi$ έως $+\pi$. Με άλλα λόγια, οι τιμές του $z = e^{j\hat{\omega}}$ βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο ακτίνας 1 και κυμαίνονται από το σημείο $z = -1$ που διαγράφει όλο τον κύκλο και καταλήγει πάλι στο σημείο $z = -1$. Όπως είναι φυσικό, η καμπύλη στην οποία βρίσκονται οι τιμές του $z = e^{j\hat{\omega}}$ ονομάζεται **μοναδιαίος κύκλος**. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 7-4, στο οποίο φαίνεται ο μοναδιαίος κύκλος και ένα τυπικό σημείο $z = e^{j\hat{\omega}}$ το οποίο απέχει απόσταση 1 από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία $\hat{\omega}$ με τον άξονα των πραγματικών αριθμών του επιπέδου- z .

Το Σχήμα 7-4 μας παρέχει ένα κατάλληλο τρόπο οπτικοποίησης της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στο πεδίο- $\hat{\omega}$ και στο πεδίο- z . Επειδή το πεδίο- $\hat{\omega}$ είναι ένα υποσύνολο του πεδίου- z (ο μοναδιαίος κύκλος) πολλές ιδιότητες της απόκρισης συχνότητας είναι εμφανείς από τις γραφικές



Σχήμα 7-4: Το μιγαδικό επίπεδο- z συμπεριλαμβανομένου και του μοναδιαίου κύκλου, όπου $z = e^{j\hat{\omega}}$. Η γωνία καθορίζεται από την συχνότητα $\hat{\omega}$. Η πορτοκαλί σκίαση του μοναδιαίου κύκλου αντιστοιχεί σε συχνότητες που κυμαίνονται στο διάστημα μεταξύ του 0 και του $\hat{\omega}$. Οι γκρι τελείες πάνω στο μοναδιαίο κύκλο είναι τα σημεία $\{-j, 1, j\}$ τα οποία αντιστοιχούν στο $\hat{\omega} = \{-\pi/2, 0, \pi/2\}$.

παραστάσεις των ιδιοτήτων της συνάρτησης μεταφοράς στο πεδίο- z . Για παράδειγμα η περιοδικότητα της απόκρισης συχνότητας είναι προφανής στο Σχήμα 7-4, το οποίο μας δείχνει ότι για να εξετάσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε όλα τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου πρέπει να διαγράψουμε γωνία 2π ακτινίων. Από την στιγμή που η συχνότητα $\hat{\omega}$ είναι ισοδύναμη με την γωνία στο επίπεδο- z , τα 2π ακτίνια στο επίπεδο- z αντιστοιχούν σε ένα διάστημα συχνοτήτων ίσο με 2π ακτίνια. Συνεχίζοντας να κινούμαστε γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο απλά συμπεριλαμβάνουμε περισσότερες περιόδους της απόκρισης συχνότητας.

7-6.2 Τα Μηδενικά και οι Πόλοι της $H(z)$

Έχουμε ήδη δει ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος FIR ορίζεται ουσιαστικά από τα μηδενικά του. Αυτό φαίνεται από το παρακάτω παράδειγμα:



Παράδειγμα 7-9: Μηδενικά και Πόλοι της $H(z)$

Θεωρήστε τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3},$$

η οποία μπορεί να εκφραστεί στις ακόλουθες διαφορετικές μορφές:

$$H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3} \quad (7.27)$$

$$= (1 - z^{-1})(1 - e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - e^{-j\pi/3}z^{-1}) \quad (7.28)$$

ή, αν πολλαπλασιάσουμε την $H(z)$ με z^3/z^3 , προκύπτουν οι ακόλουθες δύο ισοδύναμες μορφές:

$$H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z - 1}{z^3} \quad (7.29)$$

$$= \frac{(z - 1)(z - e^{j\pi/3})(z - e^{-j\pi/3})}{z^3} \quad (7.30)$$

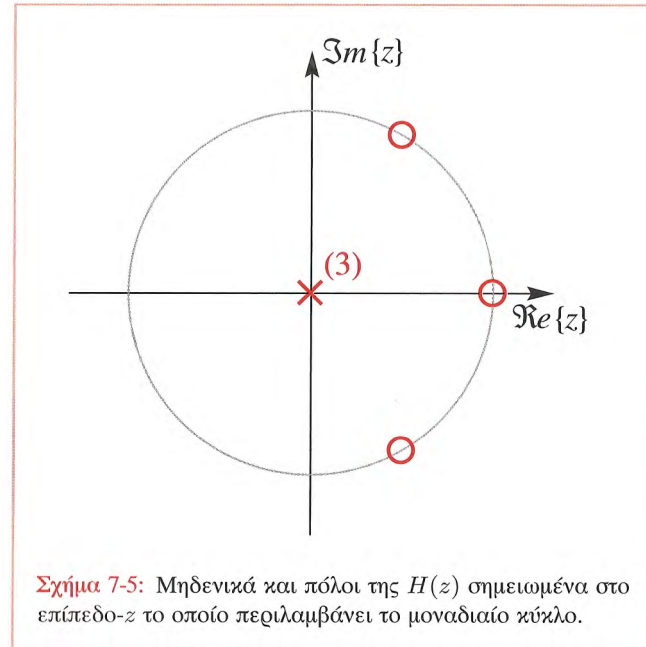
Οι Εξισώσεις (7.27)-(7.30) μας δίνουν τέσσερις διαφορετικές, αλλά ισοδύναμες, μορφές της $H(z)$. Η παραγοντοποιημένη μορφή της Σχέσης (7.30) μας δείχνει καθαρά ότι τα μηδενικά της $H(z)$ βρίσκονται στις θέσεις $z_1 = 1$, $z_2 = e^{j\pi/3}$ και $z_3 = e^{-j\pi/3} = z_2^*$ του επιπέδου- z . Η Εξίσωση (7.30) μας δείχνει επίσης ότι η $H(z) \rightarrow \infty$ όταν το $z \rightarrow 0$. Οι τιμές του z για τις οποίες η $H(z)$ είναι άοριστη (άπειρη) καλούνται **πόλοι** της $H(z)$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο όρος z^3 παριστάνει τρεις πόλους στο $z = 0$ ή ότι η $H(z)$ έχει έναν πόλο τρίτης τάξης στο $z = 0$.

Έχουμε δηλώσει ότι οι πόλοι και τα μηδενικά ορίζουν τη συνάρτηση μεταφοράς εκτός μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς. Παρατηρήστε ότι το πολυώνυμο $\frac{1}{2}H(z) = 0.5 - z^{-1} + z^{-2} - 0.5z^{-3}$ έχει ακριβώς τους ίδιους πόλους και μηδενικά με το πολυώνυμο $H(z)$ της Σχέσης (7.27). ■

Παρόλο που ίσως είναι λιγότερο προφανές, οι θέσεις στις οποίες βρίσκονται τα μηδενικά και οι πόλοι είναι ξεκάθαρες όταν η $H(z)$ είναι γραμμένη στη μορφή της Σχέσης (7.28), αφού κάθε παράγοντας της μορφής $(1 - az^{-1})$ μπορεί πάντα να εκφραστεί ως

$$(1 - az^{-1}) = \frac{(z - a)}{z}$$

και το οποίο μας δείχνει ότι κάθε παράγοντας της μορφής $(1 - az^{-1})$ αντιπροσωπεύει ένα μηδενικό στο $z = a$ και έναν πόλο στο $z = 0$. Όταν η $H(z)$ περιέχει μόνο αρνητικές δυνάμεις του z , είναι συνήθως πιο βολικό να χρησιμοποιούμε τις αναπαραστάσεις των Σχέσεων (7.27) και (7.28) αφού οι αρνητικές δυνάμεις του z έχουν άμεση αντιστοιχία με την εξίσωση διαφορών και την κρουστική απόκριση. Είναι χρήσιμο να



Σχήμα 7-5: Μηδενικά και πόλοι της $H(z)$ σημειωμένα στο επίπεδο- z το οποίο περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο.

δείχνουμε τα μηδενικά και τους πόλους της $H(z)$ σαν

σημεία στο επίπεδο- z . Η γραφική παράσταση στο Σχήμα 7-5 μας δείχνει τα τρία μηδενικά και τους τρεις πόλους του Παραδείγματος 7-9. Μια τέτοια γραφική παράσταση καλείται *γραφική παράσταση πόλων-μηδενικών*. Αυτή η γραφική παράσταση δημιουργήθηκε στο Matlab χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `zplane`. Κάθε θέση μηδενικού δείχνεται από έναν μικρό κύκλο και οι τρεις πόλοι στο $z = 0$ δείχνονται από ένα \times με τον αριθμό 3 δίπλα του να δηλώνει την πολλαπλότητα του. Γενικά όταν όλοι οι πόλοι δεν είναι συγκεντρωμένοι στο $z = 0$, το σύμβολο \times θα σημειώνει τη θέση του κάθε πόλου. Από την στιγμή που ο μοναδιαίος κύκλος είναι η καμπύλη πάνω στην οποία αποτιμώνται η $H(z)$ δίνει την απόκριση συχνότητας του ΓΧΑ συστήματος του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς είναι η $H(z)$, ο μοναδιαίος κύκλος φαίνεται στο Σχήμα 7-5 ως ένας γκρι κύκλος, για αναφορά.

7-6.3 Η Σημαντικότητα των Μηδενικών της $H(z)$

Στην Ενότητα 7-6.2 δείξαμε ότι τα μηδενικά μιας πολυωνυμικής συνάρτησης μεταφοράς είναι ικανά να προσδιορίσουν την $H(z)$ εκτός μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς. Η συνάρτηση μεταφοράς προσδιορίζει την εξίσωση διαφορών του φίλτρου αφού οι συντελεστές του πολυωνύμου $H(z)$ ταυτίζονται με τους συντελεστές της εξίσωσης διαφορών. Η εξίσωση διαφορών αποτελεί τον άμεσο σύνδεσμο ανάμεσα σε ένα σήμα εισόδου $x[n]$ και την αντίστοιχη έξοδο $y[n]$. Ωστόσο, υπάρχουν μερικά σήματα εισόδου που η γνώση των θέσεων των μηδενικών είναι αρκετή για να περιγράψουμε με ακρίβεια την έξοδο, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση διαφορών. Τέτοια σήματα είναι σήματα της μορφής $x[n] = z_0^n$ για κάθε n , όπου ο δείκτης σημαίνει ότι z_0 είναι ένα συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός. Στην περίπτωση αυτή, η έξοδος είναι:

$$y[n] = H(z_0)z_0^n$$

Η ποσότητα $H(z_0)$ είναι μια μιγαδική σταθερά, η οποία, προκαλεί μια αλλαγή στο μέτρο και τη φάση του σήματος

εισόδου z_0^n . Συγκεκριμένα, αν z_0 είναι ένα από τα μηδενικά της $H(z)$, τότε $H(z_0) = 0$ και επομένως η έξοδος θα είναι ίση με μηδέν.

Παράδειγμα 7-10: Ακύρωση Σημάτων με Μηδενικά

Για παράδειγμα, όταν $H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}$, οι ρίζες είναι:

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1e^{j\pi/3}$$

$$z_3 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1e^{-j\pi/3}$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 7-5, τα μηδενικά αυτά βρίσκονται όλα πάνω στον μοναδιαίο κύκλο και επομένως μιγαδικά ημιτονοειδή σήματα συχνότητας $0, \pi/3$ και $-\pi/3$ θα μηδενιστούν από το σύστημα. Αυτό σημαίνει, ότι η έξοδος του συστήματος για κάθε ένα από τα ακόλουθα τρία σήματα θα είναι μηδέν:

$$x_1[n] = (z_1)^n = 1$$

$$x_2[n] = (z_2)^n = e^{j\pi n/3}$$

$$x_3[n] = (z_3)^n = e^{-j\pi n/3}$$

Όπως διασαφηνίζεται από το παραπάνω παράδειγμα, τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς που βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο αντιστοιχούν σε συχνότητες στις οποίες το κέρδος του συστήματος είναι μηδέν. Άρα, μιγαδικά ημιτονικά σήματα δ' αυτές τις συχνότητες εμποδίζονται, ή "ακυρώνονται" από το σύστημα.

Επίδειξη: Διεπαφή PeZ



Άσκηση 7.7: Επιβεβαιώστε το γεγονός ότι οι είσοδοι $x_1[n]$, $x_2[n]$ και $x_3[n]$ του Παραδείγματος

7-10 δημιουργούν μηδενικές εξόδους. Αντικαταστήστε αυτά τα σήματα στην εξίσωση διαφορών $y[n] = x[n] - 2x[n-1] + 2x[n-2] - x[n-3]$ για να δείξετε ότι οι μιγαδικοί φάσορες ακυρώνονται για όλες τις τιμές του n . Δείξτε επίσης ότι αφού το φίλτρο είναι γραμμικό, θα ακυρώνει σήματα όπως το $2 \cos(\pi n/3)$, το οποίο προκύπτει από το άθροισμα του $x_2[n]$ και $x_3[n]$.

7-6.4 Φίλτρα Ακύρωσης

Μόλις δείξαμε ότι αν τα μηδενικά της $H(z)$ βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, τότε κάποια ημιτονοειδή σήματα εισόδου απομακρύνονται ή ακυρώνονται από το φίλτρο. Επομένως, θα έπρεπε να είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα για το σχεδιασμό ενός FIR φίλτρου που θα ακυρώνει μια συγκεκριμένη ημιτονοειδή είσοδο. Αυτή η δυνατότητα χρειάζεται συχνά για την εξάλειψη σημάτων παρεμβολής σε ένα ραντάρ ή σε ένα σύστημα επικοινωνίας. Ομοίως, η παρεμβολή των 50-Hz από μια γραμμική ηλεκτρικού ρεύματος μπορεί να εξαλειφθεί τοποθετώντας μια ακύρωση στη σωστή συχνότητα.

Τα μηδενικά στο επίπεδο-z μπορούν να απομακρύνουν μόνο σήματα που έχουν την ειδική μορφή $x[n] = z_0^n$. Αν θέλουμε να εξαλείψουμε ένα ημιτονοειδές σήμα εισόδου τότε ουσιαστικά πρέπει να απομακρύνουμε δύο σήματα της μορφής $z_1^n + z_2^n$, δηλαδή,

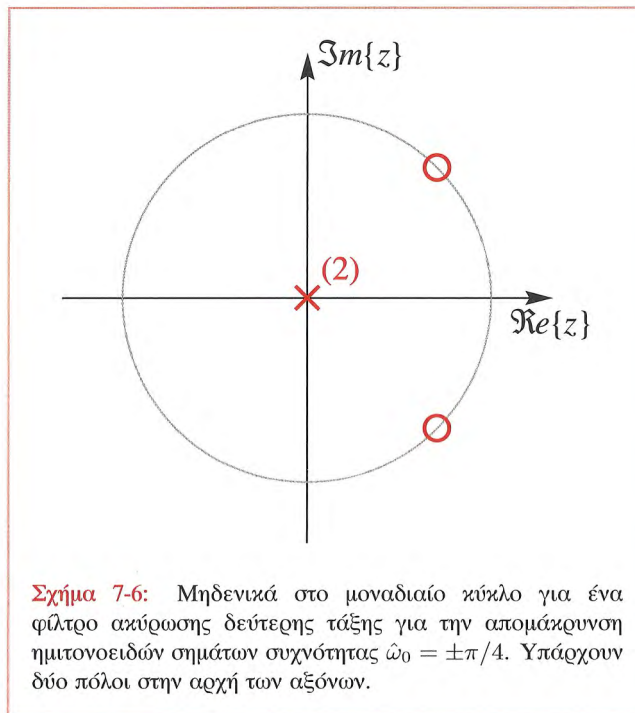
$$x[n] = \cos(\hat{\omega}_0 n) = \frac{1}{2}e^{j\hat{\omega}_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\hat{\omega}_0 n}$$

Κάθε εκθετικό μιγαδικό σήμα μπορεί να απομακρυνθεί από ένα FIR φίλτρο πρώτης τάξης και στη συνέχεια τα δύο φίλτρα θα συνδεθούν σε σειρά για να σχηματίσουν το φίλτρο ακύρωσης δεύτερης τάξης που απομακρύνει το συνημίτονο. Το FIR φίλτρο δεύτερης τάξης θα έχει δύο μηδενικά στο $z_1 = e^{j\hat{\omega}_0}$ και $z_2 = e^{-j\hat{\omega}_0}$. Το σήμα z_1^n θα ακυρωθεί από ένα φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς

$$H_1(z) = 1 - z_1 z^{-1}$$

αφού $H_1(z_1) = 0$ στο $z = z_1$, δηλαδή,

$$H_1(z_1) = 1 - z_1(z_1)^{-1} = 1 - 1 = 0$$



Σχήμα 7-6: Μηδενικά στο μοναδιαίο κύκλο για ένα φίλτρο ακύρωσης δεύτερης τάξης για την απομάκρυνση ημιτονοειδών σημάτων συχνότητας $\hat{\omega}_0 = \pm\pi/4$. Υπάρχουν δύο πόλοι στην αρχή των αξόνων.

Ομοίως, η $H_2(z) = 1 - z_2 z^{-1}$ θα απομακρύνει το z_2^n . Έτσι το φίλτρο ακύρωσης δεύτερης τάξης θα είναι το γινόμενο

$$\begin{aligned} H(z) &= H_1(z)H_2(z) \\ &= (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \\ &= 1 - (z_1 + z_2)z^{-1} + (z_1 z_2)z^{-2} \\ &= 1 - (e^{j\hat{\omega}_0} + e^{-j\hat{\omega}_0})z^{-1} + (e^{j\hat{\omega}_0} e^{-j\hat{\omega}_0})z^{-2} \\ &= 1 - 2 \cos(\hat{\omega}_0)z^{-1} + z^{-2} \end{aligned}$$

Το Σχήμα 7-6 δείχνει τα δύο μηδενικά που απαιτούνται για την απομάκρυνση των συνιστωσών στο $z = e^{\pm j\pi/4}$. Για το παράδειγμα που απεικονίζεται στο Σχήμα 7-6, οι αριθμητικές τιμές για τους συντελεστές της $H(z)$ είναι

$$H(z) = 1 - 2 \cos(\pi/4)z^{-1} + z^{-2} = 1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}$$

Άρα το φίλτρο ακύρωσης που θα απομακρύνει το σήμα $\cos(0.25\pi n)$ από την είσοδό του είναι το FIR φίλτρο του οποίου η εξίσωση διαφορών είναι

$$y[n] = x[n] - \sqrt{2}x[n-1] + x[n-2] \quad (7.31)$$

7-6.5 Γραφική Σχέση μεταξύ z και $\hat{\omega}$

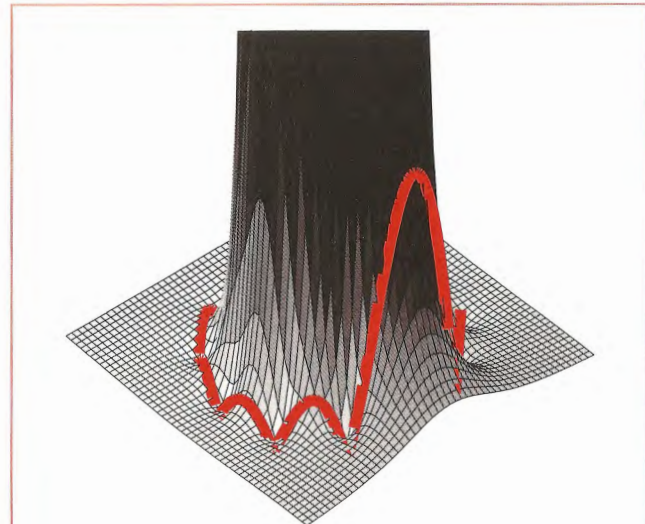
Η εξίσωση $z = e^{j\hat{\omega}}$ παρέχει τον σύνδεσμο μεταξύ του πεδίου- z και του πεδίου- $\hat{\omega}$. Όπως έχουμε δείξει στη Σχέση (7.25), η απόκριση συχνότητας λαμβάνεται υπολογίζοντας την συνάρτηση μεταφοράς πάνω στο μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου- z . Σε αυτή την αντιστοιχία μπορεί να δοθεί μια χρήσιμη γραφική ερμηνεία. Θεωρώντας τη γραφική παράσταση πόλων-μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς, μπορούμε να φανταστούμε πώς προκύπτει η γραφική παράσταση της απόκριση συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}})$ από τον υπολογισμό της $H(z)$ πάνω στο μοναδιαίο κύκλο και επίσης πώς εξαρτάται από τους πόλους και τα μηδενικά της $H(z)$. Σαν ένα παράδειγμα, στο Σχήμα 7-7 παρουσιάζεται μια γραφική παράσταση που προέκυψε από τον υπολογισμό του μέτρου του μετασχηματισμού- z $|H(z)|$ πάνω σε μια περιοχή του επιπέδου- z που συμπεριλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο όπως και τιμές μέσα και έξω απ' αυτόν. Το σύστημα σε αυτή την περίπτωση είναι ένας κινούμενος αθροιστής μήκους 11, δηλαδή, ένα FIR φίλτρο του οποίου οι συντελεστές είναι όλοι ίσοι με τη μονάδα⁴.

Η συνάρτηση μεταφοράς για αυτό το φίλτρο είναι

$$H(z) = \sum_{k=0}^{10} z^{-k} \quad (7.32)$$

Στην Ενότητα 7-7 θα δείξουμε ότι τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς αυτού του φίλτρου βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο σε γωνίες $\hat{\omega} = 2\pi k/11$, για $k = 1, 2, \dots, 10$. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο της

⁴ Αυτό είναι το ίδιο σύστημα με το φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής μήκους 11 που αναφέραμε λεπτομερώς στην Ενότητα 6-7 στη Σελίδα 6-7, με τη διαφορά ότι παραλείψαμε την πολλαπλασιαστική σταθερά 1/11.



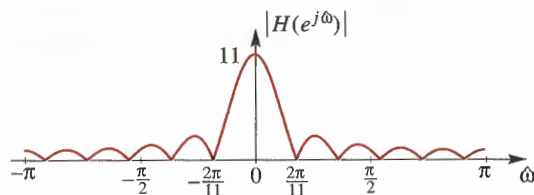
Σχήμα 7-7: Μετασχηματισμός- z ενός FIR φίλτρου υπολογισμένος στη περιοχή $[-1.4 \leq \Re\{z\} \leq 1.4] \times [-1.4 \leq \Im\{z\} \leq 1.4]$ του επιπέδου- z η οποία συμπεριλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Οι τιμές κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου εμφανίζονται με χρωματιστή γραμμή όπου υπολογίζεται η απόκριση συχνότητας (μέτρο). Η όψη είναι από το τέταρτο τεταρτημόριο, οπότε το σημείο $z = 1$ είναι μπροστά και δεξιά.

Σχέσης (7.32) μπορεί να αναπαρασταθεί στη μορφή

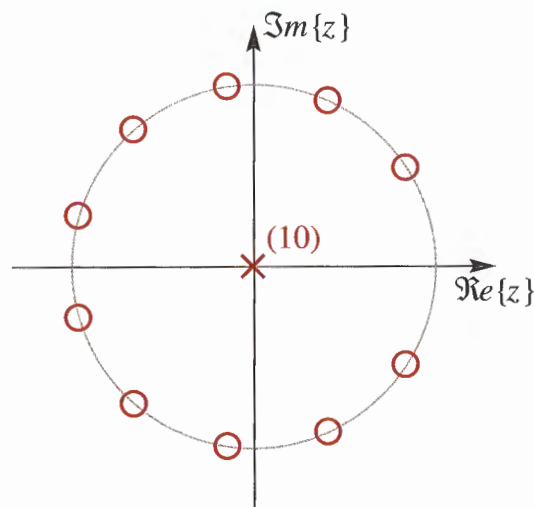
$$H(z) = (1 - e^{j2\pi/11}z^{-1})(1 - e^{j4\pi/11}z^{-1}) \dots (1 - e^{j18\pi/11}z^{-1})(1 - e^{j20\pi/11}z^{-1}) \quad (7.33)$$

Θυμηθείτε ότι κάθε παράγοντας της μορφής $(1 - e^{j2\pi k/11}z^{-1})$ αναπαριστά ένα μηδενικό στο $z = e^{j2\pi/11}$ και ένα πόλο στο $z = 0$. Έτσι, η Σχέση (7.33), δείχνει τα 10 μηδενικά της $H(z)$ στα σημεία $z = e^{j2\pi k/11}$, για $k = 1, 2, \dots, 10$ και τους 10 πόλους στο $z = 0$.

Στη γραφική παράσταση μέτρου του Σχήματος 7-7, παρατηρούμε ότι τα μηδενικά υποβιβάζουν την τρισδιάστατη



Σχήμα 7-8: Απόκριση συχνότητας (μέτρο μόνο) του φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής μήκους 11. Αυτές είναι οι τιμές της $H(z)$ κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο- z . Υπάρχουν 10 μηδενικά ομοιόμορφα κατανομημένα κατά μήκος του άξονα της συχνότητας.



Σχήμα 7-9: Κατανομή μηδενικών και πόλων του φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής μήκους 11. Υπάρχουν 10 μηδενικά ομοιόμορφα κατανομημένα κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου και 10 πόλοι στην αρχή των αξόνων.

γραφική παράσταση γύρω από το μοναδιαίο κύκλο. Εντός

του μοναδιαίου κύκλου, οι τιμές της $H(z)$ γίνονται πολύ μεγάλες εξαιτίας των πόλων στο $z = 0$. Η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ λαμβάνεται επιλέγοντας τις τιμές του μετασχηματισμού- z κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου στο Σχήμα 7-7. Στο Σχήμα 7-8 φαίνεται μια γραφική παράσταση του $|H(e^{j\omega})|$ ως προς το ω . Η μορφή της απόκρισης συχνότητας μπορεί να εξηγηθεί αν πάρουμε υπόψη μας τις θέσεις που βρίσκονται τα μηδενικά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7-9 αναγνωρίζοντας ότι οι πόλοι στο $z = 0$ ανεβάζουν την $H(e^{j\omega})$, αλλά τα μηδενικά κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου κάνουν την $H(e^{j\omega}) = 0$ κατά τακτά διαστήματα εκτός από την περιοχή κοντά στο $\omega = 0$ (δηλαδή γύρω από το $z = 1$). Οι τιμές του μοναδιαίου κύκλου ακολουθούν τα ανεβοκατεβάσματα της $H(z)$ καθώς το ω μεταβάλλεται από το $-\pi$ στο $+\pi$ με $|z| = 1$.

Αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι μια διαισθητική εικόνα της απόκρισης συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος μπορεί να οπτικοποιηθεί με μια γραφική παράσταση των πόλων και των μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$. Χρειάζεται απλά να θυμόμαστε ότι ένας πόλος θα “σπρώχνει προς τα πάνω” την απόκριση συχνότητας και ένα μηδενικό θα την “τραβάει προς τα κάτω”. Επιπλέον, ένα μηδενικό στο μοναδιαίο κύκλο θα αναγκάζει την απόκριση συχνότητας να είναι μηδέν στη συχνότητα που αντιστοιχεί στη γωνιακή θέση του μηδενικού.

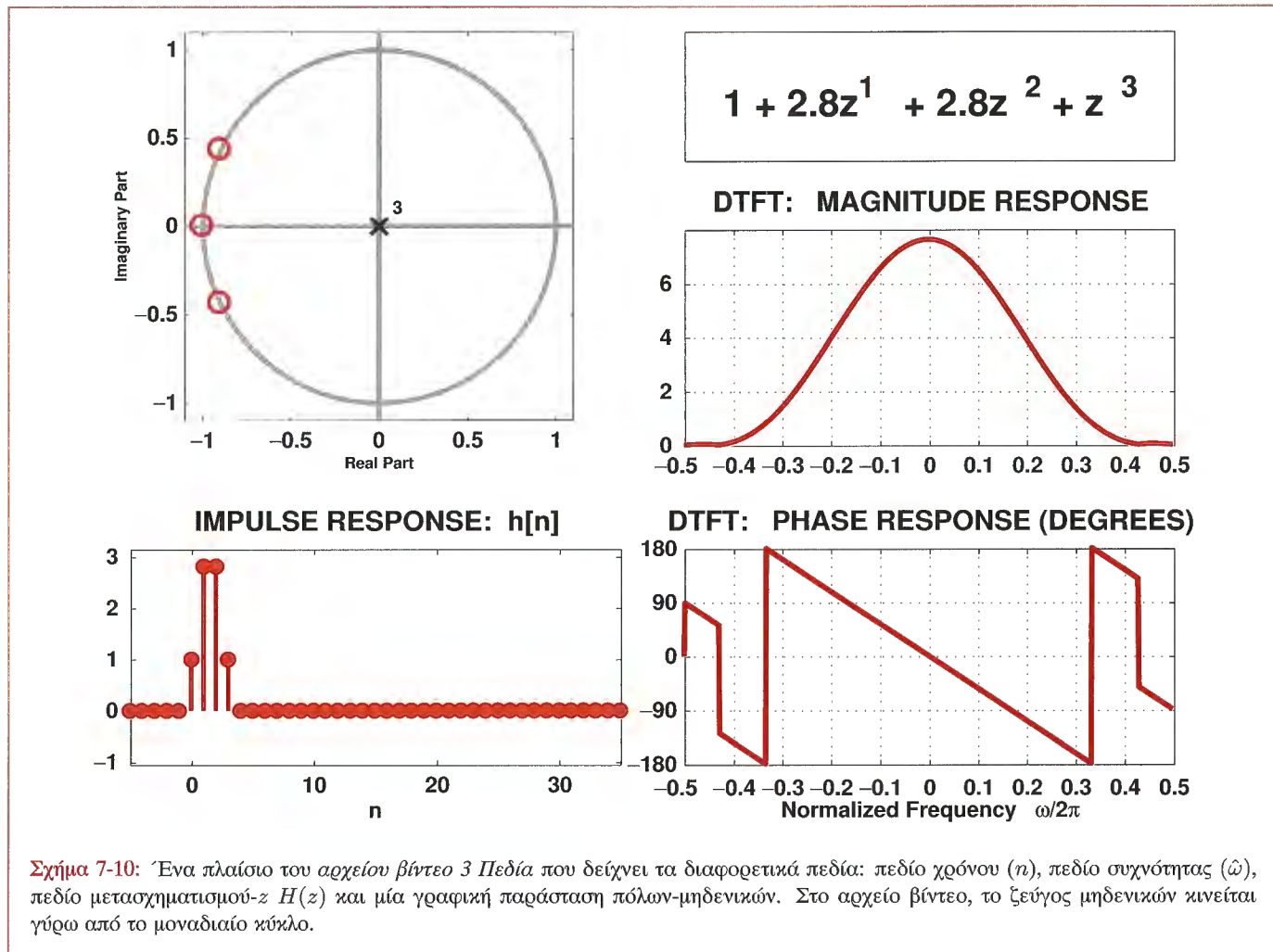


Επίδειξη: Τρία Πεδία - FIR

Το Σχήμα 7-10 δείχνει ένα πλαίσιο από το αρχείο βίντεο 3-Πεδία που παρουσιάζει τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των πεδίων n , z και ω .

7-7 Χρήσιμα Φίλτρα

Τώρα που μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τις καινούριες μας γνώσεις για το σχεδιασμό φίλτρων που συνδέουν το πεδίο- z με το πεδίο- ω , μπορούμε να αξιοποιήσουμε αυτή τη γνώση για το σχεδιασμό φίλτρων με επιθυμητά χαρακτηριστικά. Σε αυτή την ενότητα, θα επικεντρωθούμε



Σχήμα 7-10: Ένα πλαίσιο του αρχείου βίντεο 3 Πεδία που δείχνει τα διαφορετικά πεδία: πεδίο χρόνου (n), πεδίο συχνότητας (ω), πεδίο μετασχηματισμού- z $H(z)$ και μία γραφική παράσταση πόλων-μηδενικών. Στο αρχείο βίντεο, το ζεύγος μηδενικών κινείται γύρω από το μοναδιαίο κύκλο.

σε μια ειδική κατηγορία ζωνοδιαβατών φίλτρων τα οποία είναι όλα παρόμοια με το φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής.

7-7.1 Φίλτρο Τρέχουσας Μέσης Τιμής Μήκους L

Γενικεύοντας από την προηγούμενη ενότητα, το μήκους L φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής

$$y[n] = \sum_{k=0}^{L-1} x[n-k]$$

έχει την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k}$$

Αν θυμηθούμε τον τύπο (6.23) της Σελίδας 160 για το άθροισμα των L όρων μιας γεωμετρικής προόδου, η $H(z)$ μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} = \frac{1 - z^{-L}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^L - 1}{z^{L-1}(z - 1)} \quad (7.34)$$

Η τελική μορφή της $H(z)$ είναι μια ρητή συνάρτηση όπου το πολυώνυμο του αριθμητή είναι το $z^L - 1$ και του παρανομαστή είναι το $z^{L-1}(z - 1)$. Τα μηδενικά της $H(z)$ θα καθοριστούν από τις ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή, δηλαδή τις τιμές του z για τις οποίες

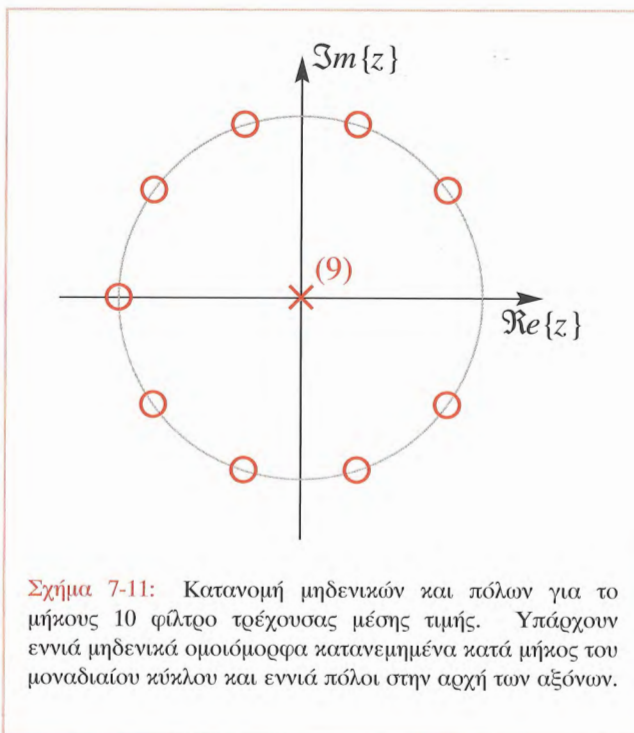
$$z^L - 1 = 0 \quad \implies \quad z^L = 1 \quad (7.35)$$

Αφού το $e^{j2\pi k} = 1$ για k ακέραιο, είναι εύκολο να δούμε με αντικατάσταση ότι κάθε μια από τις τιμές

$$z = e^{j2\pi k/L} \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (7.36)$$

ικανοποιεί τη Σχέση (7.35) και επομένως αυτοί οι L αριθμοί είναι οι ρίζες του L -οστής τάξης πολυωνύμου της Σχέσης (7.35). Επειδή οι τιμές στην (7.36) ικανοποιούν την εξίσωση $z^L = 1$, ονομάζονται οι L -οστές ρίζες της μονάδας. Τα μηδενικά του παρανομαστή στη Σχέση (7.34), τα οποία είναι είτε $z = 0$ (τάξης $L-1$) είτε $z = 1$, θα μπορούσε κανονικά να είναι οι πόλοι της $H(z)$. Ωστόσο, αφού μία από τις L ρίζες τις μονάδες είναι $z = 1$ (δηλαδή, για $k = 0$ στην (7.36)) αυτό το μηδενικό απαλείφεται με το αντίστοιχο μηδενικό του παρανομαστή και έτσι στην πραγματικότητα οι πόλοι της $H(z)$ προκύπτουν μόνο από τον όρο z^{L-1} . Επομένως, συμπεραίνουμε ότι η $H(z)$ μπορεί να εκφραστεί στην ακόλουθη παραγοντοποιημένη μορφή:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} = \prod_{k=1}^{L-1} (1 - e^{j2\pi k/L} z^{-1}) \quad (7.37)$$



Σχήμα 7-11: Κατανομή μηδενικών και πόλων για το μήκους 10 φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής. Υπάρχουν εννιά μηδενικά ομοιόμορφα κατανεμημένα κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου και εννιά πόλοι στην αρχή των αξόνων.



Παράδειγμα 7-11: $H H(e^{j\omega})$ από την $H(z)$

Για ένα μήκους 10 ($L = 10$) φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής, η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

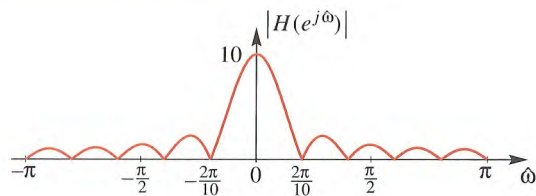
$$H(z) = \sum_{k=0}^9 z^{-k} = \frac{1 - z^{-10}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{10} - 1}{z^9(z - 1)} \quad (7.38)$$

Η γραφική παράσταση για αυτή την περίπτωση φαίνεται στο Σχήμα 7-11 και η αντίστοιχη απόκριση συχνότητας για το φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής φαίνεται στο Σχήμα 7-12. Οι παράγοντες του αριθμητή είναι οι δέκατες ρίζες της μονάδας και το μηδενικό στο $z = 1$ απαλείφεται με τον αντίστοιχο όρο στον παρανομαστή. Αυτό εξηγεί γιατί

έχουμε μόνο εννιά μηδενικά γύρω από το μοναδιαίο κύκλο με ένα κενό στο $z = 1$. Τα εννιά μηδενικά γύρω από το μοναδιαίο κύκλο στο Σχήμα 7-11 φαίνονται σαν μηδενικά κατά μήκος του άξονα $\hat{\omega}$ στο Σχήμα 7-12 στα $\hat{\omega} = 2\pi k/10$ και είναι η ασυνέχεια στο $z = 1$ που επιτρέπει στην απόκριση συχνότητας να είναι μεγαλύτερη στο $\hat{\omega} = 0$. Τα υπόλοιπα μηδενικά γύρω από το μοναδιαίο κύκλο κρατάνε την $H(e^{j\hat{\omega}})$ χαμηλά, δημιουργώντας έτσι την απόκριση συχνότητας του κατωπερατού φίλτρου που φαίνεται στο Σχήμα 7-12. ■

7-7.2 Ένα Μιγαδικό Φίλτρο Διέλευσης Ζώνης Συχνότητας

Τώρα διαθέτουμε τη γνώση που μας επιτρέπει να ελέγχουμε την απόκριση συχνότητας ενός FIR φίλτρου τοποθετώντας τα μηδενικά του στο μοναδιαίο κύκλο. Αυτή η μέθοδος διευκολύνει την κατασκευή άλλων FIR φίλτρων ελέγχοντας τη θέση της ζώνης διάβασης. Αν μετακινήσουμε τη ζώνη διάβασης σε μια συχνότητα μακριά από το $\hat{\omega} = 0$, έχουμε ένα φίλτρο που αφήνει να περάσει μια μικρή ζώνη συχνοτήτων-ένα ζωνοδιαβατό φίλτρο. Ο προφανής



Σχήμα 7-12: Απόκριση συχνότητας (μέτρο μόνο) για το μήκος 10 φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής. Αυτές είναι οι τιμές κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο- z . Υπάρχουν εννιά μηδενικά ομοιόμορφα κατανεμημένα κατά μήκος του άξονα της συχνότητας.

τρόπος για να μετακινήσουμε τη ζώνη διάβασης είναι να χρησιμοποιήσουμε στη συνάρτηση μεταφοράς όλες τις ρίζες

της μονάδας σαν μηδενικά ενός FIR φίλτρου, εκτός από μία. Ένας τύπος για αυτό το καινούργιο φίλτρο είναι ο ακόλουθος:

$$H(z) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq k_0}}^{L-1} (1 - e^{j2\pi k/L} z^{-1}) \quad (7.39)$$

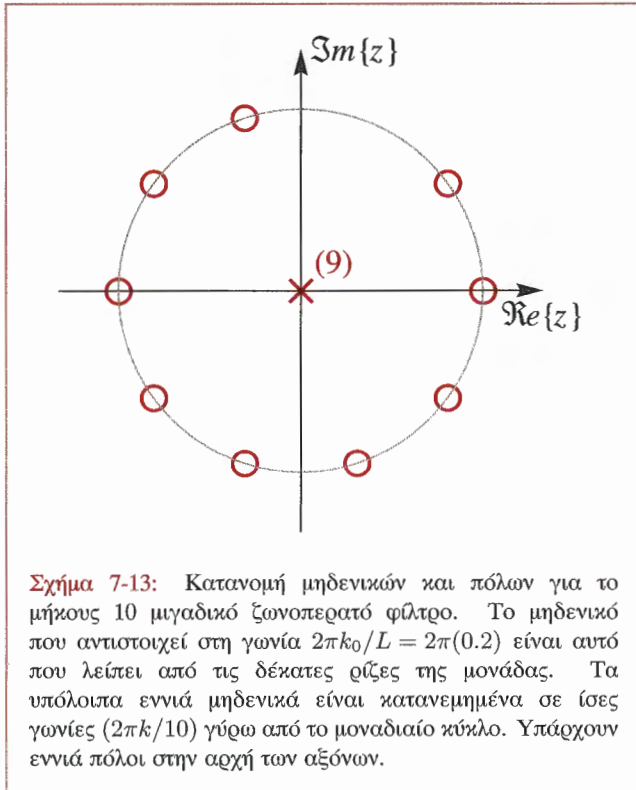
όπου ο δείκτης k_0 δηλώνει τη ρίζα που παραλείψαμε στο σημείο $z = e^{j2\pi k_0/L}$. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 7-13 για $k_0 = 2$ και $L = 10$. Στη γενική περίπτωση, η ζώνη διάβασης του φίλτρου του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τη Σχέση (7.39) θα πρέπει να μετακινηθεί από το διάστημα γύρω από το $\hat{\omega} = 0$ σ' ένα ίδιο διάστημα γύρω από τη συχνότητα:

$$\hat{\omega} = \frac{2\pi k_0}{L}$$

γιατί το μηδενικό λείπει σε αυτή τη συχνότητα. Το Σχήμα 7-14 επιβεβαιώνει αυτή τη διαίσθησή μας, γιατί με $k_0 = 2$ η κανονικοποιημένη συχνότητα στην οποία εμφανίζεται η κορυφή είναι $\hat{\omega}/2\pi = k_0/L = 2/10$. Αυτό το φίλτρο είναι ένα ζωνοδιαβατό φίλτρο ή φίλτρο διέλευσης ζώνης συχνοτήτων, αφού οι συχνότητες εκτός της στενής ζώνης γύρω από το $\hat{\omega} = 0.4\pi$ ενισχύονται πολύ λιγότερο από αυτές που ανήκουν στη ζώνη διάβασης του φίλτρου.

Ο τύπος της Σχέσης (7.39) είναι ιδανικός για να δούμε πως θα φτιάξουμε την απόκριση συχνότητας ενός BPF, αλλά δεν είναι πολύ χρήσιμος για τον υπολογισμό των συντελεστών του ζωνοδιαβατού φίλτρου. Αν κάποιος επιχειρήσει έναν άμεσο πολλαπλασιασμό των παραγόντων της Σχέσης (7.39), πρέπει να συνδυαστούν εννιά μιγαδικοί όροι. Μετά τις πράξεις, οι συντελεστές του φίλτρου θα έχουν τελικά μιγαδικές τιμές. Αυτό είναι προφανές αν σκεφτούμε ότι τα μηδενικά του Σχήματος 7-13 δεν μπορούν να ομαδοποιηθούν όλα ως ζεύγη συζυγών μιγαδικών.

Για την εύρεση των συντελεστών του φίλτρου χρειάζεται να ακολουθήσουμε μια άλλη στρατηγική. Μια ιδέα είναι να δούμε την κατανομή μηδενικών στο Σχήμα 7-13 ως μια περιστροφή των μηδενικών του φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής του Σχήματος 7-11. Παρατηρήστε ότι η



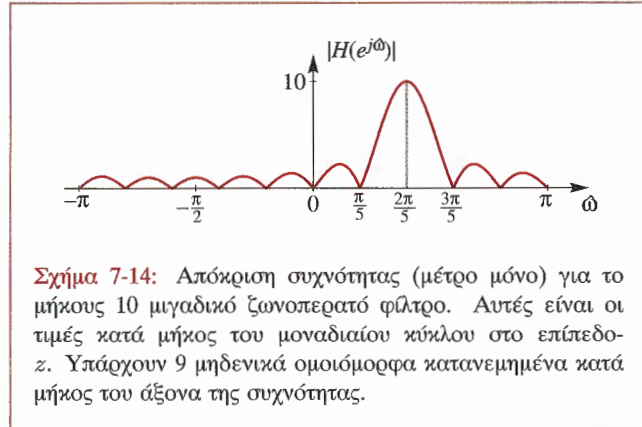
Σχήμα 7-13: Κατανομή μηδενικών και πόλων για το μήκους 10 μιγαδικό ζωνοπερατό φίλτρο. Το μηδενικό που αντιστοιχεί στη γωνία $2\pi k_0/L = 2\pi(0.2)$ είναι αυτό που λείπει από τις δέκατες ρίζες της μονάδας. Τα υπόλοιπα εννιά μηδενικά είναι κατανεμημένα σε ίσες γωνίες ($2\pi k/10$) γύρω από το μοναδιαίο κύκλο. Υπάρχουν εννιά πόλοι στην αρχή των αξόνων.

περιστροφή του επιπέδου- z θα έχει αντίστοιχο αποτέλεσμα με τη μετάθεση της απόκρισης συχνότητας κατά μήκος του άξονα ω κατά ποσότητα όσο η περιστροφή. Η επιθυμητή περιστροφή σε αυτή την περίπτωση είναι κατά γωνία $2\pi k_0/L$. Επομένως το ερώτημα είναι πώς να μετακινήσουμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου μέσω μιας περιστροφής. Η απάντηση είναι ότι πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το k -οστό συντελεστή του φίλτρου b_k με $e^{-jk\theta}$ όπου θ είναι η επιθυμητή γωνία περιστροφής.

Θεωρήστε την ακόλουθη γενική πράξη σε ένα πολυώνυμο $G(z)$:

$$H(z) = G(z/r)$$

Όπου εμφανίζεται η μεταβλητή z στο πολυώνυμο $G(z)$ θα



Σχήμα 7-14: Απόκριση συχνότητας (μέτρο μόνο) για το μήκους 10 μιγαδικό ζωνοπερατό φίλτρο. Αυτές είναι οι τιμές κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο- z . Υπάρχουν 9 μηδενικά ομοιόμορφα κατανεμημένα κατά μήκος του άξονα της συχνότητας.

πρέπει να αντικατασταθεί από το z/r . Το αποτέλεσμα αυτής της αντικατάστασης στις ρίζες του $G(z)$ είναι ο πολλαπλασιασμός τους με r οπότε και γίνονται ρίζες του $H(z)$. Για το απλό παράδειγμα $G(z) = z^2 - 3z + 2 = (z-2)(z-1)$,

$$\begin{aligned} H(z) &= G(z/r) = (z/r)^2 - 3(z/r) + 2 \\ &= \frac{z^2 - 3rz + 2r^2}{r^2} = \frac{(z-2r)(z-r)}{r^2} \end{aligned}$$

Οι δύο ρίζες της $H(z)$ είναι τώρα η $z = 2r$ και $z = r$.

Στη περίπτωση του μιγαδικού ζωνοδιαβατού φίλτρου, το $G(z)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του τρέχουσας μέσης τιμής:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k}$$

και η παράμετρος r είναι ο μιγαδικός εκθετικός $r = e^{j2\pi k_0/L}$. Θυμηθείτε ότι ο πολλαπλασιασμός με ένα μιγαδικό εκθετικό περιστρέφει έναν μιγαδικό αριθμό κατά τη γωνία $2\pi k_0/L$. Τώρα είναι εύκολο να πάρουμε τους καινούριους συντελεστές του φίλτρου

$$H(z) = G(z/r) = G(ze^{-j2\pi k_0/L}) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} e^{j2\pi k_0 k/L}$$

Οπότε οι συντελεστές του μιγαδικού ζωνοδιαβατού φίλτρου είναι:

$$b_k = e^{j2\pi k_0 k/L} \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (7.40)$$

Ένας άλλος τρόπος για να καθορίσουμε την απόκριση συχνότητας του μιγαδικού ζωνοδιαβατού φίλτρου είναι να την υπολογίσουμε απευθείας, μέσω της σχέσης

$$\begin{aligned} H(e^{j\hat{\omega}}) &= \sum_{k=0}^{L-1} e^{j2\pi k_0 k/L} e^{-j\hat{\omega}k} \\ &= \sum_{k=0}^{L-1} e^{-j(\hat{\omega}-j2\pi k_0/L)k} \\ &= G(e^{j(\hat{\omega}-j2\pi k_0/L)}) \end{aligned} \quad (7.41)$$

Αυτή η εξίσωση δείχνει ότι η απόκριση συχνότητας του συστήματος του οποίου οι συντελεστές δίνονται από τη Σχέση (7.40) είναι μια μετατοπισμένη (κατά $2\pi k_0/L$) εκδοχή της απόκρισης συχνότητας του μήκους L φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής.

7-7.3 Ένα Ζωνοπερατό Φίλτρο με Πραγματικούς Συντελεστές

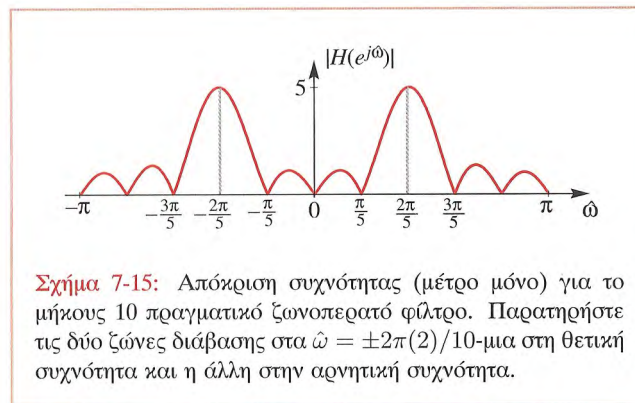
Το προφανές μειονέκτημα της προηγούμενης στρατηγικής είναι ότι οι συντελεστές της Σχέσης (7.41) του φίλτρου που προκύπτει είναι μιγαδικοί. Μπορούμε να τροποποιήσουμε ελαφρώς τη στρατηγική ώστε να πάρουμε ένα ζωνοδιαβατό φίλτρο με πραγματικούς συντελεστές παίρνοντας απλώς το πραγματικό μέρος των μιγαδικών συντελεστών του φίλτρου. Έτσι ο k -οστός συντελεστής του φίλτρου είναι τώρα

$$b_k = \cos(2\pi k_0 k/L) \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, L-1$$

Με αυτούς τους πραγματικούς συντελεστές, το νέο ζωνοπερατό φίλτρο μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο μιγαδικών ζωνοπερατών φίλτρων. Εκφράζοντας τους

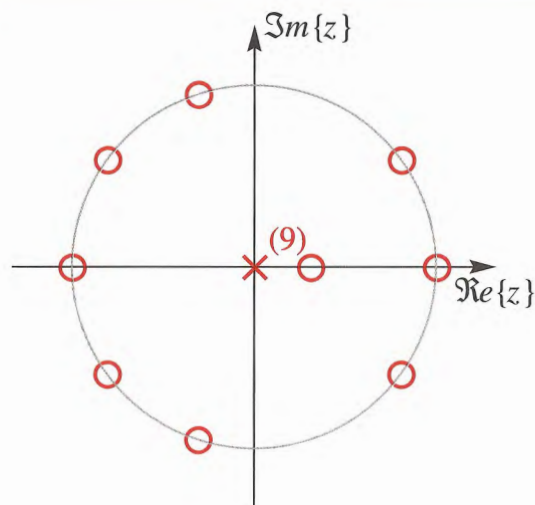
συντελεστές του z^{-k} με μιγαδικά εκθετικά έχουμε:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{L-1} (\cos(2\pi k_0 k/L)) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} \left(\frac{1}{2} e^{j2\pi k_0 k/L} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi k_0 k/L} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} e^{j2\pi k_0 k/L} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} e^{-j2\pi k_0 k/L} \\ &= H_1(z) + H_2(z) \end{aligned}$$



Σχήμα 7-15: Απόκριση συχνότητας (μέτρο μόνο) για το μήκους 10 πραγματικό ζωνοπερατό φίλτρο. Παρατηρήστε τις δύο ζώνες διάβασης στα $\hat{\omega} = \pm 2\pi(2)/10$ -μα στη θετική συχνότητα και η άλλη στην αρνητική συχνότητα.

όπου $H_1(z)$ είναι ένα μιγαδικό ζωνοδιαβατό φίλτρο επικεντρωμένο γύρω από τη συχνότητα $2\pi k_0/L$ και το $H_2(z)$ είναι ένα μιγαδικό ζωνοδιαβατό φίλτρο επικεντρωμένο γύρω από τη συχνότητα $-2\pi k_0/L$. Το Σχήμα 7-15 δείχνει την απόκριση συχνότητας για την περίπτωση $L = 10$ και $k_0 = 2$. Υπάρχουν μηδενικά της απόκρισης συχνότητας σε κάποιες από τις συχνότητες $\hat{\omega} = 2\pi k/L$ γιατί και τα δύο φίλτρα έχουν μηδενικά σε αυτές τις συχνότητες εκτός από τις $\pm 2\pi k_0/L$. Όπως σε κάθε φίλτρο πραγματικών συντελεστών, το μέτρο της απόκρισης συχνότητας παρουσιάζει μια συμμετρία ως προς το $\hat{\omega} = 0$.



Σχήμα 7-16: Κατανομή πόλων-μηδενικών για το μήκους 10 πραγματικό ζωνοπερατό φίλτρο. Από τις αρχικές 10 ρίζες της μονάδας, οι δύο που αντιστοιχούν στις γωνίες $\pm 4\pi/10$ έχουν απομακρυνθεί από τον μοναδιαίο κύκλο, αλλά έχει εμφανιστεί μια νέα στον πραγματικό άξονα. Υπάρχουν 9 πόλοι στην αρχή των συντεταγμένων.

Η απόκριση συχνότητας στο Σχήμα 7-15 έχει δύο κορυφές στις συχνότητες $\hat{\omega} = \pm 4\pi/10 = \pm 2\pi/5$, οπότε πρέπει να λείπουν δύο μηδενικά στο μοναδιαίο κύκλο στις γωνίες $\pm 4\pi/10$. Στο Σχήμα 7-16 βλέπουμε ότι τα δύο μηδενικά στο $z = e^{j4\pi/10} = e^{j2\pi(2)/10}$ και $z = e^{-j4\pi/10} = e^{j2\pi(8)/10}$ έχουν αντικατασταθεί από ένα μοναδιαίο πραγματικό μηδενικό. Επομένως, υπάρχουν οχτώ μηδενικά στο μοναδιαίο κύκλο και ένα πάνω στον πραγματικό άξονα σύνολο εννιά μηδενικά, που είναι και η τάξη του πολυωνύμου του μετασχηματισμού-z. Η θέση αυτού του νέου μηδενικού φαίνεται να είναι στο $z = \cos(2\pi k_0/L) = \cos(0.4\pi) = 0.309$, το οποίο είναι το πραγματικό μέρος των μηδενικών που λείπουν από τον μοναδιαίο κύκλο.

Ένας αλγεβρικός χειρισμός θα μας αποκαλύψει την ακριβή θέση του νέου μηδενικού. Χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση αριθμητή-παρονομαστή και συνδυάζουμε τους δύο όρους σε έναν κοινό παρονομαστή. Για να απλοποιήσουμε κάπως τους συμβολισμούς μας, έστω $p = e^{j2\pi k_0/L}$, έτσι ώστε ο συζυγής να είναι $p^* = e^{-j2\pi k_0/L}$. Τότε,

$$\begin{aligned} H(z) &= H_1(z) + H_2(z) \\ &= \frac{1}{2} \frac{z^L - 1}{z^{L-1}(z - p)} + \frac{1}{2} \frac{z^L - 1}{z^{L-1}(z - p^*)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(z^L - 1)(z - p^*) + (z^L - 1)(z - p)}{z^{L-1}(z - p)(z - p^*)} \\ &= \frac{(z^L - 1)(z - \frac{1}{2}(p + p^*))}{z^{L-1}(z - p)(z - p^*)} \end{aligned}$$

Οι δύο παράγοντες $(z - p)(z - p^*)$ στον παρονομαστή απαλείφουν τους αντίστοιχους παράγοντες στο πολυώνυμο $z^L - 1$ του αριθμητή, αφήνοντας $L - 2$ (σε αυτή τη περίπτωση $L - 2 = 8$) από τις L -οστές ρίζες της μονάδας. Ο όρος $(z - \frac{1}{2}(p + p^*))$ είναι το νέο μηδενικό στο

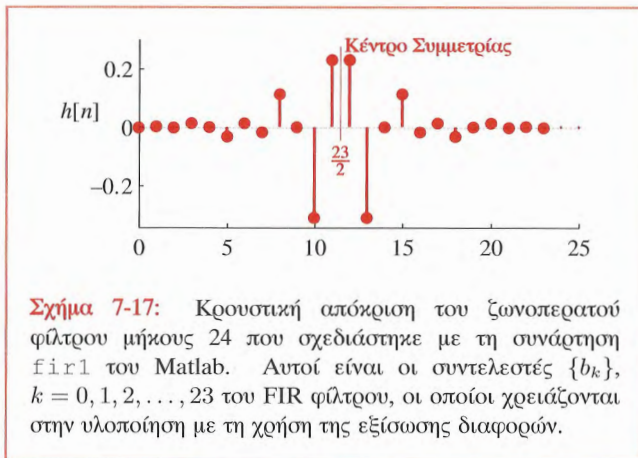
$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(p + p^*) \\ &= \frac{1}{2} (e^{j2\pi k_0/L} + e^{-j2\pi k_0/L}) = \cos(2\pi k_0/L) \end{aligned}$$

το οποίο ταυτίζεται με το πραγματικό μέρος των μηδενικών που απαλείφθηκαν.

7-8 Πρακτικός Σχεδιασμός Φίλτρου Διέλευσης Ζώνης Συχνότητας

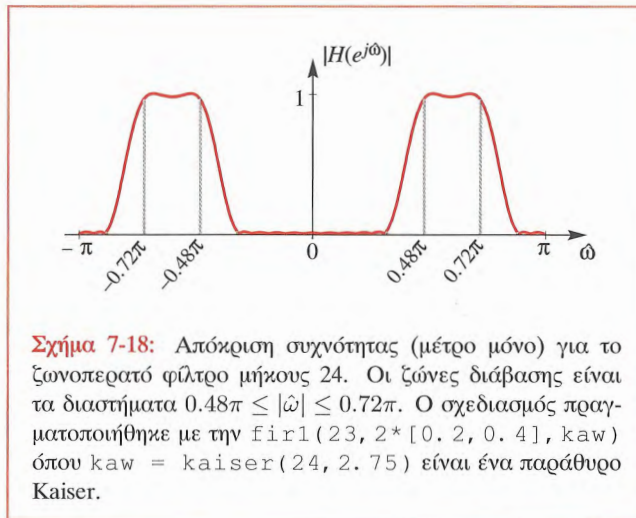
Αν και μπορούν να σχεδιαστούν πολύ καλύτερα φίλτρα από πιο σύνθετες μεθόδους, το παράδειγμα του σχεδιασμού ζωνοδιαβατού φίλτρου που συζητήθηκε στην Ενότητα 7-7 αποτελεί ένα πολύ καλό παράδειγμα που αναδεικνύει τη δύναμη του μετασχηματισμού-z στην απλοποίηση της ανάλυσης τέτοιων προβλημάτων. Ο χαρακτηρισμός ενός φίλτρου από τα μηδενικά (και τους πόλους) της $H(z)$ χρησιμοποιείται πολύ συχνά στο σχεδιασμό και

την υλοποίηση φίλτρων. Ο βασικός λόγος είναι ότι ο μετασχηματισμός- z μετατρέπει δύσκολα προβλήματα που έχουν να κάνουν με συνέλιξη και απόκριση συχνότητας, σε απλές αλγεβρικές πράξεις βασισμένες σε πολλαπλασιασμό και διαίρεση πολυωνύμων. Έτσι, βασικές αλγεβρικές τεχνικές γίνονται απαραίτητα καθημερινά εργαλεία στη σχεδίαση τέτοιων συστημάτων.



Ως τελευταίο παράδειγμα FIR φίλτρου, παρουσιάζουμε ένα φίλτρο μεγάλης τάξης που έχει σχεδιαστεί με τη βοήθεια υπολογιστή από ένα πρόγραμμα σχεδιασμού φίλτρων. Το μεγαλύτερο μέρος του ψηφιακού σχεδιασμού φίλτρων εκτελείται από εργαλεία λογισμικού που επιτρέπουν πιο εξειδικευμένο έλεγχο των χαρακτηριστικών της ζώνης διάβασης και αποκοπής από αυτό που μπορούσαμε να πετύχουμε με την απλή ανάλυση της Ενότητας 7-7. Σχεδιαστικά προγράμματα όπως το `remez` και το `fir1` υπάρχουν στο Matlab.

Αν και δεν είναι πρόθεσή μας να συζητήσουμε κάποια από αυτές τις μεθόδους ή το πώς χρησιμοποιούνται, είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε την έξοδο του προγράμματος `fir1` για να πάρουμε μια ιδέα για το τι μπορεί να επιτευχθεί από μια εξειδικευμένη μέθοδο σχεδιασμού.



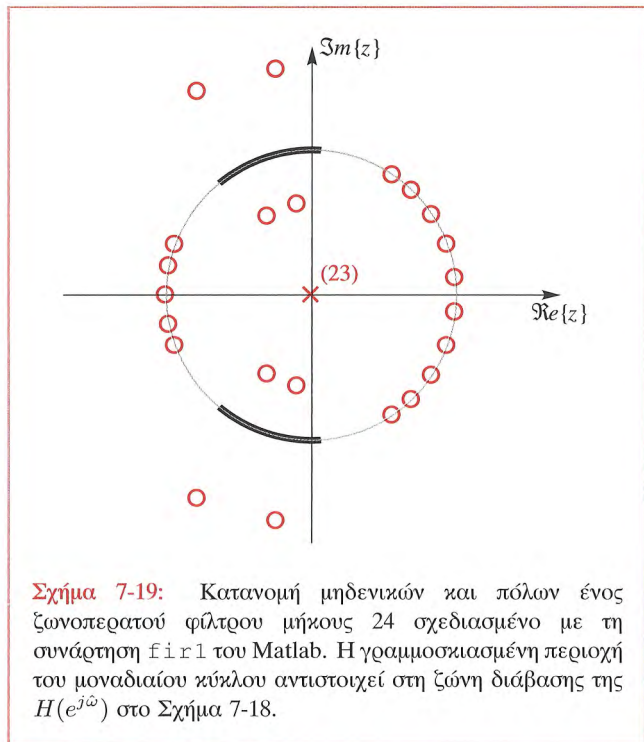
Το λογισμικό μας επιτρέπει να καθορίσουμε το διάστημα συχνότητας για τη ζώνη διάβασης και στη συνέχεια υπολογίζει μια καλή προσέγγιση ενός ιδανικού φίλτρου που έχει μοναδιαίο κέρδος στη ζώνη διάβασης και μηδενικό κέρδος στη ζώνη αποκοπής. Ένα παράδειγμα ενός ζωνοδιαβατού FIR φίλτρου μήκους 24, φαίνεται στα Σχήματα 7-17, 7-18 και 7-19.

Η κρουστική απόκριση του ζωνοδιαβατού FIR παρουσιάζεται στο Σχήμα 7-17. Παρατηρήστε ότι οι συντελεστές θα πρέπει να ονομαστούν $\{b_k\}$, από $k = 0, 1, 2, \dots, 23$. Η γραφική παράσταση παρουσιάζει συμμετρία γύρω από το σημείο $n = 23/2$. Ο Πίνακας 7-1 περιέχει τις τιμές της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου.

Αυτοί είναι οι συντελεστές που χρησιμοποιούνται και στην ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \sum_{k=0}^{23} b_k x[n-k]$$

για την υλοποίηση του φίλτρου του οποίου η απόκριση συχνότητας φαίνεται στο Σχήμα 7-18. Παρατηρήστε τις ζώνες διάβασης στις περιοχές $2\pi(0.24) < |\hat{\omega}| < 2\pi(0.36)$. Σε αυτά τα διαστήματα, το κέρδος του φίλτρου αποκλίνει



ελάχιστα από τη μονάδα, οπότε το πλάτος ημιτονοειδών σημάτων με αυτές τις συχνότητες δε θα επηρεαστεί από το φίλτρο. Θα δούμε στην Ενότητα 7-9 ότι αυτό το φίλτρο έχει γραμμική φάση, με αποτέλεσμα αυτές οι συχνότητες να υποστούν μόνο καθυστέρηση.

Επίσης παρατηρήστε ότι στις περιοχές $|\omega| < 2\pi(0.16)$ και $2\pi(0.44) < |\omega| < 2\pi(0.5)$ το κέρδος είναι σχεδόν ίσο με μηδέν. Αυτές οι περιοχές είναι οι ζώνες αποκοπής του φίλτρου, αφού τα πλάτη των ημιτονοειδών με αυτές τις συχνότητες θα πολλαπλασιαστούν με ένα πολύ μικρό κέρδος και άρα δε θα εμφανιστούν στην έξοδο.

Παρατηρήστε ότι η απόκριση συχνότητας εξασθενεί σταδιακά από τις ζώνες διάβασης στις ζώνες αποκοπής. Σε αυτές τις περιοχές μετάβασης, τα ημιτονοειδή θα ελαττωθούν κατά πλάτος σύμφωνα με το κέρδος που

Πίνακας 7-1: Συντελεστές ενός FIR ζωνοδιαβατού φίλτρου μήκους 24.

$$b_0 = -0.0108 = b_{23}$$

$$b_1 = 0.0037 = b_{22}$$

$$b_2 = -0.0052 = b_{21}$$

$$b_3 = 0.0300 = b_{20}$$

$$b_4 = 0.0000 = b_{19}$$

$$b_5 = -0.0526 = b_{18}$$

$$b_6 = 0.0164 = b_{17}$$

$$b_7 = -0.0219 = b_{16}$$

$$b_8 = 0.1275 = b_{15}$$

$$b_9 = 0.0000 = b_{14}$$

$$b_{10} = -0.3236 = b_{13}$$

$$b_{11} = 0.2330 = b_{12}$$

φαίνεται στο Σχήμα 7-18. Σε πολλές εφαρμογές, θα θέλαμε τέτοιες περιοχές μετάβασης να είναι πολύ στενές. Ιδανικά, θα θέλαμε να έχουν μηδενικό εύρος. Αν και αυτό θεωρητικά είναι δυνατό, κοστίζει πολύ. Φαίνεται ότι για ένα FIR φίλτρο επιλογής συχνοτήτων (κατωπερατό, ζωνοπερατό, υψηπερατό), το εύρος της περιοχής μετάβασης είναι αντιστρόφως ανάλογο του M , που είναι η τάξη του πολυωνύμου της συνάρτησης μεταφοράς. Όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη, τόσο πιο στενές μπορεί να γίνουν οι περιοχές μετάβασης, και όσο το $M \rightarrow \infty$, οι περιοχές μετάβασης τείνουν στο μηδέν. Δυστυχώς, αν αυξήσουμε το M αυξάνεται και ο αριθμός των πράξεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό κάθε δείγματος εξόδου, οπότε σε κάθε πρακτική εφαρμογή απαιτείται πάντα μια εξισορρόπηση ποιότητας φίλτρου και του υπολογιστικού κόστους υλοποίησής του.

Το Σχήμα 7-19 δείχνει τη γραφική παράσταση πόλων-μηδενικών του FIR φίλτρου. Προσέξτε ότι τα μηδενικά

εκτός του μοναδιαίου κύκλου φαίνεται να σχηματίζουν ομάδες των τεσσάρων μηδενικών. Όντως, για κάθε μηδενικό που δεν είναι πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, υπάρχουν μηδενικά στη συζυγή θέση, στην αντίστροφη θέση και στην αντίστροφη συζυγή θέση. Αυτές οι ομάδες των τεσσάρων μηδενικών τοποθετούνται στρατηγικά από τη διαδικασία σχεδιασμού για να σχηματίσουν τη ζώνη διάβασης του φίλτρου. Παρομοίως, η διαδικασία σχεδιασμού τοποθετεί μηδενικά πάνω (ή κοντά) στον μοναδιαίο κύκλο για να εξασφαλίσει ότι το κέρδος του φίλτρου είναι μικρό στις περιοχές ζώνης αποκοπής του άξονα των συχνοτήτων. Επίσης, προσέξτε ότι όλα τα μιγαδικά μηδενικά εμφανίζονται σε συζυγή ζεύγη και αφού η συνάρτηση μεταφοράς είναι ένα πολυώνυμο εικοστού τρίτου βαθμού, υπάρχουν 23 πόλοι στο $z=0$. Στην Ενότητα 7-9, θα δείξουμε ότι αυτές οι ιδιότητες της κατανομής πόλων-μηδενικών είναι άμεσο αποτέλεσμα της συμμετρίας των συντελεστών του φίλτρου.

7-9 Ιδιότητες Φιλτρων Γραμμικής Φάσης

Το φίλτρο που συζητήθηκε στην Ενότητα 7-8 αποτελεί ένα παράδειγμα μιας κατηγορίας συστημάτων όπου η ακολουθία των συντελεστών (κρουστική απόκριση) ικανοποιεί μια συμμετρία της μορφής $b_k = b_{M-k}$, για $k = 0, 1, \dots, M$. Τέτοια συστήματα έχουν μια σειρά από ενδιαφέρουσες ιδιότητες που είναι εύκολο να αναδειχτούν στην αναπαράστασή τους στο πεδίο- z .

7-9.1 Η συνθήκη Γραμμικής Φάσης

Τα FIR συστήματα που έχουν συμμετρικούς συντελεστές φίλτρου (και άρα συμμετρικές κρουστικές αποκρίσεις) έχουν αποκρίσεις συχνότητας με γραμμική φάση. Ένα παράδειγμα που έχουμε ήδη μελετήσει είναι το μήκους L φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής, του οποίου οι συντελεστές είναι όλοι ίδιοι και άρα προφανώς ικανοποιούν τη συνθήκη $b_k = b_{M-k}$, για $k = 0, 1, \dots, M$. Το παράδειγμα της Ενότητας 7-8 έχει κι αυτό γραμμική φάση επειδή ικανοποιεί την ίδια συνθήκη συμμετρίας. Για να δούμε γιατί απορρέει γραμμική φάση από αυτή τη συμμετρία,

ας θεωρήσουμε ένα απλό παράδειγμα όπου η συνάρτηση μεταφοράς είναι της μορφής:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_1 z^{-3} + b_0 z^{-4} \quad (7.42)$$

Άρα, $M = 4$ και το μήκος της ακολουθίας είναι $L = M + 1 = 5$ δείγματα. Αφού υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας για αυτή την ειδική περίπτωση, η γενίκευση θα είναι προφανής. Αρχικά, παρατηρήστε ότι μπορούμε να γράψουμε την $H(z)$ ως:

$$H(z) = (b_0(z^2 + z^{-2}) + b_1(z^1 + z^{-1}) + b_2) z^{-2}$$

Αν το M ήταν μεγαλύτερο, θα είχαμε απλώς περισσότερες ομάδες παραγόντων της μορφής $(z^k + z^{-k})$. Όταν αντικαταστήσουμε $z = e^{j\hat{\omega}}$, καθέναν από αυτούς τους παράγοντες θα γίνει ένας συνημιτονικός όρος. Δηλαδή,

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = (2b_0 \cos(2\hat{\omega}) + 2b_1 \cos(\hat{\omega}) + b_2) e^{-j\hat{\omega}M/2}$$

Στο παράδειγμά μας, δείξαμε ότι η $H(e^{j\hat{\omega}})$ είναι της μορφής

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = R(e^{j\hat{\omega}}) e^{-j\hat{\omega}M/2} \quad (7.43)$$

όπου, σε αυτή τη περίπτωση, το $M = 4$ και το $R(e^{j\hat{\omega}})$ είναι η πραγματική συνάρτηση

$$R(e^{j\hat{\omega}}) = (2b_0 \cos(2\hat{\omega}) + 2b_1 \cos(\hat{\omega}) + b_2)$$

Ακολουθώντας αυτό τον τρόπο ανάλυσης για τη γενική περίπτωση, είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η Σχέση (7.43) ισχύει όταν $b_k = b_{M-k}$, για $k = 0, 1, \dots, M$. Στη γενική περίπτωση, μπορεί να αποδειχθεί ότι το αποτέλεσμα εξαρτάται από το αν ο ακέραιος είναι άρτιος ή περιττός, δηλαδή:

$$R(e^{j\hat{\omega}}) = \begin{cases} b_{\frac{M}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{M-2}{2}} 2b_k \cos[(\frac{M}{2} - k)\hat{\omega}] & M \text{ άρτιος} \\ \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2b_k \cos[(\frac{M}{2} - k)\hat{\omega}] & M \text{ περιττός} \end{cases} \quad (7.44)$$

Η Εξίσωση (7.43) δείχνει ότι η απόκριση συχνότητας οποιουδήποτε συμμετρικού φίλτρου έχει τη μορφή μιας

πραγματικής συνάρτησης πλάτους $R(e^{j\omega})$ επί έναν παράγοντα γραμμικής φάσης $e^{-j\omega M/2}$. Αυτός ο παράγοντας, όπως έχουμε δει στην Ενότητα 6-5.1 στη Σελίδα 154, αντιστοιχεί σε μια καθυστέρηση $M/2$ δειγμάτων. Επομένως, η ανάλυση που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 6-7 για το φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής είναι χαρακτηριστική για το τι συμβαίνει στη γενική περίπτωση συμμετρικών FIR φίλτρων. Η βασική διαφορά είναι ότι επιλέγοντας προσεκτικά τους συντελεστές του φίλτρου, όπως κάναμε στην Ενότητα 7-8, μπορούμε να διαμορφώσουμε τη συνάρτηση $R(e^{j\omega})$ ώστε να έχει μία πολύ περισσότερο επιλεκτική απόκριση συχνότητας.

7-9.2 Θέσεις των Μηδενικών FIR Συστημάτων Γραμμικής Φάσης

Αν οι συντελεστές του φίλτρου ικανοποιούν τη συνθήκη $b_k = b_{M-k}$, για $k = 0, 1, \dots, M$, προκύπτει ότι

$$H(1/z) = z^M H(z) \quad (7.45)$$

Για να αποδείξουμε αυτή την “ιδιότητα αντιστροφής” των φίλτρων γραμμικής φάσης, θεωρήστε ένα σύστημα μήκους 4 της μορφής

$$\begin{aligned} H(1/z) &= b_0 + b_1(1/z)^{-1} + b_1(1/z)^{-2} + b_0(1/z)^{-3} \\ &= b_0 + b_1 z^1 + b_1 z^2 + b_0 z^3 \\ &= z^3(b_0 + b_1 z^{-1} + b_1 z^{-2} + b_0 z^{-3}) \\ &= z^3 H(z) \end{aligned}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και στην περίπτωση ενός συστήματος μήκους M , η Σχέση (7.45) μπορεί να προκύψει εύκολα για τη γενική περίπτωση.

Η ιδιότητα της αντιστροφής των φίλτρων γραμμικής φάσης είναι υπεύθυνη για την ευδιάκριτη μορφή των μηδενικών στη γραφική παράσταση πόλων-μηδενικών του Σχήματος 7-19. Τα μηδενικά που δεν είναι πάνω στο μοναδιαίο κύκλο εμφανίζονται σε τετράδες. Επιπλέον, αυτές οι τετράδες είναι υπεύθυνες για τη δημιουργία της ζώνης διάβασης του ζωνοπερατού φίλτρου. Τα μηδενικά

πάνω στο μοναδιαίο κύκλο εμφανίζονται σε ζεύγη επειδή ο συζυγής μιγαδικός πρέπει να είναι παρών και αυτά τα μηδενικά είναι κυρίως υπεύθυνα για τη δημιουργία της ζώνης αποκοπής του φίλτρου.

Αυτές οι ιδιότητες μπορεί ναδειχθεί ότι ισχύουν γενικά για φίλτρα γραμμικής φάσης. Συγκεκριμένα,

Όταν $b_k = b_{M-k}$, για $k = 0, 1, \dots, M$, τότε αν z_0 είναι ένα μηδενικό της $H(z)$, το ίδιο είναι και το συζυγές του, το αντίστροφό του και το αντίστροφο συζυγές του. Δηλαδή, τα $\{z_0, z_0^*, 1/z_0, 1/z_0^*\}$ είναι όλα μηδενικά της $H(z)$.

Περιλαμβάνονται τα συζυγή μηδενικά, επειδή οι συντελεστές του φίλτρου, που είναι και συντελεστές της $H(z)$, είναι πραγματικοί. Επομένως, όλα τα μηδενικά της $H(z)$ πρέπει να εμφανίζονται σε συζυγή μιγαδικά ζεύγη. Η ιδιότητα της αντιστροφής είναι αληθής γιατί οι συντελεστές του φίλτρου είναι συμμετρικοί. Χρησιμοποιώντας τη Σχέση (7.45), και υποθέτοντας ότι το z_0 είναι μηδενικό της $H(z)$, παίρνουμε

$$H(1/z_0) = z_0^M H(z_0) = 0$$

Αφού $H(z_0) = 0$, πρέπει επίσης $H(1/z_0) = 0$. Τα περισσότερα FIR φίλτρα σχεδιάζονται με τη συμμετρική ιδιότητα, οπότε η μορφή των μηδενικών του Σχήματος 7-19 είναι τυπική.

7-10 Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκε ο μετασχηματισμός-z για FIR φίλτρα και γενικότερα για ακολουθίες πεπερασμένου μήκους. Ο μετασχηματισμός-z απλοποιεί το χειρισμό των ΓΧΑ συστημάτων σε απλές πράξεις πάνω σε πολυώνυμα και ρητές συναρτήσεις. Οι ρίζες αυτών των πολυωνύμων είναι πολύ σημαντικές γιατί ιδιότητες των φίλτρων όπως η απόκριση συχνότητας μπορούν να εξαχθούν απευθείας από τις θέσεις των ριζών.

Αναφέραμε επίσης τη σημαντική έννοια των “πεδίων αναπαράστασης” για σήματα και συστήματα διακριτού

χρόνου. Υπάρχουν τρία πεδία: το πεδίο- n ή πεδίο του χρόνου, το πεδίο- ω ή πεδίο της συχνότητας και το πεδίο- z . Με τρία διαφορετικά πεδία στη διάθεσή μας, ακόμα και τα πιο δύσκολα προβλήματα μπορούν γενικά να απλοποιηθούν.

Μεταξύ των εργαστηριακών ασκήσεων που περιέχονται στο CD-ROM, παρείχαμε ήδη δύο στο θέμα του FIR φιλτραρίσματος στα Κεφάλαια 5 και 6. Η Εργαστηριακή άσκηση #7 ασχολείται με FIR φιλτράρισμα ημιτονοειδών κυματομορφών, συνέλιξης και αποσυνέλιξης. Η Εργαστηριακή άσκηση #8 ασχολείται με την απόκριση συχνότητας συνηθισμένων φίλτρων όπως το φίλτρο διαφορών πρώτης τάξης και το φίλτρο κινούμενου μέσου όρου. Στις Εργαστηριακές ασκήσεις #9 και #10, τα FIR φίλτρα θα χρησιμοποιηθούν σε πρακτικά συστήματα, όπως είναι ο τονικός αποκωδικοποιητής αφής στην #9 και η ανίχνευση τόνων πιάνου στην #10. Καθένα από αυτά τα εργαστήρια θα είναι πιο εύκολο να κατανοηθεί και πιο εύκολο να πραγματοποιηθεί με το καινούριο υπόβαθρο που αποκτήσαμε για το μετασχηματισμό- z .

Εργ. Ασκ.: #9 Κωδικοποιητές

Εργ. Ασκ.: #9 Αποκωδικοποιητές

Το CD-ROM περιέχει επίσης κάποιες παρουσιάσεις για τη σχέση μεταξύ του επιπέδου- z και των πεδίων συχνότητας και χρόνου.

- (i) Ένα αρχείο βίντεο που παρουσιάζει τα τρία πεδία και δείχνει πώς μεταβάλλονται η απόκριση συχνότητας και η κρουστική απόκριση ενός FIR φίλτρου καθώς μετακινείται η θέση ενός μηδενικού. Παρουσιάζονται διάφορα φίλτρα.

Επίδειξη: Τρία Πεδία - FIR Φίλτρα

- (ii) Ένα αρχείο βίντεο που παρουσιάζει τη σχέση μεταξύ του επιπέδου- z και του μοναδιαίου κύκλου.

Επίδειξη: Από το z στη συχνότητα

- (iii) Το πρόγραμμα PeZ στο Matlab⁵, για πιο αποτελεσματική εξερεύνηση των τριών πεδίων. Τα M-files για το PeZ μπορούν να αντιγραφούν και να τρέξουν στο Matlab.

Επίδειξη: PeZ GUI

- (iv) Έναν οδηγό για το πώς να τρέξουμε το PeZ.

Επίδειξη: Οδηγός Διαπαφής PeZ

Όπως στα προηγούμενα κεφάλαια, υπενθυμίζεται στον αναγνώστη ο μεγάλος αριθμός λυμένων ασκήσεων που είναι διαθέσιμα στο CD-ROM για εξάσκηση.

Υπόδειξη: Εκατοντάδες Λυμένων Προβλημάτων

7-11 Προβλήματα

Πρόβλημα.-7.1 Χρησιμοποιήστε την αρχή της υπέρθεσης και την ιδιότητα της χρονικής καθυστέρησης για να βρείτε τους μετασχηματισμούς z των ακόλουθων σημάτων:

$$x_1[n] = \delta[n]$$

$$x_2[n] = \delta[n - 1]$$

$$x_3[n] = \delta[n - 7]$$

$$x_4[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n - 1] + 4\delta[n - 3]$$

Πρόβλημα.-7.2 Χρησιμοποιήστε την αρχή της υπέρθεσης και την ιδιότητα της χρονικής καθυστέρησης (Σχέσεις (7.9) και (7.12)) για να προσδιορίσετε τον μετασχηματισμό- z $Y(z)$ σε σχέση με την $X(z)$ αν:

$$y[n] = x[n] - x[n - 1]$$

⁵Το PeZ το οποίο είχε αρχικά γραφτεί από τον Craig Ulmer, έχει ενημερωθεί από τον Koon Kong.

και στην πορεία δείξτε ότι για το σύστημα διαφορών πρώτης τάξης ισχύει, $H(z) = 1 - z^{-1}$.

Πρόβλημα.-7.3 Υποθέστε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = 1 + 5z^{-1} - 3z^{-2} + 2.5z^{-3} + 4z^{-8}$$

- (i) Προσδιορίστε την εξίσωση διαφορών που συνδέει την έξοδο $y[n]$ του συστήματος με την είσοδο $x[n]$.
- (ii) Προσδιορίστε και σχεδιάστε την ακολουθία εξόδου $y[n]$ όταν η είσοδος είναι $x[n] = \delta[n]$.

Πρόβλημα.-7.4 Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = \frac{1}{3} (x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

- (i) Προσδιορίστε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ για αυτό το σύστημα.
- (ii) Σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά της $H(z)$ στο επίπεδο-z.
- (iii) Από την $H(z)$ βρείτε μία έκφραση για την $H(e^{j\hat{\omega}})$, την απόκριση συχνότητας του συστήματος.
- (iv) Σχεδιάστε την απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) ως συνάρτηση της συχνότητας για $-\pi \leq \hat{\omega} \leq \pi$.
- (v) Ποια είναι η έξοδος του συστήματος αν η είσοδος είναι:

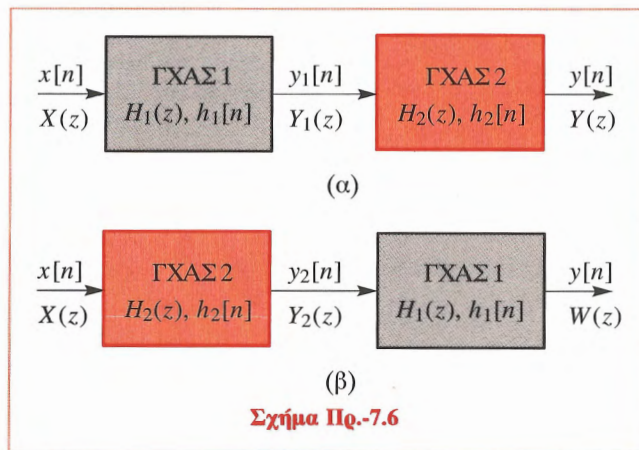
$$x[n] = 4 + \cos[0.25\pi(n-1)] - 3 \cos[(2\pi/3)n]$$

Πρόβλημα.-7.5 Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς είναι το γινόμενο πέντε (5) όρων:

$$H(z) = (1 - z^{-1})(1 - e^{j\pi/2}z^{-1})(1 - e^{-j\pi/2}z^{-1}) \dots (1 - 0.9e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j\pi/3}z^{-1})$$

- (i) Γράψτε την εξίσωση διαφορών που δίνει τη σχέση μεταξύ της εισόδου $x[n]$ και της εξόδου $y[n]$. Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε τους όρους της $H(z)$.
- (ii) Σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά της $H(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο-z.
- (iii) Αν η είσοδος είναι της μορφής $x[n] = Ae^{j\phi}e^{j\hat{\omega}n}$, για ποιες τιμές του $-\pi < \hat{\omega} \leq \pi$ θα έχουμε $y[n] = 0$;

Πρόβλημα.-7.6 Το διάγραμμα στο Σχήμα Πρ. 7.6 (α) δείχνει μία σε σειρά συνδεσμολογία δύο ΓΧΑ συστημάτων, δηλαδή η έξοδος του πρώτου συστήματος είναι η είσοδος στο δεύτερο σύστημα και η συνολική έξοδος είναι η έξοδος του δεύτερου συστήματος.



- (i) Χρησιμοποιήστε μετασχηματισμούς-z για να δείξετε ότι η συνάρτηση μεταφοράς για το συνολικό σύστημα (από το $x[n]$ στο $y[n]$) είναι $H(z) = H_2(z)H_1(z)$, όπου $Y(z) = H(z)X(z)$.

- (ii) Κάνοντας χρήση του αποτελέσματος του προηγούμενου ερωτήματος δείξτε ότι η σειρά των συστημάτων δεν είναι σημαντική, δηλαδή, δείξτε ότι για την ίδια είσοδο $x[n]$ στα συστήματα των Σχημάτων Πρ. 7.6 (α) και Πρ. 7.6 (β) οι συνολικές έξοδοι είναι ίδιες ($w[n] = y[n]$).
- (iii) Υποθέστε ότι το Σύστημα 1 είναι ένα φίλτρο μέσου όρου μήκους 3 που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y_1[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$ και το Σύστημα 2 περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς $H_2(z) = \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-2})$. Προσδιορίστε τη συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος.
- (iv) Βρείτε την εξίσωση διαφορών που σχετίζει το $y[n]$ με το $x[n]$ στο Σχήμα Πρ. 7.6 (α) Η σε σειρά σύνδεση δύο φίλτρων μέσου όρου μήκους 3 είναι ίδια με αυτή ενός φίλτρου μέσου όρου μήκους 6; Γιατί μια καλύτερη ονομασία του φίλτρου θα ήταν αυτή του “σταθμισμένου μέσου όρου”;
- (v) Σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά της $H(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο- z .
- (vi) Από την $H(z)$ βρείτε μια έκφραση για την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ και σχεδιάστε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του συνολικού σε σειρά συστήματος συναρτήσει της συχνότητας για $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

Πρόβλημα-7.7 Παραγοντοποιήστε το ακόλουθο πολυώνυμο και σχεδιάστε τις ρίζες του στο μιγαδικό επίπεδο.

$$P(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + z^{-3}$$

Ασχοληθείτε με τις συναρτήσεις `roots` και `zplane` του Matlab.

Πρόβλημα-7.8 Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από

την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = \frac{1}{4} \{x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3]\} \\ = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 x[n-k]$$

- (i) Ποιά είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος $h[n]$;
- (ii) Προσδιορίστε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του συστήματος.
- (iii) Σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά της $H(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο- z . Υπόδειξη: Θυμηθείτε τις N -οστές ρίζες της μονάδας.
- (iv) Από την $H(z)$, βρείτε μία έκφραση για την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ του συστήματος.
- (v) Σχεδιάστε την απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) συναρτήσει της συχνότητας (ή σχεδιάστε τη με χρήση της `freqz`) στο Matlab.
- (vi) Υποθέστε ότι η είσοδος είναι:

$$x[n] = 5 + 4 \cos(0.2\pi n) + 3 \cos(0.5\pi n + \pi/4)$$

για $-\infty < n < \infty$. Βρείτε μία έκφραση για την έξοδο, της μορφής $y[n] = A + B \cos(\omega_0 n + \phi_0)$.

Πρόβλημα-7.9 Το Σχήμα Πρ. 7.6 (α) δείχνει μία σύνδεση σε σειρά δύο ΓΧΑ συστημάτων. Δηλαδή η έξοδος του πρώτου συστήματος είναι η είσοδος στο δεύτερο σύστημα και η συνολική έξοδος είναι η έξοδος του δεύτερου συστήματος.

Σε αυτό το πρόβλημα, θεωρήστε ότι και τα δύο συστήματα που φαίνονται στο Σχήμα Πρ. 7.6 είναι φίλτρα τρέχουσας μέσης τιμής μήκους 4.

- (i) Προσδιορίστε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ του συνολικού συστήματος.

(ii) Σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά της $H(z)$ στο επίπεδο-z.

Υπόδειξη: Οι πόλοι και τα μηδενικά της $H(z)$ είναι ο συνδυασμός των πόλων και των μηδενικών των $H_1(z)$ και $H_2(z)$.

(iii) Από την $H(z)$, βρείτε μια έκφραση για την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}})$ του συνολικού συστήματος.

(iv) Σχεδιάστε την απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) του συνολικού συστήματος συναρτήσει της συχνότητας για $-\pi < \hat{\omega} \leq \pi$.

(v) Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες πολλαπλασιασμού πολυωνύμων και προσδιορίστε την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συνολικού συστήματος.

Πρόβλημα.-7.10 Θεωρήστε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς ίση με

$$H(z) = 1 - 3z^{-2} + 2z^{-3} + 4z^{-6}$$

Η είσοδος του συστήματος είναι η ακολουθία

$$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] - 2\delta[n-2] + 4\delta[n-4]$$

(i) Χωρίς να υπολογίσετε την έξοδο, προσδιορίστε από την παραπάνω πληροφορία της τιμές των N_1 και N_2 ώστε να ισχύει:

$$y[n] = 0 \quad \text{για } n < N_1 \text{ και } n > N_2$$

(ii) Χρησιμοποιήστε μετασχηματισμούς z και πολλαπλασιασμό πολυωνύμων για να βρείτε την ακολουθία $y[n] = x[n] * h[n]$.

Πρόβλημα.-7.11 Η πρόθεση του παρακάτω προγράμματος MATLAB είναι να φιλτράρει ένα ημιτονοειδές σήμα με χρήση της συνάρτησης `conv`.

```
omega = pi/6;
nn = [ 0:29 ];
xn = cos(omega*nn - pi/4);
bb = [ 1 0 0 1 ];
yn = conv( bb, xn );
```

(i) Προσδιορίστε την $H(z)$ και τα μηδενικά του FIR φίλτρου.

(ii) Προσδιορίστε έναν τύπο για την $y[n]$, το σήμα που περιέχεται στο διάνυσμα `yn`. Αγνοήστε τα πρώτα σημεία, έτσι ώστε ο τύπος σας να είναι σωστός μόνο για $n \geq 3$. Αυτός ο τύπος πρέπει να δίνει αριθμητικές τιμές για το πλάτος, τη φάση και τη συχνότητα του $y[n]$.

(iii) Δώστε μία τιμή του `omega` έτσι ώστε η έξοδος να είναι εγγυημένα μηδέν για $n \geq 3$.

Πρόβλημα.-7.12 Θεωρήστε ότι ένα σύστημα ορίζεται από την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = (1 - z^{-1})(1 + z^{-2})(1 + z^{-1})$$

(i) Περιγράψτε στο πεδίο του χρόνου το σύστημα σε μορφή εξίσωσης διαφορών.

(ii) Γράψτε έναν τύπο για την απόκριση συχνότητας του συστήματος.

(iii) Βρείτε απλούς τύπους για την απόκριση πλάτους και την απόκριση φάσης συναρτήσει του $\hat{\omega}$. Οι τύποι αυτοί δεν πρέπει να περιέχουν μιγαδικούς όρους και τετραγωνικές ρίζες.

(iv) Το σύστημα αυτό μπορεί να “ακυρώσει” κάποια σήματα εισόδου. Για ποιές συχνότητες εισόδου $\hat{\omega}_0$ είναι η απόκριση στο $x[n] = \cos(\hat{\omega}_0 n)$ ίση με μηδέν;

(v) Όταν η είσοδος στο σύστημα είναι $x[n] = \cos(\pi n/3)$ προσδιορίστε το σήμα εξόδου $y[n]$ στη μορφή:

$$A \cos(\hat{\omega}_0 n + \phi)$$

Δώστε αριθμητικές τιμές για τις σταθερές A , ω_0 και ϕ .

Πρόβλημα.-7.13 Δείξτε ότι το σύστημα που ορίζεται από την εξίσωση διαφορών της Σχέσης (7.31) στη Σελίδα 197 θα μηδενίζει κάθε ημιτονοειδές της μορφής $A \cos(0.25\pi n + \phi)$ ανεξάρτητα από τις τιμές των A και ϕ .

Πρόβλημα.-7.14 Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = (1 + z^{-2})(1 - 4z^{-2}) = 1 - 3z^{-2} - 4z^{-4}$$

Η είσοδος στο σύστημα είναι

$$x[n] = 20 - 20\delta[n] + 20 \cos(0.5\pi n + \pi/4)$$

για $-\infty < n < \infty$. Προσδιορίστε την έξοδο του συστήματος $y[n]$ που αντιστοιχεί στην παραπάνω είσοδο $x[n]$. Δώστε μία εξίσωση για το $y[n]$ που ισχύει για κάθε n .

Παρατήρηση: Αυτό είναι ένα εύκολο πρόβλημα αν το προσεγγίσετε σωστά!

Πρόβλημα.-7.15

Η είσοδος στο μετατροπέα από Σ -σε- Δ στο Σχήμα Πρ. 7.15 είναι:

$$x(t) = 4 + \cos(250\pi t - \pi/4) - 3 \cos[(2000\pi/3)t]$$

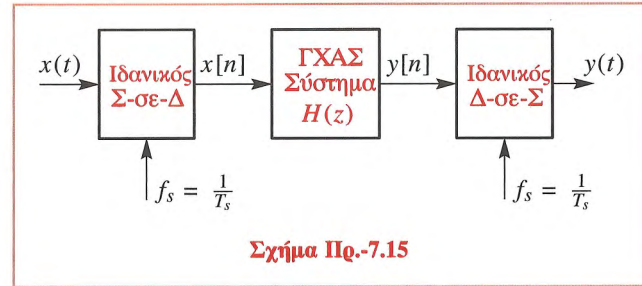
Η συνάρτηση μεταφοράς για το ΓΧΑ σύστημα είναι

$$H(z) = \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-2})$$

Αν $f_s = 1000$ δείγματα/sec, προσδιορίστε μία έκφραση για το $y(t)$ την έξοδο του Δ -σε- Σ μετατροπέα.

Πρόβλημα.-7.16 Στο σύστημα που φαίνεται στο Σχήμα Πρ. 7.6 (α) είναι γνωστό ότι η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του συνολικού συστήματος είναι το γινόμενο τεσσάρων όρων

$$H(z) = (1 - z^{-2})(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + z^{-2})$$



- (i) Προσδιορίστε τους πόλους και τα μηδενικά της $H(z)$ και σχεδιάστε τα στο μιγαδικό επίπεδο- z .
- (ii) Είναι δυνατό να προσδιοριστούν δύο συναρτήσεις μεταφοράς $H_1(z)$ και $H_2(z)$ έτσι ώστε: (1) Το συνολικό σε σειρά σύστημα να έχει τη δοσμένη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ και (2) η έξοδος του πρώτου συστήματος να είναι $y_1[n] = x[n] - x[n-4]$. Βρείτε τις $H_1(z)$ και $H_2(z)$.
- (iii) Προσδιορίστε την εξίσωση διαφορών που συνδέει το $y[n]$ με το $y_1[n]$ για την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

Πρόβλημα.-7.17

Στην Ενότητα 7-9 δείξαμε ότι τα συμμετρικά FIR φίλτρα έχουν κάποιες ξεχωριστές ιδιότητες. Σε αυτή την άσκηση, θεωρούμε την αντισυμμετρική περίπτωση όπου $b_k = -b_{M-k}$, για $k = 0, 1, \dots, M$. Θεωρήστε το συγκεκριμένο παράδειγμα

$$H(z) = b_0 + b_1z^{-1} - b_1z^{-3} - b_0z^{-4}$$

όπου σε αυτή τη περίπτωση, $b_2 = -b_2 = 0$.

- (i) Δείξτε ότι, για το παράδειγμα αυτό,

$$H(e^{j\omega}) = [2b_0 \sin(2\omega) + 2b_1 \sin(\omega)]e^{j(\pi/2 - j\omega 2)}$$

- (ii) Δείξτε ότι, για αυτό το παράδειγμα,

$$H(1/z) = -z^4 H(z)$$

- (iii) Γενικεύστε τα αποτελέσματα για κάθε M (δηλαδή, και για άρτια και για περιττά).

Πρόβλημα.-7.18 Ανατρέξτε στο Σχήμα Πρ. 7.6 (α) που δείχνει μία σε σειρά σύνδεση δύο ΓΧΑ συστημάτων.

- (i) Υποθέστε ότι το Σύστημα 1 και το Σύστημα 2 έχουν και τα δύο κρουστική απόκριση “τετραγωνικού παλμού” της μορφής

$$h_1[n] = h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$$

Προσδιορίστε τις συναρτήσεις μεταφοράς $H_1(z)$ και $H_2(z)$ για τα δύο συστήματα.

- (ii) Χρησιμοποιήστε μετασχηματισμούς z για να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του συνολικού συστήματος.
- (iii) Χρησιμοποιήστε ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πολυωνύμων για να προσδιορίσετε την αντίστοιχη κρουστική απόκριση $h[n]$ για το συνολικό σύστημα.
- (iv) Γράψτε μία εξίσωση διαφορών που θα σχετίζει το $y[n]$ με το $x[n]$ στο σε σειρά σύστημα.
- (v) Μπορείτε να δείτε πώς αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιτευχθεί γραμμική παρεμβο-

λή ενός σήματος που έχει υποδειγματοληπτηθεί κατά τέσσερα; Δώστε μία ολοκληρωμένη διαδικασία βασισμένη στα αποτελέσματα των προηγούμενων ερωτημάτων.

- (vi) Δείξτε ότι η σχέση $H_1(z) = H_2(z)$ μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως:

$$H_1(z) = H_2(z) = \frac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}}$$

- (vii) Βρείτε την $H(z)$ και σχεδιάστε τους πόλους της και τα μηδενικά της στο μιγαδικό επίπεδο- z .
- (viii) Δείξτε ότι οι αποκρίσεις συχνότητας των δύο συστημάτων είναι:

$$H_1(e^{j\hat{\omega}}) = H_2(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin(2\hat{\omega})}{\sin(\hat{\omega}/2)} e^{-j3\hat{\omega}/2}$$

- (ix) Από την $H(z)$ που βρήκατε στο (vii) βρείτε μια έκφραση για την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}})$ και σχεδιάστε το μέτρο και την απόκριση συχνότητας του συνολικού συστήματος συναρτήσει της συχνότητας για $-\pi \leq \hat{\omega} \leq \pi$.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $H(e^{j\hat{\omega}}) = H_2(e^{j\hat{\omega}})H_1(e^{j\hat{\omega}}) = [H_1(e^{j\hat{\omega}})]^2 = [H_2(e^{j\hat{\omega}})]^2$.

IIR Φίλτρα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια νέα κατηγορία ΓΧΑ συστημάτων, που έχουν κρουστική απόκριση άπειρης διάρκειας. Για το λόγο αυτό, τα συστήματα αυτής της κλάσης συχνά καλούνται άπειρης-κρουστικής-απόκρισης (infinite-impulse-response ή IIR) συστήματα ή IIR φίλτρα. Σε αντίθεση με τα FIR φίλτρα, τα ψηφιακά IIR φίλτρα στον υπολογισμό του σήματος εξόδου εκτός των τιμών του σήματος εισόδου, χρησιμοποιούν τιμές του σήματος εξόδου, που υπολογίστηκαν σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Αφού η έξοδος “επανατροφοδοτεί” την είσοδο, τα συστήματα αυτά αποτελούν παραδείγματα της γενικότερης κλάσης των *συστημάτων ανατροφοδότησης*. Από υπολογιστική άποψη, αφού τα δείγματα εξόδου υπολογίζονται συναρτήσει των τιμών της εξόδου που είχαν υπολογιστεί σε προηγούμενες χρονικές στιγμές, για τα φίλτρα αυτά χρησιμοποιείται και ο όρος *αναδρομικό φίλτρο*.

Ο μετασχηματισμός- z των IIR φίλτρων είναι ρητή συνάρτηση και έχει μηδενικά και πόλους σε μη μηδενικά σημεία του επιπέδου z . Ακριβώς όπως και στην περίπτωση των FIR, θα δείξουμε ότι από την αναπαράσταση πόλων-μηδενικών των IIR φίλτρων άμεσα μπορούμε να αντλήσουμε και να κατανοήσουμε σε βάθος σημαντικές ιδιότητες τους.

Ξεκινάμε αυτό το κεφάλαιο με IIR συστήματα πρώτης τάξης, τα οποία αποτελούν και την απλούστερη περίπτωση αυτών των συστημάτων, αφού χρησιμοποιούν ανατροφοδότηση μόνο του προηγούμενου δείγματος εξόδου. Δείχνουμε, ότι η κρουστική απόκριση αυτού του συστήματος έχει άπειρη διάρκεια. Στη συνέχεια, ορίζουμε την απόκριση συχνότητας και το μετασχηματισμό- z των συστημάτων πρώτης τάξης. Αφού δείξουμε τη σχέση μεταξύ των τριών πεδίων αναπαράστασης γι’ αυτή την απλή περίπτωση, προχωρούμε στα φίλτρα δεύτερης

τάξης. Τα φίλτρα αυτά είναι πολύ σημαντικά, γιατί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μοντελοποιήσουν **αντηχήσεις**, που θα μπορούσαν να συμβούν σε συστήματα αναπαραγωγής ομιλίας, καθώς και σε άλλα φυσικά φαινόμενα που παρουσιάζουν παλμική συμπεριφορά. Η μορφή της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος δεύτερης τάξης η οποία μπορεί να γίνει εξαιρετικά στενού εύρους, μας οδηγεί στον ορισμό του εύρους ζώνης και της κεντρικής συχνότητας, που μπορούν να ελεγχθούν με κατάλληλη επιλογή των συντελεστών ανατροφοδότησης του φίλτρου. Η ανάλυση και οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν για τις περιπτώσεις πρώτης και δεύτερης τάξης γενικεύονται εύκολα και στα υψηλότερης τάξης συστήματα.

8-1 Η Γενική Εξίσωση Διαφορών των IIR Συστημάτων

Τα FIR φίλτρα είναι εξαιρετικά χρήσιμα και έχουν πολλές καλές ιδιότητες, αλλά η κλάση αυτή των φίλτρων δεν αποτελεί τη γενικότερη κλάση φίλτρων των ΓΧΑ συστημάτων. Αυτό συμβαίνει διότι η έξοδος $y[n]$ προκύπτει αποκλειστικά από ένα τμήμα πεπερασμένης χρονικής διάρκειας του σήματος εισόδου $x[n]$. Η γενικότερη κλάση ψηφιακών φίλτρων, που μπορούν να υλοποιηθούν με πεπερασμένο υπολογιστικό κόστος, προκύπτει όταν η έξοδος παράγεται όχι μόνο από την είσοδο, αλλά και από τις προηγούμενες τιμές της εξόδου.

Επίδειξη: IIR Φιλτράρισμα

Η εξίσωση ορισμού αυτής της κλάσης ψηφιακών φίλτρων είναι η ακόλουθη εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = \sum_{\ell=1}^N a_{\ell} y[n - \ell] + \sum_{k=0}^M b_k x[n - k] \quad (8.1)$$

Οι συντελεστές του φίλτρου αποτελούνται από δύο σύνολα: $\{b_k\}$ και $\{a_{\ell}\}$. Για λόγους που θα γίνουν εμφανείς στο επόμενο απλό παράδειγμα, οι συντελεστές $\{a_{\ell}\}$ ονομάζονται συντελεστές **ανατροφοδότησης** και οι

συντελεστές $\{b_k\}$ **τροφοδότησης προς τα εμπρός**. Για να οριστεί η αναδρομική Εξίσωση διαφορών (8.1) χρειάζονται, συνολικά, $N+M+1$ συντελεστές.

Παρατηρήστε ότι αν οι συντελεστές $\{a_{\ell}\}$ είναι όλοι μηδενικοί, τότε η Εξίσωση διαφορών (8.1) ανάγεται σε εξίσωση διαφορών ενός FIR συστήματος. Στην πραγματικότητα έχουμε αποτιμήσει, ότι η Σχέση (8.1) ορίζει τη γενικότερη κλάση των ΓΧΑ συστημάτων που μπορούν να υλοποιηθούν με πεπερασμένο υπολογιστικό κόστος. Κατά συνέπεια, τα FIR συστήματα πρέπει να αποτελούν ειδική περίπτωση. Όταν συζητούσαμε για τα FIR συστήματα, είχαμε αναφέρει το M ως **τάξη** του συστήματος. Σε αυτήν την περίπτωση, M είναι ο αριθμός των στοιχείων καθυστέρησης στην εξίσωση διαφορών και ο βαθμός ή η τάξη της πολυωνυμικής συνάρτησης μεταφοράς. Για τα IIR συστήματα, τα M και N αποτελούν μέτρα του πλήθους των όρων καθυστέρησης και θα δούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός IIR συστήματος είναι ο λόγος ενός M -οστής τάξης πολυωνύμου προς ένα N -οστής τάξης πολυώνυμο. Έτσι, μπορεί να υπάρξει κάποια σύγκριση ως προς την τάξη ενός IIR συστήματος. Γενικά, θα ορίσουμε το N , το πλήθος των όρων ανατροφοδότησης, ως την τάξη ενός IIR συστήματος.

Παράδειγμα 8-1: Σχηματικό Διάγραμμα

Από το να καταπιανόμαστε με τη γενική μορφή που δόθηκε στη Σχέση (8.1), ας θεωρήσουμε καλύτερα την περίπτωση ενός συστήματος πρώτης τάξης, όπου $M = N = 1$, δηλαδή:

$$y[n] = a_1 y[n - 1] + b_0 x[n] + b_1 x[n - 1] \quad (8.2)$$

Το σχηματικό διάγραμμα αυτής της εξίσωσης διαφορών, που φαίνεται στο Σχήμα 8-1, κατασκευάζεται παρατηρώντας ότι το σήμα $v[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n - 1]$ υπολογίζεται από το αριστερό μισό του διαγράμματος και “κλείνουμε το βρόχο” υπολογίζοντας το $a_1 y[n - 1]$ από την καθυστερημένη έξοδο και προσθέτοντάς το στο $v[n]$, για να παράγουμε την έξοδο $y[n]$. Το διάγραμμα δείχνει ξεκάθαρα, ότι οι συντελεστές τροφοδότησης

προς τα εμπρός και ανατροφοδότησης περιγράφουν την κατεύθυνση της ροής του σήματος στο σχηματικό διάγραμμα. ■

Θα ξεκινήσουμε μελετώντας μία απλοποιημένη έκδοση του συστήματος που ορίστηκε στη Σχέση (8.2) και απεικονίζεται στο Σχήμα 8-1. Η μελέτη αυτή θα περιλαμβάνει το χαρακτηρισμό του φίλτρου σε καθένα από τα ακόλουθα τρία πεδία: το πεδίο του χρόνου, το πεδίο της συχνότητας και το πεδίο- z . Αφού το φίλτρο ορίστηκε από την Εξίσωση διαφορών (8.2) στο πεδίο του χρόνου, θα ξεκινήσουμε μελετώντας πώς αυτή η εξίσωση διαφορών χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί η έξοδος από την είσοδο και θα δείξουμε πως η ανατροφοδότηση έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας άπειρης χρονικής διάρκειας κρουστικής απόκρισης.

8-2 Απόκριση στο Πεδίο του Χρόνου

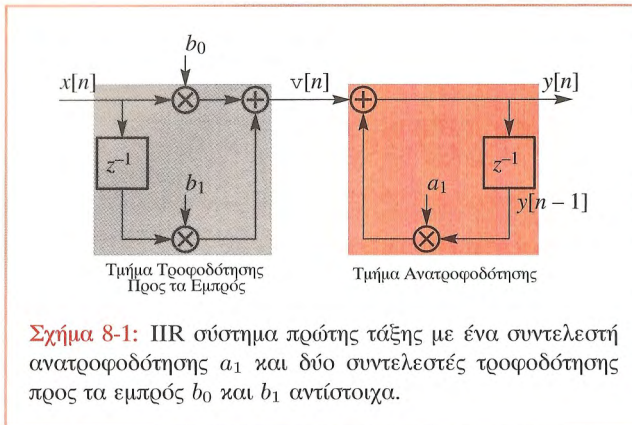
Για να διευκρινίσουμε πώς η εξίσωση διαφορών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην υλοποίηση ενός IIR συστήματος, θα ξεκινήσουμε με ένα αριθμητικό παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές του φίλτρου στην (8.2) είναι $a_1 = 0.8$, $b_0 = 5$, και $b_1 = 0$, έτσι:

$$y[n] = 0.8y[n-1] + 5x[n] \quad (8.3)$$

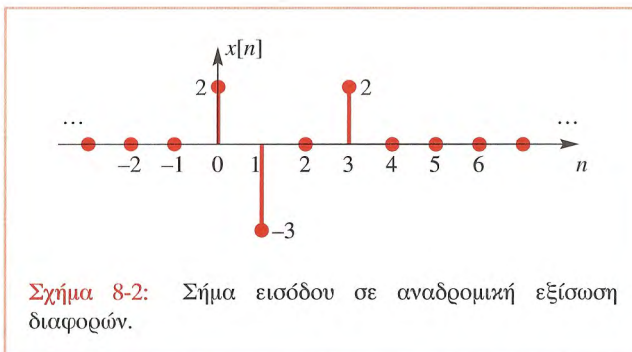
και υποθέτουμε ότι το σήμα εισόδου είναι το

$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + 2\delta[n-3] \quad (8.4)$$

Δηλαδή, η συνολική διάρκεια του σήματος εισόδου είναι τέσσερα (4) δείγματα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8-2. Αν και δεν είναι απαραίτητο, είναι λογικό ότι η ακολουθία των τιμών της εξόδου του συστήματος θα πρέπει να υπολογιστεί σε κανονική σειρά (δηλαδή, σε μια γραφική παράσταση της ακολουθίας από αριστερά προς τα δεξιά). Επιπλέον, εφόσον η είσοδος είναι μηδέν πριν τη χρονική στιγμή $n = 0$, θα ήταν φυσικό να θεωρήσουμε ότι η χρονική στιγμή $n = 0$ είναι η πρώτη στιγμή για την οποία θα πρέπει να υπολογίσουμε την έξοδο του συστήματος. Επομένως, θα θεωρήσουμε ότι υπολογίζουμε την έξοδο από την εξίσωση



Σχήμα 8-1: IIR σύστημα πρώτης τάξης με ένα συντελεστή ανατροφοδότησης a_1 και δύο συντελεστές τροφοδότησης προς τα εμπρός b_0 και b_1 αντίστοιχα.



Σχήμα 8-2: Σήμα εισόδου σε αναδρομική εξίσωση διαφορών.

διαφορών (8.3) για τις χρονικές στιγμές $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Για παράδειγμα, η τιμή του $x[0]$ είναι 2, οπότε μπορούμε να πάρουμε από τη Σχέση (8.3) στο $n = 0$

$$y[0] = 0.8y[0-1] + 5x[0] = 0.8y[-1] + 5(2) \quad (8.5)$$

Αμέσως προκύπτει το εξής πρόβλημα: Η τιμή της $y[n]$ για $n = -1$ δεν είναι γνωστή. Αυτό είναι σοβαρό πρόβλημα, διότι ανεξάρτητα από ποιο σημείο ξεκινάμε να υπολογίζουμε την έξοδο, θα έχουμε πάντα το ίδιο πρόβλημα: σε οποιοδήποτε χρονική στιγμή n , θα χρειάζεται να γνωρίζουμε την έξοδο της αμέσως προηγούμενης χρονικής στιγμής $n-1$. Απαξ και γνωρίζουμε, όμως, την τιμή $y[n-1]$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση διαφορών για

να υπολογίσουμε την επόμενη τιμή του σήματος εξόδου τη χρονική στιγμή n . Μόλις η διαδικασία ξεκινήσει, μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρο με την αναδρομική εφαρμογή της εξίσωσης διαφορών. Η λύση απαιτεί τις ακόλουθες δύο υποθέσεις, οι οποίες καλούνται *αρχικές συνθήκες ηρεμίας*.

Αρχικές Συνθήκες Ηρεμίας

1. Θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι η είσοδος μηδενίζεται πριν από κάποια αρχική χρονική στιγμή n_0 , δηλαδή $x[n] = 0$ για $n < n_0$. Μια τέτοια είσοδος ονομάζεται *Αιφνίδιας εφαρμοζόμενη* είσοδος.
2. Ομοίως, θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι η έξοδος είναι μηδενική πριν την αρχική χρονική στιγμή εφαρμογής του σήματος εισόδου, δηλαδή $y[n] = 0$ για $n < n_0$. Λέμε ότι το σύστημα είναι σε *αρχική κατάσταση ηρεμίας* αν η έξοδος του είναι μηδέν πριν την αιφνίδια εφαρμογή ενός σήματος εισόδου.

Οι παραπάνω συνθήκες δεν είναι ιδιαίτερα περιοριστικές, ειδικά στην περίπτωση ενός συστήματος πραγματικού χρόνου, που η επόμενη τιμή της εξόδου πρέπει να υπολογίζεται μετά την εφαρμογή κάθε νέου δείγματος εισόδου. Τα συστήματα πραγματικού χρόνου πρέπει, φυσικά, να είναι *αιτιατά*, με την έννοια ότι ο υπολογισμός του παρόντος δείγματος εξόδου δεν πρέπει να αναφέρεται σε μελλοντικά δείγματα της εισόδου ή της εξόδου. Επιπλέον, για οποιαδήποτε συσκευή στην πράξη υπάρχει μια χρονική στιγμή κατά την οποία αυτή ξεκινάει να λειτουργεί. Αυτό που απαιτείται είναι η μνήμη που θα περιέχει τα καθυστερημένα δείγματα εξόδου να αρχικοποιηθεί με μηδέν¹.

¹ Στην περίπτωση ενός ψηφιακού φίλτρου που εφαρμόζεται σε δεδομένα που προέκυψαν από δειγματοληψία και είναι αποθηκευμένα στη μνήμη υπολογιστή, η συνθήκη αιτιατότητας δεν είναι απαραίτητη, αλλά, γενικά, η έξοδος υπολογίζεται με την ίδια σειρά με την κανονική σειρά της ακολουθίας δειγμάτων εισόδου. Στην εξίσωση διαφορών θα μπορούσε να εφαρμοσθεί αντίστροφη αναδρομή μέσω της ακολουθίας, αλλά αυτό θα απαιτούσε ένα διαφορετικό ορισμό των *αρχικών συνθηκών*.

Με την υπόθεση της αρχικής κατάστασης ηρεμίας, θεωρούμε ότι $y[n] = 0$ για $n < 0$ και επομένως μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την $y[0]$ ως

$$y[0] = 0.8y[-1] + 5(2) = 0.8(0) + 5(2) = 10$$

Άπαξ και αρχίσουμε την αναδρομή, οι επόμενες τιμές προκύπτουν εύκολα, αφού το σήμα εισόδου και οι προηγούμενες τιμές της εξόδου είναι γνωστές.

$$y[1] = 0.8y[0] + 5x[1] = 0.8(10) + 5(-3) = -7$$

$$y[2] = 0.8y[1] + 5x[2] = 0.8(-7) + 5(0) = -5.6$$

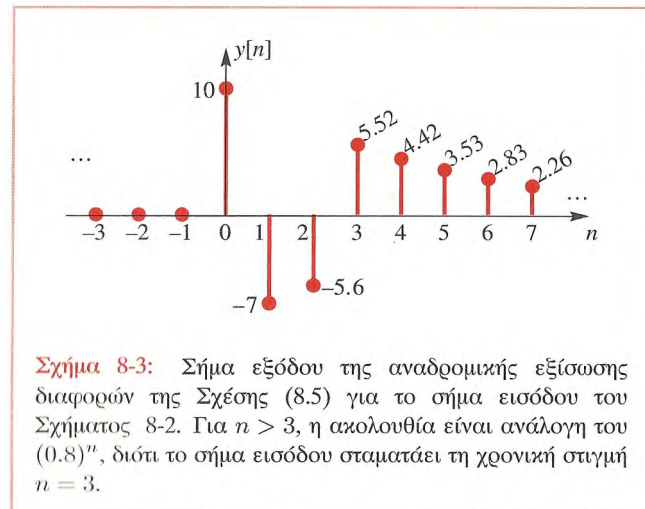
$$y[3] = 0.8y[2] + 5x[3] = 0.8(-5.6) + 5(2) = 5.52$$

$$y[4] = 0.8y[3] + 5x[4] = 0.8(5.52) + 5(0) = 4.416$$

$$y[5] = 0.8y[4] + 5x[5] = 0.8(4.416) + 0 = 3.5328$$

⋮ ⋮

Οι τιμές της παραπάνω ακολουθίας εξόδου μέχρι τη χρονική στιγμή $n = 7$, φαίνονται στο Σχήμα 8-3.



Σχήμα 8-3: Σήμα εξόδου της αναδρομικής εξίσωσης διαφορών της Σχέσης (8.5) για το σήμα εισόδου του Σχήματος 8-2. Για $n > 3$, η ακολουθία είναι ανάλογη του $(0.8)^n$, διότι το σήμα εισόδου σταματάει τη χρονική στιγμή $n = 3$.

Ένα ενδιαφέρον σημείο που πρέπει να παρατηρήσουμε στο Σχήμα 8-3 είναι η μορφή του σήματος εξόδου μετά τη χρονική στιγμή ($n > 3$) που σταματάει να εφαρμόζεται σήμα στην είσοδο του συστήματος. Γι' αυτό το σύνολο τιμών του n , η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$y[n] = 0.8y[n - 1] \quad \text{για } n > 3$$

Επομένως ο λόγος διαδοχικών τιμών του σήματος εξόδου είναι σταθερός και το σήμα εξόδου φθίνει εκθετικά με ρυθμό που καθορίζεται από τον συντελεστή ανατροφοδότησης $a_1 = 0.8$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη αναλυτική έκφραση

$$y[n] = y[3](0.8)^{n-3} \quad \text{για } n \geq 3$$

για το τμήμα του σήματος εξόδου $y[n]$ μετά τον υπολογισμό της $y[3]$.

8-2.1 Η Γραμμικότητα και η Χρονική Αμεταβλητότητα των IIR Συστημάτων

Όταν αναφερόμαστε στη γενική Εξίσωση διαφορών (8.1) των IIR συστημάτων, η συνθήκη της αρχικής κατάστασης ηρεμίας είναι αρκετή για να εγγυηθεί, ότι το σύστημα που υλοποιείται από την επαναληπτική εφαρμογή της εξίσωσης διαφορών είναι ταυτόχρονα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο. Αν και οι συντελεστές ανατροφοδότησης κάνουν την απόδειξη πιο πολύπλοκη απ' ό,τι στην περίπτωση των FIR συστημάτων (βλέπε Ενότητα 5-5.3 στη Σελίδα 131), μπορούμε να δείξουμε ότι για αφηρημένα εφαρμοζόμενες εισόδους και αρχικές συνθήκες ηρεμίας, η αρχή της υπέρθεσης θα ισχύει, διότι η εξίσωση διαφορών περιλαμβάνει μόνο γραμμικούς συνδυασμούς των δειγμάτων εισόδου και εξόδου. Επιπλέον, επειδή η αρχική συνθήκη ηρεμίας εφαρμόζεται ακριβώς πριν την αρχή μιας αφηρημένα εφαρμοζόμενης εισόδου, ισχύει και η χρονική αμεταβλητότητα.



Άσκηση 8.1:

Θεωρήστε ότι η είσοδος στην Εξίσωση διαφορών (8.3) είναι $x_1[n] = 10x[n - 4]$,

όπου το $x[n]$ δίνεται από τη Σχέση (8.4) και φαίνεται στο Σχήμα 8-2. Υπολογίστε αναδρομικά την ακολουθία εξόδου $y_1[n]$ για $n = 0, 1, \dots, 11$, χρησιμοποιώντας την υπόθεση της αρχικής ηρεμίας. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα σας με την έξοδο που είναι σχεδιασμένη στο Σχήμα 8-3 και επιβεβαιώστε ότι το σύστημα συμπεριφέρεται ως ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα.

8-2.2 Η Κρουστική Απόκριση IIR συστήματος Πρώτης Τάξης

Στο Κεφάλαιο 5, δείξαμε ότι η απόκριση σε μια μοναδιαία κρουστική ακολουθία χαρακτηρίζει πλήρως ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα. Υπενθυμίζουμε ότι, όταν $x[n] = \delta[n]$, το σήμα εξόδου που προκύπτει και συμβολίζεται με $h[n]$, είναι εξ ορισμού η **κρουστική απόκριση**. Εφόσον όλα τα άλλα σήματα εισόδου μπορούν να γραφτούν ως υπέρθεση σταθμισμένων καθυστερημένων κρουστικών ακολουθιών, η έξοδος που προκύπτει για όλα τα άλλα σήματα μπορεί να εκφραστεί από σταθμισμένες και καθυστερημένες εκδόσεις της κρουστικής απόκρισης, $h[n]$. Επειδή, λοιπόν η αναδρομική εξίσωση διαφορών με αρχικές συνθήκες ηρεμίας είναι ένα ΓΧΑ σύστημα, η έξοδος του θα μπορεί πάντα να αναπαριστάται από το συνελκτικό άθροισμα

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k] \quad (8.6)$$

Επομένως, ενδιαφερόμαστε να χαρακτηρίσουμε την αναδρομική εξίσωση διαφορών από την κρουστική της απόκριση.

Για να προσδιορίσουμε τη φύση της κρουστικής απόκρισης ενός IIR συστήματος, θεωρήστε την ακόλουθη αναδρομική εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης με $b_1 = 0$,

$$y[n] = a_1y[n - 1] + b_0x[n]. \quad (8.7)$$

Εξ ορισμού, η εξίσωση διαφορών

$$h[n] = a_1h[n - 1] + b_0\delta[n] \quad (8.8)$$

πρέπει να ικανοποιείται από τη κρουστική απόκριση για όλες τις τιμές του n .

Μπορούμε να βρούμε ένα γενικό τύπο για την κρουστική απόκριση με παραμέτρους τους συντελεστές a_1 και b_0 , κατασκευάζοντας έναν πίνακα με μερικές τιμές και γράφοντας στη συνέχεια το γενικό τύπο. Ο ακόλουθος πίνακας δείχνει τις ακολουθίες που συμμετέχουν στους υπολογισμούς:

n	$n < 0$	0	1	2	3	4	...
$\delta[n]$	0	1	0	0	0	0	...
$h[n-1]$	0	0	b_0	$b_0(a_1)$	$b_0(a_1)^2$	$b_0(a_1)^3$...
$h[n]$	0	b_0	$b_0(a_1)$	$b_0(a_1)^2$	$b_0(a_1)^3$	$b_0(a_1)^4$...

Από τον παραπάνω πίνακα, παρατηρούμε ότι ο γενικός τύπος της κρουστικής απόκρισης είναι ο ακόλουθος

$$h[n] = \begin{cases} b_0(a_1)^n & \text{για } n \geq 0 \\ 0 & \text{για } n < 0 \end{cases} \quad (8.9)$$

Αν θυμηθούμε τον ορισμό της μοναδιαίας βηματικής ακολουθίας,

$$u[n] = \begin{cases} 1 & \text{για } n \geq 0 \\ 0 & \text{για } n < 0 \end{cases} \quad (8.10)$$

η Σχέση (8.9) μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως

$$h[n] = b_0(a_1)^n u[n] \quad (8.11)$$

όπου το γινόμενο του $(a_1)^n$ με την $u[n]$ μας παρέχει τη δυνατότητα ενσωμάτωσης των συνθηκών $n < 0$ και $n \geq 0$.



Παράδειγμα 8-2: Κρουστική Απόκριση

Για το σύστημα της Σχέσης (8.3) με $a_1 = 0.8$ και $b_0 = 5$, η κρουστική απόκρισή του είναι:

$$h[n] = 5(0.8)^n u[n] = \begin{cases} 5(0.8)^n & \text{για } n \geq 0 \\ 0 & \text{για } n < 0 \end{cases} \quad (8.12)$$



Άσκηση 8.2: Αντικαταστήστε τη λύση (8.11) στην εξίσωση διαφορών (8.8) και επιβεβαιώστε ότι η εξίσωση διαφορών ικανοποιείται για όλες τις τιμές του n .



Άσκηση 8.3: Βρείτε την κρουστική απόκριση του ακόλουθου συστήματος πρώτης τάξης:

$$y[n] = 0.5y[n-1] + 5x[n-7]$$

Θεωρήστε ότι το σύστημα βρίσκεται *σε ηρεμία* για $n < 0$. Σχεδιάστε το σήμα $h[n]$ που προκύπτει, συναρτήσει του n . Προσέξτε τη χρονική στιγμή από την οποία αρχίζει το μη μηδενικό τμήμα της κρουστικής απόκρισης.

Ένα κάπως γενικότερο πρόβλημα θα ήταν η εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός πρώτης τάξης συστήματος, όταν στην εξίσωση διαφορών συμπεριλάβουμε μια ολισθημένη έκδοση του σήματος εισόδου, δηλαδή,

$$y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

Επειδή το σύστημα είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο, προκύπτει ότι η κρουστική του απόκριση θα μπορούσε να γραφτεί ως άθροισμα δύο όρων ως εξής:

$$h[n] = b_0(a_1)^n u[n] + b_1(a_1)^{n-1} u[n-1]$$

$$= \begin{cases} 0 & n < 0 \\ b_0 & n = 0 \\ (b_0 + b_1 a_1^{-1})(a_1)^n & n \geq 1 \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι η κρουστική απόκριση συνεχίζει να φθίνει εκθετικά με ρυθμό που εξαρτάται μόνο από το συντελεστή a_1 .



Άσκηση 8.4: Βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$ του ακόλουθου συστήματος πρώτης τάξης:

$$y[n] = -0.5y[n-1] - 4x[n] + 5x[n-1].$$

Σχεδιάστε την κρουστική απόκριση που προέκυψε συναρτήσει του n .

8-2.3 Απόκριση σε Εισόδους Πεπερασμένου Μήκους

Για εισόδους πεπερασμένης χρονικής διάρκειας, το συνελικτικό άθροισμα είναι εύκολο να υπολογιστεί και για τα FIR και για τα IIR συστήματα. Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία εισόδου πεπερασμένης χρονικής διάρκειας είναι η ακόλουθη

$$x[n] = \sum_{k=N_1}^{N_2} x[k]\delta[n-k]$$

με $x[n] = 0$ για $n < N_1$ και $n > N_2$. Τότε από τη Σχέση (8.6) προκύπτει ότι η έξοδος ικανοποιεί τη σχέση

$$y[n] = \sum_{k=N_1}^{N_2} x[k]h[n-k]$$

Παράδειγμα 8-3: Απόκριση IIR Συστήματος σε Γενική Είσοδο

Ως παράδειγμα, ας θεωρήσουμε πάλι το ΓΧΑ σύστημα που ορίστηκε στην εξίσωση διαφορών της Σχέσης (8.3) και του οποίου η κρουστική απόκριση, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 8-2, είναι $h[n] = 5(0.8)^n u[n]$. Για το σήμα εισόδου της Σχέσης (8.4) και του Σχήματος 8-2,

$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + 2\delta[n-3]$$

εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} y[n] &= 2h[n] - 3h[n-1] + 2h[n-3] \\ &= 10(0.8)^n u[n] - 15(0.8)^{n-1} u[n-1] \\ &\quad + 10(0.8)^{n-3} u[n-3] \end{aligned}$$

Για να βρούμε την ακριβή τιμή της παραπάνω έκφρασης για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, πρέπει να λάβουμε υπόψη τις διαφορετικές περιοχές στις οποίες κάθε όρος

είναι μη μηδενικός. Κάνοντας τα προαναφερθέντα, παίρνουμε:

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 10 & n = 0 \\ 10(0.8) - 15 = -7 & n = 1 \\ 10(0.8)^2 - 15(0.8) = -5.6 & n = 2 \\ 10(0.8)^3 - 15(0.8)^2 + 10 = 5.52 & n = 3 \\ 5.52(0.8)^{n-3} & n > 3 \end{cases}$$

Μια σύγκριση με την έξοδο που λήφθηκε εφαρμόζοντας αναδρομικά την εξίσωση διαφορών (βλέπε Σχήμα 8-3 στη Σελίδα 218) δείχνει ότι έχουν προκύψει οι ίδιες τιμές της ακολουθίας εξόδου μ' αυτές που προέκυψαν εφαρμόζοντας υπέρθεση κατάλληλα σταθμισμένων και καθυστερημένων εκδόσεων της κρουστικής απόκρισης. ■

Στο Παράδειγμα 8-3 διευκρινίζονται δύο σημαντικά σημεία των IIR συστημάτων.

1. Η αρχική συνθήκη ηρεμίας εγγυάται ότι η ακολουθία εξόδου είναι μηδέν, μέχρι να ξεκινήσει η ακολουθία εισόδου (ή και αργότερα).
2. Εξαιτίας της ανατροφοδότησης, η κρουστική απόκριση είναι άπειρης διάρκειας και η έξοδος εξαιτίας της πεπερασμένης χρονικής διάρκειας του σήματος εισόδου και του γεγονότος ότι είναι μια υπέρθεση σταθμισμένων και καθυστερημένων εκδόσεων της κρουστικής απόκρισης, είναι γενικά (αλλά όχι πάντα) και αυτή άπειρης χρονικής διάρκειας. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την περίπτωση των FIR συστημάτων, όπου μια είσοδος πεπερασμένης χρονικής διάρκειας πάντα παράγει μία ακολουθία εξόδου πεπερασμένης χρονικής διάρκειας.



Άσκηση 8.5: Βρείτε την κρουστική απόκριση του παρακάτω συστήματος πρώτης τάξης

$$y[n] = -0.5y[n-1] + 5x[n]$$

και χρησιμοποιήστε την για να βρείτε την έξοδο όταν το σήμα εισόδου είναι το ακόλουθο:

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 1 \\ 3 & n = 1 \\ -2 & n = 2 \\ 0 & n = 3 \\ 3 & n = 4 \\ -1 & n = 5 \\ 0 & n > 5 \end{cases}$$

Γράψτε τη σχέση, η οποία είναι το άθροισμα τεσσάρων όρων, καθένας εκ των οποίων είναι μια καθυστέρηση της κρουστικής απόκρισης. Θεωρήστε ότι το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας. Σχεδιάστε το σήμα $y[n]$ που προκύπτει συναρτήσει του n για $0 \leq n \leq 10$.

8-2.4 Βηματική Απόκριση ενός Αναδρομικού Συστήματος Πρώτης Τάξης

Όταν το σήμα εισόδου είναι άπειρης χρονικής διάρκειας, ο υπολογισμός της εξόδου ενός ΠΡ συστήματος, χρησιμοποιώντας την εξίσωση διαφορών δε διαφέρει από τον αντίστοιχο υπολογισμό ενός FIR συστήματος. Απλά συνεχίζουμε να εφαρμόζουμε αναδρομικά την εξίσωση διαφορών, για όσο χρονικό διάστημα επιθυμούμε τα δείγματα εξόδου. Στην περίπτωση των FIR συστημάτων, η εξίσωση διαφορών και το συνελκτικό άθροισμα ταυτίζονται. Αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση των ΠΡ συστημάτων και ο υπολογισμός της εξόδου χρησιμοποιώντας το συνελκτικό άθροισμα είναι πρακτικός μόνο σε περιπτώσεις, που τόσο η είσοδος όσο και η κρουστική απόκριση εκφράζονται σε απλή μορφή. Έτσι, στη γενική περίπτωση, τα ΠΡ συστήματα πρέπει να υλοποιούνται εφαρμόζοντας αναδρομικά την εξίσωση διαφορών. Ο υπολογισμός της απόκρισης ενός ΠΡ συστήματος πρώτης τάξης όταν εφαρμοστεί στην είσοδό του η μοναδιαία βηματική ακολουθία προσφέρει μια σχετικά απλή επίδειξη των ζητημάτων που υπεισέρχονται.

Ας υποθέσουμε πάλι ότι το σύστημα ορίζεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 x[n]$$

και ας θεωρήσουμε ότι η είσοδος είναι η μοναδιαία βηματική ακολουθία που ορίζεται από τη σχέση

$$u[n] = \begin{cases} 1 & \text{για } n \geq 0 \\ 0 & \text{για } n < 0 \end{cases} \quad (8.13)$$

Όπως και προηγουμένως, η εξίσωση διαφορών μπορεί να εφαρμοστεί επαναληπτικά για να παραχθεί η ακολουθία εξόδου. Μερικές τιμές της εξόδου έχουν καταχωρηθεί στον πίνακα που ακολουθεί.

n	$x[n]$	$y[n]$
$n < 0$	0	0
0	1	b_0
1	1	$b_0 + b_0(a_1)$
2	1	$b_0 + b_0(a_1) + b_0(a_1)^2$
3	1	$b_0(1 + a_1 + a_1^2 + a_1^3)$
4	1	$b_0(1 + a_1 + a_1^2 + a_1^3 + a_1^4)$
\vdots	1	\vdots

Επεξεργαστείτε τον πίνακα για να σιγουρευτείτε ότι κατανοείτε τους υπολογισμούς που υπεισέρχονται. Από τις καταχωρημένες τιμές, μπορούμε να δούμε ότι ο γενικός τύπος για την $y[n]$ είναι:

$$\begin{aligned} y[n] &= b_0(1 + a_1 + a_1^2 + \dots + a_1^n) \\ &= b_0 \sum_{k=0}^n a_1^k \end{aligned} \quad (8.14)$$

Μετά από μερικές πράξεις, μπορούμε να καταλήξουμε σε μια απλή αναλυτική έκφραση για το γενικό όρο του σήματος εισόδου $y[n]$. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να

θυμηθούμε τον τύπο:

$$\sum_{k=0}^L r^k = \begin{cases} \frac{1-r^{L+1}}{1-r} & r \neq 1 \\ L+1 & r = 1 \end{cases} \quad (8.15)$$

ο οποίος μας δίνει το άθροισμα των πρώτων $L+1$ όρων μιας γεωμετρικής προόδου. Με τη βοήθεια αυτού του τύπου, η Σχέση (8.14) για την $y[n]$ (όταν $a_1 \neq 1$) γίνεται:

$$y[n] = b_0 \frac{1-a_1^{n+1}}{1-a_1} \quad \text{for } n \geq 0, \quad (8.16)$$

Μπορούμε τώρα να διακρίνουμε τις τρεις ακόλουθες περιπτώσεις: $|a_1| > 1$, $|a_1| < 1$ και $|a_1| = 1$. Από τη μελέτη αυτών των τριών περιπτώσεων προκύπτουν οι ακόλουθοι δύο τύποι συμπεριφοράς.

1. Όταν $|a_1| > 1$, υπερισχύει ο όρος a_1^{n+1} του αριθμητή και οι τιμές του $y[n]$ θα γίνονται όλο και μεγαλύτερες χωρίς όριο. Αυτή αποτελεί τη συνθήκη **αστάθειας** και είναι μια περίπτωση που συνήθως θα πρέπει να αποφεύγεται. Θα αναφέρουμε περισσότερα για το θέμα της ευστάθειας στις Ενότητες 8-4.2 και 8-8.
2. Όταν $|a_1| < 1$, ο όρος a_1^{n+1} θα τείνει στο μηδέν καθώς το $n \rightarrow \infty$. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα είναι **ευσταθές**. Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε την οριακή τιμή της $y[n]$ καθώς $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} b_0 \frac{1-a_1^{n+1}}{1-a_1} = \frac{b_0}{1-a_1}$$

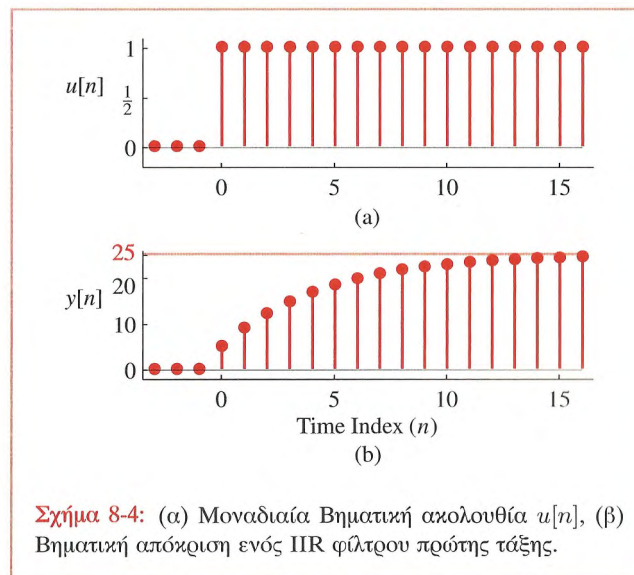
3. Όταν $|a_1| = 1$, είναι δυνατόν η έξοδος να απειριστεί, όχι όμως πάντα. Για παράδειγμα, για $a_1 = 1$, από τη Σχέση (8.14) προκύπτει ότι $y[n] = (n+1)b_0$ για $n \geq 0$ και η έξοδος $y[n]$ αυξάνεται καθώς το $n \rightarrow \infty$. Για $a_1 = -1$, η έξοδος εναλλάσσεται μεταξύ δύο τιμών, δηλαδή $y[n] = b_0$ για τις άρτιες τιμές του n και $y[n] = 0$ για τις περιττές τιμές του n .

Το διάγραμμα που παρουσιάζεται στο Σχήμα 8-4 δείχνει τη βηματική απόκριση του φίλτρου

$$y[n] = 0.8y[n-1] + 5x[n]$$

Παρατηρήστε ότι η οριακή τιμή της $y[n]$ είναι 25 και μπορεί να υπολογιστεί από τους συντελεστές του φίλτρου

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \frac{b_0}{1-a_1} = \frac{5}{1-0.8} = 25$$



Σχήμα 8-4: (α) Μοναδιαία Βηματική ακολουθία $u[n]$, (β) Βηματική απόκριση ενός IIR φίλτρου πρώτης τάξης.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι επιθυμούμε να υπολογίσουμε τη βηματική απόκριση χρησιμοποιώντας το συνελκτικό άθροισμα

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (8.17)$$

Εξαιτίας της άπειρης χρονικής διάρκειας της ακολουθίας εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος, είναι δυνατόν να προκύψουν δυσκολίες κατά τον υπολογισμό του συνελκτικού αθροίσματος. Το γεγονός, όμως, ότι η είσοδος και η έξοδος δίνονται από τους τύπους $x[n] = u[n]$ και $h[n] = b_0(a_1)^n u[n]$ αντίστοιχα, μας

παρέχει τη δυνατότητα να βρούμε το αποτέλεσμα που επιθυμούμε. Αντικαθιστώντας αυτούς τους τύπους στην (8.17) παίρνουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] b_0 (a_1)^{n-k} u[n-k]$$

Οι όροι $u[k]$ και $u[n-k]$ που υπεισέρχονται στο άθροισμα θα αλλάξουν τα όρια του αθροίσματος αφού $u[k] = 0$ για $k < 0$ και $u[n-k] = 0$ για $n-k < 0$ (ή $n < k$). Το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$y[n] = \begin{cases} 0 & \text{για } n < 0 \\ \sum_{k=0}^n b_0 (a_1)^{n-k} & \text{για } n \geq 0 \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τη Σχέση (8.15) μπορούμε να γράψουμε τη βηματική απόκριση για τις τιμές του $n \geq 0$ ως ακολούθως

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^n b_0 (a_1)^{n-k} = b_0 (a_1)^n \sum_{k=0}^n (a_1)^{-k} \\ &= b_0 (a_1)^n \frac{1 - (1/a_1)^{n+1}}{1 - (1/a_1)} \\ &= b_0 \frac{1 - (a_1)^{n+1}}{1 - a_1} \end{aligned} \quad (8.18)$$

η οποία ταυτίζεται με αυτή της Σχέσης (8.16), δηλαδή, τη βηματική απόκριση που υπολογίσαμε με επαναληπτική εφαρμογή της εξίσωσης διαφορών. Παρατηρήστε, ότι θα μπορούσαμε να φτάσουμε σε έναν αναλυτικό τύπο για τη βηματική απόκριση στην περίπτωση αυτή, εξαιτίας της ειδικής μορφής της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης. Στη γενική περίπτωση, θα ήταν δύσκολο ή αδύνατο να πάρουμε ένα τέτοιο αναλυτικό αποτέλεσμα, αλλά μπορούμε πάντα να εφαρμόζουμε επαναληπτικά την εξίσωση διαφορών για να υπολογίζουμε την έξοδο δείγμα-δείγμα.

8-3 Η Συνάρτηση Μεταφοράς ενός IIR Φίλτρου

Είδαμε στο Κεφάλαιο 7 για την περίπτωση των FIR συστημάτων, ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ο μετασχηματισμός- z της κρουστικής του απόκρισης και ότι είναι στενά συνδεδεμένη με την απόκριση συχνότητας. Επιπλέον, αποδείξαμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Συνέλιξη στο πεδίο- n αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στο πεδίο- z .

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad \xleftrightarrow{z} \quad Y(z) = X(z)H(z)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση των IIR συστημάτων. Η συνάρτηση μεταφοράς ενός FIR φίλτρου είναι πάντα πολυωνυμική. Ωστόσο, όταν η εξίσωση διαφορών περιέχει όρους ανατροφοδότησης, προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ είναι λόγος δύο πολυωνύμων. Λόγοι πολυωνύμων καλούνται *ρητές* συναρτήσεις. Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ενός IIR συστήματος πρώτης τάξης και θα δείξουμε πώς σχετίζονται μεταξύ τους η συνάρτηση μεταφοράς, η κρουστική απόκριση και η εξίσωση διαφορών.

8-3.1 Η Γενική Περίπτωση Πρώτης Τάξης IIR Συστήματος

Η γενική μορφή της εξίσωσης διαφορών για συστήματα πρώτης τάξης με ανατροφοδότηση είναι η ακόλουθη:

$$y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \quad (8.19)$$

Επειδή αυτή η εξίσωση πρέπει να ικανοποιείται για όλες τις τιμές του n , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα (7.13) στη Σελίδα 185 για να πάρουμε το μετασχηματισμό- z και των δύο πλευρών της εξίσωσης και να προκύψει έτσι

$$Y(z) = a_1 z^{-1} Y(z) + b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z)$$

Αφαιρώντας τον όρο $a_1 z^{-1} Y(z)$ και από τα δύο μέλη της εξίσωσης προκύπτει ότι:

$$Y(z) - a_1 z^{-1} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z)$$

$$(1 - a_1 z^{-1}) Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1}) X(z)$$

Αφού το σύστημα είναι ΓΧΑ, θα πρέπει να ισχύει ότι $Y(z) = H(z)X(z)$, όπου $H(z)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του ΓΧΑ συστήματος. Επιλύοντας αυτή την εξίσωση ως προς $H(z) = Y(z)/X(z)$, παίρνουμε

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (8.20)$$

Δείξαμε λοιπόν ότι η $H(z)$ για IIR συστήματα πρώτης τάξης είναι ο λόγος δύο πολυωνύμων. Το πολυώνυμο στον αριθμητή $B(z)$ ορίζεται από τους συντελεστές στάθμισης $\{b_k\}$ που πολλαπλασιάζουν το σήμα εισόδου $x[n]$ και τις καθυστερημένες εκδόσεις του, ενώ το πολυώνυμο $A(z)$ στον παρονομαστή ορίζεται από τους συντελεστές ανατροφοδότησης $\{a_\ell\}$. Το γεγονός ότι αυτή η αντιστοιχία στη γενική περίπτωση είναι ορθή θα έπρεπε να είναι εμφανές από την ανάλυση που οδηγεί στη σχέση για την $H(z)$. Πράγματι, τα ακόλουθα ισχύουν για IIR συστήματα οποιασδήποτε τάξης:

Οι συντελεστές του πολυωνύμου στον **αριθμητή** της συνάρτησης μεταφοράς ενός IIR συστήματος είναι οι συντελεστές των όρων **τροφοδότησης προς τα εμπρός** της εξίσωσης διαφορών. Για το πολυώνυμο του **παρονομαστή**, ο σταθερός όρος είναι μονάδα και οι υπόλοιποι συντελεστές είναι ίσοι με το αντίθετο των συντελεστών **ανατροφοδότησης**.

Στο Matlab, η συνάρτηση `filter` είναι συμβατή με αυτή τη μορφή. Η δήλωση

$$yy = \text{filter}(bb, aa, xx)$$

υλοποιεί ένα IIR φίλτρο, με τα διανύσματα `bb` και `aa` να περιέχουν τους συντελεστές των πολυωνύμων του αριθμητή και του παρονομαστή αντίστοιχα.



Παράδειγμα 8-4: IIR Φίλτρα στο MATLAB

Το ακόλουθο φίλτρο ανατροφοδότησης:

$$y[n] = 0.5y[n-1] - 3x[n] + 2x[n-1]$$

θα μπορούσε να υλοποιηθεί στο Matlab γράφοντας

$$yy = \text{filter}([-3, 2], [1, -0.5], xx)$$

όπου `xx` και `yy` είναι τα διανύσματα των σημάτων εισόδου και εξόδου αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι το δεύτερο στοιχείο του διανύσματος `aa` είναι ίσο με $-a_1$, όπως ακριβώς και στο πολυώνυμο $A(z)$. Μπορούμε να φανταστούμε ότι ο συντελεστής του φίλτρου που πολλαπλασιάζει το σήμα εξόδου $y[n]$ είναι 1, και επομένως πάντα το πρώτο στοιχείο του διανύσματος `aa` θα είναι ίσο με 1. ■



Άσκηση 8.6: Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς (δηλαδή το μετασχηματισμό- z) του ακόλουθου φίλτρου ανατροφοδότησης:

$$y[n] = 0.5y[n-1] - 3x[n] + 2x[n-1]$$



Άσκηση 8.7: Προσδιορίστε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος που υλοποιείται από την παρακάτω δήλωση στο Matlab

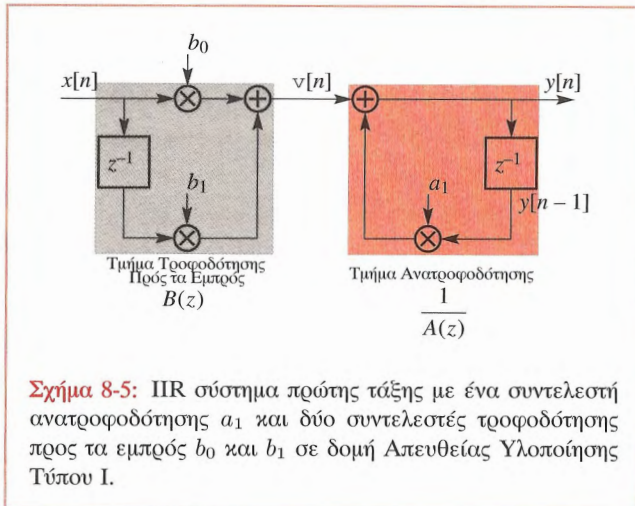
$$yy = \text{filter}(5, [1, 0.8], xx).$$

8-3.2 Η Συνάρτηση Μεταφοράς και Σχηματικά Διαγράμματα Δομών Υλοποίησης

Όπως είδαμε, η συνάρτηση μεταφοράς περιέχει τους συντελεστές της εξίσωσης διαφορών με ένα βολικό τρόπο, που διευκολύνει την εναλλαγή μεταξύ της συνάρτησης μεταφοράς και της εξίσωσης διαφορών. Σε αυτήν την ενότητα, θα δείξουμε ότι αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να παράγουμε και άλλες εξισώσεις διαφορών και επομένως και άλλες δομές υλοποίησης, χειριζόμενοι κατάλληλα τη συνάρτηση μεταφοράς.

8-3.2.1 Δομή Απευθείας Υλοποίησης Τύπου I

Για να αναδείξουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της συνάρτησης μεταφοράς και του σχηματικού διαγράμματος, ας επιστρέψουμε στο σχηματικό διάγραμμα του Σχήματος 8-1, το οποίο επαναλαμβάνουμε για ευκολία στο Σχήμα 8-5. Σχηματικά διαγράμματα όπως αυτά του Σχήματος 8-5 καλούνται *δομές υλοποίησης*, ή γενικότερα, απλώς *δομές*, διότι δίνουν μία εικονογραφημένη αναπαράσταση των εξισώσεων διαφορών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την υλοποίηση του συστήματος.



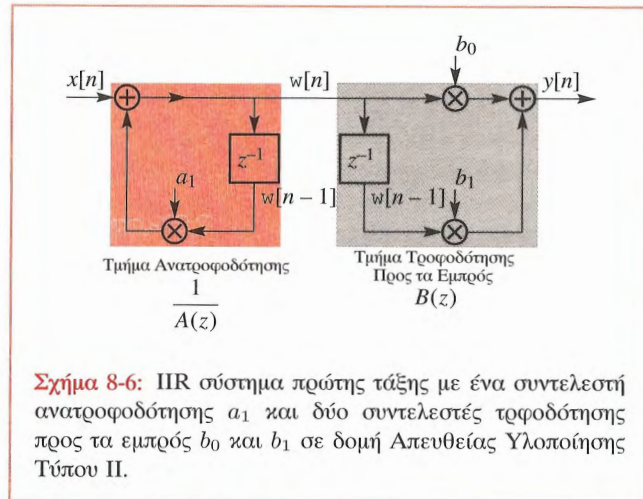
Θυμηθείτε ότι το γινόμενο δύο συναρτήσεων μεταφοράς αντιστοιχεί στην εν σειρά σύνδεση δύο συστημάτων. Η συνάρτηση μεταφοράς για το φίλτρο ανατροφοδότησης πρώτης τάξης μπορεί, να παραγοντοποιηθεί σε ένα FIR τμήμα και ένα IIR τμήμα ως εξής:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \\ &= \left(\frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \right) (b_0 + b_1 z^{-1}) = \left(\frac{1}{A(z)} \right) \cdot B(z) \end{aligned}$$

Το συμπέρασμα που βγαίνει από αυτούς τους αλγεβρικούς υπολογισμούς είναι ότι μια σωστή υλοποίηση της $H(z)$ προκύπτει από το ακόλουθο ζεύγος εξισώσεων διαφορών:

$$v[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n - 1] \quad (8.21)$$

$$y[n] = a_1 y[n - 1] + v[n] \quad (8.22)$$



Από στο Σχήμα 8-5 παρατηρούμε, ότι το πολυώνυμο $B(z)$ αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς του τμήματος του σχηματικού διαγράμματος με τροφοδότηση προς τα εμπρός και ότι η ρητή συνάρτηση $1/A(z)$ αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς του τμήματος με ανατροφοδότηση, που συμπληρώνει το σύστημα. Ένα σύστημα που υλοποιείται με αυτόν τον τρόπο καλείται *απευθείας υλοποίηση τύπου I*, γιατί είναι δυνατό να μεταβούμε απευθείας από τη συνάρτηση μεταφοράς στο σχηματικό διάγραμμα (ή στην εξίσωση διαφορών που αναπαριστά) χωρίς περαιτέρω χειρισμούς, παρά μόνο με την έκφραση του αριθμητή και του παρονομαστή ως πολυώνυμα της μεταβλητής z^{-1} .

8-3.2.2 Δομή Απευθείας Υλοποίησης Τύπου II

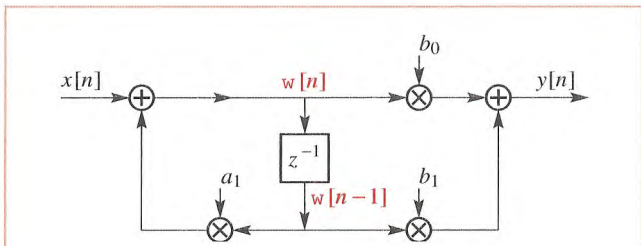
Γνωρίζουμε ότι σε ένα ΓΧΑ σύστημα σε σειρά, μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των υποσυστημάτων χωρίς να αλλάξει η συνολική απόκριση του συστήματος. Δηλαδή,

$$H(z) = \left(\frac{1}{A(z)} \right) \cdot B(z) = B(z) \cdot \left(\frac{1}{A(z)} \right)$$

Χρησιμοποιώντας τις αντιστοιχίες που έχουμε αποδείξει, οδηγούμαστε στο σχηματικό διάγραμμα του Σχήματος 8-6. Παρατηρήστε ότι έχουμε ορίσει μια νέα ενδιάμεση μεταβλητή $w[n]$ ως την έξοδο του τμήματος με ανατροφοδότηση και την είσοδο στο τμήμα με την προς τα εμπρός τροφοδότηση. Έτσι, το σχηματικό διάγραμμα μας δείχνει ότι μια ισοδύναμη υλοποίηση του συστήματος είναι η εξής:

$$w[n] = a_1 w[n-1] + x[n] \quad (8.23)$$

$$y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1] \quad (8.24)$$



Σχήμα 8-7: IIR σύστημα πρώτης τάξης σε δομή Απευθείας Υλοποίησης Τύπου II. Το σύστημα αυτό είναι πανομοιότυπο με αυτό του Σχήματος 8-6 εκτός από τα δύο στοιχεία καθυστέρησης που συγχωνεύτηκαν σε ένα.

Και στην περίπτωση αυτή, εξαιτίας του ότι υπάρχει μια άμεση και απλή αντιστοίχιση ανάμεσα στο Σχήμα 8-6 και την $H(z)$, αυτή η δομή υλοποίησης ονομάζεται **Δομή**

Απευθείας Υλοποίησης Τύπου II του IIR συστήματος πρώτης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

Το σχηματικό διάγραμμα του Σχήματος 8-6 διασαφηνίζει σε βάθος το ακόλουθο σημείο. Παρατηρήστε ότι η είσοδος σε κάθε ένα από τα στοιχεία καθυστέρησης είναι το ίδιο σήμα $w[n]$. Επομένως, δεν υπάρχει ανάγκη χρησιμοποίησης δύο στοιχείων καθυστέρησης, αφού αυτά μπορούν να συγχωνευθούν σε ένα όπως φαίνεται στο Σχήμα 8-7. Αφού τα στοιχεία καθυστέρησης υλοποιούνται στον υπολογιστή με στοιχεία μνήμης, η υλοποίηση του Σχήματος 8-7 θα απαιτεί λιγότερη μνήμη από αυτή της υλοποίησης του Σχήματος 8-6. Παρατηρήστε, ωστόσο, ότι και τα δύο σχηματικά διαγράμματα παριστούν τις εξισώσεις διαφορών (8.23) και (8.24).



Άσκηση 8.8: Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς των ακόλουθων, σε σειρά, εξισώσεων διαφορών:

$$w[n] = -0.5w[n-1] + 7x[n]$$

$$y[n] = 2w[n] - 4w[n-1]$$

Σχεδιάστε τα σχηματικά διαγράμματα του συστήματος σε δομές απευθείας υλοποίησης τύπου I και τύπου II.

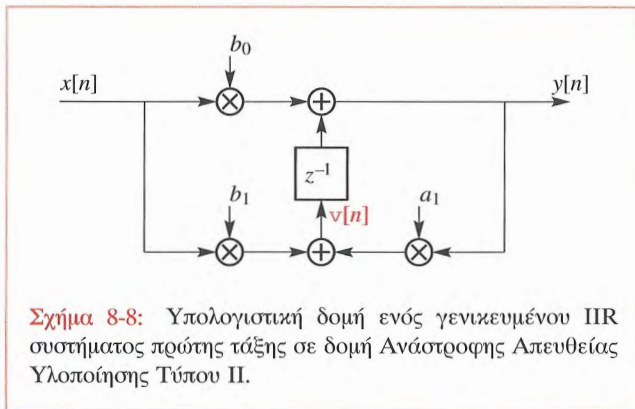
8-3.2.3 Η Δομή Ανάστροφης Υλοποίησης

Ένα εκπληκτικό γεγονός σχετικά με τα σχηματικά διαγράμματα, όπως αυτό του Σχήματος 8-7, είναι ότι αν ένα σχηματικό διάγραμμα υποστεί τους ακόλουθους μετασχηματισμούς:

1. Αναστροφή όλων των βελών χωρίς να αλλαχθεί η τιμή ή η θέση των πολλαπλασιαστών.
2. Αντικατάσταση όλων των κομβικών σημείων από σημεία άθροισης και όλων των σημείων άθροισης από κομβικά σημεία.

3. Η είσοδος και η έξοδος εναλλαχθούν.

το νέο σχηματικό διάγραμμα που προκύπτει έχει την ίδια συνάρτηση μεταφοράς με το αρχικό. Δε θα το αποδείξουμε αυτό, αλλά ισχύει για τα σχηματικά διαγράμματα όπως αυτά που παρουσιάσαμε. Παρόλα αυτά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό- z για να αποδείξουμε ότι ισχύει για το απλό πρώτης τάξης σύστημά μας.



Σχήμα 8-8: Υπολογιστική δομή ενός γενικευμένου ΠΡ συστήματος πρώτης τάξης σε δομή Ανάστροφης Απευθείας Υλοποίησης Τύπου II.

Η δομή ανατροφοδότησης που δίνεται στο γράφημα ροής σήματος του Σχήματος 8-8 είναι η *ανάστροφη* υλοποίηση της Δομής Απευθείας Υλοποίησης Τύπου II που φαίνεται στο Σχήμα 8-7. Για να βρούμε τις ακριβείς εξισώσεις διαφορών, πρέπει να γράψουμε τις εξισώσεις που ορίζονται στο γράφημα ροής σήματος. Υπάρχει μια συγκεκριμένη διαδικασία για να πραγματοποιηθεί αυτό, αν ακολουθήσουμε τους παρακάτω δύο κανόνες:

1. Εκχωρήστε ονόματα μεταβλητών στις εισόδους όλων των στοιχείων καθυστέρησης. Για παράδειγμα, η $v[n]$ χρησιμοποιείται στο Σχήμα 8-8 και επομένως η έξοδος του στοιχείου καθυστέρησης είναι $v[n - 1]$.

2. Γράψτε εξισώσεις για όλους τους κόμβους άθροισης. Υπάρχουν δύο σε αυτή την περίπτωση.

$$y[n] = b_0 x[n] + v[n - 1] \quad (8.25)$$

$$v[n] = b_1 x[n] + a_1 y[n] \quad (8.26)$$

Το γράφημα ροής σήματος προσδιορίζει έναν ακριβή υπολογισμό, γι' αυτό και οι (8.25) και (8.26) απαιτούν τρεις πολλαπλασιασμούς και δύο προσθέσεις για κάθε χρονική στιγμή n . Πρώτα πρέπει να υπολογισθεί η εξίσωση (8.25), γιατί η τιμή της $y[n]$ χρειάζεται στον υπολογισμό της (8.26).

Εξαιτίας της ανατροφοδότησης, είναι αδύνατο να μετατρέψουμε αυτές τις εξισώσεις σε μια από τις άλλες μορφές απαλείφοντας μεταβλητές. Παρόλα αυτά, μπορούμε να επανασυνδέσουμε αυτές τις δύο εξισώσεις στο πεδίο του μετασχηματισμού- z για να αποδείξουμε ότι έχουμε τη σωστή συνάρτηση μεταφοράς. Αρχικά παίρνουμε το μετασχηματισμό- z κάθε μιας εξίσωσης διαφορών και έχουμε

$$Y(z) = b_0 X(z) + z^{-1} V(z)$$

$$V(z) = b_1 X(z) + a_1 Y(z)$$

Απαλείφουμε τώρα την $V(z)$ αντικαθιστώντας την δεύτερη εξίσωση στην πρώτη και έχουμε

$$Y(z) = b_0 X(z) + z^{-1} (b_1 X(z) + a_1 Y(z))$$

$$(1 - a_1 z^{-1}) Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1}) X(z)$$

Επομένως, καταλήγουμε ότι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

Αφού οι Σχέσεις (8.25) και (8.26) έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς είναι ισοδύναμες με τη Δομή Απευθείας Υλοποίησης Τύπου I (8.21) και (8.22) όπως επίσης και με τη Δομή Απευθείας Υλοποίησης Τύπου II (8.23) και (8.24).

Γιατί, όμως, ενδιαφερόμαστε για αυτές τις διαφορετικές υλοποιήσεις της ίδιας συνάρτησης μεταφοράς; Όλες

αυτές οι υλοποιήσεις χρησιμοποιούν τον ίδιο αριθμό πολλαπλασιασμών και προσθέσεων για να υπολογίσουν ακριβώς την ίδια έξοδο για μια δοθείσα είσοδο. Ωστόσο, αυτό ισχύει μόνο όταν έχουμε τέλεια αριθμητική (ως προς την ακρίβεια). Σε έναν υπολογιστή με πεπερασμένη ακρίβεια (π.χ. 16 bits), κάθε υπολογισμός θα εμπεριέχει σφάλματα στρογγύλευσης, πράγμα που σημαίνει ότι κάθε υλοποίηση θα συμπεριφέρεται ελαφρώς διαφορετικά. Στην πράξη η υψηλής ποιότητας υλοποίηση των ψηφιακών φίλτρων σε υλικό, απαιτεί σωστό σχεδιασμό για τον έλεγχο σφαλμάτων στρογγύλοποιησης και υπερχείλισης.

8-3.3 Η Σχέση με την Κρουστική Απόκριση

την ανάλυση της Ενότητας 8-3.1 υποθέσαμε σιωπηλά, ότι η συνάρτηση μεταφοράς είναι ο μετασχηματισμός- z της κρουστικής απόκρισης ενός IIR συστήματος. Ενώ αυτό ισχύει γενικά, έχουμε αποδείξει την ορθότητά του μόνο για την περίπτωση των FIR συστημάτων. Στην περίπτωση των IIR συστημάτων, θα πρέπει να έχουμε την ικανότητα να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό- z μιας ακολουθίας άπειρου μήκους. Ως παράδειγμα μιας τέτοιας ακολουθίας ας θεωρήσουμε την $h[n] = a^n u[n]$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του μετασχηματισμού- z από τη Σχέση (7.15) της Σελίδας 185, θα έχουμε ότι

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

το οποίο είναι το άθροισμα όλων των όρων μίας γεωμετρικής προόδου, όπου ο λόγος μεταξύ διαδοχικών όρων της είναι az^{-1} . Επομένως, γνωρίζουμε ότι, αν $|az^{-1}| < 1$, τότε το άθροισμα είναι πεπερασμένο και δίνεται από την παρακάτω αναλυτική σχέση

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Η συνθήκη που εξασφαλίζει ότι το απειροάθροισμα ισούται με την αναλυτική έκφραση μπορεί να εκφραστεί ως $|a| < z$. Οι τιμές της μιγαδικής μεταβλητής z που ικανοποιούν την

παραπάνω συνθήκη αποτελούν την *περιοχή σύγκλισης*. Από την ανάλυση που προηγήθηκε, μπορούμε να δηλώσουμε κατηγορηματικά το ακόλουθο, υπερβολικά σημαντικό, ζεύγος μετασχηματισμού- z :

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (8.27)$$

Θα έχουμε πολλές ευκαιρίες να χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα σε αυτό το κεφάλαιο.

Παράδειγμα 8-5: Η $H(z)$ από τη Κρουστική Απόκριση

Ως παράδειγμα χρήσης αυτού του αποτελέσματος, θυμηθείτε ότι στην Ενότητα 8-2.2 δείξαμε αναδρομικά, ότι η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \quad (8.28)$$

είναι η ακόλουθη

$$h[n] = b_0 (a_1)^n u[n] + b_1 (a_1)^{n-1} u[n-1] \quad (8.29)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα και την ιδιότητα της καθυστέρησης του μετασχηματισμού- z καθώς και το αποτέλεσμα της Σχέσης (8.27), η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} H(z) &= b_0 \left(\frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \right) + b_1 z^{-1} \left(\frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \right) \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \end{aligned} \quad (8.30)$$

η οποία ταυτίζεται με αυτή που καταλήξαμε στην Ενότητα 8-3.1 στη Σελίδα 224 υπολογίζοντας το μετασχηματισμό- z της εξίσωσης διαφορών και λύνοντας ως προς $H(z) = Y(z)/X(z)$. ■

8-3.4 Σύνοψη της Μεθόδου

Σε αυτήν την ενότητα, δείξαμε μερικές σημαντικές τεχνικές ανάλυσης. Είδαμε ότι είναι δυνατό να μεταβούμε απευθείας από την εξίσωση διαφορών (8.28) στη συνάρτηση μεταφοράς (8.30). Είδαμε, επίσης, για αυτό το απλό παράδειγμα, ότι είναι δυνατό **παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό- z** να μεταβούμε απευθείας από τη συνάρτηση μεταφοράς (8.30) στην κρουστική απόκριση (8.29) του συστήματος, αποφεύγοντας την κουραστική διαδικασία της αναδρομικής εφαρμογής της εξίσωσης διαφορών. Θα δούμε ότι είναι δυνατό, σε γενικές γραμμές, να γίνει αυτό μέσω μίας διαδικασίας αντίστροφου μετασχηματισμού- z , που βασίζεται σε μια διαδικασία διάσπασης του μετασχηματισμού- z σε άθροισμα όρων, όμοιο με αυτό του δεξιού μέλους της (8.27). Πριν προχωρήσουμε στην αναπτύξη αυτής της τεχνικής, η οποία εφαρμόζεται και σε συστήματα υψηλότερης τάξης, θα συνεχίσουμε να εστιάζουμε την προσοχή μας στο IIR σύστημα πρώτης τάξης, για να επιδείξουμε κάποια σημαντικότερα σημεία σχετικά με το μετασχηματισμό- z και τη σχέση του με τα IIR συστήματα.

8-4 Πόλοι και Μηδενικά

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση σχετικά με τη συνάρτηση μεταφοράς, που προκύπτει από το μετασχηματισμό- z , είναι ότι τα πολυώνυμα στον αριθμητή και τον παρονομαστή έχουν μηδενικά. Οι θέσεις των ριζών αυτών στο μιγαδικό επίπεδο- z είναι καθοριστικής σημασίας στο χαρακτηρισμό του συστήματος. Αν και συνηθίζεται να γράφουμε τη συνάρτηση μεταφοράς συναρτήσει του z^{-1} για να διευκολύνουμε την αντιστοίχιση με την εξίσωση διαφορών, είναι ίσως καλύτερο, για την εύρεση των ριζών, να ξαναγράψουμε τα πολυώνυμα συναρτήσει του z παρά του z^{-1} . Αν πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με το z , θα πάρουμε:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{b_0 z + b_1}{z - a_1}$$

Σε αυτή τη μορφή, είναι εύκολο να βρούμε τις ρίζες των πολυωνύμων του αριθμητή και του παρονομαστή.

Επίδειξη: Διεπαφή PeZ

Εργ. Ασκ.: PeZ - Τα Πεδία z , n και $\hat{\omega}$

Επίδειξη: PeZ Επισκόπηση

Ο αριθμητής έχει μία ρίζα στο σημείο

$$b_0 z + b_1 = 0 \implies \text{Ρίζα στο } z = -\frac{b_1}{b_0}$$

και ο παρονομαστής έχει τη ρίζα του στο σημείο

$$z - a_1 = 0 \implies \text{Ρίζα στο } z = a_1$$

Αν θεωρήσουμε την $H(z)$ ως συνάρτηση του z σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο- z , η ρίζα του αριθμητή μηδενίζει τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$, δηλαδή,

$$H(z)|_{z=-(b_1/b_0)} = 0$$

Θυμηθείτε, ότι η ρίζα του παρονομαστή είναι το σημείο του επιπέδου- z , στο οποίο η συνάρτηση $H(z)$ **απειρίζεται**

$$H(z)|_{z=a_1} \rightarrow \infty$$

και γι' αυτόν το λόγο, το σημείο ($z = a_1$) ονομάζεται **πόλος** της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$.

Άσκηση 8.9: Βρείτε τους πόλους και τα μηδενικά της ακόλουθης συνάρτησης μεταφοράς

$$H(z) = \frac{3 + 4z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}}$$

Άσκηση 8.10: Για το μετασχηματισμό- z του ακόλουθου φίλτρου ανατροφοδότησης

$$y[n] = 0.5y[n-1] - x[n] + 3x[n-1]$$

καθορίστε τα σημεία των πόλων και των μηδενικών.

8-4.1 Πόλοι και Μηδενικά στο Μηδέν και το Άπειρο

Όταν τα πολυώνυμα του αριθμητή και του παρονομαστή έχουν διαφορετικό πλήθος συντελεστών, μπορούμε να έχουμε είτε πόλους είτε μηδενικά στο σημείο $z = 0$. Αυτό το είδαμε στο Κεφάλαιο 7, όπου τα FIR συστήματα, των οποίων οι συναρτήσεις μεταφοράς έχουν μόνο ένα πολυώνυμο στον αριθμητή, είχαν έναν αριθμό πόλων στο $z = 0$ ίσο με τον αριθμό των μηδενικών του πολυωνύμου. Αν μετρήσουμε όλους τους πόλους και τα μηδενικά στο $z = \infty$ και στο $z = 0$, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι *ο αριθμός των πόλων ισούται με τον αριθμό των μηδενικών*. Θεωρήστε τα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 8-6: Εύρεση Πόλων και Μηδενικών

Η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου ανατροφοδότησης

$$y[n] = 0.5y[n-1] + 2x[n]$$

βρέθηκε, μετά από μελέτη, ότι είναι η ακόλουθη

$$H(z) = \frac{2}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Όταν εκφράσουμε την $H(z)$ με θετικές δυνάμεις του z ,

$$H(z) = \frac{2z}{z - 0.5}$$

βλέπουμε ότι υπάρχει ένας πόλος στο $z = 0.5$ και ένα μηδενικό στο $z = 0$. ■

Παράδειγμα 8-7: Μηδενικό στο $z = \infty$

Η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου ανατροφοδότησης


$$y[n] = 0.5y[n-1] + 3x[n-1]$$

βρέθηκε, μετά από μελέτη, ότι είναι

$$H(z) = \frac{3z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{3}{z - 0.5}$$

Το σύστημα έχει έναν πόλο στο $z = 0.5$ και αν πάρουμε το όριο της $H(z)$ όταν $z \rightarrow \infty$, βρίσκουμε ότι $H(z) \rightarrow 0$ και επομένως το σύστημα έχει ένα μηδενικό στο $z = \infty$. ■

Και στις δύο περιπτώσεις των Παραδειγμάτων 8-6 και 8-7 έχουμε ακριβώς έναν πόλο και ένα μηδενικό, αν μετρήσουμε το μηδενικό στο $z = \infty$.

 **Άσκηση 8.11:** Ορίστε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$, του ακόλουθου φίλτρου ανατροφοδότησης:

$$y[n] = 0.5y[n-1] + 3x[n-2]$$

Δείξτε ότι η $H(z)$ έχει έναν πόλο στο $z = 0$, καθώς και στο $z = 0.5$. Επιπροσθέτως, βρίσκοντας το όριο της $H(z)$ καθώς το $z \rightarrow \infty$, δείξτε ότι η $H(z)$ έχει δύο μηδενικά στο $z = \infty$.

8-4.2 Θέσεις Πόλων και Ευστάθεια

Η θέση του πόλου ενός φίλτρου πρώτης τάξης καθορίζει τη μορφή της κρουστικής απόκρισης. Στην Ενότητα 8-3.3 αποδείξαμε ότι ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$\begin{aligned} H(z) &= b_0 \left(\frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \right) + b_1 z^{-1} \left(\frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \right) \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{b_0(z + b_1/b_0)}{(z - a_1)} \end{aligned}$$

έχει την ακόλουθη κρουστική απόκριση

$$\begin{aligned} h[n] &= b_0(a_1)^n u[n] + b_1(a_1)^{n-1} u[n-1] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{για } n < 0 \\ b_0 & \text{για } n = 0 \\ (b_0 + b_1 a_1^{-1}) a_1^n & \text{για } n \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Δηλαδή ένα IIR σύστημα με έναν πόλο στο $z = a_1$ έχει μία κρουστική απόκριση η οποία για $n \geq 1$ είναι ανάλογη του a_1^n . Μπορούμε να δούμε ότι, αν $|a_1| < 1$, η

κρουστική απόκριση θα φθίνει καθώς το $n \rightarrow \infty$. Από την άλλη μεριά, αν $|a_1| \geq 1$, η κρουστική απόκριση δε θα φθίνει. Στην πραγματικότητα, αν $|a_1| > 1$, θα αυξάνεται απεριόριστα. Αφού ο πόλος της συνάρτησης μεταφοράς είναι στο σημείο $z = a_1$, βλέπουμε ότι η θέση του πόλου μπορεί να μας ενημερώσει αν η κρουστική απόκριση θα φθίνει ή θα αυξάνει. Προφανώς, είναι επιθυμητό η κρουστική απόκριση να φθίνει, διότι μία εκθετικά αυξανόμενη κρουστική απόκριση θα παρήγαγε μη φραγμένες εξόδους, ακόμα και αν τα δείγματα εισόδου είχαν πεπερασμένες τιμές. Τα συστήματα που παράγουν πεπερασμένες εξόδους, όταν η είσοδος είναι πεπερασμένη, καλούνται *ευσταθή συστήματα*. Αν $|a_1| < 1$, ο πόλος της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκεται *μέσα* στο μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου- z . Προκύπτει ότι για τα IIR συστήματα, για τα οποία έχουμε συζητήσει, η ακόλουθη πρόταση είναι γενικά αληθής:

Ένα αιτιατό ΓΧΑ IIR σύστημα με αρχικές συνθήκες ηρεμίας είναι ευσταθές, αν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς του κείνται ανστηρά μέσα στο μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου- z .

Επομένως, η ευστάθεια ενός συστήματος μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα από το διάγραμμα των πόλων και μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς στο επίπεδο- z .


Παράδειγμα 8-8: Ευστάθεια από τη Θέση του Πόλου

Το σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς είναι η

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} = \frac{z - 2}{z - 0.8}$$

έχει ένα μηδενικό στο $z = 2$ και έναν πόλο στο $z = 0.8$. Επομένως, το σύστημα είναι ευσταθές. Παρατηρήστε, ότι η θέση του μηδενικού, το οποίο είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου, δεν επηρεάζει την ευστάθεια του συστήματος. Θυμηθείτε ότι τα μηδενικά αντιστοιχούν σε ένα FIR σύστημα που είναι συνδεδεμένο σε σειρά με ένα

IIR σύστημα που ορίζεται από τους πόλους. Εφόσον τα FIR συστήματα είναι πάντα ευσταθή, δεν μας εκπλήσει το γεγονός, ότι η ευστάθεια καθορίζεται αποκλειστικά από τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς. ■

 **Άσκηση 8.12:** Ένα ΓΧΑ IIR σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{2 + 2z^{-1}}{1 - 1.25z^{-1}}$$

Σχεδιάστε τον πόλο και το μηδενικό στο επίπεδο- z και αποφανθείτε αν το σύστημα είναι ευσταθές ή όχι.

8-5 Απόκριση Συχνότητας ενός IIR Φίλτρου

Στο Κεφάλαιο 6, αναφερθήκαμε στην απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ ως τη μιγαδική συνάρτηση που καθορίζει το πλάτος και την αλλαγή της φάσης στην οποία υπόκειται ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα που εφαρμόζεται στην είσοδο ενός Γραμμικού Χρονικά Αμετάβλητου (ΓΧΑ) συστήματος, δηλαδή αν $x[n] = e^{j\omega n}$, τότε

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \quad (8.31)$$

Στην Ενότητα 7-6 στη Σελίδα 192 αποδείξαμε ότι η απόκριση συχνότητας ενός FIR συστήματος σχετίζεται με τη συνάρτηση μεταφοράς ως ακολούθως:

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} \quad (8.32)$$

Αυτή η σχέση ανάμεσα στη συνάρτηση μεταφοράς και την απόκριση συχνότητας ισχύει και για τα IIR συστήματα. Ωστόσο πρέπει να προσθέσουμε ότι θα πρέπει το σύστημα να είναι ευσταθές, ώστε η απόκριση συχνότητας να υπάρχει και να δίνεται από τη Σχέση (8.32). Αυτή η προϋπόθεση της ευστάθειας είναι κάτι που πρέπει να ισχύει γενικά, ωστόσο τα FIR συστήματα είναι εξ' ορισμού ευσταθή, για αυτό και ως τώρα δε χρειάστηκε να ασχοληθούμε με την ευστάθεια.

Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός IIR συστήματος πρώτης τάξης έχει την ακόλουθη μορφή:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

όπου η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς ορίζεται από τη σχέση $|a_1 z^{-1}| < 1$ ή ισοδύναμα $|a_1| < |z|$. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την $H(z)$ στα σημεία $z = e^{j\hat{\omega}}$, τότε οι τιμές του z πάνω στο μοναδιαίο κύκλο θα πρέπει να ανήκουν στην περιοχή σύγκλισης, δηλαδή θα πρέπει η καμπύλη $|z| = 1$ να ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού- z . Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει $|a_1| < 1$, που αποδείχθηκε στην Ενότητα 8-4.2 ότι είναι η συνθήκη που εξασφαλίζει την ευστάθεια των IIR συστημάτων πρώτης τάξης. Στην Ενότητα 8-8 θα δώσουμε μια άλλη ερμηνεία του γιατί απαιτείται η ευστάθεια ενός συστήματος ώστε να υπάρχει η απόκριση συχνότητάς του. Υποθέτοντας ότι ένα σύστημα πρώτης τάξης είναι ευσταθές, καταλήγουμε στον ακόλουθο τύπο για την απόκριση συχνότητας:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = H(z)|_{z=e^{j\hat{\omega}}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\hat{\omega}}}{1 - a_1 e^{-j\hat{\omega}}}. \quad (8.33)$$

Μια απλή αποτίμηση του παραπάνω τύπου επιβεβαιώνει ότι η (8.33) είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π . Αυτό ισχύει πάντα για την απόκριση συχνότητας κάθε συστήματος διακριτού χρόνου.

Θυμηθείτε ότι η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}})$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας $\hat{\omega}$. Επομένως, μπορούμε να χωρίσουμε τη Σχέση (8.33) σε δύο πραγματικές συναρτήσεις εκ των οποίων η μία θα εκφράζει το μέτρο και η άλλη τη φάση συναρτήσει της συχνότητας. Για την απόκριση μέτρου, είναι προτιμότερο να υπολογίσουμε πρώτα το τετράγωνο του μέτρου και στη συνέχεια, αν είναι απαραίτητο, να υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα.

Το τετράγωνο του μέτρου μπορεί να υπολογισθεί πολλαπλασιάζοντας τη μιγαδική συνάρτηση $H(e^{j\hat{\omega}})$ της Σχέσης (8.33) με τη συζυγή της (συμβολίζεται με H^*). Για

το παράδειγμα του συστήματος πρώτης τάξης,

$$\begin{aligned} |H(e^{j\hat{\omega}})|^2 &= H(e^{j\hat{\omega}})H^*(e^{j\hat{\omega}}) \\ &= \frac{b_0 + b_1 e^{-j\hat{\omega}}}{1 - a_1 e^{-j\hat{\omega}}} \cdot \frac{b_0^* + b_1^* e^{+j\hat{\omega}}}{1 - a_1^* e^{+j\hat{\omega}}} \\ &= \frac{|b_0|^2 + |b_1|^2 + b_0 b_1^* e^{+j\hat{\omega}} + b_0^* b_1 e^{-j\hat{\omega}}}{1 + |a_1|^2 - a_1^* e^{+j\hat{\omega}} - a_1 e^{-j\hat{\omega}}} \\ &= \frac{|b_0|^2 + |b_1|^2 + 2\Re\{b_0^* b_1 e^{-j\hat{\omega}}\}}{1 + |a_1|^2 - 2\Re\{a_1 e^{-j\hat{\omega}}\}} \end{aligned}$$

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η παραπάνω σχέση, ισχύει ανεξάρτητα από το αν οι συντελεστές του φίλτρου είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί. Αν οι συντελεστές ήταν πραγματικοί, θα μπορούσαμε να απλοποιήσουμε περισσότερο την παραπάνω σχέση

$$|H(e^{j\hat{\omega}})|^2 = \frac{|b_0|^2 + |b_1|^2 + 2b_0 b_1 \cos(\hat{\omega})}{1 + |a_1|^2 - 2a_1 \cos(\hat{\omega})}$$

Η σχέση στην οποία καταλήξαμε δεν είναι και τόσο κατάλληλη για να τη χρησιμοποιήσουμε και να κάνουμε τη γραφική παράσταση της $|H(e^{j\hat{\omega}})|$. Ωστόσο, μπορούμε να γράψουμε ένα πρόγραμμα στο οποίο μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό και τη σχεδίαση της απόκρισης συχνότητας. Η απόκριση φάσης είναι ακόμη πιο πολύπλοκη. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τα τόξα εφαπτομένης για να εξάγουμε τις γωνίες του αριθμητή και του παρονομαστή και στη συνέχεια να τις αφαιρέσουμε. Όταν οι συντελεστές του φίλτρου είναι πραγματικοί, η απόκριση φάσης είναι:

$$\phi(\hat{\omega}) = \tan^{-1} \left(\frac{-b_1 \sin \hat{\omega}}{b_0 + b_1 \cos \hat{\omega}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{a_1 \sin \hat{\omega}}{1 - a_1 \cos \hat{\omega}} \right)$$

Ο τύπος που καταλήξαμε εξακολουθεί να είναι πολύπλοκος και δεν μπορεί να μας φωτίσει ιδιαίτερα. Σε επόμενη ενότητα, θα δούμε πώς θα χρησιμοποιήσουμε τους πόλους και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς σε συνδυασμό με τη Σχέση (8.32) για να κάνουμε μια προσεγγιστική γραφική παράσταση της απόκρισης συχνότητας αποφεύγοντας τις πολύπλοκες σχέσεις.

8-5.1 Απόκριση Συχνότητας χρησιμοποιώντας MATLAB

Ο Υπολογισμός και η σχεδίαση της απόκρισης συχνότητας μπορούν να γίνουν εύκολα με τη βοήθεια πολλών λογισμικών πακέτων επεξεργασίας σημάτων. Για παράδειγμα στο Matlab, διατίθεται η συνάρτηση `freqz` για το σκοπό αυτό². Η απόκριση συχνότητας υπολογίζεται σε ένα σύνολο ομοιόμορφα κατανεμημένων συχνοτήτων και στη συνέχεια σχεδιάζονται το μέτρο και η φάση. Στο Matlab, οι συναρτήσεις `abs` και `angle` υπολογίζουν το μέτρο και τη φάση κάθε στοιχείου ενός μιγαδικού διανύσματος.

Παράδειγμα 8-9: Γραφική Παράσταση της $H(e^{j\omega})$ στο MATLAB

Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα

$$y[n] = 0.8y[n-1] + 2x[n] + 2x[n-1]$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τους συντελεστές του φίλτρου στο Matlab, μετακινούμε όλους τους όρους που αναφέρονται στην έξοδο $y[n]$ στο ένα μέλος της εξίσωσης και τους όρους που αναφέρονται στην είσοδο $x[n]$ στο άλλο μέλος

$$y[n] - 0.8y[n-1] = 2x[n] + 2x[n-1]$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τα διανύσματα `aa` και `bb`

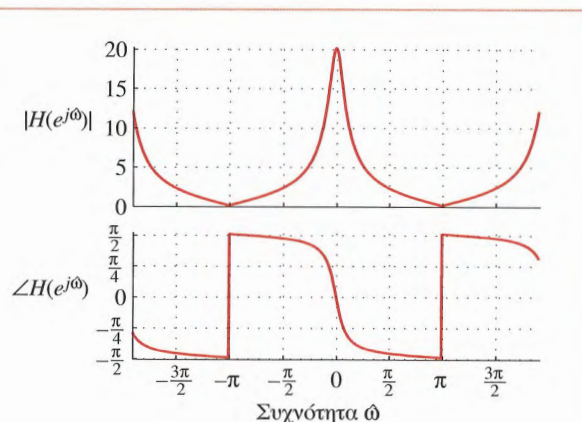
$$aa = [1, -0.8] \quad bb = [2, 2]$$

Έτσι, τα διανύσματα `aa` και `bb` είναι στη μορφή που απαιτεί η συνάρτηση `filter` της Matlab. Κλήση της συνάρτησης `freqz` θα δημιουργήσει ένα διάνυσμα 401-στοιχείων `HH` που θα περιέχει τις τιμές της απόκρισης συχνότητας στις συχνότητες που ορίζονται από το τρίτο όρισμα, `[-6:0.03:6]`.

$$HH = \text{freqz}(bb, aa, [-6:0.03:6]);$$

²Η Συνάρτηση `freqz` περιέχεται στο Signal Processing Toolbox του Matlab. Μια παρόμοια συνάρτηση που ονομάζεται `freakz`, υπάρχει στο CD-ROM που συνοδεύει αυτό το βιβλίο και περιέχεται στο SP-First Toolbox.

Οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης που προκύπτουν φαίνονται στο Σχήμα 8-9. Οι γραφικές παραστάσεις γίνονται για το διάστημα συχνοτήτων $-6 \leq \hat{\omega} \leq +6$ και είναι φανερή η 2π -περιοδικότητα της $H(e^{j\hat{\omega}})$. ■



Σχήμα 8-9: Απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) ενός πρώτης τάξης φίλτρου ανατροφοδότησης. Ο πόλος είναι στο $z = 0.8$ και ο αριθμητής έχει ένα μηδενικό στο $z = -1$.

Στο παράδειγμα αυτό, μπορούμε να αναζητήσουμε σχέση ανάμεσα στους πόλους, στα μηδενικά και στη μορφή της απόκρισης συχνότητας. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{2 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

η οποία έχει ένα πόλο στο σημείο $z = 0.8$ και ένα μηδενικό στο $z = -1$. Το σημείο $z = -1$ ταυτίζεται με το $\hat{\omega} = \pi$ διότι $z = -1 = e^{j\hat{\omega}}|_{\hat{\omega}=\pi}$. Επομένως, η $H(e^{j\hat{\omega}})$ μηδενίζεται στη συχνότητα $\hat{\omega} = \pi$, αφού η $H(z)$ είναι μηδέν στο $z = -1$. Με παρόμοιο τρόπο, ο πόλος στο $z = 0.8$ επιδρά στη μορφή της απόκρισης συχνότητας

στη συχνότητα $\hat{\omega} = 0$. Εξαιτίας του ότι η $H(z)$ αυξάνεται πάρα πολύ στο $z = 0.8$, στα γειτονικά σημεία πάνω στο μοναδιαίο κύκλο πρέπει να παίρνει μεγάλες τιμές. Το πιο κοντινό σημείο στο μοναδιαίο κύκλο είναι το $z = e^{j0} = 1$. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκριση συχνότητας άμεσα από τον τύπο και παίρνουμε

$$\begin{aligned} H(e^{j\hat{\omega}}) \Big|_{\hat{\omega}=0} &= H(z) \Big|_{z=1} = \frac{2 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} \Big|_{z=1} \\ &= \frac{2 + 2}{1 - 0.8} = \frac{4}{0.2} = 20 \end{aligned}$$

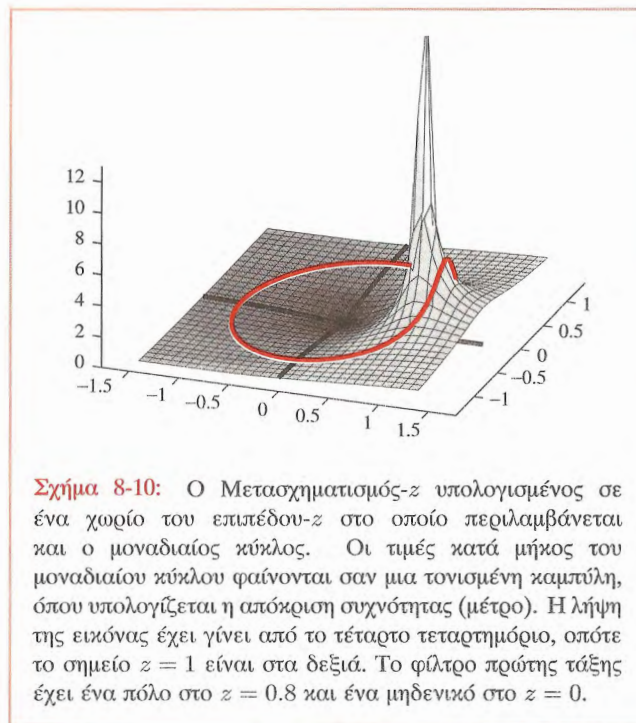
8-5.2 Γραφική Παράσταση Τριών Διαστάσεων της Συνάρτησης Μεταφοράς

Η σχέση ανάμεσα στην $H(e^{j\hat{\omega}})$ και τις θέσεις των πόλων και μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ μπορεί να διευκρινιστεί δημιουργώντας μια τρισδιάστατη γραφική παράσταση της $H(z)$ και στη συνέχεια απομονώνοντας την απόκριση συχνότητας. Η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}})$ εξάγεται επιλέγοντας τις τιμές της $H(z)$ κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου (π.χ. καθώς το $\hat{\omega}$ διατρέχει το διάστημα από $-\pi$ έως $+\pi$, η εξίσωση $z = e^{j\hat{\omega}}$ ορίζει τον μοναδιαίο κύκλο).

Στην ενότητα αυτή, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}}$$

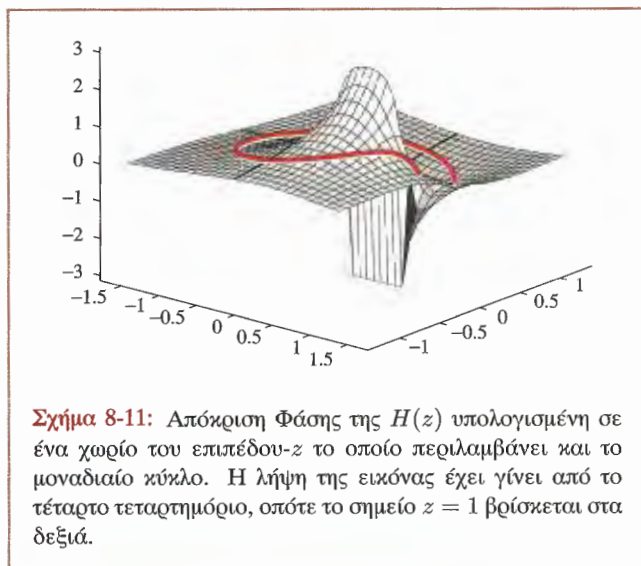
για να καταδείξουμε τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη συνάρτηση μεταφοράς και την απόκριση συχνότητας. Στα Σχήματα 8-10 και 8-11 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των αποκρίσεων μέτρου και φάσης της $H(z)$ στο χωρίο $[-1.4, 1.4] \times [-1.4, 1.4]$ του επιπέδου- z . Στη γραφική παράσταση της απόκρισης του μέτρου στο Σχήμα 8-10, παρατηρούμε ότι ο πόλος (στο $z = 0.8$) δημιουργεί μια μεγάλη κορυφή η οποία αναγκάζει όλα τα γειτονικά σημεία να έχουν πολύ μεγάλες τιμές. Ακριβώς στη θέση του πόλου, η $H(z) \rightarrow \infty$, αλλά το πλέγμα των σημείων στο Σχήμα 8-10 δεν περιέχει το σημείο ($z = 0.8$),



Σχήμα 8-10: Ο Μετασχηματισμός- z υπολογισμένος σε ένα χωρίο του επιπέδου- z στο οποίο περιλαμβάνεται και ο μοναδιαίος κύκλος. Οι τιμές κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου φαίνονται σαν μια τονισμένη καμπύλη, όπου υπολογίζεται η απόκριση συχνότητας (μέτρο). Η λήψη της εικόνας έχει γίνει από το τέταρτο τεταρτημόριο, οπότε το σημείο $z = 1$ είναι στα δεξιά. Το φίλτρο πρώτης τάξης έχει ένα πόλο στο $z = 0.8$ και ένα μηδενικό στο $z = 0$.

και έτσι η γραφική παράσταση διατηρείται σε πεπερα-σμένα όρια. Από την απόκριση φάσης του Σχήματος, 8-11 φαίνεται επίσης η γρήγορη μετάβαση στη συχνότητα $\hat{\omega} = 0$ η οποία αντιστοιχεί στο σημείο $z = 1$ (το πιο κοντινό σημείο στον πόλο $z = 0.8$ πάνω στο μοναδιαίο κύκλο).

Η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\hat{\omega}})$ εξάγεται επιλέγοντας τις τιμές του μετασχηματισμού- z κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου στα Σχήματα 8-10 και 8-11. Γραφικές παραστάσεις της $H(e^{j\hat{\omega}})$ συναρτήσει της συχνότητας $\hat{\omega}$ φαίνονται στο Σχήμα 8-12. Η μορφή της απόκρισης συχνότητας μπορεί να ερμηνευθεί σε σχέση με τη θέση των πόλων του συστήματος, παρατηρώντας ότι στο Σχήμα 8-10 ο πόλος στο σημείο $z = 0.8$ ωθεί ψηλά την $H(e^{j\hat{\omega}})$ στην περιοχή γύρω από τη συχνότητα $\hat{\omega} = 0$, η οποία αντιστοιχεί στο σημείο $z = 1$.



Επίδειξη: Από το z στη Συχνότητα

Οι τιμές της απόκρισης συχνότητας πάνω στο μοναδιαίο κύκλο ακολουθούν τις διακυμάνσεις της $H(z)$ καθώς το ω διατρέχει το διάστημα από $-\pi$ έως $+\pi$.

8-6 Τα Τρία Πεδία

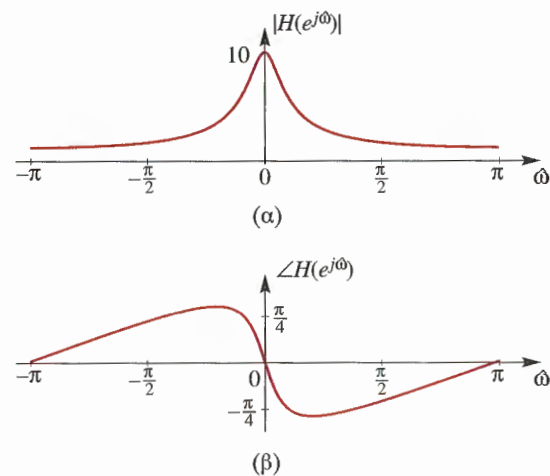
Προκειμένου να διευκρινίσουμε τη χρησιμότητα του εργαλείου ανάλυσης που αναπτύξαμε, θεωρούμε τη γενική περίπτωση δεύτερης τάξης.



Επίδειξη: IIR - Τρία Πεδία

Τα τρία πεδία: n , z και ω φαίνονται στο Σχήμα. 8-13. Η εξίσωση ορισμού του IIR ψηφιακού φίλτρου είναι η εξίσωση διαφορών ανάδρασης, η οποία, στην περίπτωση των φίλτρων δεύτερης τάξης, είναι:

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$



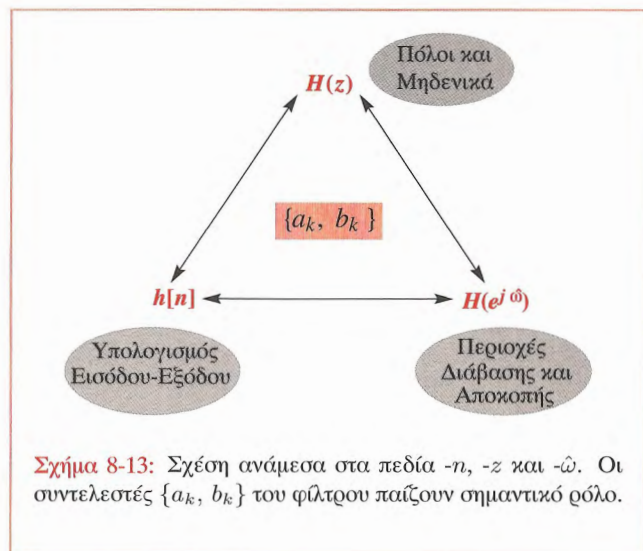
Η εξίσωση αυτή αποτελεί ένα αναδρομικό αλγόριθμο κατάλληλο για τον υπολογισμό του σήματος εξόδου από το σήμα εισόδου και προηγούμενες τιμές του σήματος εξόδου, χρησιμοποιώντας τους συντελεστές $\{a_1, a_2, b_0, b_1, b_2\}$ του φίλτρου. Επίσης καθορίζει την κρουστική απόκριση $h[n]$.

Ακολουθώντας τις διαδικασίες που περιγράφηκαν για την περίπτωση των φίλτρων πρώτης τάξης, μπορούμε επίσης να ορίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς άμεσα από τους συντελεστές του φίλτρου ως ακολούθως

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

καθώς και να εξάγουμε την απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_2 e^{-j2\omega}}{1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-j2\omega}}$$



Εφόσον η συνάρτηση μεταφοράς είναι ένας λόγος πολυωνύμων, οι πόλοι και τα μηδενικά της $H(z)$ συνθέτουν ένα μικρό σύνολο παραμέτρων που ορίζει πλήρως το φίλτρο.

Τέλος, οι μορφές των ζωνών διάβασης και αποκοπής της απόκρισης συχνότητας εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τη θέση των πόλων και των μηδενικών σε σχέση με το μοναδιαίο κύκλο, ενώ τα χαρακτηριστικά της κρουστικής απόκρισης μπορούν να συσχετιστούν με τους πόλους. Για να γενικεύσουμε αυτό το τελευταίο σημείο για κάθε περίπτωση, χρειάζεται να αναπτύξουμε ένα ακόμα εργαλείο - μια τεχνική με την οποία θα εξάγουμε την $h[n]$ άμεσα από την $H(z)$. Αυτή η διαδικασία, η οποία εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε μετασχηματισμό- z , καλείται **αντίστροφος μετασχηματισμός- z** . Ο αντίστροφος μετασχηματισμός- z αναπτύσσεται στην επόμενη ενότητα.

8-7 Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός- z και κάποιες Εφαρμογές

Είδαμε τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται τα τρία πεδία για ένα IIR σύστημα πρώτης τάξης. Πολλές από τις αρχές

που αναφέραμε για τα συστήματα πρώτης τάξης μπορούν με άμεσο τρόπο να επεκταθούν και για υψηλότερης τάξης συστήματα. Ωστόσο, η εύρεση της κρουστικής απόκρισης από τη συνάρτηση μεταφοράς δεν είναι μια προφανής γενίκευση των όσων κάναμε στην περίπτωση των συστημάτων πρώτης τάξης. Χρειάζεται να αναπτύξουμε μια διαδικασία για την αντιστροφή του μετασχηματισμού- z , η οποία να μπορεί να εφαρμοστεί σε συστήματα με περισσότερους του ενός πόλους. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **αντίστροφος μετασχηματισμός- z** . Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε πώς μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο ενός γενικού ρητού μετασχηματισμού- z . Θα διευκρινίσουμε τη διαδικασία με κάποια παραδείγματα. Με τις τεχνικές που θα αναπτύξουμε, θα μπορούμε να προσδιορίσουμε την κρουστική απόκριση συστημάτων δεύτερης ή υψηλότερης τάξης.

8-7.1 Επανεξέταση της Βηματικής Απόκρισης ενός Συστήματος Πρώτης Τάξης

Στην Ενότητα 8-2.4 υπολογίσαμε τη βηματική απόκριση ενός συστήματος πρώτης τάξης τόσο με επαναληπτικό τρόπο όσο και με συνέλιξη. Τώρα θα αποδείξουμε πώς ο μετασχηματισμός- z μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ίδιο σκοπό. Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα με την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

Υπενθυμίζεται ότι ο μετασχηματισμός- z της εξόδου του συστήματος είναι $Y(z) = H(z)X(z)$ και έτσι μια προσέγγιση που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της εξόδου για δοθείσα είσοδο $x[n]$, είναι η ακόλουθη:

1. Εύρεση του μετασχηματισμού- z $X(z)$ του σήματος εισόδου $x[n]$.
2. Πολλαπλασιασμός του $X(z)$ με την $H(z)$ ώστε να πάρουμε τον $Y(z)$.

3. Εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού- z του $Y(z)$ για να βρούμε την $y[n]$.

Είναι φανερό ότι αυτή η διαδικασία θα αποδώσει τα επιθυμητά αποτελέσματα αποφεύγοντας τόσο την αναδρομή όσο και τη συνέλιξη, αν είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την $X(z)$ και εφόσον μπορούμε να υπολογίσουμε τον αναγκαίο αντίστροφο μετασχηματισμό. Το ενδιαφέρον μας στην ενότητα αυτή, θα εστιαστεί στην παραγωγή μιας γενικής διαδικασίας για το Βήμα (3). Στην περίπτωση της βηματικής απόκρισης, παρατηρούμε

Πίνακας 8-1: Περίληψη των σημαντικότερων ιδιοτήτων και ζευγών μετασχηματισμών- z .

Σύντομος Πίνακας Μετασχηματισμών- z		
$x[n]$	\xleftrightarrow{z}	$X(z)$
1. $ax_1[n] + bx_2[n]$	\xleftrightarrow{z}	$aX_1(z) + bX_2(z)$
2. $x[n - n_0]$	\xleftrightarrow{z}	$z^{-n_0}X(z)$
3. $y[n] = x[n] * h[n]$	\xleftrightarrow{z}	$Y(z) = H(z)X(z)$
4. $\delta[n]$	\xleftrightarrow{z}	1
5. $\delta[n - n_0]$	\xleftrightarrow{z}	z^{-n_0}
6. $a^n u[n]$	\xleftrightarrow{z}	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$

ότι η είσοδος $x[n] = u[n]$ είναι μια ειδική περίπτωση της γενικότερης ακολουθίας $a^n u[n]$, δηλαδή $a = 1$. Επομένως από την (8.27) συνεπάγεται ότι ο μετασχηματισμός- z της $x[n] = u[n]$ είναι:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

και επομένως η $Y(z)$ είναι

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{(1 - a_1 z^{-1})(1 - z^{-1})} \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - (1 + a_1)z^{-1} + a_1 z^{-2}} \end{aligned} \quad (8.34)$$

Τώρα πρέπει να επιστρέψουμε στο πεδίο- n με αντίστροφο μετασχηματισμό. Μια τυπική προσέγγιση του προβλήματος αυτού είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα πίνακα με ζεύγη μετασχηματισμών- z και απλά να αναζητούμε εκεί την απάντηση. Προηγούμενες συζητήσεις στο Κεφάλαιο 7 αλλά και νεώτερα στο κεφάλαιο αυτό, έχουν θεμελιώσει τη βάση για μια απλή έκδοση ενός τέτοιου πίνακα. Μια σύνοψη των μέχρι τώρα γνώσεών μας για τον μετασχηματισμό- z δίνεται στον Πίνακα 8-1. Αν και θα μπορούσαμε να δημιουργήσουμε ένα πιο πλούσιο πίνακα, τα αποτελέσματα που συγκεντρώσαμε στον Πίνακα 8-1 είναι υπεραρκετικά για τους σκοπούς του παρόντος βιβλίου.

Ας επανέλθουμε τώρα στο πρόβλημα της εύρεσης της ακολουθίας $y[n]$ δοθείσης της μιγαδικής συνάρτησης $Y(z)$ από τη Σχέση (8.34). Η τεχνική που θα χρησιμοποιήσουμε βασίζεται στη διάσπαση της $Y(z)$ σε μερικά κλάσματα³. Η τεχνική αυτή βασίζεται στην παρατήρηση ότι η ρητή συνάρτηση $Y(z)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα απλούστερων ρητών συναρτήσεων, δηλαδή

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{(1 - a_1 z^{-1})(1 - z^{-1})} \\ &= \frac{A}{1 - a_1 z^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}} \end{aligned} \quad (8.35)$$

Κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα που βρίσκονται στο δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης, είναι εφικτό να βρεθούν A και B τέτοια ώστε ο αριθμητής της ρητής συνάρτησης που προκύπτει να είναι ίσος με $b_0 + b_1 z^{-1}$. Εξισώνοντας

³Η *διάσπαση σε μερικά κλάσματα* είναι μια αλγεβρική αποσύνθεση που συνήθως εμφανίζεται στη μιγαδική ανάλυση για τον υπολογισμό ειδικού τύπου ολοκληρωμάτων.

τους δυο αριθμητές προκύπτουν δύο εξισώσεις για τους δυο αγνώστους A και B . Ωστόσο υπάρχει γρηγορότερος τρόπος. Μια συστηματική διαδικασία για την εύρεση των επιθυμητών A και B βασίζεται στην παρατήρηση ότι, για το παράδειγμά μας,

$$Y(z)(1 - a_1 z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{(1 - z^{-1})} = A + \frac{B(1 - a_1 z^{-1})}{1 - z^{-1}}$$

Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή στο $z = a_1$ ώστε να απομονώσουμε το A . Δηλαδή,

$$\begin{aligned} Y(z)(1 - a_1 z^{-1}) \Big|_{z=a_1} &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{(1 - z^{-1})} \Big|_{z=a_1} \\ &= A + \frac{B(1 - a_1 z^{-1})}{1 - z^{-1}} \Big|_{z=a_1} = A \end{aligned}$$

και επομένως,

$$A = Y(z)(1 - a_1 z^{-1}) \Big|_{z=a_1} = \frac{b_0 + b_1 a_1^{-1}}{1 - a_1^{-1}}$$

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία, μπορούμε να βρούμε το B από τη σχέση

$$B = Y(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z=1} = \frac{b_0 + b_1}{1 - a_1}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την ιδιότητα της υπέρθεσης του μετασχηματισμού- z (1-η καταχώρηση στον Πίνακα 8-1), και το εκθετικό ζεύγος μετασχηματισμών- z (6-η καταχώρηση στον Πίνακα 8-1), καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$y[n] = \left(\frac{b_0 + b_1 a_1^{-1}}{1 - a_1^{-1}} \right) a_1^n u[n] + \left(\frac{b_0 + b_1}{1 - a_1} \right) u[n]$$

η οποία, μετά από μερικές πράξεις γίνεται

$$y[n] = \left(\frac{(b_0 + b_1) - (b_0 a_1 + b_1) a_1^n}{1 - a_1} \right) u[n] \quad (8.36)$$

Αντικαθιστώντας $b_1 = 0$ στην (8.36), παίρνουμε

$$y[n] = b_0 \left(\frac{1 - a_1^{n+1}}{1 - a_1} \right) u[n]$$

που ταυτίζεται με το αποτέλεσμα που βρήκαμε στην Ενότητα 8-2.4 τόσο από την αναδρομική εφαρμογή της εξίσωσης διαφορών (8.16) όσο και από το συνελκτικό άθροισμα της Σχέσης (8.18).

Με το παράδειγμα αυτό, έχουμε εδραιώσει το πλαίσιο χρήσης των βασικών ιδιοτήτων του μετασχηματισμού- z μαζί με βασικά ζεύγη μετασχηματισμών για να υπολογίσουμε τον αναγκαίο αντίστροφο μετασχηματισμό- z οποιασδήποτε ρητής συνάρτησης. Στην επόμενη παράγραφο, ανακεφαλαιώνουμε την παραπάνω διαδικασία.

8-7.2 Υπολογισμός του Αντίστροφου Μετασχηματισμού- z

Έστω $X(z)$ ένας μετασχηματισμός- z με τάξη παρονομαστή και αριθμητή N και M αντίστοιχα. Υποθέτοντας ότι $M < N$, μπορούμε να βρούμε την ακολουθία $x[n]$ που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό $X(z)$ ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία:

Διαδικασία Υπολογισμού του Αντίστροφου Μετασχηματισμού- z ($M < N$)

1. Παραγοντοποιήστε το πολυώνυμο του παρονομαστή της $H(z)$ και εκφράστε τους παράγοντες με τους πόλους στη μορφή $(1 - p_k z^{-1})$ για $k = 1, 2, \dots, N$.
2. Διασπάστε την $H(z)$ σε μερικά κλάσματα και εκφράστε την ως άθροισμα όρων της μορφής

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

$$\text{όπου } A_k = H(z)(1 - p_k z^{-1}) \Big|_{z=p_k}$$

3. Διατυπώστε την απάντησή σας ως ακολούθως

$$h[n] = \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n u[n]$$

Η παραπάνω διαδικασία οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα πάντα, εφόσον οι πόλοι p_k , έχουν πολλαπλότητα 1. Πόλοι πολλαπλότητας μεγαλύτερης της μονάδας περιπλέκουν τη διαδικασία αλλά και αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί με συστηματικό τρόπο. Ωστόσο εμείς θα περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση μη επαναλαμβανόμενων πόλων. Επιπλέον αυτή η διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί για την αντιστροφή οποιουδήποτε ρητού μετασχηματισμού- z και όχι μόνο για τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος. Η χρησιμότητα αυτής της τεχνικής θα αναδειχθεί με τα δύο παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 8-10: Αντίστροφος Μετασχηματισμός- z

Έστω ο μετασχηματισμός

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1 - 2.1z^{-1}}{1 - 0.3z^{-1} - 0.4z^{-2}} \\ &= \frac{1 - 2.1z^{-1}}{(1 + 0.5z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})} \end{aligned}$$

Θέλουμε να γράψουμε την $X(z)$ στην μορφή

$$X(z) = \frac{A}{1 + 0.5z^{-1}} + \frac{B}{1 - 0.8z^{-1}}$$

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία της διάσπασης σε μερικά κλάσματα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} A &= X(z)(1 + 0.5z^{-1}) \Big|_{z=-0.5} \\ &= \frac{1 - 2.1z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} \Big|_{z=-0.5} = \frac{1 + 4.2}{1 + 1.6} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{και } B &= X(z)(1 - 0.8z^{-1}) \Big|_{z=0.8} \\ &= \frac{1 - 2.1z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} \Big|_{z=0.8} = \frac{1 - 2.1/0.8}{1 + 0.5/0.8} = -1 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$X(z) = \frac{2}{1 + 0.5z^{-1}} - \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}} \quad (8.37)$$

και

$$x[n] = 2(-0.5)^n u[n] - (0.8)^n u[n]$$

Παρατηρήστε ότι οι πόλοι στα σημεία $z = p_1 = -0.5$ και $z = p_2 = 0.8$ δημιουργούν, στην $x[n]$, όρους της μορφής p_k^n . ■

Στο Παράδειγμα 8-10, ο βαθμός του αριθμητή είναι $M = 1$ και ο βαθμός του παρονομαστή είναι $N = 2$. Αυτό είναι σημαντικό διότι η διάσπαση σε απλά κλάσματα μπορεί να γίνει σε ρητές συναρτήσεις για τις οποίες $M < N$. Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει το λόγο που συμβαίνει αυτό και παρουσιάζει μια μέθοδο για την αντιμετώπιση αυτής της δυσκολίας.

Παράδειγμα 8-11: Πολυωνυμική Διαίρεση

Έστω ότι η $Y(z)$ είναι

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{2 - 2.4z^{-1} - 0.4z^{-2}}{1 - 0.3z^{-1} - 0.4z^{-2}} \\ &= \frac{2 - 2.4z^{-1} - 0.4z^{-2}}{(1 + 0.5z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})} \end{aligned}$$

Τώρα πρέπει να προσθέσουμε μία σταθερά στους υπόλοιπους όρους της διάσπασης, διαφορετικά, δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε τον αναγκαίο για τη διάσπαση όρο $-0.4z^{-2}$ στον αριθμητή. Αυτό σημαίνει, ότι πρέπει να θεωρήσουμε την ακόλουθη μορφή για την $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{A}{1 + 0.5z^{-1}} + \frac{B}{1 - 0.8z^{-1}} + C$$

Πώς μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε τη τιμή της σταθεράς C ; Ένας τρόπος είναι να διαιρέσουμε τα πολυώνυμα του αριθμητή και παρονομαστή μέχρι να πάρουμε ένα υπόλοιπο του οποίου η τάξη να είναι μικρότερη από αυτή του πολυωνύμου του παρονομαστή.

Στην περίπτωση αυτή, η πολωνυμική διαίρεση προχωρά ως ακολούθως:

$$-0.4z^{-2} - 0.3z^{-1} + 1 \left| \begin{array}{l} 1 \\ -0.4z^{-2} - 2.4z^{-1} + 2 \\ -0.4z^{-2} - 0.3z^{-1} + 1 \\ \hline -2.1z^{-1} + 1 \end{array} \right.$$

Έτσι, αν τοποθετήσουμε το υπόλοιπο $(1 - 2.1z^{-1})$ πάνω από τον παρανομαστή (σε παραγοντοποιημένη μορφή), μπορούμε να γράψουμε την $Y(z)$ ως το άθροισμα μίας ρητής συνάρτησης και μίας σταθεράς, δηλαδή,

$$Y(z) = \frac{1 - 2.1z^{-1}}{(1 + 0.5z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})} + 1$$

Το επόμενο βήμα είναι να εφαρμόσουμε τη διάσπαση σε μερικά κλάσματα στο μέρος της $Y(z)$ που αντιστοιχεί στη ρητή συνάρτηση. Επειδή το ρητό μέρος τυχαίνει να είναι το ίδιο με αυτό της $X(z)$ στη Σχέση (8.37) του Παραδείγματος 8-10, το αποτέλεσμα της διάσπασης θα είναι το ίδιο, οπότε μπορούμε να γράψουμε την $Y(z)$ ως ακολούθως

$$Y(z) = \frac{2}{1 + 0.5z^{-1}} - \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}} + 1$$

Επομένως από τον Πίνακα 8-1,

$$y[n] = 2(-0.5)^n u[n] - (0.8)^n u[n] + \delta[n]$$

Παρατηρήστε ότι η ακολουθία στο πεδίο του χρόνου περιέχει και πάλι όρους της μορφής p_k^n . Ο σταθερός όρος στη συνάρτηση μεταφοράς δημιουργεί μια κρουστική ακολουθία, η οποία είναι διάφορη του μηδενός μόνο τη χρονική στιγμή $n = 0$ (καταχώρηση 4 στον Πίνακα 8-1) ■

8-8 Απόκριση Μόνιμης Κατάστασης και Ευστάθεια

Ένα ευσταθές σύστημα είναι ένα σύστημα το οποίο δεν “εκρήγνυται.” Η διαισθητική αυτή προσέγγιση μπορεί να τυποποιηθεί λέγοντας ότι η έξοδος ενός ευσταθούς

συστήματος μπορεί πάντα να φραχθεί ($|y[n]| < M_y$) όταν η είσοδος είναι φραγμένη ($|x[n]| < M_x$)⁴.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο αντιστροφής του μετασχηματισμού- z που αναπτύχθηκε στην Ενότητα 8-7 για να αναδείξουμε ένα σημαντικό σημείο που αφορά την ευστάθεια, την απόκριση συχνότητας και την απόκριση μόνιμης κατάστασης σε ημιτονοειδή διέγερση. Για να διευκρινίσουμε αυτό το σημείο ας θεωρήσουμε ένα ΓΧΑ σύστημα οριζόμενο από τη σχέση

$$y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 x[n]$$

Από τη μέχρι τώρα συζήτησή μας, μπορούμε χωρίς περαιτέρω ανάλυση να πούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}}$$

και ότι η κρουστική απόκριση είναι

$$h[n] = b_0 a_1^n u[n]$$

Μπορούμε επίσης να πούμε ότι η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{b_0}{1 - a_1 e^{-j\omega}}$$

αλλά αυτό ισχύει μόνο αν το σύστημα είναι ευσταθές ($|a_1| < 1$). Στόχος μας στην ενότητα αυτή είναι να κάνουμε πιο ξεκάθαρη την έννοια της ευστάθειας και να αναδείξουμε την επίδρασή της στην απόκριση του συστήματος σε ημιτονοειδή διέγερση που εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$.

Ας θυμηθούμε από την Ενότητα 8-5 και τις Σχέσεις (8.31), (8.33), ότι η έξοδος του συστήματος για μια μιγαδική εκθετική είσοδο είναι

$$y[n] = H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n} = \left(\frac{b_0}{1 - a_1 e^{-j\omega_0}} \right) e^{j\omega_0 n}$$

⁴Αυτός ο ορισμός για την ευστάθεια ονομάζεται ευστάθεια φραγμένης-εισόδου, φραγμένης-εξόδου. Στη γενική περίπτωση οι πεπερασμένες σταθερές M_y και M_x είναι διαφορετικές.

για $-\infty < n < \infty$. Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση που η μιγαδική εκθετική εισόδος εφαρμοστεί ξαφνικά; Τα εργαλεία που έχουμε αναπτύξει για το μετασχηματισμό- z λύνουν εύκολα και αυτό το πρόβλημα. Πραγματικά, ο μετασχηματισμός- z είναι καταλληλότερος για περιπτώσεις κατά τις οποίες οι ακολουθίες είναι είτε πεπερασμένης χρονικής διάρκειας είτε αιφνιδίως εφαρμοζόμενα μιγαδικά εκθετικά. Για τα αιφνιδίως εφαρμοζόμενα μιγαδικά εκθετικά σήματα με συχνότητα $\hat{\omega}_0$ έχουμε ότι:

$$x[n] = e^{j\hat{\omega}_0 n} u[n]$$

Από την καταχώρηση 6 του Πίνακα 8-1 βρίσκουμε ότι ο μετασχηματισμός- z είναι ο ακόλουθος

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\hat{\omega}_0} z^{-1}}$$

και ο μετασχηματισμός- z της εξόδου του ΓΧΑ συστήματος είναι

$$\begin{aligned} Y(z) = H(z)X(z) &= \left(\frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} \right) \left(\frac{1}{1 - e^{j\hat{\omega}_0} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{b_0}{(1 - a_1 z^{-1})(1 - e^{j\hat{\omega}_0} z^{-1})} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την τεχνική της διάσπασης σε μερικά κλάσματα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$Y(z) = \frac{\left(\frac{b_0 a_1}{a_1 - e^{j\hat{\omega}_0}} \right)}{1 - a_1 z^{-1}} + \frac{\left(\frac{b_0}{1 - a_1 e^{-j\hat{\omega}_0}} \right)}{1 - e^{j\hat{\omega}_0} z^{-1}}$$

Επομένως, η έξοδος που οφείλεται σε ένα αιφνιδίως εφαρμοζόμενο μιγαδικό εκθετικό σήμα είναι:

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\frac{b_0 a_1}{a_1 - e^{j\hat{\omega}_0}} \right) (a_1)^n u[n] \\ &+ \left(\frac{b_0}{1 - a_1 e^{-j\hat{\omega}_0}} \right) e^{j\hat{\omega}_0 n} u[n] \end{aligned} \quad (8.38)$$

Η εξίσωση (8.38) δείχνει ότι η έξοδος αποτελείται από δυο όρους. Ο ένας όρος είναι ανάλογος της εκθετικής

ακολουθίας a_1^n η οποία ορίζεται μονοσήμαντα από τον πόλο στο σημείο $z = a_1$ του μιγαδικού επιπέδου. Στην περίπτωση κατά την οποία το $|a_1| < 1$ ο όρος αυτός θα εξασθενήσει σταδιακά καθώς το n θα αυξάνεται, γεγονός από το οποίο χαρακτηρίζεται σαν **μεταβατική συνιστώσα**. Ο δεύτερος όρος είναι ανάλογος του μιγαδικού εκθετικού σήματος εισόδου και ο συντελεστής αναλογίας είναι η $H(e^{j\hat{\omega}_0})$, δηλαδή η απόκριση συχνότητας του συστήματος υπολογισμένη στη συχνότητα του αιφνιδίως εφαρμοζόμενου μιγαδικού ημιτονοειδούς. Αυτή η μιγαδική εκθετική συνιστώσα είναι η **ημιτονοειδής συνιστώσα μόνιμης κατάστασης** της εξόδου.

Τώρα διακρίνουμε πόσο κρίσιμη είναι η θέση του πόλου της $H(z)$ αν θέλουμε η έξοδος να φτάσει στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση. Είναι ξεκάθαρο ότι αν $|a_1| < 1$ τότε το σύστημα είναι ευσταθές και ο πόλος βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου. Χάρη σε αυτή τη συνθήκη η εκθετική σειρά a_1^n εξασθενεί και μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το όριο για μεγάλα n είναι

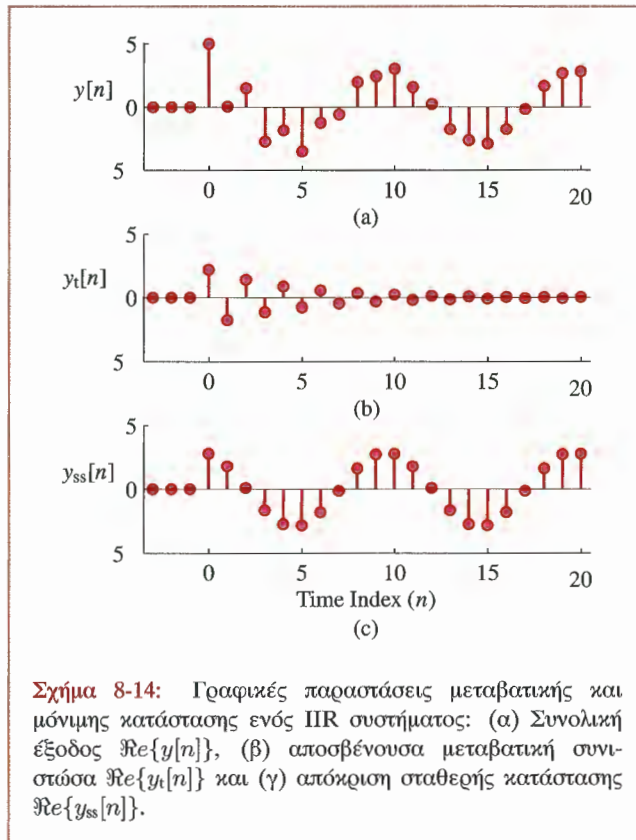
$$y[n] \rightarrow \left(\frac{b_0}{1 - a_1 e^{-j\hat{\omega}_0}} \right) e^{j\hat{\omega}_0 n} = H(e^{j\hat{\omega}_0}) e^{j\hat{\omega}_0 n}$$

Αν $|a_1| \geq 1$, ο όρος που είναι ανάλογος του a_1^n , θα αυξάνεται καθώς θα αυξάνει το n και σύντομα θα κυριαρχήσει στην έξοδο. Ακολουθεί ένα αριθμητικό παράδειγμα που επεξηγεί τα παραπάνω.

Παράδειγμα 8-12: Μεταβατική και Μόνιμη Κατάσταση

Αν $b_0 = 5$, $a_1 = -0.8$, και $\hat{\omega}_0 = 2\pi/10$, η μεταβατική συνιστώσα είναι

$$\begin{aligned} y_t[n] &= \left(\frac{-4}{-0.8 - e^{j0.2\pi}} \right) (-0.8)^n u[n] \\ &= 2.3351 e^{-j0.3502} (-0.8)^n u[n] \\ &= 2.1933 (-0.8)^n u[n] - j0.8012 (-0.8)^n u[n] \end{aligned}$$

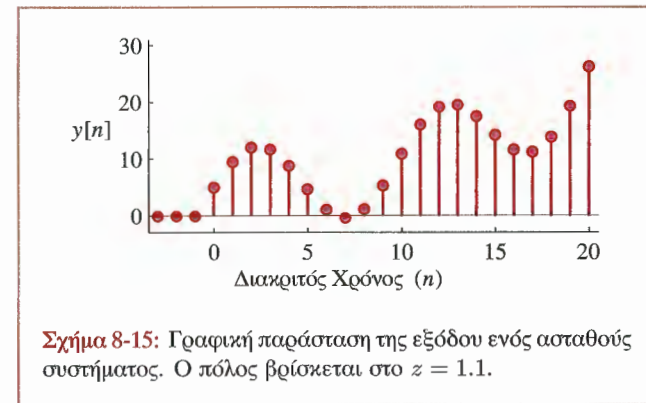


Ομοίως, η συνιστώσα της μόνιμης κατάστασης είναι:

$$\begin{aligned} y_{ss}[n] &= \left(\frac{5}{1 + 0.8e^{-j0.2\pi}} \right) e^{j0.2\pi n} u[n] \\ &= 2.9188 e^{j0.2781} e^{j0.2\pi n} u[n] \\ &= 2.9188 \cos(0.2\pi n + 0.2781) u[n] \\ &\quad + j 2.9188 \sin(0.2\pi n + 0.2781) u[n] \end{aligned}$$

Στο Σχήμα 8-14 φαίνονται: (α) το πραγματικό μέρος της συνολικής εξόδου, (β) η μεταβατική συνιστώσα και (γ) η συνιστώσα μόνιμης κατάστασης. Όλα τα σήματα αρχίζουν τη χρονική στιγμή $n = 0$ όταν δηλαδή εφαρμόζεται

στην είσοδο το μιγαδικό εκθετικό σήμα. Παρατηρήστε επίσης ότι η μεταβατική συνιστώσα ταλαντώνεται, αλλά εξασθενεί πράγμα που εξηγεί γιατί η συνιστώσα μόνιμης κατάστασης, σταδιακά, εξισώνεται με τη συνολική έξοδο. Στο Σχήμα 8-14, η $y[n]$ στο (α) και η $y_{ss}[n]$ στο (γ) φαίνεται ότι ταυτίζονται για τιμές του $n > 15$. ■



Αν ο πόλος ήταν στο σημείο $z = 1.1$, το σύστημα θα ήταν ασταθές και οι τιμές της εξόδου θα αυξάνονταν σε υπέρμετρο βαθμό όπως φαίνεται στο Σχήμα 8-15. Στην περίπτωση αυτή η έξοδος θα περιέχει τον όρο $(1.1)^n$ ο οποίος τελικά κυριαρχεί και αυξάνει χωρίς όριο.

Τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 8-12 μπορούν να γενικευθούν για συστήματα υψηλότερης τάξης, αν παρατηρήσουμε ότι η μόνη διαφορά που υπάρχει μεταξύ ενός συστήματος πρώτης τάξης και ενός συστήματος υψηλότερης τάξης είναι ότι η συνολική έξοδος θα περιλαμβάνει ένα εκθετικό παράγοντα για κάθε ένα πόλο του συστήματος καθώς επίσης και τον όρο $H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n} u[n]$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η έξοδος ενός N -ης τάξης IIR ($N > M$)

συστήματος σε ένα αφηνιδίως εφαρμοζόμενο εκθετικό σήμα $x[n] = e^{j\omega_0 n} u[n]$ θα είναι της μορφής

$$y[n] = \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n u[n] + H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n} u[n]$$

όπου $p_k, k = 1, \dots, N$ είναι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος. Επομένως, η ημιτονοειδής μόνιμη κατάσταση θα υπάρχει και θα κυριαρχεί στη συνολική απόκριση αν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται αυστηρά μέσα στο μοναδιαίο κύκλο. Αυτό καθιστά στην πράξη την έννοια της απόκρισης συχνότητας χρήσιμη όπου όλα τα σήματα έχουν ένα σημείο εκκίνησης κάποια πεπερασμένη χρονική στιγμή.

8-9 Φίλτρα Δεύτερης Τάξης

Τώρα θα στρέψουμε την προσοχή μας σε φίλτρα που διαθέτουν δυο συντελεστές ανάδρασης, a_1 και a_2 . Από τη γενική εξίσωση διαφορών (8.1) προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \quad (8.39)$$

Όπως και προηγουμένως, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε το φίλτρο δεύτερης τάξης (8.39) σε καθένα από τα τρία πεδία: πεδίο του χρόνου, πεδίο της συχνότητας και πεδίο- z . Ξεκινούμε με το μετασχηματισμό- z στο πεδίο- z γιατί έχουμε δείξει ότι οι πόλοι και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος μας παρέχουν βαθιά γνώση που αφορά τη συμπεριφορά της απόκρισης του συστήματος τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο της συχνότητας.



Επίδειξη: Διεπαφή PeZ

8-9.1 Ο μετασχηματισμός- z των Δεύτερης Τάξης Φίλτρων

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση που ακολουθήθηκε στην Ενότητα 8-3.1 για τα συστήματα πρώτης τάξης, μπορούμε

να εξάγουμε το μετασχηματισμό- z της εξίσωσης διαφορών δεύτερης τάξης της Σχέσης (8.39), αντικαθιστώντας κάθε στοιχείο καθυστέρησης με z^{-1} (δεύτερη καταχώρηση του Πίνακα 8-1) και αντικαθιστώντας επίσης τα σήματα εισόδου και εξόδου με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς- z :

$$Y(z) = a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z)$$

Στο πεδίο- z η σχέση εισόδου - εξόδου είναι η $Y(z) = H(z)X(z)$, και έτσι μπορούμε να λύσουμε ως προς $H(z)$ βρίσκοντας το πηλίκο $Y(z)/X(z)$. Για το φίλτρο δεύτερης τάξης έχουμε

$$\begin{aligned} Y(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) &= b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z) \\ (1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) Y(z) &= (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) X(z) \end{aligned}$$

το οποίο μπορεί να επιλυθεί ως προς $H(z)$, οπότε έχουμε

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \quad (8.40)$$

Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ενός IIR φίλτρου είναι ο λόγος δυο πολυωνύμων δευτέρου βαθμού, όπου το πολυώνυμο του αριθμητή εξαρτάται από τους συντελεστές τροφοδότησης προς τα εμπρός $\{b_k\}$ ενώ το πολυώνυμο του παρανομαστή εξαρτάται από τους συντελεστές της ανατροφοδότησης $\{a_\ell\}$. Είναι εφικτό λοιπόν να λυθούν προβλήματα όπως αυτό της Άσκησης 8.13, εντοπίζοντας τους συντελεστές του φίλτρου από την εξίσωση διαφορών και στη συνέχεια αντικαθιστώντας τους μετασχηματισμούς τους στην $H(z)$.



Άσκηση 8.13: Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του ακόλουθου IIR φίλτρου:

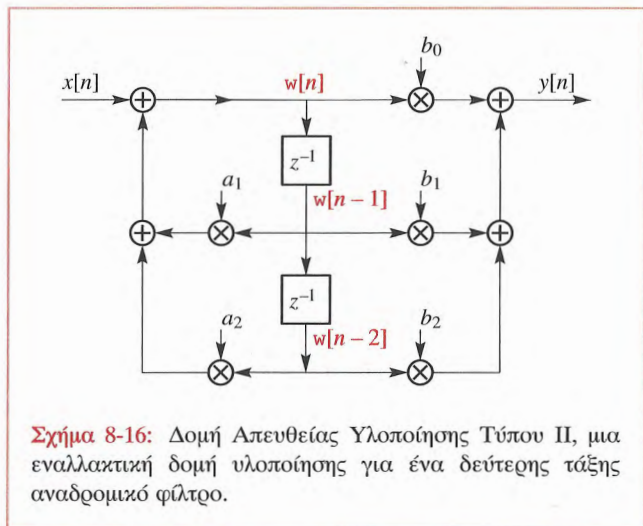
$$y[n] = 0.5y[n-1] + 0.3y[n-2] - x[n] + 3x[n-1] - 2x[n-2]$$

Αντιστρόφως, δοθείσης της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ είναι απλό να γράψουμε την εξίσωση διαφορών.

Άσκηση 8.14: Για τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.8z^{-1} + 0.64z^{-2}}$$

γράψτε την εξίσωση διαφορών που συνδέει την είσοδο $x[n]$ με την έξοδο $y[n]$.



Σχήμα 8-16: Δομή Απευθείας Υλοποίησης Τύπου II, μια εναλλακτική δομή υλοποίησης για ένα δεύτερης τάξης αναδρομικό φίλτρο.

Παράδειγμα 8-13: Δομή της $H(z)$

Η συσχέτιση ανάμεσα στην $H(z)$ και την εξίσωση διαφορών μπορεί να γενικευθεί για φίλτρα υψηλότερης

τάξης. Αν για παράδειγμα μας δοθεί ένα σύστημα τέταρτης τάξης

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-2}}{1 - 0.8z^{-1} + 0.6z^{-3} + 0.3z^{-4}}$$

η αντίστοιχη εξίσωση διαφορών είναι

$$y[n] = 0.8y[n-1] - 0.6y[n-3] - 0.3y[n-4] + x[n] - 3x[n-2]$$

Όπως προηγουμένως, παρατηρήστε την αλλαγή προσήμου στους συντελεστές, $\{a_k\}$. ■

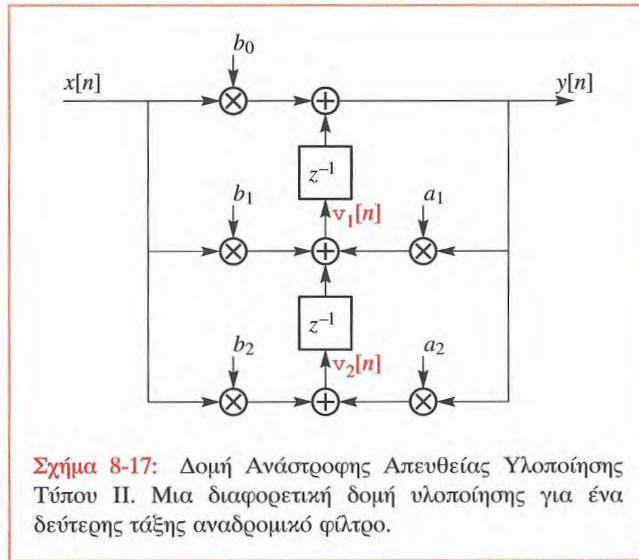
8-9.2 Δομές IIR Συστημάτων Δεύτερης Τάξης

Η εξίσωση διαφορών (8.39) μπορεί να ερμηνευθεί ως ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό της ακολουθίας εξόδου. Εναλλακτικές υπολογιστικές διατάξεις είναι εφικτές και ο μετασχηματισμός- z έχει τη δυνατότητα να παράγει εναλλακτικές δομές μέσω πολυωνυμικών χειρισμών. Δυο εναλλακτικές υπολογιστικές διατάξεις που υλοποιούν το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς την $H(z)$ της Σχέσης (8.40) παρουσιάζονται στα Σχήματα 8-16 και 8-17. Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε ότι το σχηματικό διάγραμμα του Σχήματος 8-16 έχει τη σωστή συνάρτηση μεταφοράς, πρέπει να γράψουμε τις εξισώσεις της δομής στους κόμβους άθροισης και στη συνέχεια να απαλείψουμε την(ις) εσωτερική(ές) μεταβλητή(ές). Για την περίπτωση της Δομής Απευθείας Υλοποίησης Τύπου II του Σχήματος 8-16, οι εξισώσεις στις εξόδους των κόμβων άθροισης δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} y[n] &= b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + b_2 w[n-2] \\ w[n] &= x[n] + a_1 w[n-1] + a_2 w[n-2] \end{aligned} \quad (8.41)$$

Είναι αδύνατο να απαλείψουμε τα $w[n]$ απ'αυτές τις δυο εξισώσεις, εκτός και αν εργαστούμε στο πεδίο- z . Οι αντίστοιχες, μετασχηματισμένες στο πεδίο- z , εξισώσεις είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned} Y(z) &= b_0 W(z) + b_1 z^{-1} W(z) + b_2 z^{-2} W(z) \\ W(z) &= X(z) + a_1 z^{-1} W(z) + a_2 z^{-2} W(z) \end{aligned}$$



οι οποίες μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})W(z)$$

$$X(z) = (1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2})W(z)$$

Εφόσον η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του συστήματος είναι ο λόγος της $Y(z)$ προς την $X(z)$, έχουμε

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

Έτσι αποδείξαμε ότι η δομή Απευθείας Υλοποίησης Τύπου II του Σχήματος 8-16, η οποία υλοποιεί το ζεύγος των εξισώσεων διαφορών (8.41), είναι ταυτόσημη με το σύστημα που ορίζεται από από την Εξίσωση διαφορών (8.39).

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να εργαστούμε για τη Δομή Ανάστροφης Απευθείας Υλοποίησης Τύπου II του Σχήματος 8-17. Οι εξισώσεις διαφορών που αναπαριστώνται στο σχηματικό διάγραμμα είναι οι

ακόλουθες

$$y[n] = b_0 x[n] + v_1[n - 1]$$

$$v_1[n] = b_1 x[n] + a_1 y[n] + v_2[n - 1] \quad (8.42)$$

$$v_2[n] = b_2 x[n] + a_2 y[n]$$

Εφαρμογή του μετασχηματισμού- z σε κάθε μια από τις τρεις εξισώσεις δίνει

$$Y(z) = b_0 X(z) + z^{-1} V_1(z)$$

$$V_1(z) = b_1 X(z) + a_1 Y(z) + z^{-1} V_2(z) \quad (8.43)$$

$$V_2(z) = b_2 X(z) + a_2 Y(z)$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις εξισώσεις μπορούμε να απαλείψουμε τα $V_1(z)$ και $V_2(z)$ όπως φαίνεται παρακάτω:

$$Y(z) = b_0 X(z) + z^{-1}(b_1 X(z) + a_1 Y(z) + z^{-1} V_2(z))$$

$$Y(z) = b_0 X(z) + z^{-1}(b_1 X(z) + a_1 Y(z)$$

$$+ z^{-1}(b_2 X(z) + a_2 Y(z)))$$

Μεταφέροντας όλους τους όρους που περιέχουν την $X(z)$ στο δεξί μέλος και όλους τους όρους που περιέχουν την $Y(z)$ στο αριστερό προκύπτει

$$(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2})Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})X(z)$$

οπότε διαιρώντας παίρνουμε

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

Με τον παραπάνω τρόπο δείξαμε ότι η Δομή της Ανάστροφης Απευθείας Υλοποίησης Τύπου II είναι ταυτόσημη με τη συνάρτηση μεταφοράς για την εξίσωση διαφορών της βασικής Δομής της Απευθείας Υλοποίησης Τύπου-I της Σχέσης (8.39). Τα δυο προηγούμενα παραδείγματα καταδεικνύουν την αποτελεσματικότητα, του μετασχηματισμού- z στο χειρισμό πολυωνύμων που αντιστοιχούν σε διαφορετικές δομές.

Θεωρητικά, ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς που δίνεται από τη Σχέση (8.40), μπορεί να υλοποιηθεί επαναλαμβάνοντας οποιαδήποτε από τις Εξισώσεις (8.39), (8.41), ή (8.42). Για παράδειγμα, η συνάρτηση *filter* του Matlab χρησιμοποιεί τη δομή Ανάστροφης Απευθείας Υλοποίησης Τύπου II. Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η ύπαρξη διαφορετικών σχηματικών διαγραμμάτων οφείλεται στο γεγονός ότι η σειρά των υπολογισμών που ορίζονται από τις Εξισώσεις (8.39), (8.41) και (8.42) είναι διαφορετική. Σε μια πραγματική υλοποίηση οι διαφορετικές δομές θα συμπεριφέρονται διαφορετικά ιδιαίτερα όταν χρησιμοποιείται αριθμητική σταθερής υποδιαστολής όπου το σφάλμα στρογγύλευσης ανατροφοδοτεί την είσοδο της δομής. Χρησιμοποιώντας αριθμητική κινητής υποδιαστολής διπλής ακρίβειας, όπως στο Matlab, οι διαφορές είναι μικρές.

Άσκηση 8.15: Σχεδιάστε το σχηματικό διάγραμμα της Δομής Απευθείας Υλοποίησης Τύπου I για την εξίσωση διαφορών που ορίζεται στη Σχέση (8.39) και συγκρίνέτε το με τα σχηματικά διαγράμματα των Σχημάτων 8-16 και 8-17.

8-9.3 Πόλοι και Μηδενικά

Η εύρεση των πόλων και των μηδενικών της $H(z)$ απλουστεύεται αν ξαναγράψουμε τα πολυώνυμα ως συναρτήσεις του z αντί του z^{-1} . Επομένως, πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή με z^2 προκύπτει η ακόλουθη γενική ρητή μορφή του μετασχηματισμού- z δεύτερης τάξης:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 - a_1 z - a_2}$$

Θυμηθείτε από την άλγεβρα την ακόλουθη σημαντική

ιδιότητα των πολυωνύμων:

Ιδιότητα των Πραγματικών Πολυωνύμων

Ένα πολυώνυμο N -στού βαθμού έχει N ρίζες. Αν όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι πραγματικοί, οι ρίζες είτε είναι πραγματικές είτε εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών.

Επομένως, στην περίπτωση δεύτερης τάξης, καθένα από τα πολυώνυμα του αριθμητή και του παρονομαστή έχει δυο ρίζες και υπάρχουν δυο δυνατότητες: Είτε να είναι και οι δυο συζυγείς μιγαδικές, είτε να είναι και οι δυο πραγματικές. Τώρα θα εστιάσουμε την προσοχή μας στις ρίζες του παρονομαστή αλλά τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν και για τις ρίζες του αριθμητή. Από τον αναλυτικό τύπο για τη δευτεροβάθμια εξίσωση, εξάγουμε τους δυο πόλους στα σημεία

$$\frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2}$$

Όταν $a_1^2 + 4a_2 \geq 0$ και οι δύο πόλοι είναι πραγματικοί, Όταν $a_1^2 + 4a_2 = 0$, είναι πραγματικοί και ίσοι. Ωστόσο, όταν $a_1^2 + 4a_2 < 0$, το αποτέλεσμα της τετραγωνικής ρίζας είναι φανταστικό και προκύπτουν μιγαδικοί συζυγείς πόλοι με τιμές

$$p_1 = \frac{1}{2}a_1 + j\frac{1}{2}\sqrt{-a_1^2 - 4a_2}$$

$$\text{και } p_2 = \frac{1}{2}a_1 - j\frac{1}{2}\sqrt{-a_1^2 - 4a_2}$$

Σε πολική μορφή, οι μιγαδικοί πόλοι μπορούν να εκφραστούν ως $p_1 = r e^{j\theta}$ και $p_2 = r e^{-j\theta}$, όπου η ακτίνα r δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}a_1\right)^2 + \frac{1}{4}(-a_1^2 - 4a_2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}a_1^2 - \frac{1}{4}a_1^2 - a_2} = \sqrt{-a_2} \end{aligned}$$

και η γωνία θ ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη

$$r \cos \theta = \frac{1}{2}a_1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1} \left(\frac{a_1}{2\sqrt{-a_2}} \right)$$

Παράδειγμα 8-14: Μιγαδικοί Πόλοι

Η ακόλουθη $H(z)$ έχει δυο πόλους και δυο μηδενικά.

$$H(z) = \frac{2 + 2z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} = 2 \frac{z^2 + z}{z^2 - z + 1}$$

Οι πόλοι $\{p_1, p_2\}$ και τα μηδενικά $\{z_1, z_2\}$ είναι

$$p_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3} = e^{j\pi/3}$$

$$p_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3} = e^{-j\pi/3}$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = -1$$

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε οποιαδήποτε από τις δύο παρακάτω μορφές

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{2z(z+1)}{(z - e^{j\pi/3})(z - e^{-j\pi/3})} \\ &= \frac{2(1+z^{-1})}{(1 - e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - e^{-j\pi/3}z^{-1})} \end{aligned}$$

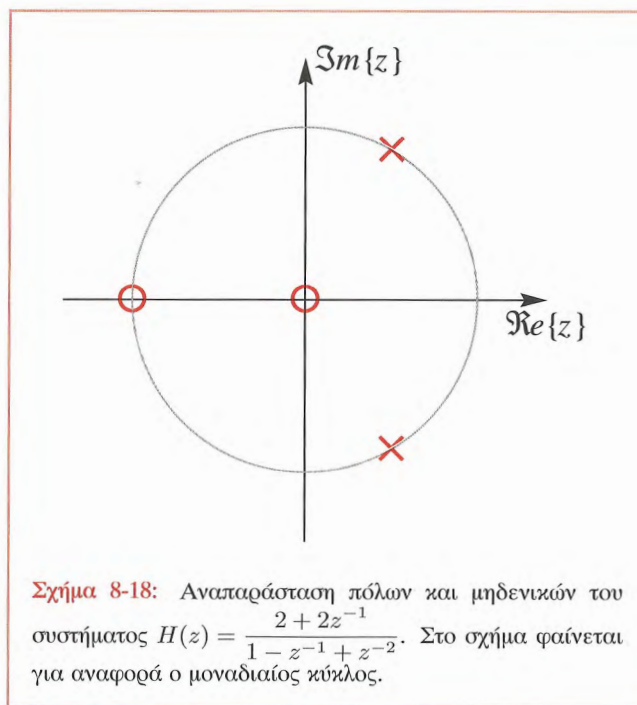
Αφού ο αριθμητής δεν έχει όρο της μορφής z^{-2} , έχουμε ένα μηδενικό στην αρχή των αξόνων. Συνήθως εντοπίζουμε αυτές τις θέσεις στο επίπεδο- z και σημειώνουμε τις θέσεις των πόλων με **x** και των μηδενικών με **o**, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8-18. ■

8-9.4 Κρουστική απόκριση ενός IIR Συστήματος Δεύτερης Τάξης

Όπως δείξαμε, η γενική συνάρτηση μεταφοράς ενός φίλτρου δεύτερης τάξης είναι η ακόλουθη

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2}} \quad (8.44)$$

και διαπιστώσαμε ότι το πολυώνυμο του παρονομαστή $A(z)$ έχει δυο ρίζες που καθορίζουν τους πόλους του φίλτρου



δεύτερας τάξης. Εκφράζοντας την $H(z)$ συναρτήσει των πόλων της παίρνουμε

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{(1 - p_1z^{-1})(1 - p_2z^{-1})} \quad (8.45)$$

Χρησιμοποιώντας την τεχνική της διάσπασης σε μερικά κλάσματα, η οποία αναπτύχθηκε στην Ενότητα 8-7, μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς (8.44) ως ακολούθως

$$H(z) = (-b_2/a_2) + \frac{A_1}{1 - p_1z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2z^{-1}}$$

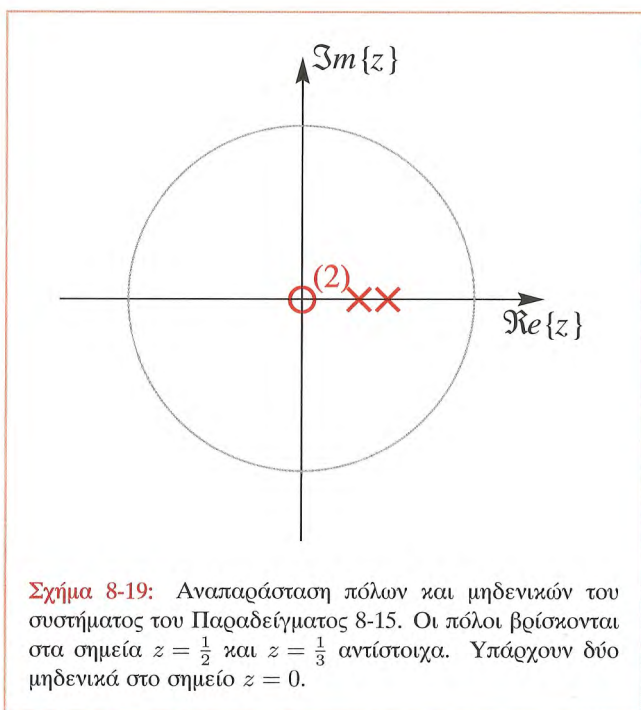
όπου A_1 και A_2 μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση $A_k = H(z)(1 - p_kz^{-1})|_{z=p_k}$. Επομένως, η κρουστική απόκριση του συστήματος θα έχει τη μορφή

$$h[n] = (-b_2/a_2)\delta[n] + A_1(p_1)^n u[n] + A_2(p_2)^n u[n]$$

Επιπροσθέτως, οι πόλοι μπορεί να είναι και οι δυο πραγματικοί ή μπορεί να είναι μιγαδικοί συζυγείς. Θα εξετάσουμε αυτές τις δυο περιπτώσεις ξεχωριστά.

8-9.4.1 Πραγματικοί Πόλοι

Αν οι p_1 και p_2 είναι πραγματικοί, τότε η κρουστική απόκριση συντίθεται από δυο πραγματικές εκθετικές ακολουθίες της μορφής p_k^n . Η περίπτωση αυτή επεξηγείται στο επόμενο παράδειγμα:



Σχήμα 8-19: Αναπαράσταση πόλων και μηδενικών του συστήματος του Παραδείγματος 8-15. Οι πόλοι βρίσκονται στα σημεία $z = \frac{1}{2}$ και $z = \frac{1}{3}$ αντίστοιχα. Υπάρχουν δύο μηδενικά στο σημείο $z = 0$.

Παράδειγμα 8-15: Δεύτερης Τάξης: Πραγματικοί Πόλοι

Ας υποθέσουμε ότι

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \quad (8.46)$$

$$= \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

Παρατηρούμε ότι οι πόλοι βρίσκονται στα σημεία $z = \frac{1}{2}$ και $z = \frac{1}{3}$ καθώς και ότι υπάρχουν δυο μηδενικά στο σημείο $z = 0$. Οι πόλοι και τα μηδενικά της $H(z)$ διακρίνονται στο Σχήμα 8-19. Συνεχίζοντας μπορούμε να εξάγουμε τους συντελεστές του φίλτρου από την $H(z)$ και να γράψουμε την ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{5}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] + x[n] \quad (8.47)$$

η οποία πρέπει να ικανοποιείται για οποιαδήποτε είσοδο και την αντίστοιχη έξοδό της. Συγκεκριμένα, η κρουστική απόκριση θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών

$$h[n] = \frac{5}{6}h[n-1] - \frac{1}{6}h[n-2] + \delta[n] \quad (8.48)$$

Αν γνωρίζουμε τις τιμές $h[-1]$ και $h[-2]$, δηλαδή τις τιμές της κρουστικής απόκρισης πριν την χρονική στιγμή $n = 0$ κατά την οποία η κρουστική απόκριση γίνεται μη μηδενική, χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση διαφορών μπορούμε να υπολογίσουμε αναδρομικά την κρουστική απόκριση $h[n]$. Οι αναγκαίες αρχικές τιμές της κρουστικής απόκρισης παρέχονται από την συνθήκη αρχικής κατάστασης ηρεμίας του συστήματος, που σημαίνει ότι $h[-1] = 0$ και $h[-2] = 0$. Ο ακόλουθος πίνακας δείχνει τον υπολογισμό μερικών τιμών της κρουστικής απόκρισης:

n	$n < 0$	0	1	2	3	4	...
$x[n]$	0	1	0	0	0	0	...
$h[n-2]$	0	0	0	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{19}{36}$...
$h[n-1]$	0	0	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{65}{216}$...
$h[n]$	0	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{65}{216}$	$\frac{211}{1296}$...

Σε αντίθεση με την απλούστερη περίπτωση των IIR συστημάτων πρώτης τάξης, είναι πολύ δύσκολο ναμαντέψει


κανείς το γενικό n -στο όρο της ακολουθίας της κρουστικής απόκρισης. Ευτυχώς μπορούμε να βασιστούμε στον αντίστροφο μετασχηματισμό- z για την εξαγωγή ενός γενικού τύπου. Διασπώντας σε μερικά κλάσματα τη Σχέση (8.46), παίρνουμε

$$H(z) = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

που σημαίνει ότι

$$h[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \\ = \begin{cases} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n & \text{για } n \geq 0 \\ 0 & \text{για } n < 0 \end{cases}$$

Εφόσον και οι δυο πόλοι βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, η κρουστική απόκριση εξασθενεί για μεγάλα n και επομένως το σύστημα είναι ευσταθές. ■

 **Άσκηση 8.16:** Βρείτε την κρουστική απόκριση του ακόλουθου συστήματος δεύτερης τάξης:

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-2] + 5x[n] - 4x[n-1]$$

Σχεδιάστε την κρουστική απόκριση $h[n]$ συναρτήσει του n .

8-9.5 Μιγαδικοί Πόλοι

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι συντελεστές a_1 και a_2 στην εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης είναι τέτοιοι ώστε οι πόλοι της $H(z)$ να είναι μιγαδικοί. Αν εκφράσουμε τους πόλους σε πολικές συντεταγμένες

$$p_1 = r e^{j\theta} \quad \text{and} \quad p_2 = r e^{-j\theta} = p_1^*$$

είναι πιο βολικό να ξαναγράψουμε το πολυώνυμο του παρονομαστή συναρτήσει των παραμέτρων r και θ . Ξεκινώντας από την παραγοντοποιημένη μορφή και

εφαρμόζοντας βασική άλγεβρα μπορούμε να γράψουμε τον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς ως ακολούθως:

$$A(z) = (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \\ = (1 - r e^{j\theta} z^{-1})(1 - r e^{-j\theta} z^{-1}) \\ = 1 - (r e^{j\theta} + r e^{-j\theta}) z^{-1} + r^2 z^{-2} \\ = 1 - (2r \cos \theta) z^{-1} + r^2 z^{-2} \quad (8.49)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς επομένως θα είναι

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - r e^{j\theta} z^{-1})(1 - r e^{-j\theta} z^{-1})} \quad (8.50) \\ = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Μπορούμε επίσης να προσδιορίσουμε τους συντελεστές ανάδρασης του φίλτρου

$$a_1 = 2r \cos \theta \quad \text{και} \quad a_2 = -r^2 \quad (8.51)$$

οπότε η αντίστοιχη εξίσωση διαφορών είναι η ακόλουθη

$$y[n] = (2r \cos \theta)y[n-1] - r^2 y[n-2] \\ + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \quad (8.52)$$

Η παραπάνω παραμετροποίηση είναι σημαντική γιατί μας επιτρέπει να δούμε άμεσα πώς καθορίζουν οι πόλοι τους όρους ανατροφοδότησης της εξίσωσης διαφορών (8.52). Για παράδειγμα, αν θέλουμε να αλλάξουμε τη γωνία του πόλου, αρκεί να αλλάξουμε τον συντελεστή a_1 . Τέλος, θα πρέπει να θυμόμαστε ότι η Σχέση (8.51) ισχύει μόνο στην ειδική περίπτωση μιγαδικών συζυγών πόλων. Όταν οι πόλοι (p_1, p_2) είναι και οι δύο πραγματικοί, οι συντελεστές είναι

$$a_1 = p_1 + p_2 \quad \text{και} \quad a_2 = p_1 p_2$$



Παράδειγμα 8-16: Αντιστροφή Μιγαδικών Πόλων

Θεωρήστε το ακόλουθο σύστημα

$$y[n] = y[n-1] - y[n-2] + 2x[n] + 2x[n-1]$$

του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{2 + 2z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{2(1 + z^{-1})}{(1 - e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - e^{-j\pi/3}z^{-1})} \end{aligned} \quad (8.53)$$

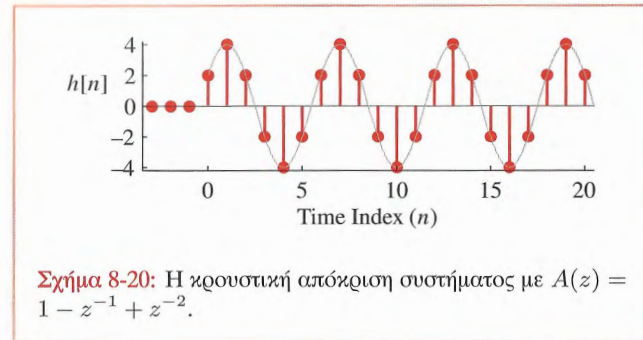
Το διάγραμμα πόλων μηδενικών της $H(z)$ δόθηκε ήδη στο Σχήμα 8-18. Χρησιμοποιώντας την τεχνική της διάσπασης σε μερικά κλάσματα, μπορούμε να γράψουμε τη $H(z)$ στην ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\left(\frac{2 + 2e^{-j\pi/3}}{1 - e^{-j2\pi/3}}\right)}{1 - e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{\left(\frac{2 + 2e^{j\pi/3}}{1 - e^{j2\pi/3}}\right)}{1 - e^{-j\pi/3}z^{-1}} \\ &= \frac{2e^{-j\pi/3}}{1 - e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{2e^{j\pi/3}}{1 - e^{-j\pi/3}z^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{άρα } h[n] &= 2e^{-j\pi/3}e^{j(\pi/3)n}u[n] + 2e^{j\pi/3}e^{-j(\pi/3)n}u[n] \\ &= 4 \cos\left(2\pi\left(\frac{1}{6}\right)(n-1)\right)u[n] \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις με συχνότητες $\pm\pi/3$ προκύπτει το συνημίτονο. Η κρουστική απόκριση σχεδιάζεται στο Σχήμα 8-20.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα του Παραδείγματος 8-16 παράγει μία καθαρά ημιτονοειδή ακολουθία όταν διεγερθεί από την κρουστική ακολουθία. Ένα τέτοιο σύστημα είναι παράδειγμα ενός **ταλαντωτή ημιτονοειδούς κύματος**. Αφού διεγερθεί από την κρουστική ακολουθία, το σύστημα συνεχίζει ασαμάτητα να παράγει ένα ημιτονικό σήμα συχνότητας $\omega_0 = 2\pi(\frac{1}{6})$. Αυτή η συχνότητα είναι ίση με τη γωνία των πόλων. Ένα σύστημα πρώτης τάξης (ή ένα φίλτρο που έχει όλους τους πόλους του πραγματικούς) μπορεί μόνο να φθίνει (ή να αυξάνεται) ($(p)^n$) ή να ταλαντώνεται ($(-1)^n$), αλλά ένα σύστημα δεύτερης τάξης μπορεί να ταλαντώνεται



Σχήμα 8-20: Η κρουστική απόκριση συστήματος με $A(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2}$.

με διαφορετικές περιόδους. Αυτό είναι σημαντικό όταν μοντελοποιούμε φυσικά σήματα όπως ομιλία, μουσική ή άλλους ήχους.

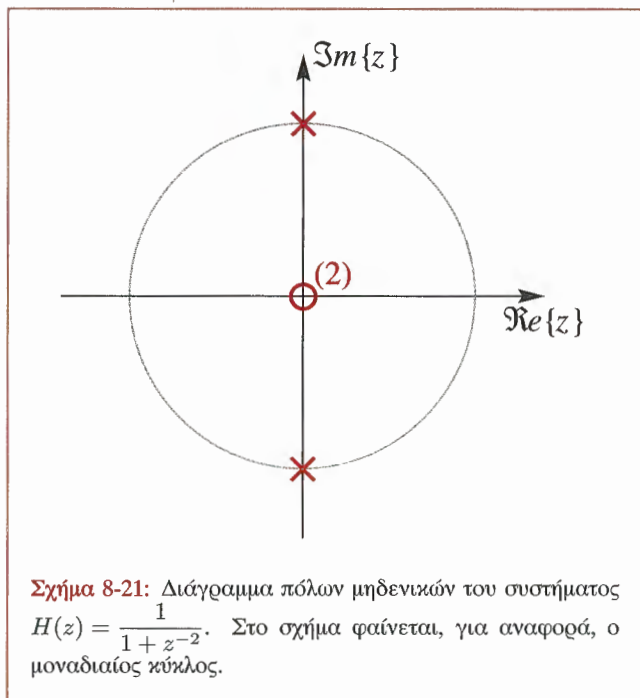
Παρατηρήστε επίσης ότι για να παράγουμε ημιτονοειδή έξοδο, το σύστημα πρέπει να έχει τους πόλους του πάνω στο μοναδιαίο κύκλο⁵ του επίπεδου- z , δηλαδή $r = 1$. Επίσης παρατηρήστε ότι η γωνία που δημιουργείται μεταξύ των πόλων είναι ακριβώς ίση με τη γωνιακή συχνότητα του ημιτονικού ταλαντωτή. Επομένως, ρυθμίζοντας τον συντελεστή a_1 της εξίσωσης διαφορών (8.52) και κρατώντας σταθερή την τιμή του συντελεστή a_2 (-1), μπορούμε να ελέγχουμε τη συχνότητα του ταλαντωτή.

Παράδειγμα 8-17: Πόλοι πάνω στο Μοναδιαίο Κύκλο

Ως παράδειγμα ενός ταλαντωτή με διαφορετική συχνότητα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (8.52) για να ορίσουμε μια εξίσωση διαφορών για συγκεκριμένες θέσεις πόλων. Αν πάρουμε $r = 1$ και $\theta = \pi/2$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8-21, παίρνουμε $a_1 = 2r \cos \theta = 0$ και $a_2 = -r^2 = -1$.

$$y[n] = -y[n-2] + x[n] \quad (8.54)$$

⁵Μιλώντας αυστηρά, ένα σύστημα με πόλους στο μοναδιαίο κύκλο δεν είναι ευσταθές, και επομένως για μερικές διεγέρσεις μπορεί να καταστραφεί, αλλά όχι όταν διεγείρεται από την κρουστική ακολουθία.



Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

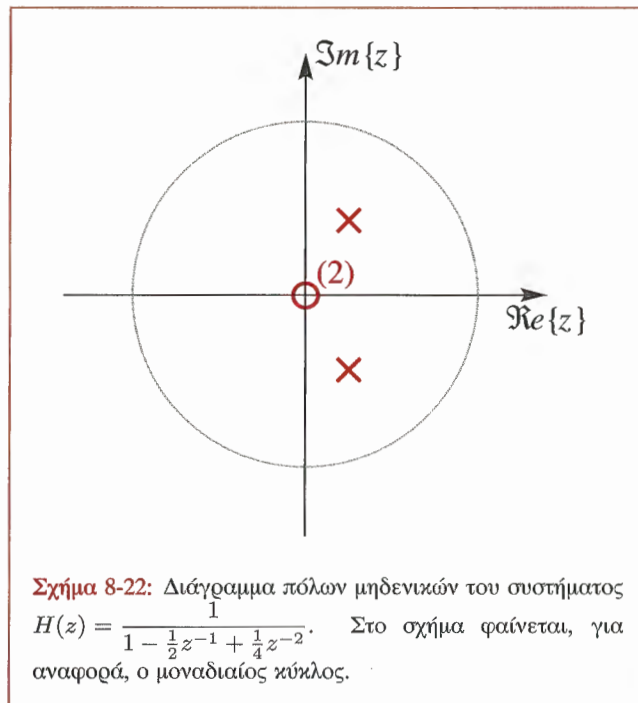
$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1+z^{-2}} \\ &= \frac{1}{(1-e^{j\pi/2}z^{-1})(1-e^{-j\pi/2}z^{-1})} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1-e^{j\pi/2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-e^{-j\pi/2}z^{-1}} \end{aligned}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός- z δίνει τον ακόλουθο γενικό τύπο για την $h[n]$:

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2}e^{j(\pi/2)n}u[n] + \frac{1}{2}e^{-j(\pi/2)n}u[n] \\ &= \begin{cases} \cos(2\pi(\frac{1}{4})n) & \text{για } n \geq 0 \\ 0 & \text{για } n < 0 \end{cases} \quad (8.55) \end{aligned}$$

Για μια ακόμη φορά, η συχνότητα του συνημιτόνου που

υπάρχει στην κρουστική απόκριση του συστήματος, είναι ίση με την γωνία ($\pi/2 = 2\pi(\frac{1}{4})$) που σχηματίζεται μεταξύ των πόλων του συστήματος. ■



Αν οι μιγαδικοί συζυγείς πόλοι ενός συστήματος δεύτερης τάξης είναι πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, η έξοδος ταλαντώνεται και δεν τείνει στο μηδέν. Αν οι πόλοι βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο κύκλο, οι τιμές της εξόδου αυξάνονται εκθετικά, ενώ αν βρίσκονται μέσα στο μοναδιαίο κύκλο η έξοδος τείνει εκθετικά στο μηδέν.



Παράδειγμα 8-18: Ευσταθείς Μιγαδικοί Πόλοι

Ως παράδειγμα ενός ευσταθούς συστήματος, θα πάρουμε $r = \frac{1}{2}$ και $\theta = \pi/3$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 8-22,

παίρνουμε $a_1 = 2r \cos \theta = 2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ και $a_2 = -r^2 = -(\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{4}$ και η εξίσωση διαφορών (8.52) γίνεται

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{4}y[n-2] + x[n] \quad (8.56)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-j\pi/6}}{1 - \frac{1}{2}e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}e^{j\pi/6}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi/3}z^{-1}} \end{aligned}$$

και ο γενικός τύπος για την κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι

$$h[n] = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(2\pi\left(\frac{1}{6}\right)n - \frac{\pi}{6}\right) u[n] \quad (8.57)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, ο γενικός τύπος για την $h[n]$ περιέχει ένα αποσβένοντα όρο ίσο με $(\frac{1}{2})^n$ ο οποίος πολλαπλασιάζει το περιοδικό συνημίτονο περιόδου 6. Η συχνότητα του συνημιτονικού όρου της κρουστικής απόκρισης (8.57) ισούται πάλι με την γωνία $(\pi/3 = 2\pi/6)$ που σχηματίζεται μεταξύ των πόλων, ενώ ο αποσβένων όρος ελέγχεται από την ακτίνα του πόλου, δηλαδή $r^n = (\frac{1}{2})^n$. ■

Επίδειξη: IIR Φιλτράρισμα

8-10 Απόκριση συχνότητας IIR φίλτρων Δεύτερης Τάξης

Αφού η απόκριση συχνότητας ενός ευσταθούς συστήματος σχετίζεται με το μετασχηματισμό- z ως ακολούθως:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = H(z)|_{z=e^{j\hat{\omega}}}$$

προκύπτει ο ακόλουθος τύπος για την απόκριση συχνότητας ενός συστήματος δεύτερης τάξης:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{b_0 + b_1e^{-j\hat{\omega}} + b_2e^{-j2\hat{\omega}}}{1 - a_1e^{-j\hat{\omega}} - a_2e^{-j2\hat{\omega}}} \quad (8.58)$$

Η $H(e^{j\hat{\omega}})$ είναι δεδομένο ότι θα είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π , αφού η Σχέση (8.58) περιέχει όρους της μορφής $e^{-j\hat{\omega}}$ και $e^{-j2\hat{\omega}}$.

Το τετράγωνο του μέτρου της απόκρισης συχνότητας μπορεί να υπολογιστεί πολλαπλασιάζοντας την μιγαδική συνάρτηση $H(e^{j\hat{\omega}})$ με την συζυγή της (η οποία συμβολίζεται με $H^*(e^{j\hat{\omega}})$). Αντί να παραθέσουμε ένα γενικό τύπο, παραθέτουμε ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα για να δείξουμε το είδος του τύπου που προκύπτει.

Παράδειγμα 8-19: Απόκριση Συχνότητας ενός IIR Συστήματος Δεύτερης Τάξης

Θεωρήστε την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

Το τετράγωνο του μέτρου προκύπτει πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή της $H(e^{j\hat{\omega}})H^*(e^{j\hat{\omega}})$, κάνοντας στη συνέχεια αναγωγή ομοίων όρων και εφαρμόζοντας τον αντίστροφο τύπο του Euler.

$$\begin{aligned} |H(e^{j\hat{\omega}})|^2 &= H(e^{j\hat{\omega}})H^*(e^{j\hat{\omega}}) \\ &= \frac{1 - e^{-j2\hat{\omega}}}{1 - 0.9e^{-j\hat{\omega}} + 0.81e^{-j2\hat{\omega}}} \cdot \frac{1 - e^{j2\hat{\omega}}}{1 - 0.9e^{j\hat{\omega}} + 0.81e^{j2\hat{\omega}}} \\ &= \frac{2 + 2\cos(2\hat{\omega})}{2.4661 - 3.258\cos\hat{\omega} + 1.62\cos(2\hat{\omega})} \end{aligned}$$

Ο τύπος αυτός είναι πολύ χρήσιμος επειδή περιέχει μόνο συναρτήσεις του συνημίτονου. Η διαδικασία είναι γενική, έτσι μια όμοια εξίσωση μπορεί να προκύψει για οποιοδήποτε IIR φίλτρο. Αφού το συνημίτονο είναι μια άρτια συνάρτηση, μπορούμε να δηλώσουμε κατηγορηματικά ότι η συνάρτηση του τετραγώνου του μέτρου $|H(e^{j\hat{\omega}})|^2$ οποιοδήποτε IIR φίλτρου θα είναι άρτια συνάρτηση του $\hat{\omega}$, δηλαδή,

$$|H(e^{-j\hat{\omega}})|^2 = |H(e^{j\hat{\omega}})|^2$$

Η απόκριση φάσης είναι λίγο πιο πολύπλοκη. Αν χρησιμοποιηθούν τόξα εφαπτομένης για να υπολογιστεί η γωνία του αριθμητή και του παρονομαστή, τότε οι δύο φάσεις πρέπει να αφαιρεθούν. Στο παράδειγμα αυτό, οι συντελεστές του φίλτρου είναι πραγματικοί αριθμοί και επομένως η φάση θα είναι

$$\phi(\hat{\omega}) = \tan^{-1} \left(\frac{\sin(2\hat{\omega})}{1 - \cos(2\hat{\omega})} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{0.9 \sin \hat{\omega} - 0.81 \sin(2\hat{\omega})}{1 - 0.9 \cos \hat{\omega} + 0.81 \cos(2\hat{\omega})} \right)$$

η οποία είναι μια περιττή συνάρτηση του $\hat{\omega}$. ■

Οι τύποι που προέκυψαν στο παράδειγμα αυτό είναι αρκετά πολύπλοκοι για να μας δώσουν την δυνατότητα άμεσης και βαθιάς γνώσης. Σε επόμενη ενότητα θα δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους πόλους και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς για να κατασκευάζουμε μια προσεγγιστική γραφική παράσταση της απόκρισης συχνότητας χωρίς να επανέλθουμε σε τέτοιου είδους τύπους.

8-10.1 Απόκριση Συχνότητας στο Matlab

Οι κουραστικοί υπολογισμοί και σχεδιάσεις γραφικών παραστάσεων της $H(e^{j\hat{\omega}})$ με το χέρι συνήθως δεν είναι απαραίτητοι αν διαθέτουμε ένα υπολογιστικό περιβάλλον όπως το Matlab. Η συνάρτηση `freqz` του Matlab παρέχεται για αυτόν ακριβώς τον σκοπό. Η απόκριση συχνότητας μπορεί να υπολογισθεί πάνω σε ένα σύνολο συχνοτήτων και στη συνέχεια μπορούν να σχεδιαστούν το μέτρο και η φάση της. Στο Matlab οι συναρτήσεις `abs` και `angle` θα υπολογίσουν το μέτρο και τη γωνία κάθε στοιχείου του μιγαδικού διανύσματος.



Παράδειγμα 8-20: MATLAB για $H(e^{j\hat{\omega}})$

Θεωρήστε το σύστημα που παρουσιάστηκε στο Παράδειγμα 8-19:

$$y[n] = 0.9y[n-1] - 0.81y[n-2] + x[n] - x[n-2]$$

Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές του φίλτρου στο Matlab, τοποθετούμε όλους τους όρους της $y[n]$ στη μια πλευρά της εξίσωσης και τους όρους της $x[n]$ στην άλλη.

$$y[n] - 0.9y[n-1] + 0.81y[n-2] = x[n] - x[n-2]$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε τα διανύσματα που περιέχουν τους συντελεστές του φίλτρου `aa` and `bb`.

$$\text{aa} = [1, -0.9, 0.81]$$

$$\text{bb} = [1, 0, -1]$$

Κλήση της `freqz` θα δημιουργήσει ένα διάνυσμα `HH` που θα περιέχει τις τιμές της απόκρισης συχνότητας στο διάνυσμα συχνοτήτων που ορίζεται από το τρίτο όρισμα, `[-pi:(pi/100):pi]`.

$$\text{HH} = \text{freqz}(\text{bb}, \text{aa}, [-\text{pi}:(\text{pi}/100):\text{pi}])$$

Στο Σχήμα 8-23 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης. Αφού η $H(e^{j\hat{\omega}})$ είναι πάντα περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π , αρκεί να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της απόκρισης συχνότητας στο διάστημα $-\pi \leq \hat{\omega} \leq \pi$.

Για το παράδειγμά μας, μπορούμε να αναζητήσουμε την σχέση μεταξύ των πόλων και των μηδενικών και τη μορφή της απόκρισης συχνότητας. Για την $H(z)$ έχουμε:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

η οποία έχει τους πόλους της στα $z = 0.9e^{\pm j\pi/3}$ και τα μηδενικά της στο $z = 1$ και $z = -1$. Αφού $z = -1$ ταυτίζεται με το $z = e^{j\pi}$, καταλήγουμε ότι η $H(e^{j\hat{\omega}})$ μηδενίζεται στο $\hat{\omega} = \pi$, διότι $H(z) = 0$ στο $z = -1$. Ομοίως, το μηδενικό της $H(z)$ στο $z = +1$ είναι ένα μηδενικό της $H(e^{j\hat{\omega}})$ στο $\hat{\omega} = 0$. Οι πόλοι έχουν γωνίες $\pm\pi/3$ rad, και επομένως οι πόλοι επιδρούν στην απόκριση συχνότητας κοντά στις $\hat{\omega} = \pm\pi/3$. Αφού η $H(z)$ απειρίζεται στα $z = 0.9e^{\pm j\pi/3}$, τα κοντινά στο μοναδιαίο κύκλο σημεία (στα $z = e^{\pm j\pi/3}$) πρέπει να παίρνουν μεγάλες τιμές. Στην περίπτωση μας, μπορούμε,

χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, να υπολογίσουμε τις τιμές της απόκρισης συχνότητας

$$\begin{aligned} H(e^{j\hat{\omega}})|_{\hat{\omega}=\pi/3} &= H(z)|_{z=e^{j\pi/3}} \\ &= \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}} \Big|_{z=e^{j\pi/3}} \\ &= \frac{1 - (-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3})}{1 - 0.9(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3}) + 0.81(-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3})} \\ &= \frac{|1.5 + j0.5(\sqrt{3})|}{|0.145 + j0.045(\sqrt{3})|} = 10.522 \end{aligned}$$

Η τιμή αυτή του μέτρου της απόκρισης συχνότητας αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση της ακριβούς μέγιστης τιμής, η οποία στην πραγματικότητα εμφανίζεται στη συχνότητα $\hat{\omega} = 0.334\pi$. ■

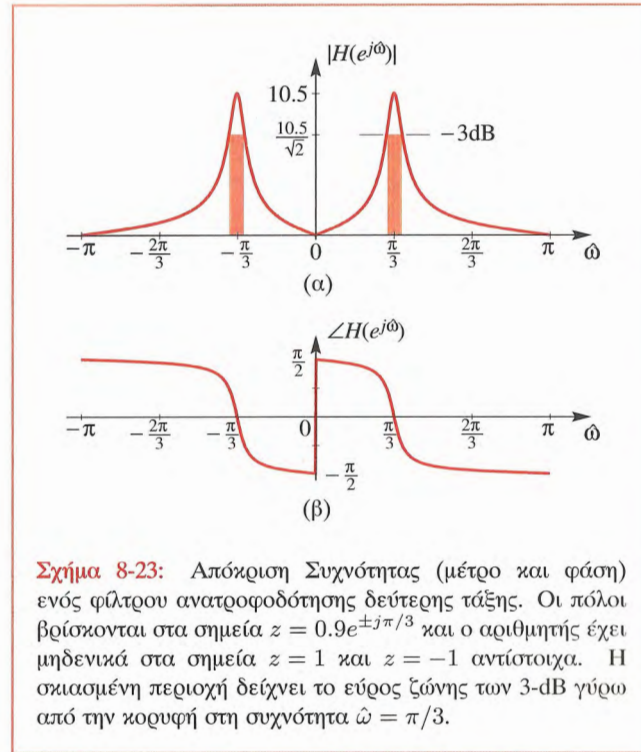
8-10.2 Εύρος Ζώνης (3-dB)

Το εύρος της κορυφής της απόκρισης συχνότητας στο Σχήμα 8-23 ονομάζεται **εύρος ζώνης**. Αυτό πρέπει να μετρηθεί σε κάποιο τυπικό σημείο στη γραφική παράσταση της $|H(e^{j\hat{\omega}})|$. Συνήθως χρησιμοποιούμε το εύρος που αντιστοιχεί στα 3-dB⁶, το οποίο υπολογίζεται ως ακολούθως:

Εντοπίστε την μέγιστη τιμή της $|H(e^{j\hat{\omega}})|$ και στη συνέχεια βρείτε τις πλησιέστερες συχνότητες εκατέρωθεν της μέγιστης τιμής, στις οποίες η τιμή της απόκρισης συχνότητας είναι ίση με $(1/\sqrt{2})H_{\text{peak}}$. Το **3-dB εύρος ζώνης** ισούται με την διαφορά $\Delta\hat{\omega}$ των δύο αυτών συχνοτήτων.

Στο Σχήμα 8-23, η ακριβής μέγιστη τιμή είναι ίση με 10.526 στη συχνότητα $\hat{\omega} = 0.334\pi$, επομένως ψάχνουμε για συχνότητες στις οποίες η $|H(e^{j\hat{\omega}})| = (1/\sqrt{2})H_{\text{peak}} =$

⁶Ο όρος 3-dB σημαίνει -3 decibels το οποίο ισούται με $20 \log_{10}(1/\sqrt{2})$. Πολλές φορές σχεδιάζουμε την $|H(e^{j\hat{\omega}})|$ σε κλίμακα dB.



Σχήμα 8-23: Απόκριση Συχνότητας (μέτρο και φάση) ενός φίλτρου ανατροφοδότησης δεύτερης τάξης. Οι πόλοι βρίσκονται στα σημεία $z = 0.9e^{\pm j\pi/3}$ και ο αριθμητής έχει μηδενικά στα σημεία $z = 1$ και $z = -1$ αντίστοιχα. Η σκιασμένη περιοχή δείχνει το εύρος ζώνης των 3-dB γύρω από την κορυφή στη συχνότητα $\hat{\omega} = \pi/3$.

$(0.707)(10.526) = 7.443$. Οι συχνότητες αυτές είναι οι $\hat{\omega} = 0.302\pi$ και $\hat{\omega} = 0.369\pi$ και επομένως το εύρος ζώνης είναι $\Delta\hat{\omega} = 0.067\pi = 2\pi(0.0335) = 0.2105$ rad.

Ο υπολογισμός του εύρους ζώνης των 3-dB μπορεί να γίνει αποτελεσματικά με ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή, αλλά επίσης είναι χρήσιμο να έχουμε μια προσεγγιστική εξίσωση με τη βοήθεια της οποίας να μπορούμε να κάνουμε γρήγορους υπολογισμούς. Ένας προσεγγιστικός τύπος για τη περίπτωση των ΠΡ συστημάτων δεύτερης τάξης με έντονους συντονισμούς είναι ο ακόλουθος:

$$\Delta\hat{\omega} \approx 2 \frac{|1 - r|}{\sqrt{r}} \quad (8.59)$$

ο οποίος δείχνει ότι η απόσταση των πόλων από το μοναδιαίο κύκλο $|1 - r|$ ελέγχει το εύρος ζώνης⁷. Στο Σχήμα 8-23, το εύρος ζώνης που ορίστηκε στη Σχέση (8.59) ισούται με

$$\Delta\omega = 2 \frac{(1 - 0.9)}{0.95} = \frac{0.2}{0.95} \approx 0.2108 \text{ rad}$$

Επομένως βλέπουμε ότι στην περίπτωση αυτή που οι πόλοι είναι πολύ κοντά στο μοναδιαίο κύκλο (ακτίνα 0.9), η προσέγγιση είναι πάρα πολύ καλή.

8-10.3 Τρισδιάστατη Γραφική Παράσταση Συναρτήσεων Μεταφοράς

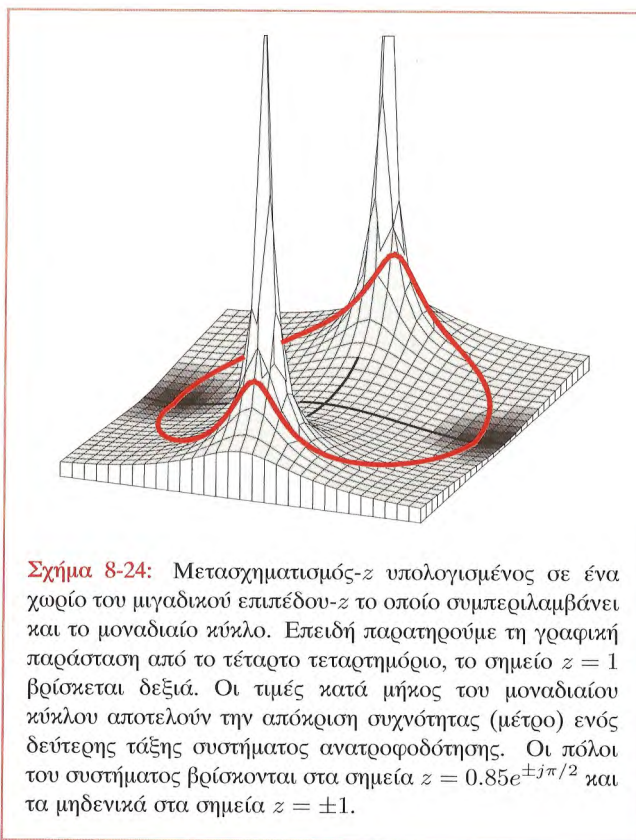
Αφού η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ αποτελεί περιορισμό της συνάρτησης μεταφοράς πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, μπορούμε να διασαφηνίσουμε τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο πεδίο- z και στο πεδίο- ω χρησιμοποιώντας μια τρισδιάστατη γραφική παράσταση όπως αυτή του Σχήματος 8-24.

Στο Σχήμα 8-24 απεικονίζεται η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ σε σημεία μέσα, έξω και πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Οι κορυφές συντονισμού που βρίσκονται στους πόλους, $0.85e^{\pm j\pi/2}$, καθορίζουν την συμπεριφορά της απόκρισης συχνότητας κοντά στις συχνότητες $\omega = \pm\pi/2$. Αν οι πόλοι μετακινούνταν πιο κοντά στο μοναδιαίο κύκλο, η απόκριση συχνότητας θα εμφανίζε ένα πιο έντονο συντονισμό. Τα μηδενικά στα σημεία $z = \pm 1$ δημιουργούν κοιλάδες που βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο στα σημεία $\omega = 0, \pi$.

Επίδειξη: Από το z στη Συχνότητα

Μπορούμε να εκτιμήσουμε οποιαδήποτε τιμή της $|H(e^{j\omega})|$ απευθείας από τους πόλους και τα μηδενικά. Αυτό μπορεί να γίνει συστηματικά γράφοντας την $H(z)$ στην

⁷Αυτός ο προσεγγιστικός τύπος για το εύρος ζώνης είναι κατάλληλος μόνο όταν οι πόλοι είναι διαφορετικοί ο ένας από τον άλλο. Η προσέγγιση δεν ισχύει, για παράδειγμα, όταν ένα σύστημα δεύτερης τάξης έχει δύο πόλους με μικρές γωνίες.



Σχήμα 8-24: Μετασχηματισμός- z υπολογισμένος σε ένα χωρίο του μαγδικού επιπέδου- z το οποίο συμπεριλαμβάνει και το μοναδιαίο κύκλο. Επειδή παρατηρούμε τη γραφική παράσταση από το τέταρτο τεταρτημόριο, το σημείο $z = 1$ βρίσκεται δεξιά. Οι τιμές κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου αποτελούν την απόκριση συχνότητας (μέτρο) ενός δεύτερης τάξης συστήματος ανατροφοδότησης. Οι πόλοι του συστήματος βρίσκονται στα σημεία $z = 0.85e^{\pm j\pi/2}$ και τα μηδενικά στα σημεία $z = \pm 1$.

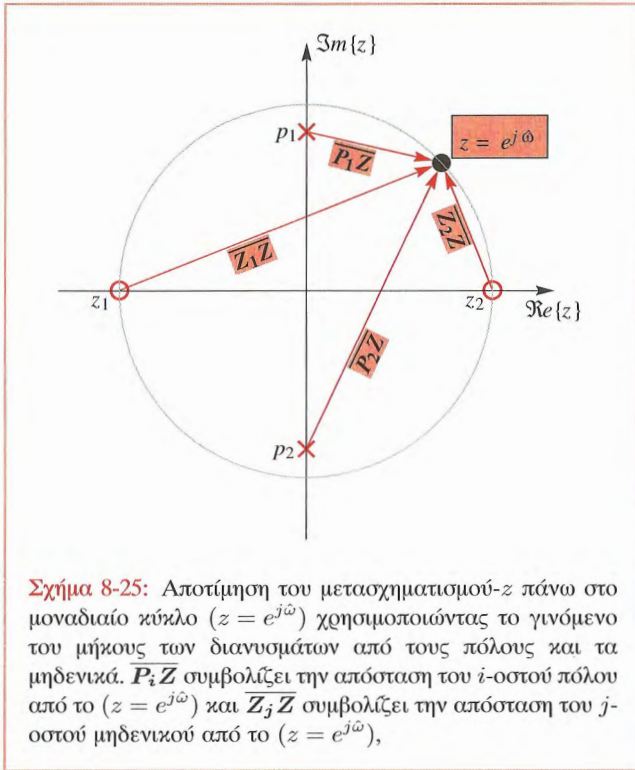
ακόλουθη μορφή:

$$H(z) = G \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

όπου z_1 και z_2 είναι τα μηδενικά ενώ p_1 και p_2 είναι οι πόλοι του συστήματος δεύτερης τάξης. Η παράμετρος G είναι το κέρδος. Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας είναι:

$$|H(e^{j\omega})| = G \frac{|e^{j\omega} - z_1| |e^{j\omega} - z_2|}{|e^{j\omega} - p_1| |e^{j\omega} - p_2|} \quad (8.60)$$

Η εξίσωση (8.60) μπορεί να ερμηνευτεί γεωμετρικά πολύ απλά. Στο Σχήμα 8-25 φαίνεται κάθε όρος $|e^{j\omega} - z_i|$ ή



Σχήμα 8-25: Αποτίμηση του μετασχηματισμού- z πάνω στο μοναδιαίο κύκλο ($z = e^{j\hat{\omega}}$) χρησιμοποιώντας το γινόμενο του μήκους των διανυσμάτων από τους πόλους και τα μηδενικά. $\overline{P_i Z}$ συμβολίζει την απόσταση του i -οστού πόλου από το ($z = e^{j\hat{\omega}}$) και $\overline{Z_j Z}$ συμβολίζει την απόσταση του j -οστού μηδενικού από το ($z = e^{j\hat{\omega}}$),

$|e^{j\hat{\omega}} - p_i|$ που παριστάνεται με το μήκος του διανύσματος από το μηδενικό z_i ή τον πόλο p_i στη θέση $e^{j\hat{\omega}}$ του μοναδιαίου κύκλου. Η απόκριση συχνότητας σε μια συγκεκριμένη συχνότητα $\hat{\omega}$ προκύπτει από το γινόμενο του G με το γινόμενο των μηκών των διανυσμάτων από τα μηδενικά διαιρούμενη με το γινόμενο των μηκών των διανυσμάτων από τους πόλους.

$$|H(e^{j\hat{\omega}})| = G \frac{\overline{Z_1 Z} \cdot \overline{Z_2 Z}}{\overline{P_1 Z} \cdot \overline{P_2 Z}}$$

Καθώς διατρέχουμε το μοναδιαίο κύκλο, τα μήκη των διανυσμάτων αλλάζουν. Όταν είμαστε πάνω σε ένα μηδενικό ο αριθμητής είναι μηδέν και επομένως σε αυτή τη συχνότητα θα ισχύει $|H(e^{j\hat{\omega}})| = 0$. Όταν βρισκόμαστε

κοντά σε ένα πόλο, το μήκος ενός εκ των διανυσμάτων του παρανομαστή είναι πολύ μικρό και επομένως η $|H(e^{j\hat{\omega}})|$ θα παίρνει σε αυτή τη συχνότητα πολύ μεγάλη τιμή.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτή τη γεωμετρική μέθοδο για να εκτιμήσουμε το μέτρο του $H(e^{j\hat{\omega}})$ στη συχνότητα $\hat{\omega} = \pi/2$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 8-24. Ξεκινάμε με την εκτίμηση των μηκών των διανυσμάτων που ενώνουν τα μηδενικά και τους πόλους με το σημείο $z = e^{j\pi/2}$, που ταυτίζεται με το $z = j$. Στη συνέχεια διαιρούμε τα μήκη των διανυσμάτων που αντιστοιχούν στα μηδενικά με τα μήκη των διανυσμάτων που αντιστοιχούν στους πόλους και παίρνουμε

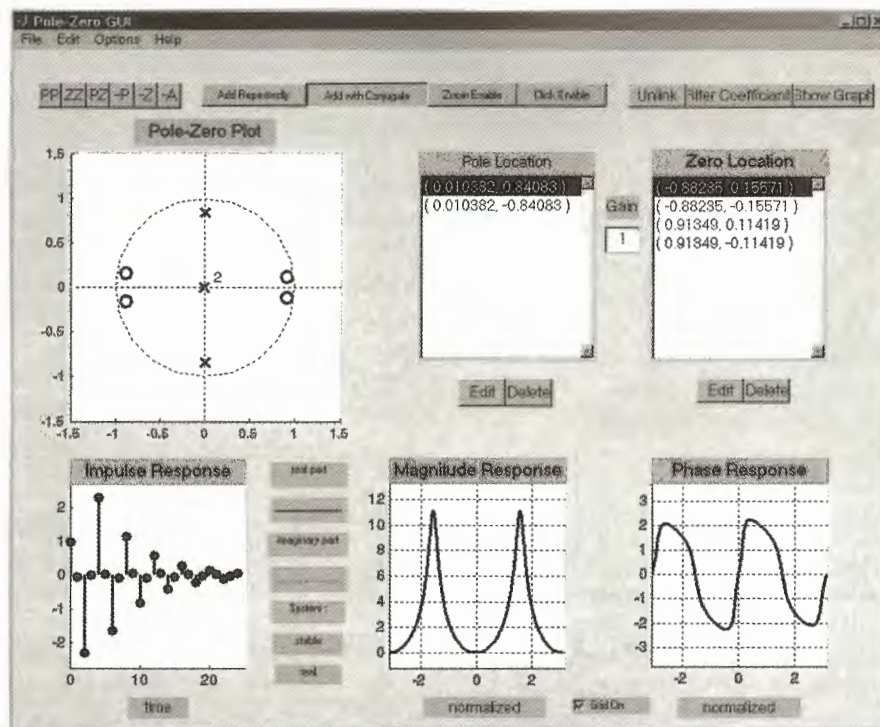
$$\begin{aligned} |H(e^{j\pi/2})| &= |H(j)| \\ &= \frac{|j-1| |j+1|}{|j-0.85j| |j-(-0.85j)|} \\ &= \frac{2}{0.15 \times 1.85} = 7.207 \end{aligned}$$

Στα παραπάνω υποθέσαμε ότι η τιμή του κέρδους G ήταν 1.

Ένας εξαιρετικός τρόπος για να εξασκηθείτε με τις ιδέες που αναφέραμε παραπάνω είναι να χρησιμοποιήσετε τη γραφική διεπαφή του Matlab που ονομάζεται `PeZ` (δές Σχήμα 8-26).

8-11 Παράδειγμα Κατωπερατού IIR Φίλτρου

Τα IIR φίλτρα πρώτης και δεύτερης τάξης είναι χρήσιμα και παρέχουν απλά παραδείγματα, αλλά, σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιούμε IIR φίλτρα υψηλών τάξεων επειδή μπορούν να προσεγγίσουν αποκρίσεις συχνότητας με επίπεδες ζώνες διάβασης και αποκοπής και πιο απότομες περιοχές μετάβασης. Οι συναρτήσεις `butter`, `cheby1`, `cheby2` και `ellip` του Matlab *Signal Processing Toolbox* μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη σχεδίαση φίλτρων με συγκεκριμένα επιθυμητά χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητάς τους. Ως παράδειγμα, θεωρήστε το



Σχήμα 8-26: Γραφική Διεπαφή Χρήστη για το PeZ το οποίο επεξηγεί τα *τρία-πεδία*. Ο χρήστης μπορεί να ορίσει τους πόλους και τα μηδενικά και να δει την κρουστική απόκριση και την απόκριση συχνότητας που προκύπτουν. Επιπροσθέτως, οι πόλοι και/ή τα μηδενικά μπορούν να μετακινηθούν με το ποντίκι και όλες οι γραφικές παραστάσεις ανανεώνονται σε πραγματικό χρόνο.

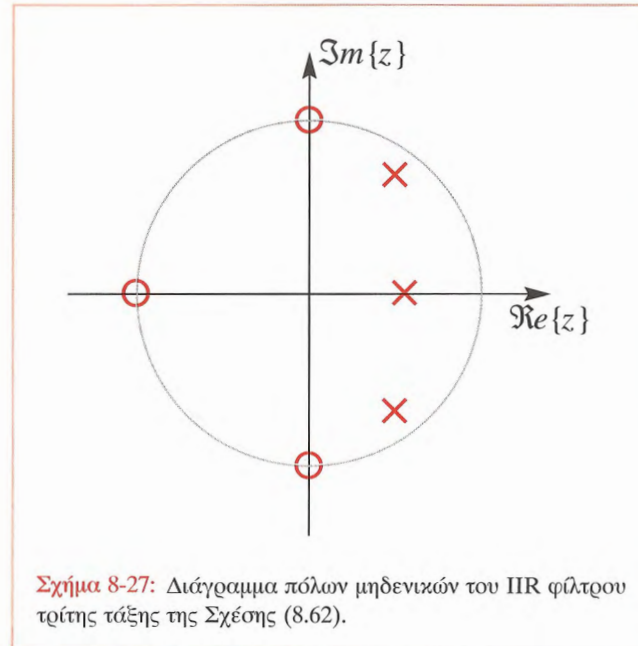
$$H(z) = \frac{0.0798(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3})}{1-1.556z^{-1}+1.272z^{-2}-0.398z^{-3}} \quad (8.61)$$

$$= \frac{0.0798(1+z^{-1})(1-e^{j\pi/2}z^{-1})(1-e^{-j\pi/2}z^{-1})}{(1-0.556z^{-1})(1-0.846e^{j0.3\pi}z^{-1})(1-0.846e^{-j0.3\pi}z^{-1})} \quad (8.62)$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{0.62}{1-.556z^{-1}} + \frac{0.17e^{j0.96\pi}}{1-.846e^{j0.3\pi}z^{-1}} + \frac{0.17e^{-j0.96\pi}}{1-.846e^{-j0.3\pi}z^{-1}} \quad (8.63)$$

σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ που δίνεται από τη Σχέση (8.61).

Το σύστημα αυτό είναι ένα παράδειγμα κατωπερατού **ελλειπτικού φίλτρου**, του οποίου οι συντελεστές σε αριθμητή και παρονομαστή υπολογίστηκαν με τη βοήθεια της συνάρτησης `ellip` του Matlab. Η ακριβής κλίση είναι `ellip(3, 1, 30, 0.3)`. Κάθε μία από τις τρεις παραπάνω διαφορετικές μορφές είναι χρήσιμες: Η μορφή (8.61) για την αναγνώριση των συντελεστών του φίλτρου, η μορφή (8.62) για το σχεδιασμό του διαγράμματος πόλων μηδενικών και της απόκρισης συχνότητας και η μορφή (8.63) για την εύρεση της κρουστικής απόκρισης του συστήματος⁸. Στο Σχήμα 8-27 παρουσιάζονται οι πόλοι και τα μηδενικά αυτού του φίλτρου. Παρατηρήστε ότι όλα τα μηδενικά βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο και ότι οι πόλοι είναι αυστηρά μέσα στο μοναδιαίο κύκλο, όπως πρέπει να είναι σε ευσταθή συστήματα.



Σχήμα 8-27: Διάγραμμα πόλων μηδενικών του IIR φίλτρου τρίτης τάξης της Σχέσης (8.62).

Άσκηση 8.17: Από τη Σχέση (8.61) βρείτε την εξίσωση διαφορών (Δομή Απευθείας Υλοποίησης Τύπου I) για να υλοποιήσετε το σύστημα.

Η συνάρτηση μεταφοράς υπολογίστηκε σε σημεία του μοναδιαίου κύκλου χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `freqz` του Matlab. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 8-28. Παρατηρήστε ότι η απόκριση συχνότητας παίρνει μεγάλες τιμές στις περιοχές γύρω από τους πόλους και μικρές τιμές στις περιοχές γύρω από τα μηδενικά. Ειδικά, η ζώνη διάβασης της απόκρισης συχνότητας είναι $|\hat{\omega}| \leq 2\pi(0.15)$, η οποία αντιστοιχεί στους πόλους με γωνίες $\pm 0.3\pi$. Επίσης η απόκριση συχνότητας είναι ακριβώς μηδέν στις συχνότητες $\hat{\omega} = \pm 0.5\pi$ και $\hat{\omega} = \pi$ αφού τα μηδενικά της $H(z)$ τα οποία βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο έχουν τις ίδιες γωνίες.

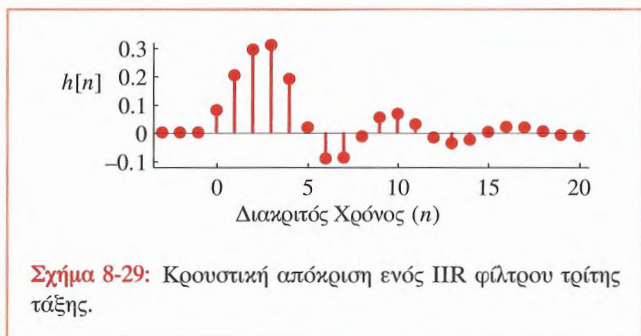
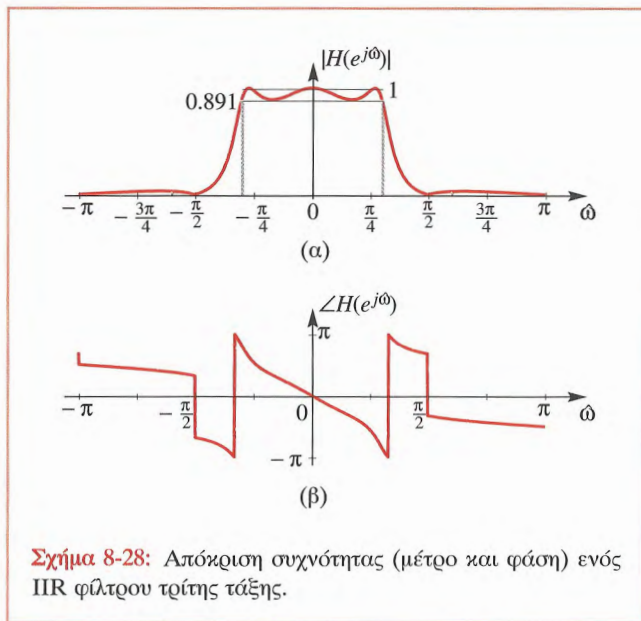
⁸Η παραγοντοποίηση των πολωνώνων και η διάσπαση σε μερικά κλάσματα έγινε στο Matlab με τη βοήθεια των συναρτήσεων `roots` και `residuez` αντίστοιχα.

Άσκηση 8.18: Από τη Σχέση (8.61) ή (8.62), υπολογίστε την τιμή της απόκρισης συχνότητας στη συχνότητα $\hat{\omega} = 0$.

Τέλος, στο Σχήμα 8-29 φαίνεται η κρουστική απόκριση του συστήματος. Παρατηρήστε ότι αυτή ταλαντώνεται και τελικά τείνει στο μηδέν καθώς αυξάνεται το n εξαιτίας των δύο συζυγών πόλων με γωνίες $\pm 0.3\pi$ και ακτίνα ίση με 0.846. Η περιβάλλουσα ακολουθία είναι η $(0.846)^n$.

Άσκηση 8.19: Χρησιμοποιήστε τη μορφή (8.63) μερικών κλασμάτων για να βρείτε μία εξίσωση για την κρουστική απόκριση του φίλτρου. *Υπόδειξη:* Εφαρμόστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό- z .

Το ελλειπτικό φίλτρο του παραδείγματος που περιγράφεται στην ενότητα αυτή, αποτελεί ένα απλό παράδειγμα



ενός χρήσιμου καταπερατού *IIR* φίλτρου. Με φίλτρα υψηλότερης τάξης μπορούμε να προσεγγίσουμε πολύ καλύτερα τα επιθυμητά χαρακτηριστικά του φίλτρου.

8-12 Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσθηκε η κατηγορία των IIR φίλτρων, και ο μετασχηματισμός- z συστημάτων των

οποίων η συνάρτηση μεταφοράς περιέχει πόλους. Ο μετασχηματισμός- z μετατρέπει προβλήματα που αναφέρονται σε κρουστικές αποκρίσεις, και αποκρίσεις συχνότητας, σε πολυωνμικά προβλήματα και προβλήματα ρητών συναρτήσεων. Εξάλλου, οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ αποτελούν τα πιο σημαντικά στοιχεία των IIR φίλτρων αφού ιδιότητες όπως η μορφή της απόκρισης συχνότητας ή η μορφή της κρουστικής απόκρισης μπορούν να συναχθούν γρήγορα και εύκολα από τις θέσεις των πόλων. Συνεχίσαμε επίσης να τονίζουμε τη σπουδαιότητα της αρχής των “πεδίων αναπαράστασης.” Το πεδίο- n ή πεδίο του χρόνου, το πεδίο- ω ή πεδίο της συχνότητας και το πεδίο- z μας παρέχουν τρία διαφορετικά πεδία για να σκεφθούμε σχετικά με τα χαρακτηριστικά ενός συστήματος. Με τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού- z αναδειξαμε τις σχέσεις μεταξύ των πεδίων ώστε να μπορούμε να βρίσκουμε ένα σήμα όταν γνωρίζουμε το μετασχηματισμό- z του σήματος. Έτσι, ακόμα και δύσκολα προβλήματα όπως η συνέλιξη μπορούν να απλοποιηθούν δουλεύοντας στο πιο βολικό πεδίο (z) και μεταφερόμενοι στη συνέχεια πίσω στο αρχικό πεδίο (n).

Η Εργαστηριακή άσκηση #11 αφιερώνεται στα IIR φίλτρα. Αυτή η εργαστηριακή άσκηση χρησιμοποιεί μία διεπαφή χρήστη που ονομάζεται `PeZ` η οποία παρέχει τη δυνατότητα διαδραστικής διερεύνησης των τριών πεδίων.

Εργ. Ασκ.: #11: Διεπαφή `PeZ` - τα Πεδία z , n και ω

Το εργαλείο `PeZ` είναι χρήσιμο στη μελέτη *IIR* συστημάτων επειδή προσφέρει στο χρήστη πολλαπλές όψεις ενός ΓΧΑ συστήματος: πεδίο πόλων-μηδενικών, απόκριση συχνότητας και κρουστική απόκριση (δες Σχήμα 8-26). Παρόμοιες δυνατότητες παρέχονται από πολλά πακέτα λογισμικού (π.χ. το `sptool` του Matlab). Το CD-ROM επίσης περιέχει τις ακόλουθες παρουσιάσεις των σχέσεων μεταξύ του επιπέδου- z και των πεδίων της συχνότητας και του χρόνου:

- (i) Ένα σύνολο αρχείων βίντεο που παρουσιάζουν πώς αλλάζει η απόκριση συχνότητας και η κρουστική απόκριση ενός *IIR* φίλτρου όταν αλλάζουμε τη θέση

ενός πόλου. Παρουσιάζονται πολλά διαφορετικά φίλτρα.

Επίδειξη: Τρία Πεδία - IIR

- (ii) Ένα αρχείο βίντεο που παρουσιάζει τη σχέση μεταξύ του επιπέδου- z και του μοναδιαίου κύκλου πάνω στον οποίο υπολογίζεται απόκριση συχνότητας ενός συστήματος.

Επίδειξη: Από το Επίπεδο- z στη Συχνότητα

- (iii) Η γραφική διεπαφή PeZ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την σύνθεση διαφορετικών IIR και FIR φίλτρων.

Επίδειξη: Διεπαφή PeZ

- (iv) Ένας οδηγός για το πώς χρησιμοποιείται το PeZ.

Επίδειξη: Οδηγός Χρήσης Διεπαφής PeZ

- (v) Μια παρουσίαση που περιέχει περισσότερα παραδείγματα για τα IIR φίλτρα.

Επίδειξη: IIR Φιλτράρισμα

Υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη το μεγάλο αριθμό λυμένων προβλημάτων που υπάρχουν στο CD-ROM και είναι διαθέσιμα για μελέτη και εξάσκηση.

Υπόδειξη: Εκατοντάδες Λυμένων Προβλημάτων

8-13 Προβλήματα

Πρόβλημα.-8.1 Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος δεύτερης τάξης:

$$y[n] = \sqrt{2}y[n-1] - y[n-2] + x[n]$$

Για να καλύψετε όλο το διάστημα τιμών του n , εξετάστε ξεχωριστά τις περιπτώσεις για $n < 0$ και $n \geq 0$.

Πρόβλημα.-8.2 Βρείτε έναν γενικό τύπο για την ακολουθία Fibonacci βρίσκοντας την κρουστική απόκριση του ακόλουθου συστήματος δεύτερης τάξης:

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n]$$

Πρόβλημα.-8.3 Έστω ότι $x[n] = \delta[n] - \alpha\delta[n-5]$ είναι η είσοδος και η κρουστική απόκριση, $h[n] = 5(0.8)^n u[n]$. Αν $y[n] = x[n] * h[n]$, υπολογίστε το α έτσι ώστε $y[n] = 0$ για $n \geq 5$.

Πρόβλημα.-8.4 Για τα ακόλουθα συστήματα ανατροφοδότησης, υπολογίστε τις θέσεις των πόλων και των μηδενικών στο επίπεδο- z .

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{3}y[n-2] - x[n] + 3x[n-1] - 2x[n-2]$$

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{3}y[n-2] - x[n] + 3x[n-1] + 2x[n-2]$$

Στο δεύτερο σύστημα αυτό που αλλάζει είναι μόνο τα πρόσημα των $y[n-2]$ και $x[n-2]$, συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα.

Πρόβλημα.-8.5 Σε αυτό το πρόβλημα οι βαθμοί των πολυωνύμων σε αριθμητή και παρανομαστή είναι διαφορετικοί και επομένως μπορεί να υπάρχουν μηδενικά (ή πόλοι) στο $z = 0$ ή στο $z = \infty$. Υπολογίστε τους πόλους και τα μηδενικά των παρακάτω φίλτρων:

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{3}y[n-2] - x[n]$$

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{3}y[n-2] - x[n-2]$$

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{3}y[n-2] - x[n-4]$$

Σχεδιάστε τις θέσεις των πόλων και των μηδενικών πάνω στο μιγαδικό επίπεδο- z . Σιγουρευτείτε ότι, σε όλες τις

περιπτώσεις, ο αριθμός των μηδενικών και των πόλων είναι ίδιος, επιτρέποντας μηδενικά (ή πόλους) στο $z = \infty$ ή στο $z = 0$.

Πρόβλημα-8.6 Δίνεται το ΠΡ φίλτρο που ορίζεται από την παρακάτω εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = -\frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$$

- (i) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$. Ποιοι είναι οι πόλοι και ποια τα μηδενικά του φίλτρου;
- (ii) Αν η είσοδος του συστήματος είναι τρεις διαδοχικοί παλμοί

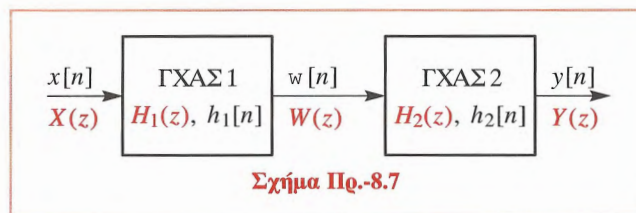
$$x[n] = \begin{cases} +1 & \text{για } n = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{για } n < 0 \text{ και } n \geq 3 \end{cases}$$

βρείτε τη μορφή της εξόδου $y[n]$. Υποθέστε ότι η $y[n]$ είναι 0 για $n < 0$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα για να υπολογίσετε την έξοδο σαν το άθροισμα τριών όρων, κάθε ένας από τους οποίους σχετίζεται με την κρουστική απόκριση του συστήματος. Θυμηθείτε ότι η κρουστική απόκριση ένα φίλτρου ΠΡ πρώτης τάξης έχει την εξής μορφή $b_0 a^n$ για $n > 0$.

Πρόβλημα-8.7 Το διάγραμμα που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-8.7 απεικονίζει μία σύνδεση σε σειρά δύο ΓΧΑ συστημάτων, δηλαδή η έξοδος του πρώτου συστήματος τροφοδοτεί την είσοδο του δεύτερου και η έξοδος του όλου συστήματος είναι αυτή του δεύτερου.

- (i) Χρησιμοποιήστε το μετασχηματισμό- z για να δείξετε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος είναι $H(z) = H_2(z)H_1(z)$, όπου $Y(z) = H(z)X(z)$.
- (ii) Υποθέστε ότι το Σύστημα 1 είναι ένα FIR φίλτρο που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y_1[n] = x[n] + \frac{5}{6}x[n-1]$ και το Σύστημα 2 περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς $H_2(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$. Υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού γραμμικού συστήματος.



- (iii) Για τα συστήματα του ερωτήματος (ii), βρείτε μία εξίσωση διαφορών με την οποία σχετίζεται η $y[n]$ με το $x[n]$ στο Σχήμα Πρ.-8.7.
- (iv) Για τα συστήματα του ερωτήματος (ii), σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά της $H(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο- z .
- (v) Βρείτε τη συνθήκη που θα πρέπει να ικανοποιεί η $H(z)$ ώστε να εξασφαλίζεται ότι η έξοδος θα είναι ίση με την είσοδο του συστήματος.
- (vi) Αν το Σύστημα 1 περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y_1[n] = x[n] + \frac{5}{6}x[n-1]$, βρείτε μια συνάρτηση μεταφοράς $H_2(z)$ έτσι ώστε η έξοδος του συνολικού συστήματος να είναι ίση με την είσοδο του συστήματος. Δηλαδή, βρείτε μια $H_2(z)$, η οποία θα αναιρεί την επίδραση του $H_1(z)$. Αυτό ονομάζεται *αποσυνέλιξη* και η $H_2(z)$ είναι η *αντίστροφη* της $H_1(z)$.
- (vii) Υποθέστε ότι η $H_1(z)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς ενός FIR φίλτρου. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί η $H_1(z)$ για να είναι η $H_2(z)$ ένα σταθερό και αιτιατό αντίστροφο φίλτρο της $H_1(z)$;

Πρόβλημα-8.8 Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = -0.8y[n-1] + 0.8x[n] + x[n-1]$$

- (i) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του συστήματος. Εκφράστε την $H(z)$ σαν κλάσμα πολωνύμων του z^{-1} (αρνητικές δυνάμεις του z) καθώς και σαν κλάσμα πολυωνύμων του z .

- (ii) Σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά της $H(z)$ στο επίπεδο- z .
- (iii) Από την $H(z)$, βρείτε μια έκφραση της $H(e^{j\hat{\omega}})$, της απόκρισης συχνότητας του συστήματος.
- (iv) Αποδείξτε ότι για κάθε $\hat{\omega}$, η $|H(e^{j\hat{\omega}})|^2 = 1$.

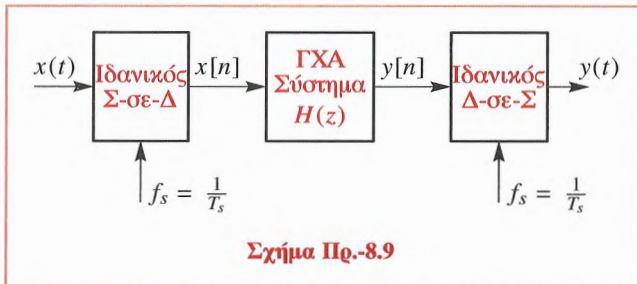
Πρόβλημα.-8.9 Η είσοδος στον μετατροπέα Σ -σε- Δ που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-8.9 είναι

$$x(t) = 4 + \cos(500\pi t) - 3 \cos[(2000\pi/3)t]$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του ΓΧΑ συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 - e^{j\pi/2}z^{-1})(1 - e^{-j\pi/2}z^{-1})}{(1 - 0.9e^{j2\pi/3}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j2\pi/3}z^{-1})}$$

Αν $f_s = 1000$ δείγματα/δευτερόλεπτο, βρείτε την έξοδο $y(t)$ του μετατροπέα.



Πρόβλημα.-8.10 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό- z των ακόλουθων συναρτήσεων μεταφοράς

- (i) $H_a(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0.77z^{-1}}$
- (ii) $H_b(z) = \frac{1 + 0.8z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}}$

(iii) $H_c(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 0.9z^{-1}}$

(iv) $H_d(z) = 1 - z^{-1} + 2z^{-3} - 3z^{-4}$

Πρόβλημα.-8.11 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό- z των ακόλουθων συναρτήσεων μεταφοράς:

(i) $X_a(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}$

(ii) $X_b(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$

(iii) $X_c(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.1z^{-1} - 0.72z^{-2}}$

Πρόβλημα.-8.12 Για καθένα από τα ακόλουθα συστήματα (που ορίζονται είτε με την $H(z)$ είτε με την εξίσωση διαφορών) βρείτε σε ποιο από τα διαγράμματα μηδενικών-πόλων που φαίνονται στο Σχήμα Πρ.-8.12 αντιστοιχεί.

$S_1 : y[n] = 0.9y[n-1] + \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$

$S_2 : y[n] = -0.9y[n-1] + 9x[n] + 10x[n-1]$

$S_3 : H(z) = \frac{\frac{1}{2}(1 - z^{-1})}{1 + 0.9z^{-1}}$

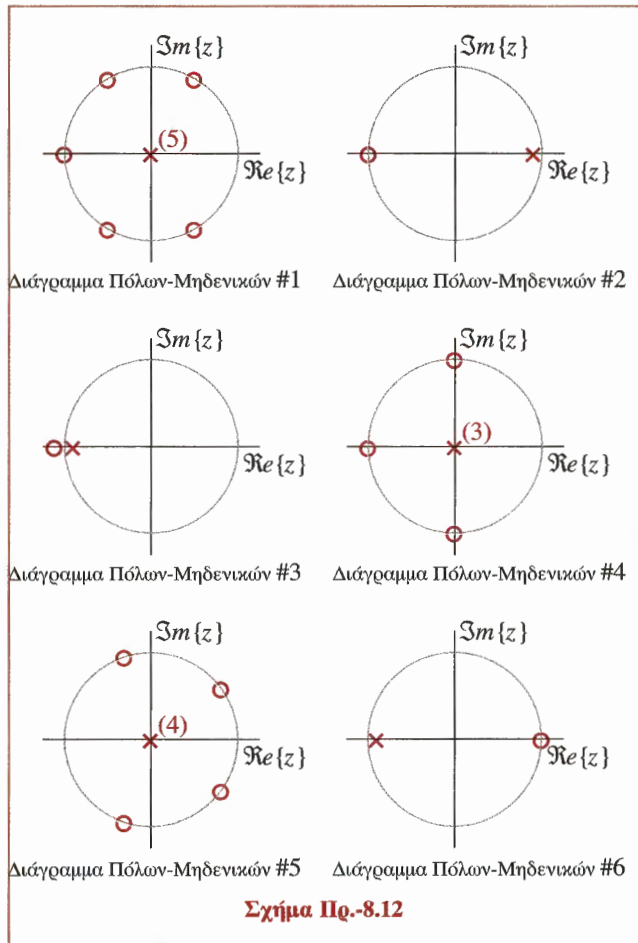
$S_4 : y[n] = \frac{1}{4}x[n] + x[n-1] + \frac{3}{2}x[n-2] + x[n-3] + \frac{1}{4}x[n-4]$

$S_5 : H(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4}$

$S_6 : y[n] = \sum_{k=0}^2 x[n-k]$

$S_7 : y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4] + x[n-5]$

Πρόβλημα.-8.13 Για κάθε μια από τις γραφικές παραστάσεις αποκρίσεων συχνότητας (Α-ΣΤ) που φαίνονται



στο Σχήμα Πρ.-8.13, βρείτε σε ποιο από τα ακόλουθα συστήματα (που ορίζονται από την $H(z)$ είτε από την εξίσωση διαφορών) αντιστοιχεί. *Σημείωση:* Ο άξονας της συχνότητας για κάθε γραφική παράσταση εκτείνεται στο διάστημα $-\pi \leq \hat{\omega} \leq \pi$.

$$S_1 : y[n] = 0.9y[n-1] + \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1].$$

$$S_2 : y[n] = -0.9y[n-1] + 9x[n] + 10x[n-1]$$

$$S_3 : H(z) = \frac{\frac{1}{2}(1 - z^{-1})}{1 + 0.9z^{-1}}$$

$$S_4 : y[n] = \frac{1}{4}x[n] + x[n-1] + \frac{3}{2}x[n-2] + x[n-3] + \frac{1}{4}x[n-4]$$

$$S_5 : H(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4}$$

$$S_6 : y[n] = \sum_{k=0}^2 x[n-k]$$

$$S_7 : y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4] + x[n-5]$$

Πρόβλημα.-8.14 Δίνεται ένα IIR φίλτρο που ορίζεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$$

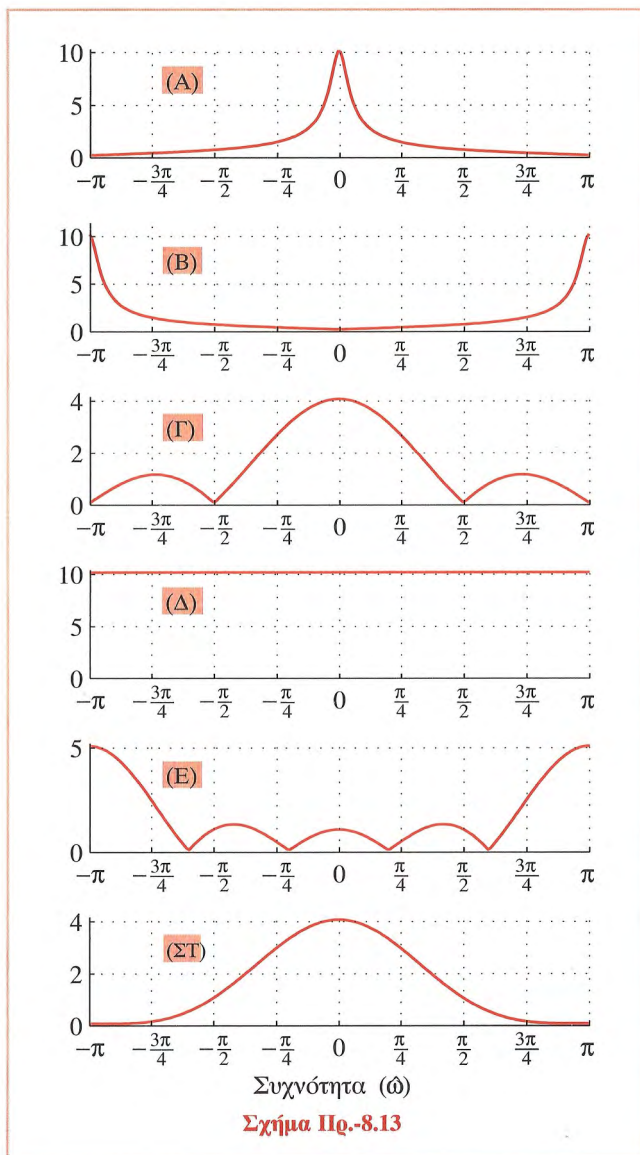
- (i) Όταν η είσοδος στο σύστημα είναι η βηματική ακολουθία $u[n]$, υπολογίστε τη συναρτησιακή μορφή του σήματος εξόδου $y[n]$. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού- z . Υποθέστε ότι το σήμα εξόδου $y[n]$ είναι μηδενικό για $n < 0$.
- (ii) Βρείτε την έξοδο όταν η $x[n]$ είναι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα που ξεκινάει τη χρονική στιγμή $n = 0$:

$$x[n] = e^{j(\pi/4)n}u[n]$$

- (iii) Από το ερώτημα (ii), προσδιορίστε τη συνιστώσα της απόκρισης που αντιστοιχεί στη μόνιμη κατάσταση και συγκρίνετε το πλάτος και τη φάση του με τη συχνότητα απόκρισης στο $\hat{\omega} = \pi/4$.

Πρόβλημα.-8.15 Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = 0.8y[n-1] - 0.8x[n] + x[n-1]$$



- (i) Προσδιορίστε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ αυτού του συστήματος. Εκφράστε την $H(z)$ σαν κλάσμα

πολυωνύμων του z^{-1} και σαν κλάσμα πολυωνύμων του z .

- (ii) Σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά της $H(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο- z .
- (iii) Από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ βρείτε μία έκφραση για την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ του συστήματος.
- (iv) Δείξτε ότι $|H(e^{j\omega})|^2 = 1$ για όλα τα ω .
- (v) Αν η είσοδος του συστήματος είναι:

$$x[n] = 4 + \cos[(\pi/4)n] - 3\cos[(2\pi/3)n]$$

τι μπορείτε να συμπεράνετε, χωρίς περαιτέρω υπολογισμούς, για τη μορφή της εξόδου $y[n]$;

Πρόβλημα.-8.16 Η συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑ συστήματος δίνεται από τον τύπο:

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 - e^{j\pi/2}z^{-1})(1 - e^{-j\pi/2}z^{-1})}{(1 - 0.9e^{j2\pi/3}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j2\pi/3}z^{-1})}$$

- (i) Γράψτε την εξίσωση διαφορών που συνδέει την είσοδο $x[n]$ και την έξοδο $y[n]$.
Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε τους παράγοντες της $H(z)$.
- (ii) Σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά της $H(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο- z .
Υπόδειξη: Εκφράστε την $H(z)$ σαν κλάσμα παραγοντοποιημένων πολυωνύμων του z αντί του z^{-1} .
- (iii) Αν η είσοδος είναι της μορφής $x[n] = Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 n}$, για ποιες τιμές της συχνότητας στο διάστημα $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$ η έξοδος $y[n]$ θα είναι ίση με 0;

Πρόβλημα.-8.17 Για το σύστημα του οποίου ο μετασχηματισμός- z είναι

$$H(z) = \frac{1 + 0.8z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}}$$

- (i) Βρείτε τους πόλους και τα μηδενικά της $H(z)$.
- (ii) Βρείτε την εξίσωση διαφορών του φίλτρου.
- (iii) Βρείτε μία απλή έκφραση (πραγματική) για το τετράγωνο του μέτρου $|H(e^{j\omega})|^2$ της απόκρισης συχνότητας.
- (iv) Αυτό το φίλτρο είναι καταπερατό ή υπερπερατό; Εξηγήστε την απάντησή σας μέσω των πόλων και των μηδενικών της $H(z)$.

Πρόβλημα-8.18 Δοθέντος του IIR φίλτρου που ορίζεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = -\frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$$

- (i) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$. Ποιοι είναι οι πόλοι και τα μηδενικά του συστήματος;
- (ii) Βρείτε την έξοδο $y[n]$ του συστήματος, όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί το σήμα

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

Υποθέστε ότι η έξοδος του συστήματος είναι μηδέν για $n < 0$.

Πρόβλημα-8.19 Δοθέντος του IIR φίλτρου που ορίζεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = -y[n-5] + x[n] \quad (8.64)$$

- (i) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$.
- (ii) Πόσους πόλους έχει το σύστημα; Υπολογίστε και σχεδιάστε τις θέσεις των πόλων.
- (iii) Βρείτε και σχεδιάστε την έξοδο $y[n]$ του συστήματος, όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί το παλμικό σήμα:

$$x[n] = \begin{cases} +1 & \text{όταν } n = 0, 1 \\ 0 & \text{όταν } n \neq 0, 1 \end{cases}$$

Υποθέστε ότι η έξοδος του συστήματος είναι μηδέν για $n < 0$.

- (iv) Η έξοδος του συστήματος είναι περιοδική για $n > 0$. Βρείτε την περίοδο.

Πρόβλημα-8.20 Δοθέντος του IIR φίλτρου που ορίζεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = -0.9y[n-6] + x[n]$$

- (i) Βρείτε το μετασχηματισμό- z του συστήματος.
- (ii) Βρείτε τους πόλους του συστήματος και σχεδιάστε τις θέσεις τους πάνω στο επίπεδο- z .

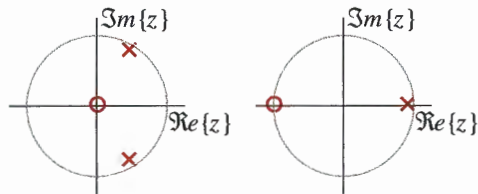
Πρόβλημα-8.21 Ορίστε ένα σήμα διακριτού χρόνου χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$y[n] = (0.99)^n \cos(2\pi(0.123)n + \phi)$$

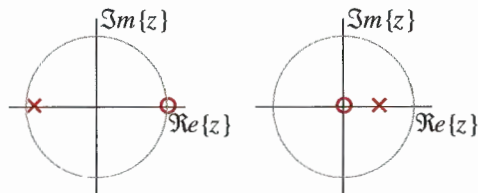
- (i) Σχεδιάστε την $y[n]$ για τις τιμές του n στο διάστημα $0 \leq n \leq 20$.
- (ii) Σχεδιάστε ένα IIR φίλτρο το οποίο θα δημιουργεί το σήμα $y[n]$. Δώστε την απάντησή σας σε μορφή μίας εξίσωσης διαφορών και τις ακριβείς τιμές των συντελεστών της. Υποθέστε ότι το σύστημα (το οποίο είναι σε ηρεμία, δηλαδή έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες) διεγείρεται από μια κρουστική ακολουθία.

Πρόβλημα-8.22 Αντιστοιχήστε κάθε γραφική παράσταση πόλων-μηδενικών (PZ 1-4) που φαίνονται στο Σχήμα Πρ.-8.22, με τη σωστή από τις πιθανές πέντε δεδομένες αποκρίσεις συχνότητας (ΣΤ-Ι). Στα διαγράμματα πόλων-μηδενικών οι πόλοι συμβολίζονται με **x** και τα μηδενικά με **o**.

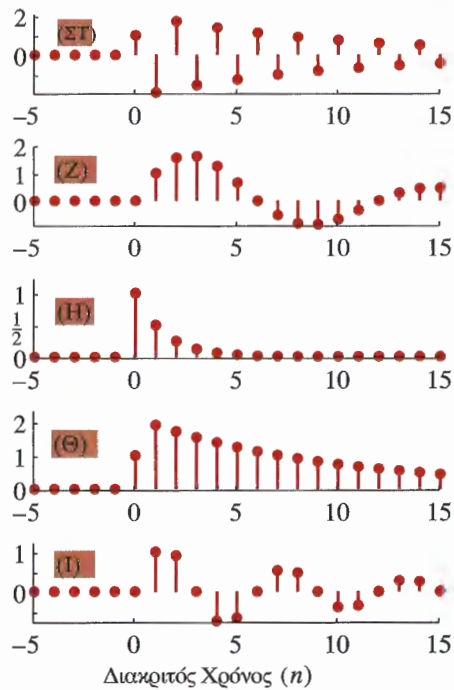
Πρόβλημα-8.23 Αντιστοιχήστε κάθε γραφική παράσταση πόλων-μηδενικών (PZ 1-4) που φαίνονται στο Σχήμα Πρ.-8.23, με τη σωστή από τις πιθανές πέντε δεδομένες αποκρίσεις συχνότητας (Α-Ε). Στα διαγράμματα πόλων-μηδενικών οι πόλοι συμβολίζονται με **x** και τα μηδενικά με **o**.



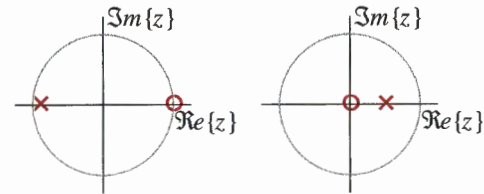
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών #1 Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών #2



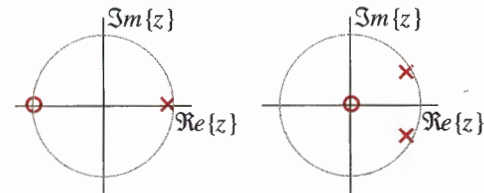
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών #3 Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών #4



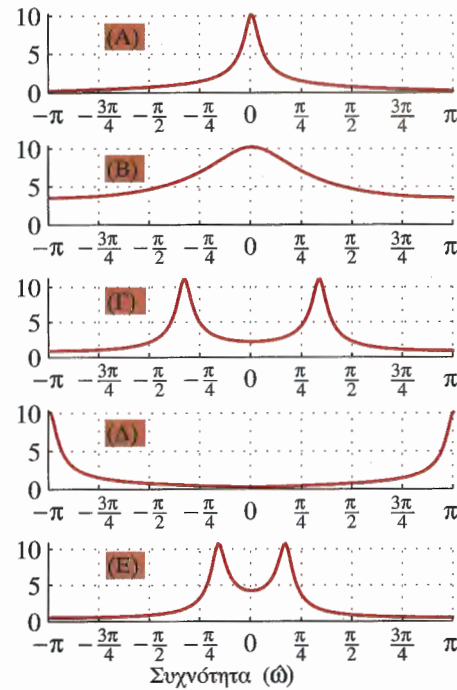
Σχήμα Πρ.-8.22



Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών #1 Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών #2



Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών #3 Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών #4



Σχήμα Πρ.-8.23

Σήματα και ΓΧΑ-Συστήματα Συνεχούς-Χρόνου

Αρχίσαμε αυτό το βιβλίο με μια εισαγωγή στα σήματα και τα συστήματα συνεχούς χρόνου και τώρα πρόκειται να επιστρέψουμε σε αυτό το θέμα. Στα Κεφάλαια 4-8, εστίασαμε την προσοχή μας στα σήματα και τα συστήματα διακριτού χρόνου σε θέματα όπως αυτό της δειγματοληψίας, των FIR φίλτρων, της απόκρισης συχνότητας και του μετασχηματισμού- z . Ενώ τα συστήματα διακριτού χρόνου έχουν πολλά πλεονεκτήματα, είναι γενικά αδύνατο να αποφευχθεί η χρήση των σημάτων και συστημάτων συνεχούς χρόνου δεδομένου ότι τα περισσότερα σήματα είναι σήματα συνεχούς χρόνου. Για παράδειγμα, τα μουσικά όργανα παράγουν σήματα συνεχούς χρόνου και τα μικρόφωνα μετατρέπουν τα ακουστικά κύμα σε ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό σήμα που μπορεί να υποβληθεί σε περαιτέρω επεξεργασία από ενισχυτές και φίλτρα. Όταν ένα σήμα μουσικής αποθηκεύεται σε ένα CD μετατρέπεται, με τη διαδικασία της δειγματοληψίας,

σε ένα σήμα διακριτού χρόνου. Ωστόσο, όταν ακούμε ένα σήμα μουσικής που έχει αποθηκευθεί στο CD σε ψηφιακή μορφή, είναι απαραίτητο να μετατραπούν τα δείγματα ξανά σε ένα σήμα συνεχούς χρόνου που μπορεί να υποβληθεί σε επεξεργασία από ένα άλλο σύστημα συνεχούς χρόνου, το ανθρώπινο αυτί. Ακόμα και όταν θέλουμε να εκτελέσουμε αναλογική επεξεργασία χρησιμοποιώντας ένα συνδυασμό, μετατροπέα από αναλογικό σε ψηφιακό, ψηφιακού φίλτρου και μετατροπέα από ψηφιακό σε αναλογικό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6-17 στη Σελίδα 167, η είσοδος $x(t)$ είναι ένα σήμα συνεχούς χρόνου και η έξοδος $y(t)$ είναι ένα άλλο σήμα συνεχούς χρόνου. Δεδομένου ότι η γενική επίδραση του συστήματος είναι ένας μετασχηματισμός από το $x(t)$ στο $y(t)$, θέλουμε να είμαστε σε θέση να περιγράψουμε και να αναλύσουμε αυτόν το μετασχηματισμό ανεξάρτητα από το γεγονός ότι εμείς μπορεί να χρησιμοποιήσαμε ένα ψηφιακό φίλτρο στην υλοποίησή μας.

Ένα άλλο ζήτημα είναι οι προδιαγραφές των συστημάτων επεξεργασίας από την άποψη της *ιδανικής* συμπεριφοράς των. Θα δούμε ότι συστήματα επικοινωνιών, όπως είναι τα ραδιοσυστήματα και τα συστήματα διαμορφωτών/αποδιαμορφωτών, μπορούν να δομηθούν από ιδανικά υποσυστήματα όπως είναι τα ιδανικά φίλτρα και οι διαμορφωτές. Το πλεονέκτημα αυτής της αφηρημένης προσέγγισης είναι ότι μπορούμε να αναλύσουμε τη συμπεριφορά του συστήματος πριν διευκρινίσουμε τις λεπτομέρειες της υλοποίησης των υποσυστημάτων. Κάποιος μπορεί να καλέσει αυτήν την προσέγγιση *αναλογική επεξεργασία σήματος*. Σε μερικές περιπτώσεις, η επιθυμητή υλοποίηση του συστήματος συνεχούς χρόνου μπορεί να περιλαμβάνει ένα αναλογικό ηλεκτρονικό κύκλωμα, σε άλλες περιπτώσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια ψηφιακή υλοποίηση.

Επομένως, είναι χρήσιμο να αναπτυχθεί ένα σύνολο εργαλείων για την ανάλυση των σημάτων και συστημάτων συνεχούς χρόνου, ειδικά στο πεδίο της συχνότητας. Ο *μετασχηματισμός Fourier* αποτελεί μια γενική μέθοδο για την περιγραφή του συχνοτικού περιεχομένου των σημάτων συνεχούς χρόνου, καθώς επίσης και την απόκριση συχνότητας αυτών των συστημάτων. Δίνει επίσης μια νέα προοπτική στη σχέση που υπάρχει μεταξύ των σημάτων και των συστημάτων συνεχούς και διακριτού χρόνου. Αυτός είναι ο στόχος των Κεφαλαίων 9-12.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα αρχίσουμε με μια ανασκόπηση των όσων αναφέραμε για τα ημιτονοειδή σήματα συνεχούς χρόνου και στη συνέχεια θα εισαγάγουμε διάφορα άλλα βασικά σήματα που είναι σημαντικά στη μελέτη των συστημάτων συνεχούς χρόνου. Θα κάνουμε επίσης μια ανασκόπηση των εννοιών της γραμμικότητας και της χρονικής αμεταβλητότητας και θα εισαγάγουμε τη συνελικτική αναπαράσταση των γραμμικών χρονικά αμετάβλητων (ΓΧΑ) συστημάτων. Μέρος της συζήτησής μας, θα αποτελέσει και το μοναδιαίο κρουστικό σήμα $\delta(t)$ καθώς και οι μαθηματικές ιδιότητές του. Αυτό το σήμα είναι απαραίτητο για να καθορίσει την κρουστική απόκριση των ΓΧΑ συστημάτων συνεχούς χρόνου.

Αυτό το κεφάλαιο, μαζί με τα Κεφάλαια 10 και

11, εστιάζει στη βασική θεωρία των σημάτων και των ΓΧΑ συστημάτων συνεχούς χρόνου. Ενώ αρχικά μπορεί να μας ξενίσει η ιδιαίτερα μαθηματική υφή των αποτελεσμάτων και μπορεί να μην είναι προφανές γιατί αυτά τα αποτελέσματα είναι χρήσιμα, είναι απαραίτητο να μπουν τα θεμέλια που αργότερα θα χρησιμοποιηθούν στην αναπαράσταση και την επίλυση των προβλημάτων που εμφανίζονται στη πράξη. Στα Κεφάλαια 12 και 13 θα συζητήσουμε ποικίλες εφαρμογές των βασικών εννοιών, συμπεριλαμβανομένων του φιλτραρίσματος, της διαμόρφωσης, της δειγματοληψίας και της ανάλυσης φάσματος. Η υπομονετική μελέτη και κατανόηση των θεμελιωδών αρχών αξίζει την προσπάθεια!

9-1 Σήματα Συνεχούς-Χρόνου

Τα σήματα συνεχούς-χρόνου μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις μιας συνεχούς ανεξάρτητης μεταβλητής. Ένα σήμα συνεχούς-χρόνου το συμβολίζουμε με $x(t)$. Η ανεξάρτητη μεταβλητή, t , γενικά συνδέεται με το χρόνο, αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει πάντα. Για παράδειγμα, η θεωρία και οι τεχνικές που αναπτύσσουμε ισχύουν και σε άλλες περιπτώσεις όπως για παράδειγμα στην επεξεργασία εικόνας όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή συμβολίζει την απόσταση.

Είναι χρήσιμο να ταξινομηθούν τα σήματα συνεχούς-χρόνου σε σχέση με τη διάρκειά τους, ή το μήκος τους. Για τους σκοπούς μας, θα ορίσουμε το μήκος του σήματος να είναι το μικρότερο χρονικό διάστημα που περιέχει όλες τις μη μηδενικές τιμές του σήματος. Στα μαθηματικά, το διάστημα αυτό καλείται *Ενεργός περιοχή* του σήματος.

9-1.1 Δίπλευρα Άπειρου Μήκους Σήματα

Στα Κεφάλαια 2 και 3, μελετήσαμε διάφορους τύπους σημάτων άπειρου μήκους που ήταν επίσης περιοδικά σήματα. Δώσαμε έμφαση στα ημιτονοειδή σήματα της μορφής

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (9.1)$$

τα οποία μπορούν να αναπαρασταθούν, όπως είδαμε, ως το πραγματικό μέρος του μιγαδικού εκθετικού σήματος

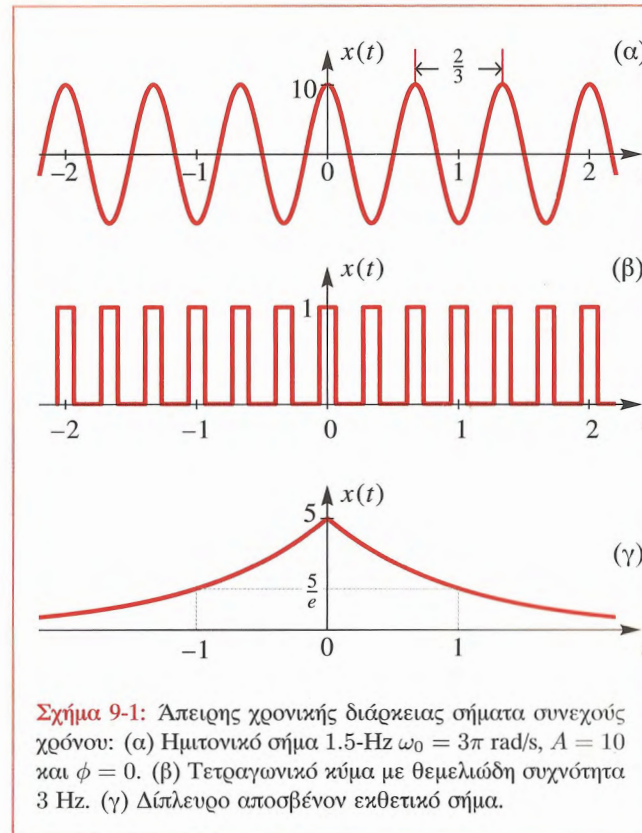
$$\begin{aligned} z(t) &= X e^{j\omega_0 t} = A e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} \\ &= A \cos(\omega_0 t + \phi) + j A \sin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned} \quad (9.2)$$

όπου το μιγαδικό πλάτος είναι ίσο με $A e^{j\phi}$. Και στις δύο Σχέσεις (9.1) και (9.2), το σήμα παριστάνεται από μια εξίσωση που ουσιαστικά αποτελεί έναν κανόνα για την εκχώρηση τιμών του σήματος για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής t στο διάστημα $-\infty < t < \infty$. Μια άλλη κοινή αναπαράσταση αυτών των σημάτων είναι μια γραφική παράσταση όπως αυτή του Σχήματος 9-1(α).

Μια ευρύτερη κατηγορία σημάτων άπειρου μήκους είναι η κατηγορία περιοδικών σημάτων που ικανοποιούν τη σχέση $x(t) = x(t + T_0)$, όπου T_0 η περίοδος επανάληψής τους. Ένα γνωστό παράδειγμα περιοδικού σήματος είναι το τετραγωνικό κύμα που παρουσιάζεται στο Σχήμα 9-1 (β) η περίοδος του οποίου είναι $T_0 = \frac{1}{3}$ sec. Τέλος, είναι δυνατό να υπάρξει ένα σήμα άπειρου μήκους που δεν είναι περιοδικό. Ένα παράδειγμα είναι το εκθετικά αποσβένον σήμα $x(t) = 5e^{-|t|}$ που έχει μη μηδενικές τιμές σε όλο το διάστημα, $-\infty < t < \infty$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9-1 (γ). Τα σήματα του Σχήματος 9-1 καλούνται συχνά **Δίπλευρα σήματα** επειδή παίρνουν μη μηδενικές τιμές και για θετικές αλλά και για αρνητικές χρονικές στιγμές.

9-1.2 Μονόπλευρα Σήματα

Τα μονόπλευρα σήματα έχουν την ιδιότητα ότι το $x(t) = 0$ σε ένα ήμι-άπειρο διάστημα. Για παράδειγμα, ένα σήμα μπορεί να είναι μηδέν για $t < t_0$, οπότε σ' αυτή την περίπτωση καλείται **σήμα δεξιάς επέκτασης** επειδή η γραφική του παράσταση αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = t_0$ και εκτείνεται προς τα δεξιά ως το άπειρο. Τα μονόπλευρα σήματα είναι απαραίτητα επειδή τα περισσότερα σήματα που δημιουργούμε έχουν μια καθορισμένη έναρξη που συνήθως επιλέγουμε να είναι η χρονική στιγμή $t = 0$. Για παράδειγμα, ένας διακόπτης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να συνδέσει ένα σήμα με ένα σύστημα, αλλά πριν από το κλείσιμο του διακόπτη το σύστημα δεν έχει καμία είσοδο,



Σχήμα 9-1: Άπειρης χρονικής διάρκειας σήματα συνεχούς χρόνου: (α) Ημιτονικό σήμα 1.5-Hz $\omega_0 = 3\pi$ rad/s, $A = 10$ και $\phi = 0$. (β) Τετραγωνικό κύμα με θεμελιώδη συχνότητα 3 Hz. (γ) Δίπλευρο αποσβένον εκθετικό σήμα.

έτσι το σήμα εισόδου του είναι πρακτικά μηδέν. Για να αναπαραστήσουμε αυτήν την κατάσταση με μαθηματικά, είναι πολύ χρήσιμο να ορίσουμε το **συνεχούς χρόνου μοναδιαίο βηματικό** σήμα σύμφωνα με τη μαθηματική εξίσωση¹

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (9.3)$$

¹Η τιμή της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι διφορούμενη. Μερικοί συγγραφείς ορίζουν $u(0) = \frac{1}{2}$, αλλά εμείς έχουμε επιλέξει $u(0) = 1$. Σε κάθε περίπτωση, θα υπάρξουν καταστάσεις όπου η τιμή $u(0)$ εμφανίζεται να είναι διφορούμενη. Το γεγονός αυτό δεν είναι πρόβλημα, αφού τα μαθηματικά μας λένε ότι η τιμή μιας συνάρτησης σε ένα απομονωμένο σημείο δεν είναι σημαντική.

το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 9-2 (α). Το μοναδιαίο βηματικό σήμα αν και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλές περιπτώσεις, συνήθως χρησιμοποιείται για να πολλαπλασιάσει άλλα σήματα δημιουργώντας με τον τρόπο αυτό νέα σήματα τα οποία παίρνουν την πρώτη μη μηδενική τιμή τους τη χρονική στιγμή $t = 0$. Για παράδειγμα στο Σχήμα 9-2 (β), ένα ημιτονοειδές σήμα που “αρχίζει” τη χρονική στιγμή $t = 0$ μπορεί να παρασταθεί ως ακολούθως:

$$x(t) = 10 \cos(3\pi t - \pi/4)u(t) \quad (9.4)$$

και ομοίως, το μονόπλευρο εκθετικό σήμα

$$v(t) = 5e^{-at}u(t) = \begin{cases} 5e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (9.5)$$

θα φαινόταν όπως αυτό στο Σχήμα 9-2 (γ) για $a = 1$.

Παράδειγμα 9-1: Ολίσθηση του Μοναδιαίου Βηματικού Σήματος

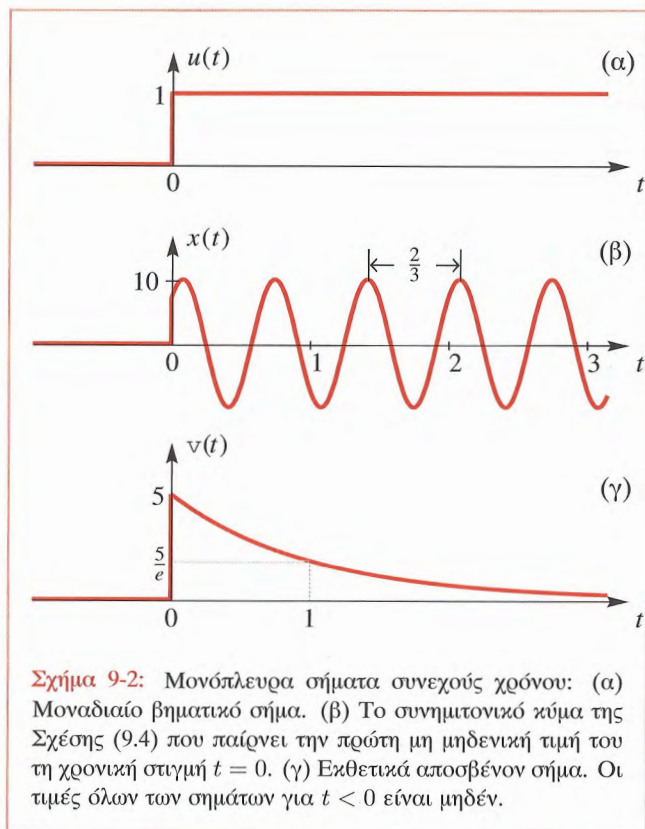
Προκειμένου να πάρουμε μια διαφορετική αρχική χρονική στιγμή, μπορούμε να ορίσουμε το ολισθημένο μοναδιαίο βηματικό σήμα, π.χ., $x(t) = u(t-7)$. Γενικεύοντας τον ορισμό του μοναδιαίου βηματικού σήματος, έχουμε ότι

$$x(t) = u(t-7) = \begin{cases} 1 & (t-7) \geq 0 \\ 0 & (t-7) < 0 \end{cases}$$

Επομένως, το σήμα $x(t)$ είναι μηδέν για χρονικές στιγμές $t < 7$, και παίρνει την πρώτη μη μηδενική τιμή του τη χρονική στιγμή $t = 7$. ■

9-1.3 Σήματα Πεπερασμένου Μήκους

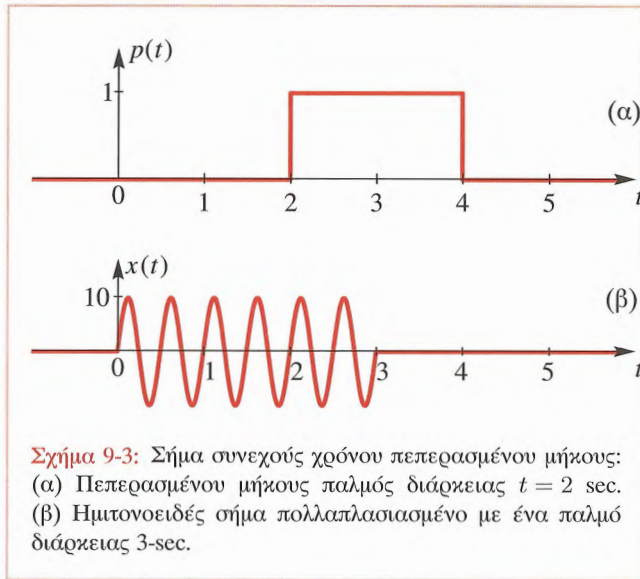
Η κατηγορία των σημάτων πεπερασμένου μήκους περιέχει σήματα όπως είναι οι βραχύβιοι παλμοί που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μεταφέρουν δυαδικές πληροφορίες. Το Σχήμα 9-3(α) παρουσιάζει ένα παλμό διάρκειας δύο δευτερολέπτων που αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 2$ και τελειώνει τη χρονική στιγμή $t = 4$.



Σχήμα 9-2: Μονόπλευρα σήματα συνεχούς χρόνου: (α) Μοναδιαίο βηματικό σήμα. (β) Το συνημιτονικό κύμα της Σχέσης (9.4) που παίρνει την πρώτη μη μηδενική τιμή του τη χρονική στιγμή $t = 0$. (γ) Εκθετικά αποσβένον σήμα. Οι τιμές όλων των σημάτων για $t < 0$ είναι μηδέν.

Όπως στην περίπτωση του σήματος $u(t)$, ένας παλμός πεπερασμένου μήκους μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πολλαπλασιάσει ένα άλλο σήμα και να παραχθεί μια βραχύβια ριπή του σήματος, π.χ., το πεπερασμένου μήκους ημιτονοειδές που φαίνεται στο Σχήμα 9-3(β).

Υπάρχει μια απλή σχέση μεταξύ του μοναδιαίου βηματικού σήματος $u(t)$ και των παλμών πεπερασμένου μήκους: οι μετατοπισμένες εκδόσεις του μοναδιαίου βηματικού σήματος μπορούν να αφαιρεθούν για να παραχθεί ένα σήμα πεπερασμένου μήκους. Κατά συνέπεια, το παλμικό σήμα $p(t) = u(t-2) - u(t-4)$ έχει τιμές που



δίνονται από την ακόλουθη σχέση:

$$p(t) = u(t-2) - u(t-4) = \begin{cases} 1 & 2 \leq t < 4 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (9.6)$$

Το σήμα αυτό φαίνεται στο Σχήμα 9-3(α). Ένας εναλλακτικός τρόπος να γραφτεί ο παλμός πεπερασμένου μήκους συναρτήσει του $u(t)$ είναι να χρησιμοποιηθεί η έννοια του γινομένου σημάτων (δές Πρόβλημα.-9.1).



Άσκηση 9.1: Χρησιμοποιώντας τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t)$, γράψτε έναν τύπο, παρόμοιο με αυτό της Σχέσης (9.6), για το ημιτονοειδές σήμα πεπερασμένου μήκους του Σχήματος 9-3(β) για να δείξετε την πεπερασμένη διάρκειά του.

9-2 Μοναδιαία Κρουστική Συνάρτηση

Στην ενότητα αυτή θα εισάγουμε μια χρήσιμη έννοια, ένα παλμό του οποίου η διάρκεια εμφανίζεται να είναι τόσο

σύντομη που αρχίζει και τελειώνει την ίδια χρονική στιγμή. Θα ονομάσουμε αυτό το σήμα **Μοναδιαίο Κρουστικό** σήμα.

Θυμηθείτε ότι στην περίπτωση του διακριτού χρόνου, ορίσαμε τη μοναδιαία κρουστική ακολουθία ως

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

δηλαδή, είναι η διακριτού χρόνου ακολουθία που παίρνει μόνο μια μη μηδενική τιμή. Ίσως η σημαντικότερη χρήση της ακολουθίας $\delta[n]$ είναι ο ρόλος της ως εισόδου δοκιμής για να παραγάγει την κρουστική απόκριση $h[n]$ των FIR και IIR συστημάτων. Η κρουστική απόκριση $h[n]$ χαρακτηρίζει πλήρως ένα διακριτού χρόνου ΓΧΑ σύστημα μέσω του συνελκτικού αθροίσματος της Σχέσης (5.11) στη Σελίδα 123.

Για τα συστήματα συνεχούς χρόνου, θα επιθυμούσαμε να έχουμε ένα παρόμοιο σήμα δοκιμής που θα διέγειρε στιγμιαία το σύστημα και θα μας έδινε μια “κρουστική απόκριση” που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να χαρακτηρίσει το σύστημα συνεχούς χρόνου στην περίπτωση που αυτό είναι ΓΧΑ. Όπως η ακολουθία $\delta[n]$, ο παλμός συνεχούς χρόνου θα πρέπει να είναι ένα σήμα πολύ μικρής διάρκειας, συγκεντρωμένο γύρω από τη χρονική στιγμή μηδέν. Ωστόσο, ο ακόλουθος ορισμός δεν είναι αποτελεσματικός

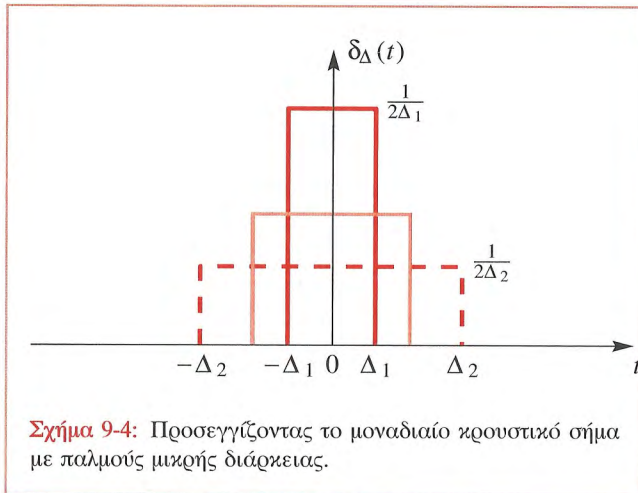
$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{OXI!} \quad (9.7)$$

διότι το σήμα αυτό δεν είναι ρωμαλέο-και το ολοκλήρωμά του είναι μηδέν. Αντί αυτού, θα περιγράψουμε το σήμα $\delta(t)$ σαν ένα σήμα που είναι μηδέν παντού εκτός από τη χρονική στιγμή $t = 0$, αλλά που συγχρόνως ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (9.8)$$

Η παραπάνω εξίσωση δεν ορίζει κατ' ουσία τρόπο την

τιμή του σήματος $\delta(t)$ στο $t = 0$, αλλά ορίζει μια αναγκαία ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιεί το κρουστικό σήμα $\delta(t)$ ².



Δεδομένου ότι είναι προβληματικό να ορίσουμε μια συνάρτηση μιας συνεχούς μεταβλητής να είναι μη μηδενική σε ένα μόνο απομονωμένο σημείο, πρέπει να υιοθετήσουμε μια έμμεση προσέγγιση και να ορίσουμε την κρουστική συνάρτηση σαν το όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων που συγκεντρώνονται όλο και περισσότερο σε ένα σημείο. Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας ακολουθίας είναι η

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta} & -\Delta < t < \Delta \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (9.9)$$

η οποία ορίζει ένα παλμό του οποίου το εύρος και το ύψος είναι 2Δ και $1/(2\Delta)$ αντίστοιχα. Όσο η τιμή της παραμέτρου Δ προσεγγίζει το μηδέν, τόσο μειώνεται

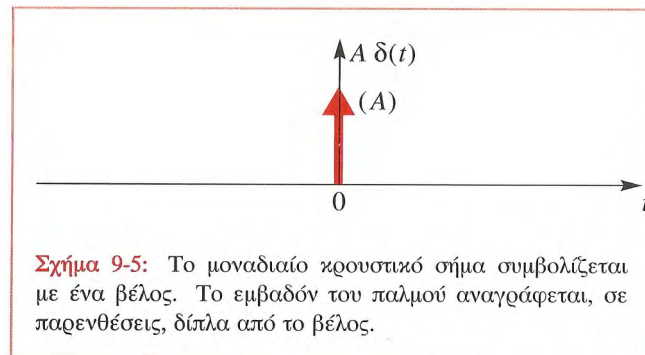
²Το μοναδιαίο κρουστικό σήμα για την περίπτωση των συνεχούς χρόνου σημάτων είναι δύσκολο να ορισθεί διότι δεν είναι μια σνηθισμένη, με τη μαθηματική έννοια, συνάρτηση. Αυτό σημαίνει, ότι δεν είναι μια καλώς ορισμένη συνάρτηση όπως οι ημιτονικές ή οι εκθετικές συναρτήσεις. Για αυτό το λόγο περιγράφουμε τις επιθυμητές ιδιότητες της κρουστικής συνάρτησης και τις χρησιμοποιούμε για το μαθηματικό ορισμό της.

το εύρος του παλμού και αυξάνεται το ύψος του. Στο Σχήμα 9-4 απεικονίζονται παραδείγματα της $\delta_{\Delta}(t)$ για τρεις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου Δ . Κάθε ένα από αυτά τα σήματα έχει την ιδιότητα ότι το συνολικό εμβαδόν του είναι 1, ανεξαρτήτως της τιμής της παραμέτρου Δ , έτσι έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\Delta}(\tau) d\tau = 1 \quad (9.10)$$

Το όριο της συνάρτησης $\delta_{\Delta}(t)$ καθώς το $\Delta \rightarrow 0$ γίνεται μηδέν παντού εκτός από το $t=0$ όπου η τιμή της προσεγγίζει το ∞ . Η παρατήρηση αυτή μας βοηθάει στο να ορίσουμε διαισθητικά το μοναδιαίο κρουστικό σήμα

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) \quad (9.11)$$



Πιο σημαντικό από την οριακή τιμή, είναι το γεγονός ότι το συνολικό εμβαδόν της $\delta_{\Delta}(t)$ παραμένει σταθερό και ίσο με τη μονάδα ανεξάρτητα της τιμής της παραμέτρου Δ . Αυτή η ιδιότητα του μοναδιαίου εμβαδού ισχύει³ και για

³Η ιδιότητα του μοναδιαίου εμβαδού προϋποθέτει ότι είναι αληθής η ακόλουθη μαθηματική έκφραση $\int \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int \delta_{\Delta}(t) dt$.

το όριο (9.11), επομένως συμπεραίνουμε ότι το **μοναδιαίο κρουστικό σήμα** έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\delta(t) = 0 \quad \text{για } t \neq 0 \quad (9.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (9.13)$$

Για τη γραφική παράσταση του μοναδιαίου κρουστικού σήματος, θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό που φαίνεται στο Σχήμα 9-5, στο οποίο παρουσιάζεται το $\delta(t)$ ως μια κάθετη γραμμή με βέλος στην κορυφή της. Το εμβαδόν (ή “μέγεθος”) του κρουστικού σήματος (9.13) αναγράφεται σαν A σε παρένθεση δίπλα στο βέλος. Εάν γράψουμε $A\delta(t)$, λέμε ότι το εμβαδόν ή το μέγεθος αυτού του κλιμακωμένου κρουστικού σήματος είναι A επειδή

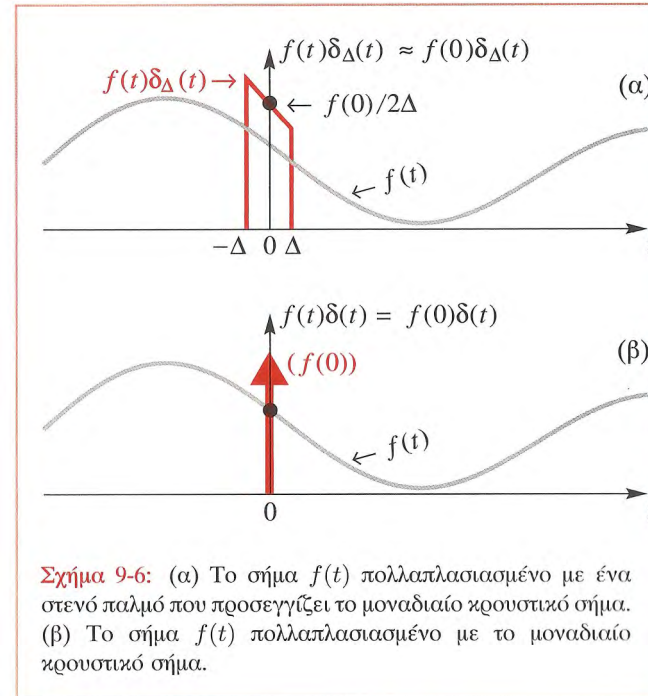
$$\int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t) dt = A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = A$$

9-2.1 Δειγματοληψία και Κρουστικό Σήμα

Αν και οι Σχέσεις (9.12) και (9.13) φαίνονται επαρκείς για τον ορισμό του κρουστικού σήματος, μπορούμε να αναπτύξουμε έναν καλύτερο ορισμό διατυπώνοντας την **ιδιότητα δειγματοληψίας** του κρουστικού σήματος $\delta(t)$. Αφού το κρουστικό σήμα συγκεντρώνεται γύρω από τη χρονική στιγμή $t = 0$, ας δούμε τι συμβαίνει όταν πολλαπλασιάσουμε ένα κρουστικό σήμα με ένα συνεχές σήμα $f(t)$. Όπως και προηγουμένως χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\delta_{\Delta}(t)$ και δημιουργούμε το γινόμενο

$$f(t)\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} f(t)/2\Delta & -\Delta < t < \Delta \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Στο Σχήμα 9-6(α) φαίνεται ένα συνεχές σήμα $f(t)$ και το γινόμενο $f(t)\delta_{\Delta}(t)$. Αυτό το σχήμα δείχνει ότι στο όριο καθώς το $\Delta \rightarrow 0$, η μοναδική τιμή του $f(t)$ που μετέχει στο



γινόμενο είναι η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή $t = 0$. Απ' αυτό συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} f(t)\delta(t) &= f(t) \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} f(t)\delta_{\Delta}(t) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} f(0)\delta_{\Delta}(t) = f(0)\delta(t) \end{aligned} \quad (9.14)$$

Δηλαδή, όταν ένα κρουστικό σήμα πολλαπλασιάζεται με ένα συνεχές σήμα, η τιμή του συνεχούς σήματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ “δειγματοληπείται” από το σήμα και παίρνουμε ένα κρουστικό σήμα του οποίου το εμβαδόν κλιμακώνεται κατά $f(0)$. Ο συμβολισμός στη Σχέση (9.14) μπορεί να προκαλεί σύγχυση, αλλά τονίζουμε ότι στο δεξιό μέλος της σχέσης πρέπει να περιλαμβάνεται το κρουστικό σήμα και ότι το **εμβαδόν του κρουστικού σήματος** μεταφέρει την τιμή του δείγματος.

Αν επιθυμούμε να βρούμε την πραγματική τιμή του σήματος $f(t)$ τη χρονική στιγμή $t = 0$, τότε πρέπει να ολοκληρώσουμε την (9.14):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt \\ &= f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0) \end{aligned} \quad (9.15)$$

Αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα 9-6(β) όπου η τιμή ($f(0)$) τοποθετείται δίπλα στο βέλος για να δηλώσει το εμβαδόν του κρουστικού σήματος.

Η ιδιότητα δειγματοληψίας μπορεί να γενικευτεί αν χρησιμοποιήσουμε την έννοια της χρονικής ολίσθησης. Το χρονικά ολισθημένο κρουστικό σήμα $\delta(t - t_0)$, καλείται “κρουστικό σήμα κατά τη χρονική στιγμή t_0 .” Εάν δημιουργήσουμε το γινόμενο $f(t)\delta(t - t_0)$, το κρουστικό σήμα συγκεντρώνεται γύρω από τη χρονική στιγμή $t = t_0$, και έτσι παίρνουμε

Ιδιότητα Δειγματοληψίας του Κρουστικού Σήματος

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \quad (9.16)$$

και επίσης την ολοκληρωτική μορφή της *Ιδιότητας δειγματοληψίας*

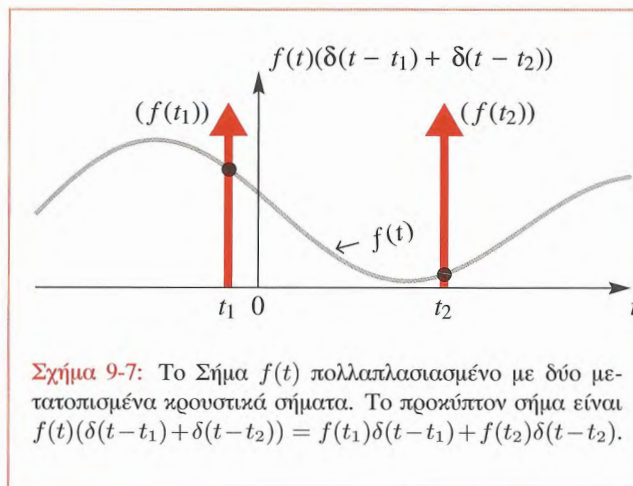
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$$

$$(9.17)$$

η οποία είναι αληθής διότι το ολοκλήρωμα του μετατοπισμένου κρουστικού σήματος είναι και πάλι ίσο με μονάδα. Το Σχήμα 9-7 δείχνει δειγματοληψία με δύο μετατοπισμένα κρουστικά σήματα στο $t = t_1$ και $t = t_2$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 9-2: Δειγματοληψώντας με το Κρουστικό Σήμα

Υποθέστε ότι μας ζητείται να απλοποιήσουμε την



ακόλουθη έκφραση $\sin(20\pi t)\delta(t - \frac{1}{80})$. Η ιδιότητα δειγματοληψίας (9.16) επιτρέπει να κάνουμε την ακόλουθη απλοποίηση:

$$\begin{aligned} \sin(20\pi t)\delta(t - \frac{1}{80}) &= \sin[20\pi(\frac{1}{80})]\delta(t - \frac{1}{80}) \\ &= \sin(0.25\pi)\delta(t - \frac{1}{80}) \\ &= 0.707\delta(t - \frac{1}{80}) \end{aligned}$$

Αυτό που θα πρέπει να παρατηρήσουμε είναι ότι μια συνεχής συνάρτηση (στην περίπτωση μας το $\sin(20\pi t)$) πολλαπλασιαζόμενη με ένα κρουστικό σήμα γίνεται ένα κρουστικό σήμα του οποίου το μέγεθος εξαρτάται μόνο από την τιμή της συνεχούς συνάρτησης στη χρονική θέση συγκέντρωσης του κρουστικού σήματος. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα, έχουμε επίσης ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(20\pi t)\delta(t - \frac{1}{80})dt = 0.707$$

αφού τα όρια του ολοκληρώματος περιλαμβάνουν τη χρονική θέση συγκέντρωσης του κρουστικού σήματος. ■

9-2.2 Αυστηρός Μαθηματικός Ορισμός

Το κρουστικό σήμα δεν είναι συνάρτηση, παρόλο που ορισμένες από τις ιδιότητές του προτρέπουν προς αυτή την κατεύθυνση. Ένας αυστηρός ορισμός του κρουστικού σήματος απαιτεί μια μαθηματική θεωρία που είναι γνωστή ως “θεωρία κατανομών.” Στη θεωρία αυτή το κρουστικό σήμα ορίζεται σαν μια οντότητα η οποία παριστάνει τη διαδικασία της δειγματοληψίας. Για μας, ο καλύτερος ορισμός του κρουστικού σήματος θα μπορούσε να είναι η ολοκληρωτική μορφή της ιδιότητας δειγματοληψίας όπως αυτή διατυπώνεται στη Σχέση (9.17). Στην πραγματικότητα, ένα κρουστικό σήμα θα πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο μέσα σε ένα ολοκλήρωμα από το οποίο μπορεί να προκύψει ένας αριθμός. Δηλαδή, αυτό που έχει σημασία είναι το εμβαδόν του κρουστικού σήματος $\delta(t - t_0)$ και όχι η (μη πεπερασμένη) τιμή του τη χρονική στιγμή $t = t_0$.

9-2.3 Πραγματικότητα

Στην πραγματικότητα, δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα αληθινό κρουστικό σήμα με ηλεκτρονικό εξοπλισμό, αλλά αυτό δεν μειώνει τη χρησιμότητα της ιδέας του κρουστικού σήματος. Εφαρμογές όπως το φλας της φωτογραφικής μηχανής και των συσκευών διαμόρφωσης/αποδιαμόρφωσης δεδομένων υψηλών ταχυτήτων απαιτούν εξαιρετικά βραχύβιους παλμούς. Επιπλέον, ήδη έχουμε δει ότι η κρουστική απόκριση χαρακτηρίζει πλήρως ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα. Έτσι είναι σημαντικό να είμαστε σε θέση να μετρήσουμε τη κρουστική απόκριση στο εργαστήριο με πραγματικά βραχύβια παλμικά σήματα. Στην Ενότητα 9-7.4 θα δείξουμε ότι ένας βραχύβιος παλμός, που είναι μια τυπική μαθηματική συνάρτηση, όταν εφαρμοστεί στην είσοδο ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος παράγει μια έξοδο που ουσιαστικά ταυτίζεται με τη θεωρητικά αναμενόμενη κρουστική απόκριση του συστήματος.

9-2.4 Παράγωγος του Μοναδιαίου Βηματικού Σήματος

Στο μαθηματικό λογισμό μαθαίνουμε ότι δεν είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας ασυνεχούς

συνάρτησης. Ωστόσο, οι κρουστικές συναρτήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επεκτείνουν την έννοια της διαφορίσης και στις ασυνεχείς συναρτήσεις. Στην ενότητα αυτή θα αναδείξουμε τη στενή σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο κρουστικό σήμα $\delta(t)$ και το μοναδιαίο βηματικό σήμα $u(t)$. Καταρχήν, πρέπει να δηλώσουμε μια γενικευμένη “ιδιότητα εμβαδού” για το κρουστικό σήμα

$$\int_a^b \delta(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{αν } a < 0 \text{ και } b \geq 0 \\ 0 & \text{αν } a \geq 0 \text{ ή } b < 0 \end{cases} \quad (9.18)$$

όπου υποθέτουμε ότι $b > a^4$. Η γενίκευση αυτή είναι λογική διότι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα είναι το εμβαδόν αυτού που ολοκληρώνουμε μεταξύ των ορίων της ολοκλήρωσης. Δεδομένου ότι το $\delta(t)$ είναι συγκεντρωμένο γύρω από τη χρονική στιγμή $t = 0$, το εμβαδόν θα πρέπει να είναι μονάδα όταν το κρουστικό σήμα $\delta(t)$ βρίσκεται μεταξύ των ορίων της ολοκλήρωσης.

Τώρα μπορούμε να βρούμε τη σχέση μεταξύ του κρουστικού σήματος και του μοναδιαίου βηματικού σήματος. Θεωρήστε το ακόλουθο ολοκλήρωμα του $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (9.19)$$

Από τη γενικευμένη ιδιότητα εμβαδού (9.18) παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{αν } t \geq 0 \\ 0 & \text{αν } t < 0 \end{cases} \quad (9.20)$$

Το δεξιό μέλος της σχέσης ταυτίζεται με τον ορισμό του μοναδιαίου βηματικού σήματος $u(t)$ στη Σχέση (9.3) της Σελίδας 271, επομένως

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (9.21)$$

⁴Η περίπτωση κατά την οποία ένα εκ των ορίων είναι μηδέν είναι απροσδιόριστη. Έτσι, για να είμαστε συνεπείς με τον ορισμό του μοναδιαίου βηματικού σήματος $u(t)$, κάνουμε μια τυχαία διάκριση στη Σχέση (9.18).

Χρησιμοποιώντας τώρα το θεμελιώδες Θεώρημα του λογισμού σύμφωνα με το οποίο

$$g(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau \implies f(t) = \frac{d}{dt} g(t)$$

$$\delta(t - t_0) = \frac{d}{dt} u(t - t_0) \quad (9.23)$$

$$u(t - t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau \quad (9.24)$$

Το Σχήμα 9-8 δείχνει ένα μετατοπισμένο και κλιμακωμένο βηματικό σήμα και την παράγωγό του, η οποία είναι ένα μετατοπισμένο κρουστικό σήμα.

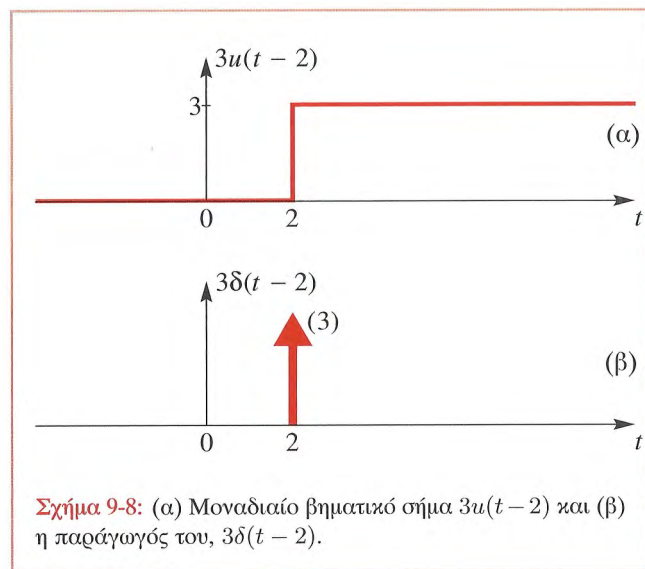
Οπλισμένοι με τη δυνατότητα της διαφορίσης ασυνεχών σημάτων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του γινομένου από το λογισμό για να πάρουμε την παράγωγο του σήματος $x(t) = f(t)u(t)$ το οποίο είναι ασυνεχές τη χρονική στιγμή $t = 0$ αν και η $f(t)$ είναι διαφορίσιμη. Το σήμα $x(t)$ θα κάνει ένα άλμα από το 0 ακριβώς πριν τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο $f(0+)$ ακριβώς στην άλλη πλευρά του $t = 0$ ⁵. Αν παραγωγίσουμε το $x(t)$ χρησιμοποιώντας το γνωστό από το λογισμό κανόνα του γινομένου και εφαρμόσουμε την ιδιότητα δειγματοληψίας (9.14) του κρουστικού σήματος, παίρνουμε⁶

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = f(t) \frac{du(t)}{dt} + u(t) \frac{df(t)}{dt} \\ &= f(t) \delta(t) + \frac{df(t)}{dt} u(t) \\ &= f(0) \delta(t) + \frac{df(t)}{dt} u(t) \end{aligned}$$

Επομένως, η παράγωγος ενός ασυνεχούς σήματος περιέχει ένα κρουστικό σήμα του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με το μέγεθος της ασυνέχειας του σήματος και την τυπική παράγωγο του σήματος σε όλες τις άλλες χρονικές στιγμές t που το σήμα είναι συνεχές. Αν η ασυνέχεια αντιστοιχεί σε αρνητικό άλμα, τότε και το εμβαδόν του κρουστικού σήματος θα είναι αρνητικό.

⁵Ο συμβολισμός $f(0+)$ σημαίνει $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$, αλλά προσεγγίζοντας μόνο από θετικές τιμές.

⁶Ο συμβολισμός ⁽¹⁾ δηλώνει την πρώτη παράγωγο.



Σχήμα 9-8: (α) Μοναδιαίο βηματικό σήμα $3u(t - 2)$ και (β) η παράγωγός του, $3\delta(t - 2)$.

καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το κρουστικό σήμα συμπεριφέρεται όπως η παράγωγος του βηματικού σήματος

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t) \quad (9.22)$$

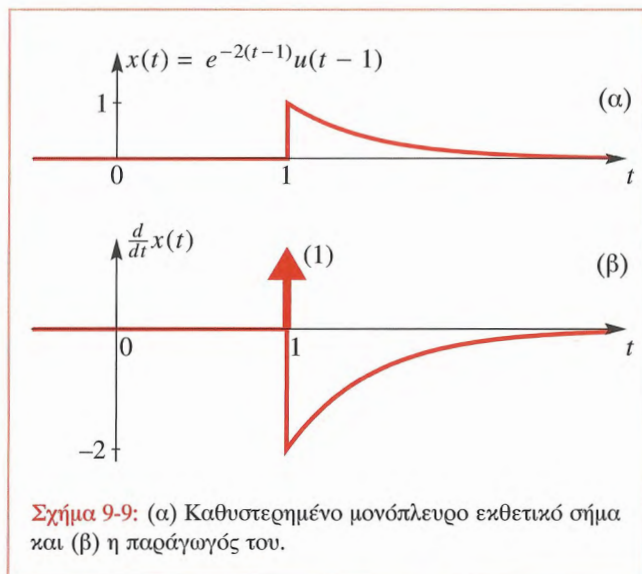
Με μια γρήγορη ματιά στην παραπάνω ανάλυση, είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι όλες οι ιδιότητες ισχύουν και για ένα μετατοπισμένο κρουστικό σήμα

Παράδειγμα 9-3: Παράγωγος Ασυνεχούς
Συνάρτησης

Θεωρήστε το σήμα $x(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1)$ το οποίο είναι ασυνεχές στο $t = 1$. Η παράγωγός του είναι

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= e^{-2(t-1)}\frac{du(t-1)}{dt} + u(t-1)\frac{de^{-2(t-1)}}{dt} \\ &= e^{-2(t-1)}\delta(t-1) - 2e^{-2(t-1)}u(t-1) \\ &= e^0\delta(t-1) - 2e^{-2(t-1)}u(t-1)\end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση αυτού του σήματος φαίνεται στο Σχήμα 9-9. Σχήματα αυτού του είδους είναι πολύ χρήσιμα διότι δείχνουν ότι κάθε ασυνέχεια μιας συνάρτησης δημιουργεί μια κρουστική συνάρτηση στην παράγωγό της, της οποίας το μέγεθος είναι ίσο με το μέγεθος της ασυνέχειας της συνάρτησης. ■



9-3 Συστήματα Συνεχούς Χρόνου

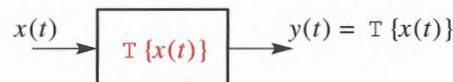
Τα συστήματα συνεχούς χρόνου είναι φυσικά φαινόμενα ή συσκευές φτιαγμένες από τον άνθρωπο, που μετασχηματίζουν ένα συνεχούς χρόνου σήμα σε ένα άλλο. Από μαθηματική άποψη, λέμε ότι το σύστημα *λειτουργεί* πάνω στο σήμα εισόδου $x(t)$ για να παράξει το σήμα εξόδου $y(t)$ και αυτό το συμβολίζουμε ως εξής:

$$y(t) = T\{x(t)\} \quad (9.25)$$

όπου $T\{\cdot\}$ είναι μια γενική συμβολική αναπαράσταση του τελεστή εισόδου-εξόδου που περιγράφει το σύστημα. Δηλαδή, $T\{\cdot\}$ είναι ένας μαθηματικός κανόνας που εκχωρεί ένα σήμα εισόδου σ' ένα σήμα εξόδου. Μερικές φορές είναι δυνατόν να δηλώνουμε αυτόν τον κανόνα με λόγια, αλλά στη γενική περίπτωση χρειαζόμαστε ένα μαθηματικό τύπο για να ορίσουμε τον τρόπο που παράγεται από το $x(t)$ το $y(t)$. Όπως στην περίπτωση των συστημάτων διακριτού χρόνου, ένας άλλος συμβολισμός είναι ο ακόλουθος

$$x(t) \mapsto y(t) \quad (9.26)$$

ο οποίος αποδίδει το γεγονός ότι το σήμα $y(t)$ είναι



Σχήμα 9-10: Σχηματικό διάγραμμα αναπαράστασης ενός συστήματος συνεχούς χρόνου.

η έξοδος του συστήματος όταν το σήμα $x(t)$ είναι η είσοδος. Μια τρίτη αναπαράσταση δείχνει το σήμα εισόδου να οδηγείται μέσω ενός σχηματικού διαγράμματος που περιέχει το σύμβολο για το μετασχηματισμό $T\{\cdot\}$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 9-10.

9-3.1 Μερικά Βασικά Συστήματα Συνεχούς Χρόνου

Ένα απλό παράδειγμα ενός συστήματος συνεχούς χρόνου είναι το σύστημα *τετραγώνου* που ορίζεται από την ακόλουθη σχέση εισόδου-εξόδου

$$y(t) = [x(t)]^2 \quad (9.27)$$

η οποία δηλώνει ότι η τιμή του σήματος εξόδου τη χρονική στιγμή t είναι ίση με το τετράγωνο της τιμής του σήματος εισόδου την ίδια χρονική στιγμή. Μερικά άλλα συστήματα που έχουν απλούς μαθηματικούς ορισμούς είναι το σύστημα *ιδανικής καθυστέρησης* που ορίζεται από τη σχέση

$$y(t) = x(t - t_d) \quad (9.28)$$

όπου t_d είναι η χρονική καθυστέρηση του συστήματος και ο *ιδανικός διαφοριστής*, που ορίζεται από τη Σχέση

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (9.29)$$

Τέλος, έχουμε τον *ιδανικό ολοκληρωτή*, ο οποίος ορίζεται ως το σύστημα του οποίου η είσοδος και η έξοδος ικανοποιούν την ακόλουθη εξίσωση

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (9.30)$$

Οι ολοκληρωτές είναι χρήσιμα μοντέλα σε μια ποικιλία συστημάτων συνεχούς χρόνου όπως οι πυκνωτές και οι τελεστικοί ενισχυτές στα ηλεκτρικά κυκλώματα.

Σε κάθε μια από τις τέσσερις περιπτώσεις που αναφερθήκαμε, ο κανόνας που υπάρχει ανάμεσα στην είσοδο και την έξοδο θα μπορούσε να έχει διατυπωθεί με λέξεις, σε μορφή κανόνα. Ωστόσο, συνηθίζεται να μετατρέπουμε τον κανόνα σε μια μαθηματική εξίσωση για να διευκολύνουμε την ανάλυση της λειτουργίας του συστήματος.

9-3.2 Συνεχούς Χρόνου Έξοδοι

Αν μας δίνεται ο κανόνας για τον τελεστή του συστήματος, τις περισσότερες φορές είναι εύκολο να καθοριστεί η έξοδος άπαξ και η είσοδος είναι γνωστή. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι η είσοδος στο σύστημα τετραγώνου είναι $x(t) = -3u(t - 2)$. Τότε το σήμα εξόδου είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= [-3u(t - 2)]^2 \\ &= 9[u(t - 2)]^2 = 9u(t - 2) \end{aligned}$$

Επειδή το μοναδιαίο βηματικό σήμα είναι είτε μηδέν είτε ένα, υψώνοντας στο τετράγωνο το $u(t - 2)$ θα πάρουμε επίσης μηδέν ή ένα.

Η έξοδος του συστήματος καλείται *απόκριση* του συστήματος. Μια ιδιαίτερη απόκριση είναι αρκετά σημαντική. Αυτή (η απόκριση) είναι η *κρουστική απόκριση*, που είναι η έξοδος όταν η είσοδος είναι το $x(t) = \delta(t)$. Για παράδειγμα, η κρουστική απόκριση του ιδανικού ολοκληρωτή μπορεί να βρεθεί αντικαθιστώντας $\delta(t)$ στη Σχέση (9.30)

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Το αποτέλεσμα της Σχέσης (9.21) μας λέει ότι η κρουστική απόκριση του ιδανικού ολοκληρωτή είναι, στην πραγματικότητα, το μοναδιαίο βηματικό σήμα.

Αναφερόμαστε τόσο συχνά στην κρουστική απόκριση που αφιερώνουμε ένα ιδιαίτερο συμβολισμό για το σήμα αυτό. Όταν η είσοδος είναι το κρουστικό σήμα, αντί του $y(t)$, η έξοδος του συστήματος συμβολίζεται με $h(t)$.

Επομένως για τον ιδανικό ολοκληρωτή θα λέγαμε ότι $h(t) = u(t)$.

9-3.3 Αντίστοιχα Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Θυμηθείτε ότι στο Κεφάλαιο 5, έχουμε ορίσει ήδη στη Σχέση (5.14) της Σελίδας 129 τη διακριτού χρόνου εκδοχή

του συστήματος τετραγώνων χρησιμοποιώντας έναν τύπο παρόμοιο με αυτό της Σχέσης (9.27) για τη συσχέτιση της ακολουθίας εισόδου με την έξοδο. Στη Σελίδα 122 με τη Σχέση (5.9), ορίσαμε ένα ιδανικό σύστημα καθυστέρησης διακριτού χρόνου με την παράμετρο χρονικής μετατόπισης να περιορίζεται σε ακέραιο αριθμό δειγμάτων. Αφ' ετέρου, ενώ ο ιδανικός διαφοριστής μοιάζει με το σύστημα διαφορών πρώτης τάξης, η ομοιότητα βέβαια δεν είναι τέλεια δεδομένου ότι η διαφύριση είναι μια διαδικασία που αναφέρεται σε συνεχή μεταβλητή και περιλαμβάνει την έννοια του ορίου. Ο ιδανικός ολοκληρωτής της Σχέσης (9.30) μοιάζει με ένα διακριτού χρόνου σύστημα "τρέχοντος αθροίσματος" που ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (9.31)$$

Το σύστημα που ορίζεται από τη σχέση αυτή ονομάζεται επίσης σύστημα *συσσωρευτής* αφού κατά τον υπολογισμό του δείγματος εξόδου $y[n]$ αθροίζει (ή συσσωρεύει) τις τιμές της ακολουθίας εισόδου μέχρι, συμπεριλαμβανομένης και, της χρονικής στιγμής n . Ο αθροιστής απλώς αθροίζει αριθμούς και αυτό γίνεται εύκολα σε υλικό με ψηφιακή αριθμητική. Ο ολοκληρωτής επίσης αθροίζει τις προηγούμενες τιμές του σήματος εισόδου, αλλά αθροίζει με την επανειληφτική έννοια του ολοκληρώματος κατά Riemann.

9-4 Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

Ακριβώς όπως στην περίπτωση των συστημάτων διακριτού χρόνου, μπορούμε να μελετήσουμε τα συστήματα συνεχούς χρόνου. Στην Ενότητα 5-5, του Κεφαλαίου 5 που αναφέρεται στα *FIR φίλτρα*, αναφερθήκαμε στις ιδιότητες της γραμμικότητας και της χρονικής αμεταβλητότητας και επιβάλλοντας τις δύο αυτές ιδιότητες στα συστήματα διακριτού χρόνου, δείξαμε ότι αυτοί οι δύο περιορισμοί οδηγούν στο ακόλουθο *συνελικτικό άθροισμα*

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad -\infty < n < \infty \quad (9.32)$$

μια γενική αναπαράσταση που ισχύει για όλα τα γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα (ΓΧΑ) συστήματα διακριτού χρόνου. Στην ενότητα αυτή, θα δούμε ότι η γραμμικότητα και η χρονική-αμεταβλητότητα οδηγούν σε μια γενική σχέση ανάμεσα στη είσοδο και την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος συνεχούς χρόνου. Η σχέση αυτή είναι το *συνελικτικό ολοκλήρωμα*.

9-4.1 Χρονική-Αμεταβλητότητα

Υποθέστε ότι ένα σύστημα συνεχούς χρόνου αναπαρίσταται ως ακολούθως

$$x(t) \mapsto y(t) \quad (9.33)$$

Το σύστημα αυτό είναι *χρονικά αμετάβλητο* αν, η καθυστέρηση του σήματος εισόδου κατά ένα αυθαίρετο χρονικό διάστημα t_0 , έχει σαν μοναδικό αποτέλεσμα την καθυστέρηση της εξόδου κατά το ίδιο χρονικό διάστημα. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της Σχέσης (9.33) η συνθήκη της χρονικής-αμεταβλητότητας είναι η ακόλουθη

$$x(t - t_0) \mapsto y(t - t_0) \quad (9.34)$$

Η συνθήκη αυτή θα πρέπει να ικανοποιείται για *κάθε* σήμα $x(t)$ και για *κάθε* πραγματικό αριθμό t_0 . Στο Σχήμα 5-16 στη Σελίδα 130 παρουσιάζεται μια μέθοδος με την οποία μπορούμε να ελέγξουμε τη χρονική-αμεταβλητότητα ενός συστήματος διακριτού χρόνου.

Παράδειγμα 9-4: Το Σύστημα του Τετραγώνου είναι Χρονικά Αμετάβλητο

Θεωρήστε το σύστημα της Σχέσης (9.27). Όταν η είσοδος είναι $x(t)$, η έξοδος είναι $y(t) = [x(t)]^2$. Αν τώρα η είσοδος είναι η $x(t - t_0)$, η αντίστοιχη έξοδος θα είναι $w(t) = [x(t - t_0)]^2$. Επομένως, βλέπουμε ότι $w(t) = y(t - t_0)$ και επομένως το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. ■

**Παράδειγμα 9-5:** *Ο Ολοκληρωτής είναι Χρονικά Αμετάβλητος*

Το σύστημα του ολοκληρωτή είναι επίσης χρονικά αμετάβλητο. Για να το αποδείξουμε, αντικαθιστούμε το $x(\tau)$ στη Σχέση (9.30) με το $x(\tau - t_0)$ και παίρνουμε την έξοδο $w(t)$

$$w(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau - t_0) d\tau \quad (9.35)$$

Για να αποδείξουμε τώρα τη χρονική-αμεταβλητότητα, πρέπει να γράψουμε το ολοκλήρωμα της Σχέσης (9.35) σε μια μορφή που να περιέχει την αρχική έξοδο $y(t)$. Αυτό γίνεται αντικαθιστώντας την “εικονική μεταβλητή” ολοκλήρωσης με το $\sigma = \tau - t_0$. Με αυτήν την αλλαγή της μεταβλητής, το $d\tau$ αντικαθίσταται από το $d\sigma$, το κάτω όριο $\tau = -\infty$ γίνεται $\sigma = -\infty$ και το πάνω όριο γίνεται $\sigma = t - t_0$. Επομένως η (9.35) γράφεται ως ακολούθως

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\sigma) d\sigma$$

τώρα είναι φανερό ότι $w(t) = y(t - t_0)$ και έτσι το σύστημα του ολοκληρωτή είναι χρονικά αμετάβλητο. ■

**Παράδειγμα 9-6:** *Ένα Χρονικά-μεταβαλλόμενο Σύστημα*

Ως ένα τρίτο παράδειγμα, θεωρήστε το σύστημα διαμόρφωσης πλάτους που ορίζεται από τη σχέση

$$y(t) = x(t) \cos(\omega_c t) \quad (9.36)$$

Ένα τέτοιο σύστημα αποτελεί το βασικό στοιχείο πολλών ράδιο συστημάτων. Για να κάνουμε έλεγχο χρόνο-αμεταβλητότητας, εφαρμόζουμε την είσοδο $x(t - t_0)$ παίρνοντας στην έξοδο το σήμα $w(t) = x(t - t_0) \cos(\omega_c t)$, το οποίο δεν είναι ίσο με το $y(t - t_0)$ διότι για να βρούμε $y(t - t_0)$, πρέπει όπου εμφανίζεται η μεταβλητή t στη

Σχέση (9.36) να αντικατασταθεί από το $(t - t_0)$. Έτσι παίρνουμε $x(t - t_0) \cos[\omega_c(t - t_0)]$. Επομένως, το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο ή πιο σωστά είναι ένα χρονικά-μεταβαλλόμενο σύστημα. ■



Άσκηση 9.2: Η είσοδος και η έξοδος ενός συστήματος ικανοποιούν τη σχέση $y(t) = x(t - t_d)$ όπου t_d είναι η καθυστέρηση του συστήματος. Δείξτε ότι το σύστημα χρονικής καθυστέρησης είναι ένα σύστημα χρονικά αμετάβλητο.

9-4.2 Γραμμικότητα

Ένα σύστημα συνεχούς χρόνου είναι γραμμικό αν όταν $x_1(t) \mapsto y_1(t)$ και $x_2(t) \mapsto y_2(t)$, τότε

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \\ &\mapsto y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \end{aligned} \quad (9.37)$$

Η Σχέση (9.37) εκφράζει την αρχή της υπέρθεσης για τα γραμμικά συστήματα συνεχούς χρόνου. Στο Σχήμα 5-17 της Σελίδας 131 παρουσιάζεται μια διαδικασία με την οποία μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα σύστημα διακριτού χρόνου είναι γραμμικό. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία στα συστήματα συνεχούς χρόνου.

**Παράδειγμα 9-7:** *Το Σύστημα Τετραγώνου είναι Μη-γραμμικό*

Το σύστημα τετραγώνου δεν είναι ένα γραμμικό σύστημα, δηλαδή, είναι ένα μη-γραμμικό σύστημα. Για να το αποδείξετε, παρατηρήστε ότι αν $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, η αντίστοιχη έξοδος είναι

$$y(t) = [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]^2$$

και μετά από μερικές πράξεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha^2 [x_1(t)]^2 + 2\alpha\beta x_1(t)x_2(t) + \beta^2 [x_2(t)]^2 \\ &\neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \end{aligned}$$


όπου $y_1(t) = [x_1(t)]^2$ και $y_2(t) = [x_2(t)]^2$. Επομένως, το σύστημα είναι μη-γραμμικό. ■

Παράδειγμα 9-8: Ο ολοκληρωτής είναι Γραμμικός

Το σύστημα του ολοκληρωτή είναι ένα γραμμικό σύστημα. Για να το αποδείξετε, παρατηρήστε ότι αν $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, η αντίστοιχη έξοδος είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t [\alpha x_1(\tau) + \beta x_2(\tau)] d\tau \\ &= \alpha \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau + \beta \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau \\ &= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \end{aligned}$$

Επομένως, το σύστημα του ολοκληρωτή είναι ένα γραμμικό σύστημα. ■

 **Άσκηση 9.3:** Το σύστημα του διαφοριστή ορίζεται από την ακόλουθη σχέση εισόδου/εξόδου

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Δείξτε ότι το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ).

9-4.3 Το Συνελικτικό Ολοκλήρωμα

Όταν ένα σύστημα συνεχούς χρόνου είναι και γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ), τότε είναι αληθής η ακόλουθη γενική πρόταση :

Κάθε ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από ένα συνελικτικό ολοκλήρωμα.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (9.38)$$

όπου $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος και $x(t)$, $y(t)$ είναι η είσοδος και η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος αντίστοιχα. Η συνέλιξη (9.38) είναι μια πράξη ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις $x(t)$ και $h(t)$ που παράγει μια τρίτη συνάρτηση $y(t)$ που ορίζεται για κάθε τιμή t στο διάστημα, $-\infty < t < \infty$. Συνήθως η πράξη αυτή συμβολίζεται $y(t) = x(t) * h(t)$ και δηλώνει ότι η “ $x(t)$ συνελίσσεται με την $h(t)$.” Σπεύδουμε να σημειώσουμε ότι ο τελεστικός συμβολισμός $x(t) * h(t)$ μπορεί ορισμένες φορές να είναι παραπλανητικός αφού καλύπτει το γεγονός ότι όταν γράφουμε $y(t)$ στην πραγματικότητα εννοούμε “την τιμή της συνάρτησης y τη χρονική στιγμή t .” Βρίσκουμε την τιμή αυτή της $y(t)$ υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

το οποίο εξαρτάται από την παράμετρο t . Για να βρούμε όλες τις τιμές της συνάρτησης y , πρέπει να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα για κάθε t . Επομένως, ένας καλύτερος συμβολισμός θα μπορούσε να είναι $y = x * h$, δηλώνοντας ότι η συνάρτηση y προκύπτει από τη συνέλιξη των δύο συναρτήσεων x και h . Ωστόσο, γενικά ο συμβολισμός $y(t) = x(t) * h(t)$ χρησιμοποιείται έχοντας την ίδια έννοια με το συμβολισμό της Σχέσης (9.38) χωρίς να επιφέρει μεγάλη σύγχυση.

Καταρχήν, παρατηρήστε ότι το συνελικτικό ολοκλήρωμα είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα και τα όρια $-\infty$ και ∞ στον ορισμό (9.38) σημαίνουν ότι η ολοκλήρωση πρέπει να γίνει πάνω σε όλες τις περιοχές που ο ολοκληρωτέος $x(\tau)h(t-\tau)$ είναι μη μηδενικός. Σε ορισμένες περιπτώσεις, τα όρια μπορεί να είναι πεπερασμένα, σε άλλες περιπτώσεις αυτά μπορεί να είναι συναρτήσεις του t . Επιπλέον, οι μεταβλητές t και τ παίζουν εντελώς διαφορετικούς ρόλους. Η μεταβλητή τ είναι μια “εικονική μεταβλητή” του ολοκληρώματος. Η μεταβλητή αυτή μετά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος εξαφανίζεται ενώ, η μεταβλητή t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης $y(t)$ και παίρνει όλες τις τιμές στο διάστημα $-\infty < t < \infty$. Στο ολοκλήρωμα, το t είναι μια σταθερά, και έτσι

ουσιαστικά, πρέπει να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα για κάθε διαφορετική τιμή του t . Θα συζητήσουμε λεπτομερώς για τον υπολογισμό του συνελικτικού ολοκληρώματος στην Ενότητα 9-7.

Μιλώντας αυστηρά, η δήλωση στη Σχέση (9.38) θα έπρεπε να παραφραστεί ως ακολούθως: “Ένα σύστημα είναι ΓΧΑ αν και μόνο αν η έξοδος του μπορεί να εκφραστεί σε μορφή συνέλιξης.” Δεν θα αποδείξουμε ότι η παραπάνω πρόταση αποτελεί αναγκαία συνθήκη αλλά μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι το συνελικτικό ολοκλήρωμα παριστάνει ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα. Ας υποθέσουμε καταρχήν ότι $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$. Τότε η αντίστοιχη έξοδος είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha x_1(\tau) + \beta x_2(\tau)]h(t-\tau)d\tau \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)h(t-\tau)d\tau + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \end{aligned}$$

Επομένως, η συνέλιξη ενός σήματος εισόδου $x(t)$ με την κρουστική απόκριση του συστήματος $h(t)$ είναι μια γραμμική λειτουργία.

Για να επιβεβαιώσουμε ότι η συνέλιξη είναι ένας χρονικά αμετάβλητος τελεστής, αντικαταστήστε την είσοδο με $x(\tau - t_0)$ και εξετάστε την έξοδο που προκύπτει

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t_0)h(t - \tau)d\tau$$

Αντικαθιστώντας την εικονική μεταβλητή ολοκλήρωσης με $\sigma = \tau - t_0$, μετασχηματίζουμε το ολοκλήρωμα ως

ακολούθως

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)h(t - \sigma - t_0)d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)h((t - t_0) - \sigma)d\sigma = y(t - t_0) \end{aligned}$$

Επομένως, η συνέλιξη είναι χρονικά αμετάβλητη και γραμμική και επομένως η (9.38) ορίζει ένα ΓΧΑ σύστημα. Άρα, μια ισοδύναμη πρόταση με την (9.38) είναι η ακόλουθη:

*Για κάθε ΓΧΑ σύστημα, η έξοδος του $y(t)$ είναι πάντα ίση με το $x(t) * h(t)$, δηλαδή τη συνέλιξη του σήματος εισόδου $x(t)$ με τη κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.*

Επομένως, αν γνωρίζουμε τη κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συνελικτικό ολοκλήρωμα για να υπολογίσουμε την έξοδο του συστήματος για **οποιοδήποτε** σήμα εισόδου.

Παράδειγμα 9-9: Συνέλιξη Μοναδιαίων Βηματικών Σημάτων

Όταν η κρουστική απόκριση είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση, $h(t) = u(t)$ και η είσοδος είναι ένα μοναδιαίο βηματικό σήμα, $x(t) = u(t)$, το συνελικτικό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t - \tau)d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\infty} 1u(t-\tau)d\tau \\
 &= \int_0^t 1d\tau = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (9.39)
 \end{aligned}$$

Το πάνω όριο γίνεται t επειδή $u(t-\tau) = 1$ όταν $t-\tau \geq 0$, ή $\tau \leq t$. Η Σχέση (9.39) μπορεί να γραφεί συνοπτικά ως ακολούθως

$$u(t) * u(t) = tu(t) \quad (9.40)$$

Το σήμα $tu(t)$ ονομάζεται σήμα *μοναδιαίας κλίσης* διότι αυξάνεται γραμμικά με κλίση ίση με τη μονάδα.

Το παράδειγμα αυτό επισημαίνει ότι πριν προβούμε στον υπολογισμό του ολοκληρώματος θα πρέπει να κάνουμε τους κατάλληλους χειρισμούς στα όρια του ολοκληρώματος. ■

9-4.4 Ιδιότητες της Συνέλιξης

Ο τελεστής συνέλιξη επομένως και η κατηγορία των ΓΧΑ συστημάτων συνεχούς χρόνου, έχει διάφορες χρήσιμες μαθηματικές ιδιότητες που μας επιτρέπουν να χειριστούμε και να απλοποιήσουμε πολύπλοκα ΓΧΑ συστήματα. Συγκεκριμένα, η συνέλιξη είναι *αντιμεταθετική, προσεταιριστική και επιμεριστική ως προς την πρόσθεση*. Αυτές οι ιδιότητες είναι ανάλογες με τις ιδιότητες των συνηθισμένων τελεστών του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης, καθώς επίσης και της συνέλιξης διακριτού χρόνου.

Αντιμεταθετικότητα: Η ιδιότητα της αντιμετάθεσης εκφράζεται ως ακολούθως

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (9.41)$$

δηλαδή, μπορούμε να καθορίσουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος από τη συνέλιξη του $x(t)$ με την $h(t)$ ή αντίστροφα. Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται αντικαθιστώντας στο συνελικτικό ολοκλήρωμα το $\sigma = t-\tau$ και το $d\sigma = -d\tau$

και κάνοντας τους ακόλουθους χειρισμούς:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
 &= \int_{\infty}^{-\infty} x(t-\sigma)h(\sigma)(-d\sigma) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\sigma)h(\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)x(t-\sigma)d\sigma
 \end{aligned}$$

Θυμηθείτε ότι η αλλαγή του προσήμου ενός ορισμένου ολοκληρώματος αναστρέφει τη σειρά των ορίων ολοκλήρωσης. Η τελευταία έκφραση της $y(t)$ είναι εξ ορισμού $h(t) * x(t)$ και επομένως αποδείξαμε την αντιμεταθετικότητα της συνέλιξης.

Προσεταιριστικότητα: Ένας τελεστής όπως είναι ο συνελικτικός είναι προσεταιριστικός αν:

$$[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] \quad (9.42)$$

Δηλαδή, εάν έχουμε μια συνέλιξη τριών συναρτήσεων, μπορούμε να εκτελέσουμε τις συνελίξεις με οποιαδήποτε σειρά. Αυτό είναι ακριβώς όπως στην πράξη του πολλαπλασιασμού όπου οι αριθμοί (ή συναρτήσεις) μπορούν να πολλαπλασιαστούν με οποιαδήποτε σειρά επιθυμούμε. Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας, σε αυτό το σημείο της συζήτησής μας, θα απαιτούσε κουραστικούς χειρισμούς σε ένα διπλό ολοκλήρωμα. Ωστόσο, στην Ενότητα 9-8 θα δείξουμε πώς αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει με ένα φυσικό και εύκολο τρόπο στο χειρισμό ΓΧΑ συστημάτων συνδεδεμένων σε σειρά.

Επιμεριστική ως προς την Πρόσθεση: Η συνέλιξη ικανοποιεί επίσης τη σχέση

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \quad (9.43)$$

Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας είναι απλή αν θυμηθούμε ότι η συνέλιξη είναι μια γραμμική διαδικασία. Επομένως,

η συνέλιξη του $x(t)$ με το άθροισμα $h_1(t) + h_2(t)$ πρέπει να ισούται με το άθροισμα των επιμέρους συνέλιξεων.

Το Ταυτοτικό Στοιχείο της Συνέλιξης: Το πρόβλημα της εύρεσης του ταυτοτικού στοιχείου της συνέλιξης έγγειται στην εύρεση του $x(t)$ έτσι ώστε να ισχύει η ακόλουθη εξίσωση:

$$x(t) * h(t) = h(t) \quad (9.44)$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η απάντηση στο πρόβλημά μας είναι το μοναδιαίο κρουστικό σήμα αντικαθιστώντας το $x(t) = \delta(t)$ στο συνελικτικό ολοκλήρωμα (9.38) και εφαρμόζοντας την ιδιότητα δειγματοληψίας του κρουστικού σήματος για να πάρουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) h(t - \tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) h(t - 0) d\tau \\ &= h(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = h(t) \end{aligned}$$

Στην παραπάνω απόδειξη, μπορούμε να βγάλουμε έξω από το ολοκλήρωμα την $h(t)$ διότι η μεταβλητή t είναι μια ανεξάρτητη παράμετρος διαφορετική από το τ , την εικονική μεταβλητή ολοκλήρωσης.

Μπορούμε τώρα να συνοψίσουμε για το ταυτοτικό στοιχείο της συνέλιξης, επειδή μόλις αποδείξαμε ότι

$$\delta(t) * h(t) = h(t) \quad (9.45)$$

Δηλαδή, το κρουστικό σήμα είναι το ταυτοτικό σήμα της συνέλιξης, όπως η μονάδα (1) είναι το ταυτοτικό στοιχείο του συνηθισμένου πολλαπλασιασμού. Μια άλλη ερμηνεία της (9.45) είναι ότι η έξοδος (η απόκριση) του ΓΧΑ συστήματος που οφείλεται στη μοναδιαία κρουστική είσοδο είναι η $h(t)$, αλλά ήδη το γνωρίζαμε αυτό από τον ορισμό της κρουστικής απόκρισης!

9-5 Κρουστικές Αποκρίσεις Βασικών ΓΧΑ Συστημάτων

Αν ένα σύστημα είναι ΓΧΑ, χαρακτηρίζεται πλήρως από την κρουστική απόκριση του $h(t)$. Πρακτικά,

μπορεί να απαιτείται μέτρηση της κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος πειραματικά χρησιμοποιώντας έναν πολύ βραχύβιο παλμό που προσεγγίζει το κρουστικό σήμα. Σε άλλες περιπτώσεις, για να βρούμε την $h(t)$ πρέπει να λύσουμε δύσκολες μαθηματικές εξισώσεις. Στην ενότητα αυτή, “θα μετρήσουμε” τις κρουστικές αποκρίσεις διάφορων απλών ΓΧΑ συστημάτων εφαρμόζοντας απλά το κρουστικό σήμα $\delta(t)$ ως είσοδο στο σύστημα για να παραγάγουμε την έξοδο.

9-5.1 Ολοκληρωτής

Ο ολοκληρωτής ορίστηκε με την ακόλουθη σχέση εισόδου-εξόδου⁷

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x^{(-1)}(t)$$

Η κρουστική απόκριση αυτού του συστήματος είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση όπως παρουσιάστηκε προηγουμένως στην Εξίσωση (9.21). Κατά συνέπεια, μπορούμε να παραστήσουμε τον ολοκληρωτή λειτουργικά ως εξής:

*Η Τρέχουσα Τιμή του Ολοκληρώματος
ενός σήματος είναι ισοδύναμη
με τη συνέλιξη του σήματος
με το μοναδιαίο βηματικό σήμα.*

$$x(t) * u(t) = x^{(-1)}(t)$$

(9.46)

9-5.2 Διαφοριστής

Το σύστημα του διαφοριστή ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x^{(1)}(t)$$

και είναι ένα ΓΧΑ σύστημα. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία που ακολουθήσαμε στην περίπτωση του

⁷Το (-1) συμβολίζει την πρώτη αντι-παράγωγο, δηλαδή, ολοκλήρωμα.

ολοκληρωτή και αν αντικαταστήσουμε το $x(t)$ με $\delta(t)$, παίρνουμε

$$h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} = \delta^{(1)}(t)$$

Η απάντηση στο ερώτημα “ποια είναι η παράγωγος ενός κρουστικού σήματος;” μπορεί να δοθεί με διαδικασίες ορίων. Ωστόσο, η έννοια του συνελικτικού τελεστή μας δίνει τη δυνατότητα για μια χρήσιμη ερμηνεία. Παρατηρώντας απλά ότι αφού η $\delta^{(1)}(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος διαφύρισης, ο ακόλουθος ορισμός πρέπει να είναι αληθής:

*Διαφύριση είναι η συνέλιξη
με την παράγωγο ενός κρουστικού σήματος.*

$$x(t) * \delta^{(1)}(t) = x^{(1)}(t) \quad (9.47)$$

Το σήμα $\delta^{(1)}(t)$ ονομάζεται **ζευγοειδές** (doublet).

Παράδειγμα 9-10: Συνέλιξη με το Ζευγοειδές

Η συνέλιξη του μοναδιαίου βηματικού σήματος με το doublet

$$y(t) = u(t) * \delta^{(1)}(t)$$

μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη Σχέση (9.47) και την ιδιότητα (9.22) της παραγώγου της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης, δηλαδή,

$$y(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

9-5.3 Ιδανική Καθυστέρηση

Το σύστημα ιδανικής καθυστέρησης ορίστηκε προηγουμένως ως το σύστημα του οποίου η έξοδος προκύπτει από την είσοδο μέσω της σχέσης

$$y(t) = x(t - t_d)$$

όπου t_d είναι η χρονική καθυστέρηση σε δευτερόλεπτα. Αντικαθιστώντας $x(t) = \delta(t)$ προκύπτει ότι η κρουστική απόκριση του συστήματος ιδανικής καθυστέρησης είναι η

$$h(t) = \delta(t - t_d)$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση ενός συστήματος ιδανικής καθυστέρησης είναι μια χρονικά καθυστερημένη κρουστική συνάρτηση, ή “μια κρουστική συνάρτηση τη χρονική στιγμή $t = t_d$.” Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό μας, η είσοδος συνελίσσεται με την $h(t)$ για να μας δώσει την έξοδο. Έτσι το αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο

*Η χρονική ολίσθηση συμπίπτει
με συνέλιξη με μια
ολισθημένη κρουστική συνάρτηση.*

$$x(t) * \delta(t - t_d) = x(t - t_d). \quad (9.48)$$

Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα που πρέπει να αντιμετωπιστεί ως μια από τις θεμελιώδεις ιδιότητες της κρουστικής συνάρτησης.

9-6 Συνέλιξη Κρουστικών Συναρτήσεων

Με την ιδιότητα της χρονικής ολίσθησης της Σχέσης (9.48), είναι σχετικά εύκολο να εκτελεσθεί η συνέλιξη σημάτων που περιέχουν μόνο κρουστικά σήματα. Στην πραγματικότητα, η περίπτωση αυτή είναι όμοια με την περίπτωση της συνέλιξης σημάτων διακριτού χρόνου, εκτός του ότι τα κρουστικά σήματα δεν είναι απαραίτητο να ισαπέχουν. Παραθέτουμε στη συνέχεια το βασικό θεώρημα το οποίο χρειαζόμαστε:

Συνέλιξη Κρουστικών Σημάτων

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - (t_1 + t_2)) \quad (9.49)$$

Δηλαδή, από τη συνέλιξη δύο μετατοπισμένων κρουστικών σημάτων κατά t_1 και t_2 αντίστοιχα προκύπτει ένα κρουστικό σήμα μετατοπισμένο κατά το άθροισμα, $t = t_1 + t_2$.

Για να δούμε ότι ισχύει αυτό, αρκεί να επικαλεστούμε τη Σχέση (9.48), δηλαδή,

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t - t_2) &= x(t - t_2) \\ \implies \delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) &= \delta((t - t_2) - t_1) \\ &= \delta(t - (t_1 + t_2)) \end{aligned}$$

στην οποία έχουμε αντικαταστήσει την $x(t)$ με την $\delta(t - t_1)$.

Παράδειγμα 9-11: Συνέλιξη Κρουστικών Σημάτων

Συνδυάζοντας το θεώρημα συνέλιξης κρουστικών σημάτων με την ιδιότητα της γραμμικότητας, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε προβλήματα όπως αυτό που ακολουθεί, στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της συνέλιξης των δύο ακόλουθων σημάτων:

$$x(t) = \delta(t - 5) + \delta(t + 5)$$

και

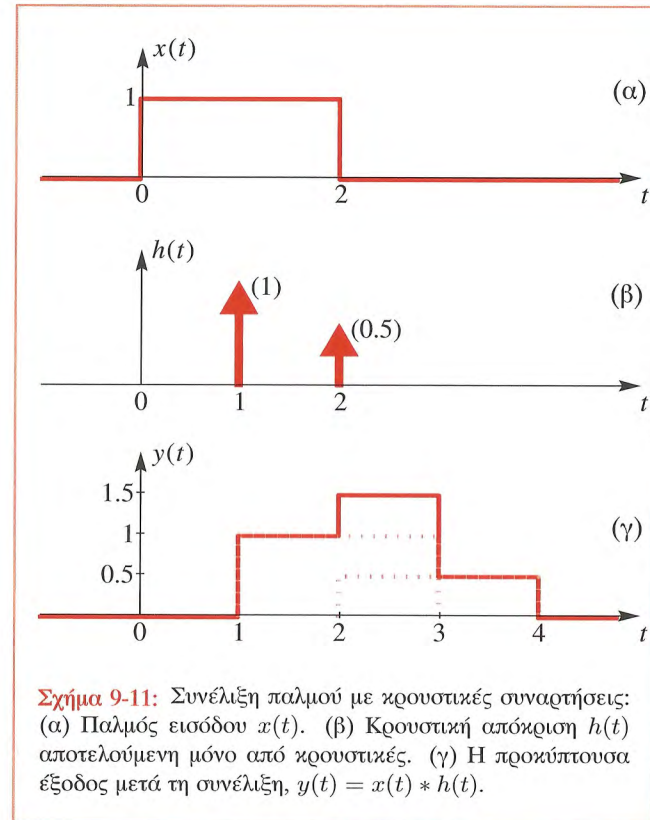
$$h(t) = \delta(t - 0.5) - 3\delta(t)$$

$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &= (\delta(t - 5) + \delta(t + 5)) * (\delta(t - 0.5) - 3\delta(t)) \\ &= \delta(t - 5) * \delta(t - 0.5) - 3\delta(t - 5) * \delta(t) \\ &\quad + \delta(t + 5) * \delta(t - 0.5) - 3\delta(t + 5) * \delta(t) \\ &= \delta(t - 5.5) - 3\delta(t - 5) + \delta(t + 4.5) - 3\delta(t + 5) \end{aligned}$$

Έτσι καταλήγουμε σε κρουστικά σήματα στα $t = 5.5, -4.5$ και ± 5 . Το εμβαδόν των κρουστικών στα σημεία $t = \pm 5$ είναι -3 . ■

Παράδειγμα 9-12: Η Συνέλιξη Κρουστικών Προκαλεί Μετατόπιση

Όταν ένα από τα σήματα που μετέχουν σε μια συνέλιξη είναι μια κανονική συνάρτηση συνεχούς χρόνου



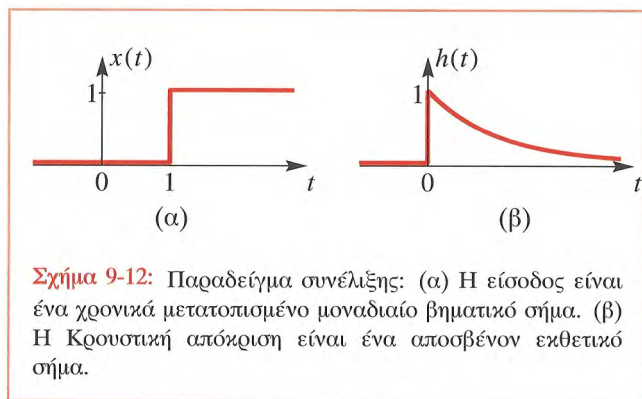
Σχήμα 9-11: Συνέλιξη παλμού με κρουστικές συναρτήσεις: (α) Παλμός εισόδου $x(t)$. (β) Κρουστική απόκριση $h(t)$ αποτελούμενη μόνο από κρουστικές. (γ) Η προκύπτουσα έξοδος μετά τη συνέλιξη, $y(t) = x(t) * h(t)$.

και το άλλο περιέχει μόνο κρουστικές συναρτήσεις, μια γραφική προσέγγιση οδηγεί συχνά σε μια απλή λύση. Θεωρήστε τον παλμό εισόδου $x(t)$ και την κρουστική απόκριση $h(t) = \delta(t - 1) + 0.5\delta(t - 2)$ που απεικονίζονται στο Σχήμα 9-11. Η εξίσωση για την έξοδο είναι απλά

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * [\delta(t - 1) + 0.5\delta(t - 2)] \\ &= x(t - 1) + 0.5x(t - 2) \end{aligned}$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 9-11, τέτοιες συνέλιξεις είναι εύκολο να παρασταθούν γραφικά. Απλώς μετατοπίζουμε ένα κατάλληλα κλιμακωμένο αντίγραφο του συνεχούς χρόνου σήματος στη θέση κάθε κρουστικής και αθροίζουμε

όλα τα μετατοπισμένα και κλιμακωμένα αντίγραφα. Όπως παρουσιάζεται με τις διακεκομμένες γραμμές στο Σχήμα 9-11(γ), τα δύο αντίγραφα επικαλύπτονται στην περιοχή $2 \leq t < 3$, έτσι η έξοδος σε αυτό το διάστημα είναι $1 + 0.5 = 1.5$. ■



Σχήμα 9-12: Παραδείγμα συνέλιξης: (α) Η είσοδος είναι ένα χρονικά μετατοπισμένο μοναδιαίο βηματικό σήμα. (β) Η Κρουστική απόκριση είναι ένα αποσβένον εκθετικό σήμα.

9-7 Υπολογισμός Συνελικτικών Ολοκληρωμάτων

Στην ανάλυση των ΓΧΑ συστημάτων συνεχούς χρόνου, είναι μερικές φορές απαραίτητο να υπολογιστεί η συνέλιξη δύο σημάτων συνεχούς χρόνου λεπτομερώς. Έχουμε δει ότι αν ένα από τα δύο σήματα είναι ένα κρουστικό σήμα ή ένα άθροισμα κρουστικών σημάτων, ο υπολογισμός είναι απλός. Μετατοπίζουμε απλά την αρχή του άξονα του χρόνου της άλλης συνάρτησης στη θέση του κρουστικού σήματος και την κλιμακώνουμε με το εμβαδόν του κρουστικού σήματος. Μια πιο πολύπλοκη κατάσταση εμφανίζεται, αλλά εντούτοις αντιμετωπίσιμη, όταν και οι δύο συναρτήσεις αποτελούνται τμηματικά από απλές συναρτήσεις όπως σταθερές ή εκθετικές συναρτήσεις των οποίων τα γινόμενα είναι εύκολα ολοκληρώσιμα. Σε τέτοιες περιπτώσεις, για τον επιτυχή υπολογισμό του συνελικτικού ολοκληρώματος χρειάζεται προσοχή στο χειρισμό των ορίων της ολοκλήρωσης. Το σημείο αυτό θα το επεξηγήσουμε με τη βοήθεια μερικών παραδειγμάτων.

9-7.1 Χρονικά Καθυστερημένη Μοναδιαία Βηματική Είσοδος

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ακόλουθο συνελικτικό ολοκλήρωμα

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (9.50)$$

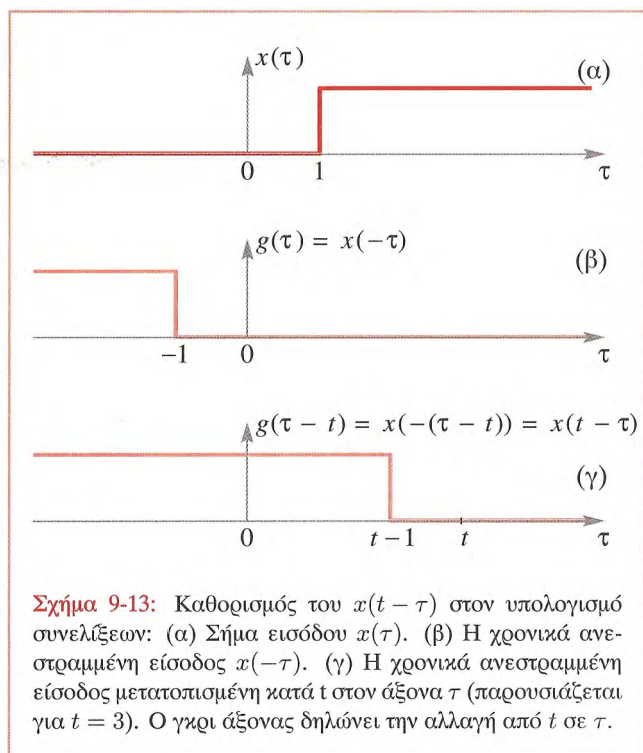
όπου οι συναρτήσεις $h(t) = e^{-t}u(t)$ και $x(t) = u(t-1)$ παρουσιάζονται στο Σχήμα 9-12. Είναι σημαντικό να τονίσουμε και πάλι σε αυτό το σημείο ότι το τ είναι αυτό που ονομάζουμε “εικονική μεταβλητή” ολοκλήρωσης στη Σχέση (9.50) διότι δεν εμφανίζεται μετά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Επιπροσθέτως, το t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή της $y(t)$. Κατά συνέπεια, για να υπολογιστεί κάθε τιμή της συνάρτησης $y(t)$, πρέπει να σχηματίσουμε το γινόμενο $h(\tau)x(t-\tau)$ και να υπολογίσουμε έπειτα το ολοκλήρωμα (9.50) για κάθε διαφορετική τιμή του t .

Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις $x(t)$ και $h(t)$ στη Σχέση (9.50), παίρνουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}u(\tau)u(t-\tau-1)d\tau \quad (9.51)$$

η οποία βεβαίως είναι σωστή, αλλά εξακολουθεί να είναι δύσκολος ο υπολογισμός της. Ειδικότερα, η μορφή της παραπάνω έκφρασης δεν φανερώνει τον τρόπο με τον οποίο εξαρτώνται τα όρια ολοκλήρωσης από το t . Το μυστικό για σωστό και αποτελεσματικό υπολογισμό ενός συνελικτικού ολοκληρώματος αυτού του τύπου είναι η σχεδίαση ενός βοηθητικού γραφήματος των δύο συναρτήσεων των οποίων το γινόμενο είναι ο ολοκληρωτέος του συνελικτικού ολοκληρώματος. Η γραφική παράσταση της $h(\tau)$ είναι εύκολο να γίνει αφού ταυτίζεται με αυτή της $h(t)$ αν απλώς μετονομάσουμε τους άξονες. Η γραφική παράσταση της $x(t-\tau)$, ωστόσο, είναι λίγο δυσκολότερη, αλλά αν προχωρήσουμε με συστηματικό τρόπο είναι επίσης εύκολο να γίνει. Για να δούμε τα

απαραίτητα βήματα, ας θεωρήσουμε το Σχήμα 9-13. Στο Σχήμα 9-13(α) απεικονίζεται η συνάρτηση $x(\tau)$, η οποία προέκυψε από το Σχήμα 9-12 απλά με μετονομασία του οριζόντιου άξονα. Στο Σχήμα 9-13(β) απεικονίζεται η συνάρτηση $g(\tau) = x(-\tau)$, η οποία είναι μια χρονικά ανεστραμμένη εκδοχή της $x(\tau)$ (εισάγουμε το νέο σύμβολο $g(\tau)$ απλά για να τονίσουμε ότι η χρονικά ανεστραμμένη συνάρτηση είναι πραγματικά μια νέα συνάρτηση του τ).



Σχήμα 9-13: Καθορισμός του $x(t - \tau)$ στον υπολογισμό συνελίξεων: (α) Σήμα εισόδου $x(\tau)$. (β) Η χρονικά ανεστραμμένη είσοδος $x(-\tau)$. (γ) Η χρονικά ανεστραμμένη είσοδος μετατοπισμένη κατά t στον άξονα τ (παρουσιάζεται για $t = 3$). Ο γκρι άξονας δηλώνει την αλλαγή από t σε τ .

Τέλος, στο Σχήμα 9-13(γ) απεικονίζουμε τη συνάρτηση $g(\tau)$ με την αρχή του χρονικού άξονα μετατοπισμένο κατά t . Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι όσο αναφερόμαστε στην εικονική

μεταβλητή της ολοκλήρωσης τ , το t είναι μια σταθερά. Από τον ορισμό της $g(\tau)$, έχουμε ότι

$$g(\tau - t) = x(-(\tau - t)) = x(t - \tau)$$

δηλαδή, η επιθυμητή συνάρτηση $x(t - \tau)$ προκύπτει αν πρώτα αναστρέψουμε χρονικά την $x(\tau)$ και στη συνέχεια μετατοπίσουμε το αποτέλεσμα κατά t . Επομένως, για να σχεδιάσουμε το γράφημα της $x(t - \tau)$, πρέπει να ακολουθήσουμε τα δύο βήματα που αναλύονται στο Σχήμα 9-13:

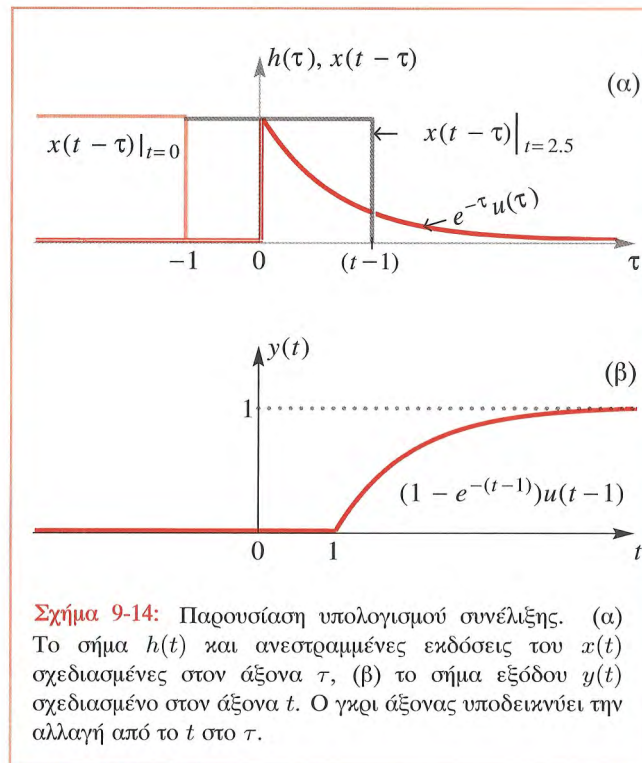
1. ανάστρεψε χρονικά την $x(\cdot)$ σε σχέση με την αρχή των αξόνων
2. στη συνέχεια μετατόπισε την αρχή του άξονα τ στο επιθυμητό t .

Γενικά θα πρέπει να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία για αρκετές τιμές του t . Τώρα είμαστε έτοιμοι να σχεδιάσουμε το γράφημα που θα δείχνει πώς η $h(\tau)$ και $x(t - \tau)$ αλληλεπιδρούν στον υπολογισμό του συνελικτικού ολοκληρώματος της Σχέσης (9.50). Το Σχήμα 9-14(α) απεικονίζει γραφικές παραστάσεις των $h(\tau)$ και $x(t - \tau)$ πάνω στους ίδιους άξονες για δύο διαφορετικές επιλογές του t . Παρατηρήστε ότι η γραφική παράσταση της $h(\tau)$ είναι ίδια με αυτή της $h(t)$ του Σχήματος 9-12(α) με μόνη διαφορά τη μετονομασία του άξονα του χρόνου σε τ αντί t . Στο Σχήμα 9-14 φαίνεται επίσης η $x(t - \tau) = u(t - \tau - 1)$ για δύο διαφορετικές τιμές του t .

Στο Σχήμα 9-14 φαίνεται ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές περιοχές που πρέπει να υπολογιστεί το συνελικτικό ολοκλήρωμα. Αριστερά, βλέπουμε μια “τυπική” γραφική παράσταση της $x(t - \tau)$ που είναι αντιπροσωπευτική για όλες τις τιμές του t για τις οποίες $t - 1 < 0$. Στην περίπτωση αυτή, οι μη μηδενικές τιμές των δύο συναρτήσεων $h(\tau)$ και $x(t - \tau)$ δεν επικαλύπτονται και επομένως το γινόμενο τους $h(\tau)x(t - \tau)$ είναι μηδέν για όλα τα $t < 1$. Επομένως, το συνελικτικό ολοκλήρωμα θα είναι

$$y(t) = 0 \quad \text{για } t < 1$$

Η δεύτερη τυπική γραφική παράσταση της $x(t - \tau)$ στο Σχήμα 9-14(α) φαίνεται με μια γκρι γραμμή. Αυτή η



γραφική παράσταση είναι αντιπροσωπευτική για όλες τις τιμές του t για τις οποίες $t-1 > 0$, αν και είναι σχεδιασμένη για τη συγκεκριμένη τιμή $t = 2.5$. Αφού η ανεστραμμένη και μετατοπισμένη $x(t-\tau)$ εκτείνεται προς τ' αριστερά ως το άπειρο, οι μη μηδενικές τιμές των $h(\tau)$ και $x(t-\tau)$ θα επικαλύπτονται για όλα τα t για τα οποία $t-1 > 0$, ή ισοδύναμα για $t > 1$. Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση του Σχήματος 9-14, είναι εύκολο τώρα να υπολογίσουμε το συνελικτικό ολοκλήρωμα, διότι μπορούμε να δούμε ότι το γινόμενο $h(\tau)x(t-\tau)$ ισούται με $e^{-\tau}$ στο διάστημα $0 < \tau < t-1$, που σημαίνει ότι η έξοδος για $t > 1$

δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$y(t) = \int_0^{t-1} e^{-\tau} d\tau \quad \text{για } t > 1$$

Ο υπολογισμός αυτού του ολοκληρώματος απαιτεί τα ακόλουθα βήματα:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{t-1} e^{-\tau} d\tau \\ &= -e^{-\tau} \Big|_0^{t-1} \\ &= -e^{-(t-1)} + 1 \\ &= 1 - e^{-(t-1)} \quad \text{για } t > 1 \end{aligned}$$

Τέλος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση για να εκφράσουμε της μηδενικές και μη μηδενικές περιοχές της $y(t)$, για να πάρουμε την ακόλουθη ενιαία μορφή

$$y(t) = (1 - e^{-(t-1)})u(t-1) \quad (9.52)$$

η οποία φαίνεται στο Σχήμα 9-14(β).

Το παράδειγμα που παραθέσαμε διευκρινίζει μερικές σημαντικές ιδιότητες της συνέλιξης συνεχούς χρόνου. Καταρχήν, αυτό είναι ένα παράδειγμα της πιο γενικής μορφής όπου η $x(t) = 0$ για $t < T_0$ και $h(t) = 0$ για $t < T_1$ (στο παράδειγμα $T_0 = 1$ και $T_1 = 0$). Σχεδιάζοντας ένα γράφημα παρόμοιο με αυτό του Σχήματος 9-14, μπορεί να αποδειχθεί ότι αν $t < T_0 + T_1$, τότε τα μη μηδενικά τμήματα των $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$ δεν επικαλύπτονται. Επομένως, ανεξάρτητα από την ακριβή μορφή του σήματος εισόδου και της κρουστικής συνάρτησης σε άλλες τιμές του t , πάντα ισχύει ότι $y(t) = 0$ για $t < T_0 + T_1$. Ένα άλλο πολύ σημαντικό σημείο που διευκρινίστηκε από το παράδειγμα είναι ότι ακόμα και αν ένα ή ακόμα και τα δύο σήματα που μετέχουν στη συνέλιξη είναι ασυνεγή, το αποτέλεσμα της συνέλιξης (έξοδος) θα είναι μια συνεχής συνάρτηση του

χρόνου. Αυτό οφείλεται στο ολοκλήρωμα, το οποίο έχει μια φυσική τάση να εξομαλύνει τα σήματα.



Άσκηση 9.4: Αποδείξτε ότι η συνέλιξη των δυο εκθετικών σημάτων, $x(t) = e^{-at}u(t)$ και $h(t) = e^{-bt}u(t)$, δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = x(t) * h(t) = \frac{1}{b-a} (e^{-at}u(t) - e^{-bt}u(t))$$

αν $a \neq b$.



Άσκηση 9.5: Εξετάστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής: Αν η είσοδος δεν περιέχει κρουστικά σήματα, αλλά είναι ασυνεχής (όπως η $u(t)$) τότε η κρουστική απόκριση πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα κρουστικό σήμα έτσι ώστε η έξοδος να είναι ασυνεχής.



Άσκηση 9.6: Δείξτε σχεδιάζοντας γραφικές παραστάσεις όπως αυτές του Σχήματος 9-14(α) ότι αν $x(t) = 0$ για $t < T_1$ και $h(t) = 0$ για $t < T_2$, τότε η έξοδος $y(t) = x(t) * h(t)$ είναι μηδέν για $t < T_1 + T_2$. Δηλαδή, ο χρόνος εκκίνησης της $y(t)$ ισούται με το άθροισμα των χρόνων εκκίνησης των $x(t)$ και $h(t)$.



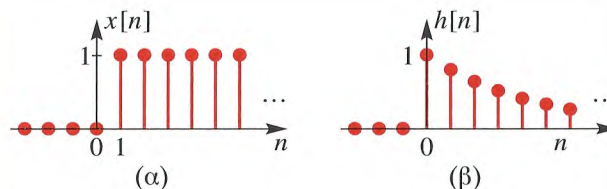
Άσκηση 9.7: Επαναλάβετε τη συνέλιξη του $x(t) = u(t-1)$ με το $h(t) = e^{-t}u(t)$, αλλά αυτή τη φορά χρησιμοποιήστε την ακόλουθη μορφή του συνελικτικού ολοκληρώματος

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Επειδή η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική, η απάντησή σας θα πρέπει να ταυτίζεται με αυτή του Παραδείγματος (9.52).

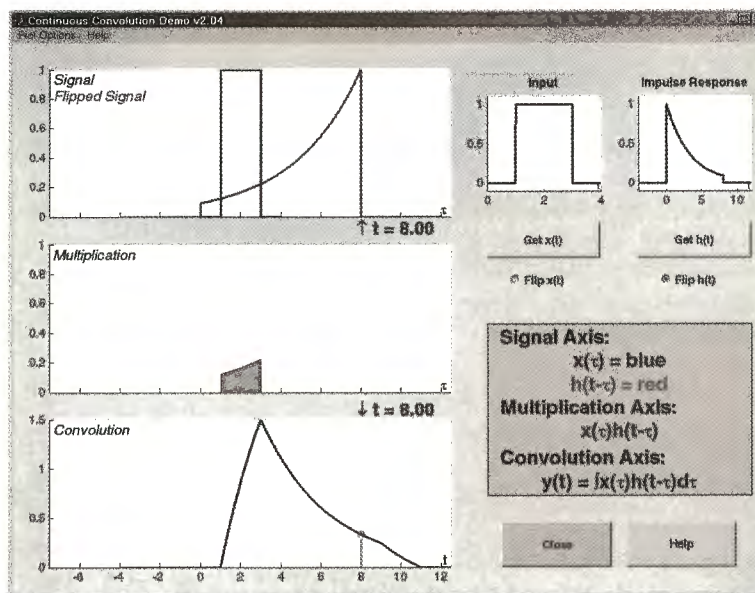
Με σκοπό τη δημιουργία ενός εργαλείου για την μελέτη της συνέλιξης σημάτων συνεχούς χρόνου, κατασκευάστηκε μια γραφική διεπαφή στο Matlab, για να τρέχει διάφορες περιπτώσεις όπου τα σήματα μπορούν να επιλέγονται από ένα μενού με παλμούς, εκθετικά, ημιτονοειδή και κρουστικά σήματα. Το στιγμιότυπο του Σχήματος 9-15 δείχνει τη γραφική διεπαφή με έναν παλμό που συνελιίσεται με ένα εκθετικό σήμα. Το σήμα εξόδου φαίνεται στο κάτω μέρος της γραφικής διεπαφής.

Επίδειξη: Συνέλιξη Συνεχούς Χρόνου



Σχήμα 9-16: Παράδειγμα συνέλιξης: (α) Η είσοδος είναι το μετατοπισμένο μοναδιαίο βηματικό σήμα διακριτού χρόνου $x[n] = u[n-1]$. (β) Η κρουστική απόκριση είναι η διακριτού χρόνου αποσβένουσα εκθετική ακολουθία $h[n] = a^n u[n]$.

Για να εξασκηθείτε με τον υπολογισμό των συνελικτικών ολοκληρωμάτων δεν υπάρχει άλλη επιλογή από τη λύση και τη μελέτη των παραδειγμάτων. Στην Ενότητα 9-7.3 παρουσιάζεται ένα περισσότερο πολύπλοκο παράδειγμα, αλλά πριν απ' αυτό, επιστρέφουμε στο διακριτό χρόνο και δείχνουμε πώς αυτά που ήδη έχουμε μάθει μπορούν να εφαρμοστούν στον υπολογισμό των συνελικτικών αθροισμάτων.



Σχήμα 9-15: Η γραφική διεπαφή που διαθέτει στο χρήστη το `convdemo` που επεξηγεί τη συνέλιξη συνεχούς χρόνου. Ο χρήστης μπορεί να επιλέξει δύο σήματα και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσει το δείκτη του ποντικιού για να σύρει το ένα σήμα πάνω από το άλλο. Η περιοχή της επικάλυψης των σημάτων φαίνεται στη μεσαία γραφική παράσταση. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα που παρουσιάζεται εδώ είναι η $x(t) = u(t-1) - u(t-3)$ που συνελίσσεται με την $h(t) = e^{-0.3t}[u(t) - u(t-8)]$. Για τη συγκεκριμένη ανεστραμμένη $h(t-\tau)$, η τιμή της χρονικής παραμέτρου της εξόδου είναι $t = 8$.

9-7.2 Υπολογισμός Συνελκτικών Αθροισμάτων

Θυμηθείτε ότι το συνελκτικό άθροισμα ορίζεται ως

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad -\infty < n < \infty \quad (9.53)$$

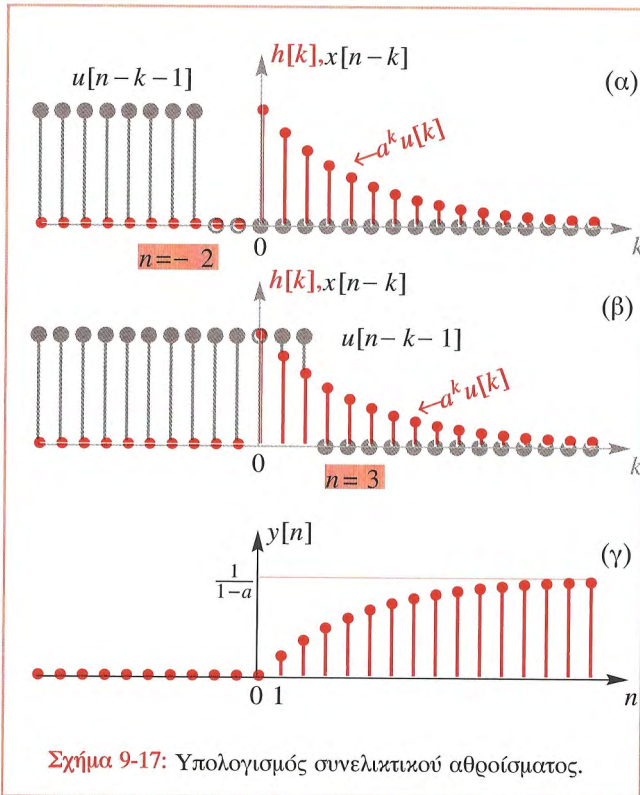
Αν συγκρίνουμε τη Σχέση (9.53) με τη Σχέση (9.50) βλέπουμε ότι οι σχέσεις μοιάζουν πολύ. Το ολοκλήρωμα στη Σχέση (9.50) γίνεται άθροισμα στη Σχέση (9.53). Η εικονική μεταβλητή ολοκλήρωσης τ αντικαθίσταται από τον

εικονικό δείκτη k του αθροίσματος. Τέλος, η ανεξάρτητη μεταβλητή t του σήματος εξόδου αντικαθίσταται από το δείκτη n . Παρόλο που όλα αυτά αποτελούν σημαντικές διαφορές, η βασική δομή των δύο σχέσεων είναι ίδια.

Θα συνεχίσουμε να μελετάμε την αναλογία υποθέτοντας ότι η είσοδος είναι μια μετατοπισμένη διακριτού χρόνου μοναδιαίου βήματος ακολουθία $x[n] = u[n-1]$ και ότι η κρουστική απόκριση είναι μια διακριτού χρόνου εκθετική ακολουθία $h[n] = a^n u[n]$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 9-16. Αν αντικαταστήσουμε αυτές τις ακολουθίες στη Σχέση

(9.53), παίρνουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k] u[n-k-1] \quad (9.54)$$



η οποία φαίνεται να είναι τόσο σύνθετη όσο και η Σχέση (9.51) εκτός και αν προσέξουμε πώς αλληλεπιδρούν οι δύο αυτές ακολουθίες καθώς αλλάζουμε το n . Γενικά, για να υπολογίσουμε τη Σχέση (9.53) για ένα δοσμένο ζεύγος σημάτων, πρέπει να σχηματίσουμε το γινόμενο $h[k]x[n-k]$ για μια συγκεκριμένη τιμή του n και να αθροίσουμε τις τιμές της ακολουθίας γινομένων που προκύπτουν για όλες

τις τιμές του k . Την παραπάνω διαδικασία θα πρέπει να την επαναλάβουμε για όλες τις τιμές $-\infty < n < \infty$. Όπως στην περίπτωση της συνέλιξης συνεχούς χρόνου, θα μας βοηθήσει πολύ αν παραστήσουμε γραφικά το $x[n-k]$ συναρτήσει του δείκτη k για διαφορετικές τιμές του n . Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε αναστρέφοντας πρώτα το $x[k]$ για να πάρουμε το $g[k] = x[-k]$ και στη συνέχεια μετατοπίζοντας το $g[k]$ κατά n για να πάρουμε το επιθυμητό $g[k-n] = x[-(k-n)] = x[n-k]$. Η παραπάνω διαδικασία, για το δοθέν ζεύγος σημάτων, φαίνεται στο Σχήμα 9-17(α) όπου έχουν σχεδιαστεί τα σήματα $h[k] = a^k u[k]$ και $x[n-k] = u[n-k-1]$ συναρτήσει του δείκτη k , για $n = -2$. (Παρατηρήστε ότι το $x[n-k]$ έχει σχεδιαστεί με γκριζό χρώμα, ενώ η $h[k]$ έχει σχεδιαστεί με πορτοκαλί χρώμα). Παρομοίως, στο Σχήμα 9-17(β) έχουν σχεδιαστεί τα σήματα $h[k] = a^k u[k]$ και $x[n-k] = u[n-k-1]$ συναρτήσει του k , αλλά αυτή τη φορά για $n = -3$. Αυτές οι παραστάσεις διευκολύνουν στον υπολογισμό σε κλειστή μορφή του συνελικτικού αθροίσματος. Για παράδειγμα, γενικεύοντας την περίπτωση που φαίνεται στο Σχήμα 9-17(α), μπορούμε να δούμε ότι τα μη μηδενικά μέρη των ακολουθιών $h[k]$ και $x[n-k]$, αν $n-1 < 0$, δεν επικαλύπτονται. Επομένως,

$$y[n] = 0 \quad \text{για } n < 1$$

Επιπροσθέτως, από το Σχήμα 9-17(β) είναι εύκολο να δούμε ότι για $n-1 \geq 0$ η έξοδος είναι

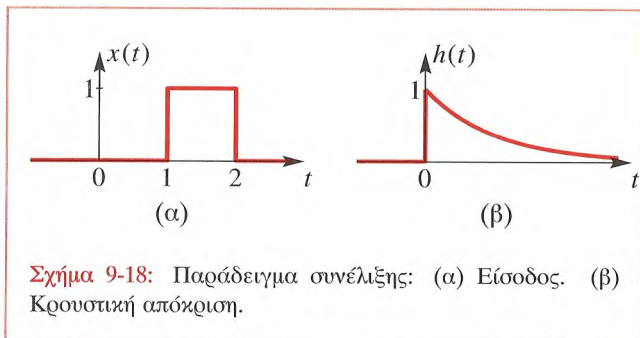
$$y[n] = \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a}.$$

Η έκφραση κλειστής μορφής για το συνελικτικό άθροισμα προκύπτει από τον τύπο του αθροίσματος n όρων μιας γεωμετρικής προόδου. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματά μας σε ένα ενιαίο τύπο για την ακολουθία εξόδου, παίρνουμε

$$y[n] = \left(\frac{1-a^n}{1-a} \right) u[n-1] \quad (9.55)$$

η γραφική παράσταση της οποίας φαίνεται στο Σχήμα 9-17(γ).

Συγκρίνοντας τα Σχήματα 9-14(β) και 9-17(γ) βλέπουμε ότι η έξοδος και στις δύο περιπτώσεις έχει τη μορφή ενός “εξομαλυσμένου” μοναδιαίου βηματικού σήματος. Όμως, υπάρχουν μερικές διαφορές οι οποίες βασικά οφείλονται στο γεγονός ότι στην περίπτωση της συνέλιξης διακριτού χρόνου τα σήματα είναι ακολουθίες και όχι συναρτήσεις μιας συνεχούς χρονικής μεταβλητής. Παρατηρήστε ότι στη διακριτή περίπτωση η έξοδος γίνεται μη μηδενική αμέσως μόλις τα $h[k]$ και $x[n - k]$ επικαλυφθούν για πρώτη φορά στον άξονα k . Αντίθετα, για τα σήματα συνεχούς χρόνου



Σχήμα 9-18: Παράδειγμα συνέλιξης: (α) Είσοδος. (β) Κρουστική απόκριση.

η πρώτη επικάλυψη της $h(\tau)$ με την $x(t - \tau)$ δημιουργεί μηδενικό εμβαδόν και επομένως η έξοδος είναι μηδέν τη χρονική στιγμή της πρώτης επικάλυψης. Το σήμα εξόδου αποκτά μη μηδενική τιμή μόνο όταν η περιοχή επικάλυψης αποκτήσει ένα μη μηδενικό εύρος. Ενώ αυτή η διαφορά είναι σημαντική, δεν θα πρέπει να μας παραξενεύει το γεγονός ότι οι συνέλιξεις διακριτού και συνεχούς χρόνου μοιάζουν τόσο πολύ στις επιπτώσεις τους και στις μαθηματικές δομές τους. Θυμηθείτε το αυτό όταν θα μελετάμε περισσότερα παραδείγματα συνέλιξης συνεχούς χρόνου στις ενότητες που ακολουθούν.

Επίδειξη: Συνέλιξη Διακριτού Χρόνου

9-7.3 Διέγερση Συστήματος από Τετραγωνικό Παλμό

Θεωρήστε την κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-t}u(t)$ και τον “παλμό”

$$x(t) = u(t-1) - u(t-2) = \begin{cases} 1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

να διεγείρει την είσοδο. Οι δύο αυτές συναρτήσεις απεικονίζονται στο Σχήμα 9-18. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνέλιξη αυτών των δύο σημάτων χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της “αναστροφής και μετατόπισης”, αν εκμεταλευτούμε τη γραμμικότητα και τη χρονο-αμεταβλητότητα της συνέλιξης της Σχέσης (9.52) που έχουμε ήδη υπολογίσει. Μπορούμε να συνοψίσουμε το αποτέλεσμα αυτό ως ακολούθως

$$e^{-t}u(t) * u(t-1) = (1 - e^{-(t-1)})u(t-1) \quad (9.56)$$

το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 9-19(α). Η χρονο-αμεταβλητότητα του συστήματος τώρα εξασφαλίζει ότι μετατόπιση της μοναδιαίας βηματικής ακολουθίας από $u(t-1)$ σε $u(t-2)$ θα μετατοπίσει την έξοδο κατά μία χρονική στιγμή, ή

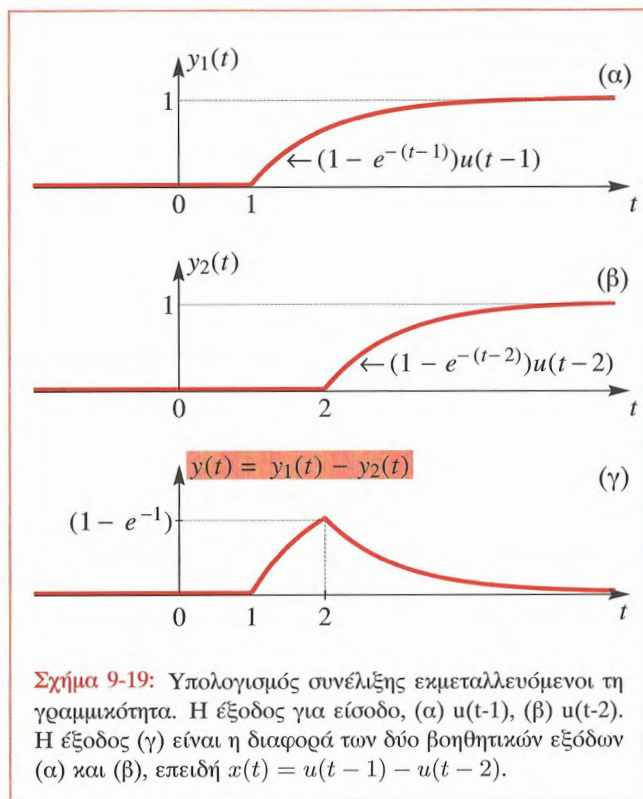
$$e^{-t}u(t) * u(t-2) = (1 - e^{-(t-2)})u(t-2) \quad (9.57)$$

που απεικονίζεται στο Σχήμα 9-19(β). Χρησιμοποιούμε τώρα τη γραμμικότητα για να συνδυάσουμε αυτά τα δύο επιμέρους αποτελέσματα και να υπολογίσουμε τη συνέλιξη που επιθυμούμε:

$$\begin{aligned} e^{-t}u(t) * [u(t-1) - u(t-2)] \\ = (1 - e^{-(t-1)})u(t-1) - (1 - e^{-(t-2)})u(t-2) \end{aligned} \quad (9.58)$$

Είναι πολύ δύσκολο να οπτικοποιήσουμε την έξοδο εκτός και αν την καταμήσουμε σε περιπτώσεις. Η πλήρης εξίσωση της εξόδου $y(t)$ είναι

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ (1 - e^{-(t-1)}) & 1 \leq t < 2 \\ e^{-(t-2)} - e^{-(t-1)} & 2 \leq t \end{cases} \quad (9.59)$$



Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε $y(t) = (1 - e^{-1})e^{-(t-2)}$ για την περιοχή ($t \geq 2$) όπως στο Σχήμα 9-19(γ). Μπορούμε να δούμε το σήμα εξόδου στο Σχήμα 9-19(γ) σαν ένα “μολυσμένο” παλμό του οποίου η διάρκεια είναι μεγαλύτερη από τη διάρκεια του παλμού που διέγειρε την είσοδο του συστήματος. Αυτό είναι ένα φυσιολογικό αποτέλεσμα της συνέλιξης που συμβαίνει όταν η διάρκεια της κρουστικής απόκρισης είναι μεγαλύτερη από αυτή της διέγερσης.

9-7.4 Διέγερση Συστήματος από Βραχύβιο Τετραγωνικό Παλμό

Αυτό το παράδειγμα θα επαληθεύσει το γεγονός πως ένας βραχύβιος παλμός επιδρά στο σύστημα όπως η κρουστική συνάρτηση. Το ακόλουθο παλμικό σήμα έχει διάρκεια ενός (1) msec, αλλά το εμβαδόν του είναι μονάδα:

$$x(t) = 1000[u(t) - u(t - 0.001)]$$

$$= \begin{cases} 1000 & 0 \leq t < 0.001 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (9.60)$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε την ίδια κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-t}u(t)$ όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη γραμμικότητα και τη χρονική αμεταβλητότητα του συστήματος για να υπολογίσουμε την έξοδο με τη βοήθεια της γνωστής συνέλιξης της Σχέσης (9.52). Συγκεκριμένα,

$$e^{-t}u(t) * 1000[u(t) - u(t - 0.001)] =$$

$$1000[(1 - e^{-t})u(t) - (1 - e^{-(t-0.001)})u(t - 0.001)] \quad (9.61)$$

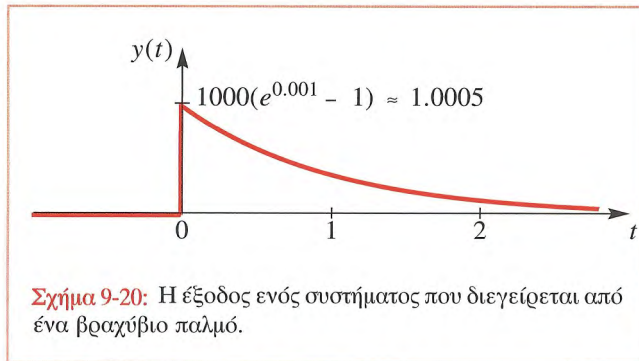
Επομένως, η πλήρης εξίσωση της $y(t)$ θα είναι:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1000(1 - e^{-t}) & 0 \leq t < 0.001 \\ 1.0005e^{-t} & t \geq 0.001 \end{cases} \quad (9.62)$$

όπου 1.0005 είναι κατά προσέγγιση η τιμή $1000(e^{0.001} - 1)$. Στο Σχήμα 9-20 φαίνεται η γραφική παράσταση της $y(t)$ της Σχέσης (9.62), αν και είναι αδύνατον να δούμε με λεπτομέρεια την περιοχή ($0 \leq t < 0.001$).

9-7.5 Συζήτηση

Στις προηγούμενες ενότητες μελετήθηκαν δύο συνελκτικά ολοκληρώματα που βασίζονταν στη συνέλιξη που ορίσαμε στην Ενότητα 9-7.1. Και στις τρεις περιπτώσεις, η κρουστική απόκριση ήταν μια απροσβέβουσα εκθετική συνάρτηση η οποία αποτελεί κατάλληλο μαθηματικό



μοντέλο για την κρουστική απόκριση ενός ηλεκτρικού κυκλώματος πρώτης τάξης αποτελούμενου από έναν πυκνωτή και έναν αντιστάτη καθώς και για άλλα φυσικά συστήματα. Αυτό που διαφέρει στα τρία παραδείγματα είναι η διάρκεια του παλμού του σήματος εισόδου. Στην Ενότητα 9-7.1, η είσοδος είναι ένα σήμα άπειρης διάρκειας το οποίο ενεργοποιείται τη χρονική στιγμή $t = 1$, αλλά διαρκεί για πάντα. Σε αυτήν την περίπτωση, βλέπουμε ότι η έξοδος είναι επίσης άπειρης διάρκειας, αλλά η μετάβαση του μοναδιαίου βηματικού σήματος τη χρονική στιγμή $t = 1$ έχει εξομαλυνθεί από τη συνέλιξη με την εκθετική. Το σήμα εξόδου αυξάνει σταδιακά από το μηδέν μέχρι ασυμπτωτικά στη τιμή 1, αλλά παίρνει περίπου 5 δευτερόλεπτα για να φτάσει η έξοδος πολύ κοντά στο 1 (μέσα στο 1% της τελικής τιμής). Συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned} y(6) &= (1 - e^{-(6-1)})u(6-1) \\ &= (1 - e^{-5}) \approx 0.9933 \end{aligned}$$

Στην Ενότητα 9-7.3, ο παλμός εισόδου είναι πεπερασμένης διάρκειας, αλλά όχι βραχύβιος. Στην περίπτωση αυτή, η έξοδος είναι μια παραμορφωμένη εκδοχή του σήματος εισόδου.

Στην Ενότητα 9-7.4, ο παλμός εισόδου είναι βραχύβιος σε σχέση με τη διάρκεια του παλμού του δεύτερου παραδείγματος. Αφού αυτό το σήμα προσεγγίζει το κρουστικό σήμα, είναι αναμενόμενο ότι η έξοδος θα

προσεγγίζει την κρουστική απόκριση, κάτι που είναι γεγονός για $t > 0.001$ secs.

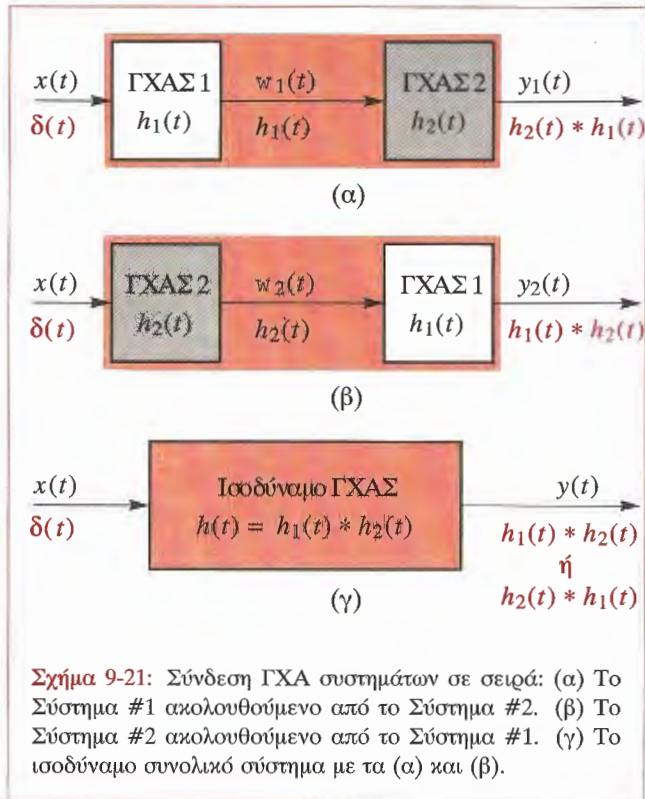
Άσκηση 9.8: Υποθέστε ότι $x(t) \neq 0$ μόνο για $T_1 \leq t \leq T_2$ και $h(t) \neq 0$ μόνο για $T_3 \leq t \leq T_4$. Σχεδιάστε γραφικές παραστάσεις του $x(\tau)$ με την $h(t-\tau)$ για διάφορες τιμές του t όπως στο Σχήμα 9-14, για “τυπικές” συναρτήσεις $x(t)$ και $h(t)$ πεπερασμένης διάρκειας. Χρησιμοποιήστε αυτό το σχήμα για να δείξετε ότι η $y(t) = x(t) * h(t)$ έχει πεπερασμένη διάρκεια επίσης που δίνεται από $y(t) \neq 0$ για $T_5 \leq t \leq T_6$. Υπολογίστε τα T_5 και T_6 συναρτήσει των T_1, T_2, T_3 και T_4 .

9-8 Ιδιότητες των ΓΧΑ Συστημάτων

Όπως είδαμε προηγουμένως για τα συστήματα διακριτού χρόνου, τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα έχουν μια σειρά από ιδιότητες που μπορούν να απλοποιήσουν αρκετά το έργο μας. Στην ενότητα αυτή θα δούμε πολλές από αυτές.

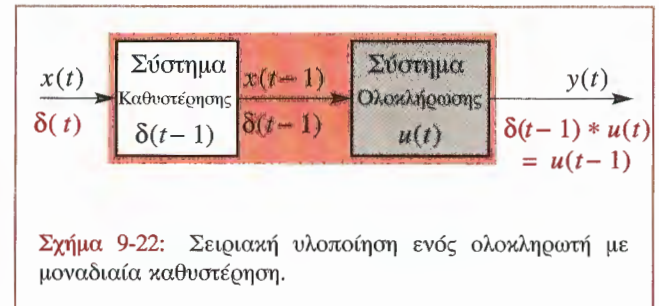
9-8.1 Συνδεσμολογίες Συστημάτων σε Σειρά και Παράλληλα

Μια σε σειρά συνδεσμολογία δύο συστημάτων φαίνεται στο Σχήμα 9-21(α). Στο συνδυασμό αυτό, η είσοδος $x(t)$ είναι η είσοδος στο πρώτο σύστημα, του οποίου η έξοδος είναι είσοδος στο δεύτερο σύστημα, του οποίου η έξοδος είναι η συνολική έξοδος $y_1(t)$. Το σχήμα αυτό δείχνει την είσοδο $x(t)$ στο πρώτο σύστημα, την έξοδο $w_1(t)$ του πρώτου συστήματος (είσοδος στο δεύτερο σύστημα) και τη συνολική έξοδο $y_1(t)$ (έξοδος του δεύτερου συστήματος) πάνω από τα βέλη που συνδέουν τα συστήματα. Τα σύμβολα αυτά αντιπροσωπεύουν τις γενικές εισόδους και εξόδους του συστήματος. Κάτω από τα βέλη είναι οι εισόδους και οι εξόδους που προκύπτουν από την εφαρμογή ενός κρουστικού σήματος στην είσοδο του συστήματος. Για την κρουστική είσοδο, η έξοδος του πρώτου συστήματος είναι, εξ



ορισμού, η κρουστική απόκριση $h_1(t)$. Αφού η $h_1(t)$ οδηγείται στην είσοδο του δευτέρου συστήματος, η συνολική έξοδος είναι $h_1(t) * h_2(t)$ και αυτό, εξ ορισμού, είναι η κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος. Στο Σχήμα 9-21(β) απεικονίζονται τα δύο συστήματα συνδεδεμένα με διαφορετική σειρά. Εφαρμογή της ίδιας κρουστικής διέγερσης παράγει την έξοδο $h_2(t) * h_1(t)$ για την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος. Αφού, όπως είδαμε, η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική, προκύπτει ότι $h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$, και επομένως συμπεραίνουμε ότι τα συστήματα των Σχημάτων 9-21(α) και (β) έχουν την ίδια κρουστική απόκριση από την είσοδο $x(t)$ στην έξοδο $y(t)$. Άρα,

$y_1(t) = y_2(t) = y(t)$ οποτεδήποτε εφαρμοστεί το ίδιο σήμα $x(t)$ στις εισόδους των δύο συστημάτων. Επομένως, ένα άλλο σύστημα που έχει την ίδια ολική κρουστική απόκριση $h(t) = h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$ είναι το σύστημα του

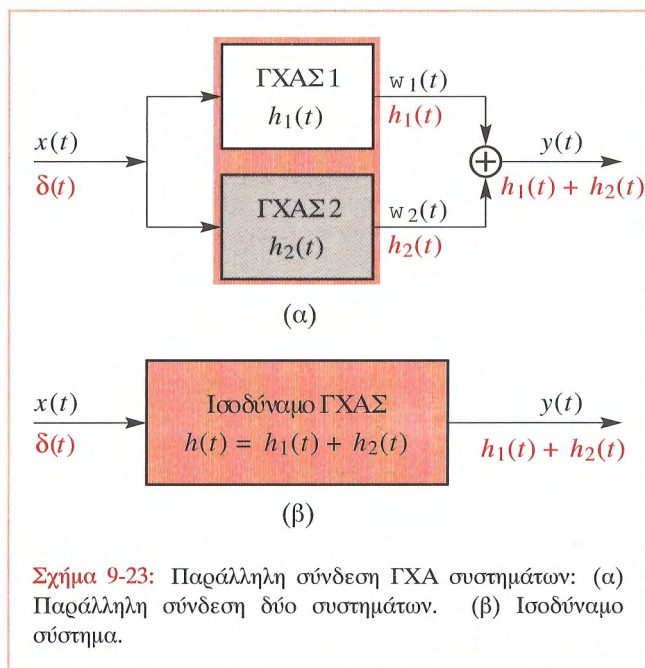


Σχήματος 9-21(γ). Επομένως, τα συνδεδεμένα σε σειρά συστήματα των Σχημάτων 9-21(α) και (β) μπορούν να αντικατασταθούν από το ισοδύναμο σύστημα του Σχήματος 9-21(γ). Εναλλακτικά, ένα σύστημα όπως αυτό του Σχήματος 9-21(γ) του οποίου η κρουστική απόκριση μπορεί να εκφραστεί ως $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$ μπορεί να αναπαρασταθεί και να υλοποιηθεί από οποιοδήποτε από τα συστήματα των Σχημάτων 9-21(α) και (β).

Παράδειγμα 9-13: Σύνδεση Σε Σειρά Καθυστερήσης-Ολοκληρωτή

Θεωρήστε το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = u(t-1)$. Εφόσον η κρουστική απόκριση είναι μια καθυστερημένη κατά μία χρονική στιγμή μοναδιαία βηματική συνάρτηση, μπορεί να προκύψει από τη συνέλιξη $h(t) = \delta(t-1) * u(t)$. Επομένως, το σύστημα μπορεί να υλοποιηθεί από τη σύνδεση σε σειρά ενός συστήματος καθυστέρησης και ενός ολοκληρωτή όπως φαίνεται στο Σχήμα 9-22. Επίσης παρατηρήστε ότι η σειρά των δύο συστημάτων μπορεί να αλλάξει χωρίς να επηρεαστεί η συνολική κρουστική απόκριση του συστήματος. ■

Στο Σχήμα 9-23 απεικονίζονται δύο ΓΧΑ συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα. Οι εισόδους των δύο συστημάτων διεγείρονται από το ίδιο σήμα $x(t)$ και η έξοδος $y(t)$ του συνολικού συστήματος προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους εξόδων των δύο συστημάτων. Όπως στο Σχήμα 9-21, οι μεταβλητές πάνω από τα βέλη αντιπροσωπεύουν τις γενικές εισόδους και εξόδους του συστήματος, ενώ οι μεταβλητές κάτω από τα βέλη αντιπροσωπεύουν τα σήματα εξόδου που προκύπτουν όταν η είσοδος του συστήματος διεγείρεται από την κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$. Παρατηρήστε



ότι η συνολική κρουστική απόκριση είναι $h_1(t) + h_2(t)$ και η παράλληλη σύνδεση των συστημάτων μπορεί να αντικατασταθεί από το ισοδύναμο σύστημα του Σχήματος 9-23(β).

Παράδειγμα 9-14: Παράλληλη Σύνδεση

Υποθέστε ότι η κρουστική απόκριση ενός συστήματος ΓΧΑ είναι

$$h(t) = u(t-1) - u(t-2) = \begin{cases} 1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της συνέλιξης, μπορούμε να εκφράσουμε την $h(t)$ ως

$$h(t) = u(t) * [\delta(t-1) - \delta(t-2)]$$

και άρα το σύστημα μπορεί να υλοποιηθεί από ένα ολοκληρωτή ακολουθούμενο από ένα παράλληλο συνδυασμό δύο συστημάτων καθυστέρησης. ■

Άσκηση 9.9: Σχεδιάστε ένα σχηματικό διάγραμμα του συστήματος του Παραδείγματος 9-14 αποτελούμενο από ένα ολοκληρωτή ακολουθούμενο από ένα παράλληλο συνδυασμό δύο συστημάτων καθυστέρησης.

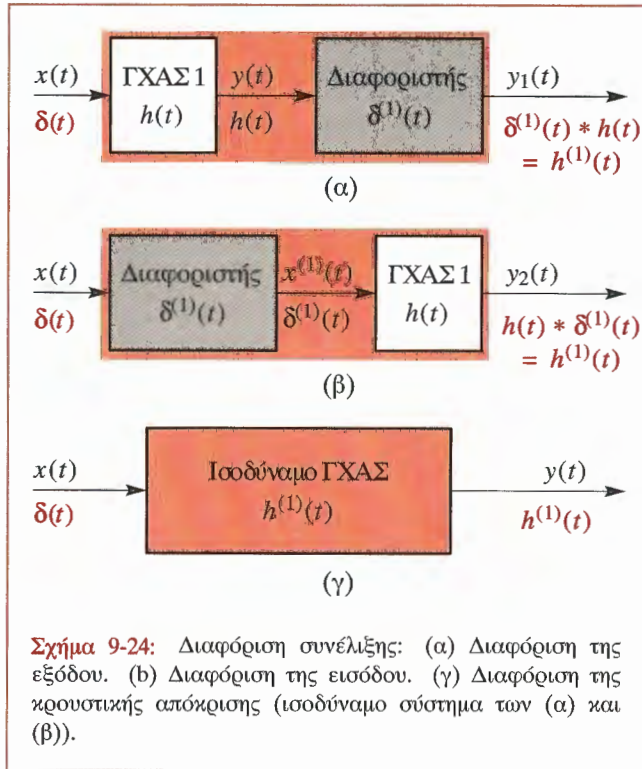
9-8.2 Διαφόριση και Ολοκλήρωση της Συνέλιξης

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ότι έχουμε μάθει για τη διασύνδεση των ΓΧΑ συστημάτων για να βρούμε μια βασική ιδιότητα για την παράγωγο της συνέλιξης. Καταρχήν η έξοδος του συστήματος στο Σχήμα 9-24(α) είναι

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{dy(t)}{dt} & y(t) * \delta^{(1)}(t) \\ &= [x(t) * h(t)] * \delta^{(1)}(t) \\ &= x(t) * [h(t) * \delta^{(1)}(t)] \\ &= x(t) * h^{(1)}(t) \end{aligned}$$

Παρομοίως, η έξοδος του συστήματος του Σχήματος 9-24(β) είναι

$$y_2(t) = x^{(1)}(t) * h(t)$$



όπου $x^{(1)}$ συμβολίζει την παράγωγο πρώτης τάξης. Ωστόσο, $y_2(t) = y_1(t)$ και επομένως έχουμε το ακόλουθο γενικό αποτέλεσμα:

Η Διαφύριση της εισόδου ή της κρουστικής απόκρισης διαφορίζει το αποτέλεσμα της συνέλιξης.

(9.63)

$$y^{(1)}(t) = x^{(1)}(t) * h(t) = x(t) * h^{(1)}(t)$$

Επιπλέον, με αντικατάσταση των διαφοριστών από ολοκληρωτές και κάνοντας παρόμοια ανάλυση, μπορούμε

να δείξουμε ότι

Η ολοκλήρωση της εισόδου ή της κρουστικής απόκρισης ολοκληρώνει το αποτέλεσμα της συνέλιξης.

$$\int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = y^{(-1)}(t) = x(t) * h^{(-1)}(t) = x^{(-1)}(t) * h(t)$$

(9.64)

Στην πραγματικότητα, τα αποτελέσματα των Σχέσεων (9.63) και (9.64) μπορούν να γενικευθούν με τη σχέση

$$y^{(m+n)}(t) = x^{(m)}(t) * h^{(n)}(t)$$

(9.65)

όπου m και n είναι θετικοί ακέραιοι (στην περίπτωση της διαφύρισης) ή αρνητικοί ακέραιοι (στην περίπτωση της ολοκλήρωσης). Μερικές φορές η Σχέση (9.65) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απλοποίηση του υπολογισμού της συνέλιξης. Αυτό ακριβώς το σημείο διευκρινίζεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.



Παράδειγμα 9-15: Σύνδεση σε Σειρά

Διαφοριστή-Ολοκληρωτή

Θεωρήστε την είσοδο και την κρουστική απόκριση της Ενότητας 9-7.3 που παριστάνονται γραφικά στο Σχήμα 9-18 στη Σελίδα 295. Αν παραγωγίσουμε την είσοδο και ολοκληρώσουμε την κρουστική απόκριση πριν τη συνέλιξη, θα έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα όπως αυτό που θα είχαμε αν υπολογίζαμε άμεσα τη συνέλιξη των δυο συναρτήσεων. Στην περίπτωση αυτή, $x(t) = u(t-1) - u(t-2)$ και επομένως $x^{(1)}(t) = \delta(t-1) - \delta(t-2)$. Για να ολοκληρώσουμε την κρουστική απόκριση, υπολογίζουμε τη συνέλιξη της με τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση και βρίσκουμε ότι

$h^{(-1)} = 0$ για $t < 0$ και

$$\begin{aligned} h^{(-1)}(t) &= \int_0^t e^{-\tau} d\tau \\ &= (1 - e^{-t}) \quad \text{για } t > 0 \end{aligned}$$

ή πιο σύντομα, $h^{(-1)}(t) = (1 - e^{-t})u(t)$. Υπολογίζουμε τώρα την $y(t)$ ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} y(t) &= x^{(1)}(t) * h^{(-1)}(t) \\ &= [\delta(t-1) - \delta(t-2)] * [(1 - e^{-t})u(t)] \\ &= (1 - e^{-(t-1)})u(t-1) - (1 - e^{-(t-2)})u(t-2) \end{aligned}$$

Αν κοιτάξουμε πιο προσεκτικά την τελευταία έκφραση, βλέπουμε ότι

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ (1 - e^{-(t-1)}) & 1 \leq t < 2 \\ e^{-(t-2)} - e^{-(t-1)} & 2 \leq t \end{cases}$$

το οποίο είναι πανομοιότυπο με το αποτέλεσμα της Σχέσης (9.59) στην Ενότητα 9-7.3. ■

9-8.3 Ευστάθεια και Αιτιατότητα

Τα θέματα της ευστάθειας και της αιτιατότητας ενός συστήματος είναι σημαντικά εάν επιθυμούμε να υλοποιήσουμε οποιοδήποτε τύπο συστήματος. Στην υποενότητα αυτή, θα συζητήσουμε αυτά τα θέματα για τα ΓΧΑ συστήματα συνεχούς χρόνου και θα δείξουμε πάλι ότι η κρουστική απόκριση χαρακτηρίζει πλήρως και ορίζει τις ιδιότητες του συστήματος.

Ευστάθεια Για ένα σύστημα συνεχούς χρόνου, όπου $x(t) \mapsto y(t)$, μπορούμε να ορίσουμε την ευστάθεια με δύο τρόπους: ένα γενικό ορισμό, βασισμένο στη διαίσθηση και μια ακριβή μαθηματική συνθήκη.

Γενικός Ορισμός Ευστάθειας: Ένα σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν κάθε φραγμένη είσοδος παράγει μια φραγμένη έξοδο.

Μαθηματική Συνθήκη για Ευστάθεια: Ένα σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν, για όλες τις φραγμένες εισόδους για τις οποίες ισχύει $|x(t)| < B < \infty$ για κάθε t , ισχύει ότι $|y(t)| < C < \infty$ για κάθε t , όπου B και C σταθερές.

Αν εστιάσουμε την προσοχή μας στα ΓΧΑ συστήματα, τότε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη μπορεί να βασιστεί στην κρουστική απόκριση $h(t)$ ως ακολούθως:

Ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου είναι ευσταθές αν και μόνο αν:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (9.66)$$

Η απόδειξη ότι η παραπάνω συνθήκη είναι ικανή να εξασφαλίσει την ευστάθεια είναι σχετικά εύκολη. Χρησιμοποιούμε το συνελκτικό ολοκλήρωμα για να εκφράσουμε την $|y(t)|$ συναρτήσει των μέτρων $|x(t)|$ και $|h(t)|$ της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης αντίστοιχα, δηλαδή,

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot |x(t-\tau)| d\tau \end{aligned} \quad (9.67)$$

Καταλήξαμε στην παραπάνω σχέση, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το μέτρο του συνολικού εμβαδού που περικλείει η συνάρτηση $h(\tau)x(t-\tau)$ πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο του συνολικού εμβαδού που περικλείει το μέτρο $|h(\tau)x(t-\tau)| = |h(\tau)| \cdot |x(t-\tau)|$ αυτής της συνάρτησης. Αν

υποθέσουμε ότι η είσοδος είναι φραγμένη, τότε θα ισχύει ότι $|x(t - \tau)| < B < \infty$ για κάθε t και τ . Επομένως, αν αντικαταστήσουμε το $|x(t - \tau)|$ με τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή B που μπορεί να πάρει, ενισχύουμε την ανισότητα (9.67). Έτσι, παίρνουμε

$$|y(t)| \leq B \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \quad (9.68)$$

σαν ένα φράγμα του μεγέθους της $|y(t)|$. Από τη Σχέση (9.68) συνεπάγεται ότι αν

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

τότε $|y(t)| < C < \infty$, που σημαίνει ότι το σύστημα είναι ευσταθές. Άρα, έχουμε αποδείξει ότι αν η κρουστική απόκριση του συστήματος ικανοποιεί τη συνθήκη (9.66) τότε το σύστημα είναι ευσταθές. Η απόδειξη ότι τα συστήματα που ικανοποιούν τη Συνθήκη (9.66) είναι μόνο τα ευσταθή ΓΧΑ συστήματα είναι κάπως περίπλοκη και δεν θα παρατεθεί εδώ.

Παράδειγμα 9-16: Ευσταθές Σύστημα

Θεωρήστε το ΓΧΑ σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση είναι ένας τετραγωνικός παλμός της μορφής

$$h(t) = u(t + 10) - u(t - 10) = \begin{cases} 1 & -10 \leq t < 10 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Για να δούμε αν το σύστημα είναι ευσταθές, απλά αντικαθιστούμε στη Συνθήκη (9.66) και ελέγχουμε αν το αποτέλεσμα είναι πεπερασμένο. Αυτό σημαίνει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_{-10}^{10} d\tau = 20 < \infty$$

επομένως το σύστημα είναι ευσταθές. ■



Άσκηση 9.10:

Το σύστημα του Παραδείγματος 9-16 αποτελεί παράδειγμα συστήματος του οποίου η κρουστική απόκριση έχει πεπερασμένη διάρκεια. Αποδεικνύεται ότι όλα τα παρόμοια συστήματα είναι ευσταθή. Αν ορίσουμε *πεπερασμένη διάρκεια* να σημαίνει ότι η $h(t) = 0$ για κάθε $t < t_1$ και για κάθε $t > t_2$ όπου $-\infty < t_1 < t_2 < \infty$, να αποδείξετε ότι όλα τα συστήματα πεπερασμένης διάρκειας είναι ευσταθή αν η κρουστική τους απόκριση είναι φραγμένη, δηλαδή, $|h(t)| < D < \infty$.



Παράδειγμα 9-17: Ασταθές Σύστημα

Θεωρήστε το σύστημα που ορίζεται από τη σχέση εισόδου/εξόδου

$$y(t) = \frac{1}{x(t)}$$

δηλαδή, το σύστημα παίρνει το αντίστροφο του σήματος εισόδου. Εφόσον η διαίρεση δεν είναι μια γραμμική διαδικασία, το σύστημα δεν είναι ΓΧΑ. Επομένως, η συνθήκη ευστάθειας (9.66) δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Πρέπει να επιστρέψουμε στο βασικό ορισμό της ευστάθειας, ο οποίος μας λέει ότι κάθε φραγμένη είσοδος πρέπει να παράγει φραγμένη έξοδο. Για να αποδείξουμε ότι το σύστημα είναι ευσταθές, πρέπει να επαληθεύσουμε αυτή τη συνθήκη για κάθε φραγμένη είσοδο. Ωστόσο, αν σκεφτούμε ότι το σύστημα μπορεί να είναι ασταθές, αρκεί να βρούμε μόνο μια είσοδο που να είναι φραγμένη και να δίνει μη φραγμένη έξοδο για να αποδείξουμε ότι το σύστημα είναι ασταθές. Στην περίπτωση του συστήματος αντιστροφής, αν το σήμα εισόδου είναι φραγμένο, θα παίρνει σίγουρα την τιμή μηδέν μια ή περισσότερες φορές και η έξοδος, σε αυτές τις περιπτώσεις, θα παίρνει μη πεπερασμένες τιμές. Επομένως το σύστημα είναι ασταθές. ■


Παράδειγμα 9-18: Ο Ολοκληρωτής είναι Ασταθές Σύστημα

Τώρα θεωρήστε το σύστημα του ολοκληρωτή. Η κρουστική του απόκριση είναι $h(t) = u(t)$, οπότε εφαρμόζοντας

τη συνθήκη (9.66) οδηγούμαστε στην ακόλουθη σχέση

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} d\tau \rightarrow \infty$$

Επομένως ο ολοκληρωτής είναι ένα ασταθές σύστημα. ■

 **Άσκηση 9.11:** Για το σύστημα του ολοκληρωτή, μπορείτε να σκεφτείτε μια συγκεκριμένη είσοδο $x(t)$ που να είναι φραγμένη αλλά το ολοκλήρωμά της να αυξάνει χωρίς φράγμα;

Αιτιατότητα Η δεύτερη ιδιότητα των συστημάτων που είναι θεμελιώδους σημασίας κατά την υλοποίησή των είναι η *αιτιατότητα*. Η αιτιατότητα αναφέρεται στο χρονικό προβάδισμα.

Γενικός Ορισμός της Αιτιατότητας: Ένα σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν η $y(t_0)$, η έξοδος την τρέχουσα χρονική στιγμή t_0 , δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές του σήματος εισόδου $x(\tau)$, δηλαδή από $\tau > t_0$.

Δηλαδή, ένα αιτιατό σύστημα δεν μπορεί να προβλέψει μελλοντικές τιμές του σήματος εισόδου. Για ΓΧΑ συστήματα συνεχούς χρόνου με κρουστική απόκριση $h(t)$, η συνθήκη για την αιτιατότητα απλοποιείται στον ακόλουθο έλεγχο της κρουστικής απόκρισης:

$$\begin{aligned} \text{Ένα σύστημα συνεχούς χρόνου είναι αιτιατό} \\ \text{αν και μόνο αν:} \\ h(\tau) = 0 \quad \text{για } \tau < 0 \end{aligned} \quad (9.69)$$

Για να αποδείξουμε ότι αυτή η συνθήκη είναι αναγκαία και ικανή χρειαζόμαστε δυο επιχειρήματα. Για την αναγκαιότητα, μπορούμε να δείξουμε ότι το σύστημα είναι μη-αιτιατό αν $h(t) \neq 0$ για $t < 0$. Αφού η $h(t)$ είναι η έξοδος όταν η $\delta(t)$ είναι είσοδος, έχοντας ότι $h(t) \neq 0$

για $t < 0$ σημαίνει ότι η έξοδος ξεκινάει πριν από την εφαρμογή της εισόδου, πράγμα το οποίο παραβιάζει τον ορισμό της αιτιατότητας.

Για να αποδείξουμε ότι η συνθήκη (9.69) είναι ικανή να εξασφαλίσει την αιτιατότητα, πρέπει να εξετάσουμε την έκφραση του συνελκτικού ολοκληρώματος της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 , δηλαδή,

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t_0 - \tau)d\tau \quad (9.70)$$

Αν η (9.69) είναι αληθής, τότε η $h(t_0 - \tau)$ είναι μηδέν για $(t_0 - \tau) < 0$, το οποίο είναι το ίδιο με

$$h(t_0 - \tau) = 0 \quad \text{για } \tau > t_0$$

Επομένως, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση στη Σχέση (9.70) είναι μηδέν για $\tau > t_0$ και μπορούμε να αλλάξουμε το πάνω όριο του ολοκληρώματος σε $\tau = t_0$:

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} x(\tau)h(t_0 - \tau)d\tau \quad (9.71)$$

Το ολοκλήρωμα (9.71) μας λέει ότι η $y(t_0)$ εξαρτάται μόνο από τιμές της εισόδου $x(\tau)$ για $\tau \leq t_0$. Άρα, έχουμε δείξει ότι η Συνθήκη (9.69) είναι αναγκαία και ικανή για την αιτιατότητα ενός ΓΧΑ συστήματος.



Παράδειγμα 9-19: Μη Αιτιατό Σύστημα

Θεωρήστε το σύστημα του Παραδείγματος 9-16, όπου $h(t) = 1$ για $-10 \leq t < 10$. Αφού το σύστημα είναι ΓΧΑ και η κρουστική του απόκριση είναι μη μηδενική για τιμές του t μεταξύ -10 και 0 , δεν είναι ένα αιτιατό σύστημα. ■



Παράδειγμα 9-20: Το Σύστημα Χρονικής Αναστροφής δεν είναι Αιτιατό

Θεωρήστε το σύστημα που ορίζεται από τη σχέση εισόδου/εξόδου

$$y(t) = x(-t)$$

Αυτό είναι ένα σύστημα χρονικής αναστροφής, δηλαδή, το σύστημα αυτό “αναστρέφει το σήμα ως προς τη χρονική στιγμή μηδέν.” Η Εξίσωση (9.69) δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση αυτού του συστήματος διότι το σύστημα είναι μόνο γραμμικό, δεν είναι χρονικά αμετάβλητο. Επομένως θα πρέπει να καταφύγουμε στο γενικό ορισμό της αιτιατότητας. Από τη σχέση εισόδου-εξόδου, βλέπουμε ότι $y(-2) = x(2)$, δηλαδή χρειαζόμαστε μια “μελλοντική” τιμή του $x(\tau)$ για να υπολογίσουμε το $y(-2)$. Πράγματι, για κάθε χρονική στιγμή $t_0 < 0$, χρειαζόμαστε την τιμή της εισόδου σε μια μελλοντική στιγμή $-t_0$, οπότε το σύστημα δεν είναι αιτιατό. ■



Άσκηση 9.12: Είναι ο ολοκληρωτής ένα αιτιατό σύστημα;



Άσκηση 9.13: Η κρουστική απόκριση ενός ιδανικού συστήματος καθυστέρησης είναι $h(t) = \delta(t - t_d)$. Για ποιες τιμές του t_d το σύστημα καθυστέρησης θα είναι αιτιατό;

9-9 Χρήση της Συνέλιξης για την Απομάκρυνση Παραμορφώσεων που Οφείλονται στην Πολυόδευση

Έχουμε μελετήσει τη συνέλιξη και τις ιδιότητές της λεπτομερώς. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την έννοια άμεσα ή έμμεσα σε αρκετές περιπτώσεις στα υπόλοιπα κεφάλαια. Πριν συνεχίσουμε με τη μελέτη των μετασχηματισμών Fourier, ας θεωρήσουμε ένα παράδειγμα μιας πρακτικής εφαρμογής της συνέλιξης. Σε πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή μας ζωή, είναι δύσκολο να καταγράψουμε ένα σήμα χωρίς παραμόρφωση. Αυτό συμβαίνει για παράδειγμα όταν έχουμε το φαινόμενο της ηχούς, φαινόμενο το οποίο μπορεί να παραχθεί από μη ορθό τερατισμό των γραμμών μετάδοσης ή από τη λήψη του ήχου μέσα σε ένα περιβάλλον όπου ο ήχος ανακλά πάνω σε τοίχους

ή άλλα εμπόδια με αποτέλεσμα πολλαπλές εκδόσεις του σήματος, αφού καλύψουν διαφορετικές αποστάσεις, να επιστρέφουν στο μικρόφωνο. Ο απλούστερος τρόπος για να μοντελοποιήσουμε αυτήν την κατάσταση είναι να ορίσουμε το λαμβανόμενο σήμα ως το άθροισμα του πραγματικού σήματος και μιας ανακλώμενης συνιστώσας

$$y(t) = x(t) + \alpha x(t - t_d) \quad (9.72)$$

Η παράμετρος α , της οποίας το μέτρο είναι συνήθως μικρότερο της μονάδας, μοντελοποιεί την απώλεια ισχύος του σήματος κατά μήκος του μονοπατιού της ηχούς και t_d θα είναι ο επιπλέον χρόνος που απαιτείται από το ηχητικό κύμα για να καλύψει την απόσταση του μονοπατιού της ηχούς. Στην περίπτωση που το $x(t)$ είναι ένα ακουστικό σήμα και το t_d είναι 100 msec, ένας άνθρωπος θα αντιλαμβανόταν την ηχώ. Στην περίπτωση που το t_d είναι μικρό και υπάρχουν πολλές ανακλάσεις θα αντιληφθούμε το φαινόμενο της αντήχησης.

Αφού η συνέλιξη με ένα μετατοπισμένο κρουστικό σήμα απλά μετατοπίζει και κλιμακώνει το σήμα, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την εισαγωγή της ηχούς με τη βοήθεια ενός ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \delta(t) + \alpha\delta(t - t_d) \quad (9.73)$$

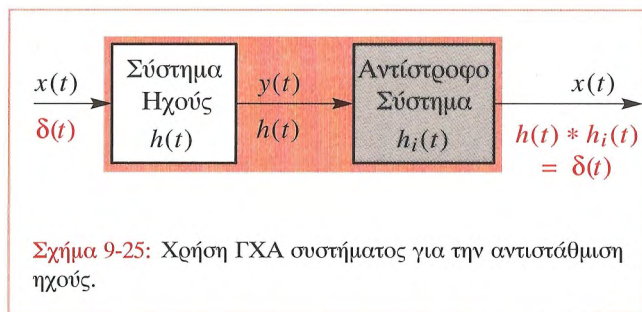
οπότε το καταγραφόμενο σήμα της Σχέσης (9.72) είναι $y(t) = h(t) * x(t)$. Αν το περιβάλλον της μετάδοσης έχει παραπάνω από ένα μονοπάτια, θα προσθέσουμε απλά περισσότερα κρουστικά σήματα με διαφορετικούς παράγοντες κλιμάκωσης και διαφορετικές χρονικές καθυστερήσεις για να ορίσουμε ένα γενικό ΓΧΑ μοντέλο ηχούς με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \delta(t - t_k) \quad (9.74)$$

Πολλαπλές επαναλήψεις αυτού του είδους δημιουργούν ένα φαινόμενο που ονομάζουμε *αντήχηση*.

Όταν έχουμε το φαινόμενο της ηχούς και της αντήχησης, μπορεί να είναι απαραίτητο να ανακτήσουμε το $x(t)$ από

το σήμα $y(t)$. Όταν αργότερα στο Κεφάλαιο 11 θα μελετήσουμε την ανάλυση Fourier, θα είμαστε ικανοί να καταλάβουμε τότε είναι δυνατόν να το κάνουμε αυτό στη γενική περίπτωση. Ωστόσο, για μία επανάληψη είναι δυνατόν να ανακτήσουμε το $x(t)$ αν ικανοποιείται μια απλή συνθήκη. Πράγματι, θα δείξουμε τώρα ότι είναι δυνατόν να ανακτήσουμε το $x(t)$ απλά περνώντας το διαθέσιμο σήμα $y(t)$ από ένα άλλο ΓΧΑ σύστημα. Ένα τέτοιο σύστημα θα ονομάζεται *αντίστροφο σύστημα* του συστήματος του οποίου η κρουστική απόκριση είναι $h_i(t)$. Η λειτουργία που επιθυμούμε να κάνουμε παρουσιάζεται στο Σχήμα 9-25, το οποίο δείχνει ότι ο σκοπός του σειριακού συστήματος είναι να δημιουργήσουμε ένα συνολικό σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση να είναι το κρουστικό σήμα. Εάν γράψουμε τη συνέλιξη για το δεύτερο σύστημα του Σχήματος 9-25 και επίσης αντικαταστήσουμε τον ορισμό του πρώτου συστήματος ως εξής



$$\begin{aligned} x(t) &= y(t) * h_i(t) = [x(t) * h(t)] * h_i(t) \\ &= x(t) * [h(t) * h_i(t)] \end{aligned} \quad (9.75)$$

τότε μπορούμε να λύσουμε τη Σχέση (9.75) ως προς $h_i(t)$ με χρήση του ταυτοτικού στοιχείου της συνέλιξης

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

και να πάρουμε την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= h(t) * h_i(t) \\ &= [\delta(t) + \alpha\delta(t - t_d)] * h_i(t) \end{aligned} \quad (9.76)$$

Για να βρούμε το αντίστροφο σύστημα, πρέπει να λύσουμε τη Σχέση (9.76) ως προς $h_i(t)$. Στο σημείο αυτό, ουσιαστικά δεν διαθέτουμε εργαλεία για να λύσουμε τέτοιου είδους συνελικτικές εξισώσεις. Ωστόσο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διαίσθησή μας και να πειραματιστούμε για να βρούμε τη λύση. Καταρχήν, παρατηρήστε ότι η $h_i(t)$ πρέπει να περιέχει κάποιο κρουστικό όρο διότι υπάρχει ένας τέτοιος όρος στο αριστερό μέλος της (9.76). Επίσης, παρατηρήστε ότι ουσιαστικά προσπαθούμε να εξαλείψουμε μια καθυστερημένη κατά t_d επανάληψη μεγέθους α οπότε ας δοκιμάσουμε να συμπεριλάβουμε ένα καθυστερημένο κατά t_d κρουστικό σήμα μεγέθους $-\alpha$, δηλαδή, προτείνουμε την ακόλουθη σχέση

$$\tilde{h}_i(t) = \delta(t) - \alpha\delta(t - t_d)$$

για το αντίστροφο σύστημα.

Αντικαθιστώντας την $h_i(t)$ της παραπάνω σχέσης στη Σχέση (9.76), παίρνουμε

$$\begin{aligned} h(t) * \tilde{h}_i(t) &= [\delta(t) + \alpha\delta(t - t_d)] * [\delta(t) - \alpha\delta(t - t_d)] \\ &= \delta(t) - \alpha^2\delta(t - 2t_d) \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση είναι προφανές ότι έχουμε απαλλαγεί από την ηχώ μεγέθους α τη χρονική στιγμή t_d , αλλά έχουμε την παρουσία ηχούς μεγέθους $-\alpha^2$ τη χρονική στιγμή $2t_d$. Αυτό μπορεί να αποτελέσει μια βελτίωση αν το $|\alpha| < 1$ αφού το μέγεθος της ηχούς θα γίνει μικρότερο, αλλά παρόλα αυτά δεν έχουμε εξαλείψει τελείως την ηχώ. Τι θα μπορούσε να εξαλείψει την ηχώ της χρονικής στιγμής $2t_d$; Τι θα μπορούσαμε να πετύχουμε, αν προσθέταμε έναν δεύτερο όρο στην προτεινόμενη $h_i(t)$; Ίσως θα έπρεπε να προσθέσουμε έναν ακόμα κρουστικό όρο στα $2t_d$, όπως φαίνεται στην ακόλουθη εξίσωση

$$\tilde{h}_i(t) = \delta(t) - \alpha\delta(t - t_d) + \alpha^2\delta(t - 2t_d)$$


η οποία στη συνέχεια δίνει

$$h(t) * \tilde{h}_i(t) = \delta(t) + \alpha^3 \delta(t - 3t_d)$$

όπως και προηγουμένως, αν το $|\alpha| < 1$ η εναπομείνουσα ηχώ θα έχει μικρότερο μέγεθος. Αν συνεχίσουμε με αυτόν τον τρόπο, οδηγούμαστε στην ακόλουθη λύση

$$h_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k \delta(t - kt_d) \quad (9.77)$$

η οποία είναι σωστή διότι θα ωθήσει την εναπομείνουσα ηχώ στο $t = \infty$ και το πλάτος της θα είναι μηδέν αν $|\alpha| < 1$.

 **Άσκηση 9.14:** Αντικαταστήστε τη Σχέση (9.77) στη Σχέση (9.76) και δείξτε ότι οι κρουστικοί όροι που προκύπτουν στο δεξιό μέλος της εξίσωσης εξαλείφονται όλοι εκτός από τον όρο $\delta(t)$.

Κατά τη διάρκεια της συζήτησής μας, έχουμε επανειλημμένως αναφέρει τη συνθήκη $|\alpha| < 1$. Σε αυτή την περίπτωση, το αντίστροφο φίλτρο αποτελείται από ένα άπειρο σύνολο κρουστικών όρων των οποίων το μέγεθος μειώνεται εκθετικά. Αν $|\alpha| \geq 1$, το μέγεθος των κρουστικών όρων στην κρουστική απόκριση του αντίστροφου φίλτρου δεν θα μειώνεται. Ένα τέτοιο σύστημα θα είναι ασταθές και στην πράξη δεν θα είναι χρήσιμο. Σε πολλές περιπτώσεις, εντούτοις, τα αντίστροφα φίλτρα μπορούν να επιτύχουν μερική αντιστάθμιση της ηχούς ή άλλων γραμμικών παρεμβολών. Ένα άλλο αξιοπρόσεχτο παράδειγμα είναι στην ανταλλαγή δεδομένων, όπου προσαρμοστικά φίλτρα χρησιμοποιούνται για να αντισταθμίζουν το κανάλι μετάδοσης.

9-10 Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι

Στο κεφάλαιο αυτό, εστίασαμε την προσοχή μας στα σήματα και τα συστήματα συνεχούς χρόνου. Δείξαμε ότι, όπως και στην περίπτωση των σημάτων και των συστημάτων διακριτού χρόνου, τα γραμμικά χρονικά

αμετάβλητα συστήματα συνεχούς χρόνου, χαρακτηρίζονται πλήρως από την απόκρισή τους σε ένα μοναδιαίο κρουστικό σήμα. Έτσι για οποιοδήποτε δεδομένη είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα, η έξοδος μπορεί να υπολογιστεί από τη συνέλιξη συνεχούς χρόνου της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης. Είδαμε πώς μπορούμε να υπολογίζουμε συνέλιξεις κρουστικών συναρτήσεων με άλλα σήματα συμπεριλαμβανομένων και άλλων κρουστικών σημάτων και παραθέσαμε πολλά παραδείγματα που διευκρίνισαν πώς να υπολογίζουμε συνελκτικά ολοκληρώματα, που περιλαμβάνουν σήματα κατά τμήματα σταθερά ή κατά τμήματα εκθετικά. Επίσης είδαμε ότι οι ιδιότητες της συνέλιξης μας επιτρέπουν να χειριστούμε συνδεομολογίες σε σειρά και/η εν παραλλήλω ΓΧΑ συστημάτων, και βρήκαμε ότι η αιτιατότητα και η ευστάθεια ενός ΓΧΑ συστήματος μπορεί να ελεγχθεί εύκολα, εξετάζοντας απλά την κρουστική του απόκριση. Τέλος, παρουσιάστηκε μ' ένα απλό παράδειγμα πώς η έννοια της συνέλιξης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναπαραστήσουμε ένα πρακτικό πρόβλημα επεξεργασίας σημάτων.

Αυτό το κεφάλαιο περιλαμβάνει δύο παρουσιάσεις:

- (i) Το `dconvdemo` παρουσιάζει τη συνέλιξη διακριτού χρόνου.



Επίδειξη: Διακριτή Συνέλιξη

- (ii) Η Διεπαφή `cconvdemo` παρουσιάζει τη συνέλιξη συνεχούς χρόνου.



Επίδειξη: Συνεχής Συνέλιξη

Και οι δύο επιδείξεις βασίζονται σε γραφικές διεπαφές του Matlab που βοηθούν τους φοιτητές να οπτικοποιήσουν το συνελκτικό τελεστή. Μερικά χαρακτηριστικά είναι τα ακόλουθα: 1) Οι χρήστες μπορούν να επιλέξουν από μια ποικιλία σημάτων 2) Τα σήματα μπορούν να επιλεγούν με το ποντίκι και η απεικόνιση αλλάζει σε πραγματικό χρόνο 3) Σε λειτουργία επισκόπησης, ο χρήστης μπορεί

να αποκρύψει τη συνέλιξη 4) Ποικίλες ρυθμίσεις των γραφικών παραστάσεων κάνουν και τις δύο διεπαφές λειτουργικά εργαλεία στο μάθημα. Το Εργαστήριο #12 παρέχει ένα δομημένο πλαίσιο εργασίας στους φοιτητές ώστε να χρησιμοποιήσουν και τις δυο γραφικές διεπαφές της συνέλιξης.

Εργ. Ασκ.: #12 Γραφικές Διεπαφές Συνέλιξης

Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει και στο μεγάλο αριθμό λυμένων προβλημάτων που υπάρχουν στο CD-ROM και είναι διαθέσιμα για επανάληψη και εξάσκηση.

Υπόδειξη: Εκατοντάδες Λυμένων Προβλημάτων

9-11 Προβλήματα

Πρόβλημα.-9.1 Η Εξίσωση (9.6) στη Σελίδα 273 μας δίνει ένα τρόπο για να γράψουμε τον πεπερασμένης χρονικής διάρκειας παλμό $p(t)$ στο Σχήμα 9-3 (α) σε σχέση με τη μοναδιαία βηματική ακολουθία $u(t)$. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε παράσταση γινομένου.

- Κάντε τη γραφική παράσταση του σήματος $u(t - 2)$.
- Κάντε τη γραφική παράσταση του σήματος $u(4 - t)$. Καθορίστε την περιοχή που το σήμα $u(4 - t)$ είναι μηδενικό.
- Δείξτε ότι το σήμα $u(t - 2)u(4 - t)$ ταυτίζεται με το σήμα $p(t)$ που φαίνεται στο Σχήμα 9-3(α).

Πρόβλημα.-9.2 Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, εξετάστε αν το συνεχούς χρόνου σύστημα είναι (i) γραμμικό (ii) χρονικά αμετάβλητο (iii) ευσταθές και (iv) αιτιατό. Σε κάθε περίπτωση, το σήμα $x(t)$ αποτελεί την είσοδο και το $y(t)$ την αντίστοιχη έξοδο του συστήματος. Δώστε σύντομες επεξηγήσεις για τις απαντήσεις σας. *Θυμηθείτε ότι για να δείξετε ότι ένα σύστημα δεν έχει κάποια ιδιότητα, αυτό που θα πρέπει να κάνετε είναι να*

δώσετε ένα παράδειγμα εισόδου της οποίας η έξοδος δεν ικανοποιεί τη συνθήκη της ιδιότητας.

- Ένα εκθετικό σύστημα ορίζεται από την ακόλουθη σχέση εισόδου/εξόδου

$$y(t) = \exp\{x(t + 2)\} = e^{x(t + 2)}$$

- Ένας διαμορφωτής φάσης είναι ένα σύστημα του οποίου η είσοδος και η έξοδος ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$y(t) = \cos[\omega_c t + x(t)]$$

- Ένας διαμορφωτής πλάτους είναι ένα σύστημα του οποίου η είσοδος και η έξοδος ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$y(t) = [A + x(t)] \cos(\omega_c t)$$

- Ένα σύστημα που απομονώνει το άρτιο μέρος ενός σήματος ορίζεται από μια σχέση της μορφής

$$y(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

Πρόβλημα.-9.3 Απλοποιήστε τις ακόλουθες εξισώσεις:

- $\delta(t - 10) * [\delta(t + 10) + 2e^{-t}u(t) + \cos(100\pi t)]$
- $\cos(100\pi t)[\delta(t) + \delta(t - .002)]$
- $\frac{d}{dt} [e^{-2(t-2)}u(t - 2)]$

- $\int_{-\infty}^t \cos(100\pi\tau)[\delta(\tau) + \delta(\tau - .002)]d\tau$

Σημείωση: Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες της κρουστικής συνάρτησης $\delta(t)$ και της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης $u(t)$ για να κάνετε τις απλοποιήσεις. Να είστε προσεκτικοί για το πότε έχουμε να κάνουμε με πολλαπλασιασμό

και τότε με συνέλιξη. Η συνέλιξη συμβολίζεται με τον “αστερίσκο”, όπως στη $x(t) * \delta(t-2) = x(t-2)$ και ο πολλαπλασιασμός συμβολίζεται, όπως συνήθως, όπως φαίνεται στη $x(t)\delta(t-2) = x(2)\delta(t-2)$.

Πρόβλημα.-9.4 Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις, απλοποιήστε την έκφραση όσο το δυνατόν περισσότερο, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του συνεχούς χρόνου μοναδιαίου κρουστικού σήματος. Δώστε επεξηγήσεις για τις απαντήσεις σας ή αναφέρετε κάποια ενδιάμεσα βήματα για κάθε απάντησή σας

(i) $e^{-(t-4)}u(t-4)\delta(t-5)$

(ii) $\int_{-\infty}^{t-5} \delta(\tau-1)d\tau$

(iii) $\frac{d}{dt}\{e^{-(t-4)}u(t-4)\}$

(iv) $\delta(t-1) * \delta(t-2) * \delta(t)$

Πρόβλημα.-9.5 Βρείτε την $h(t)$ που ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση:

$$[e^{-(t-4)}u(t-4)] * h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

Πρόβλημα.-9.6 Υποθέστε ότι $x(t) = e^{-4t}u(t)$. Εκφράστε σε απλούστερη μορφή κάθε ένα από τα παρακάτω:

(i) $x(t)[\delta(t+1) + \delta(t-1)]$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau-1)d\tau$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

(iv) $\delta^{(1)}(t) * x(t-1)$

Πρόβλημα.-9.7 Απλοποιήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

(i) $[e^{-3t} + \sin(t)][\delta(t) + \delta(t-1)]$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi\tau)\delta(\tau-1)d\tau$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

Πρόβλημα.-9.8 Χρησιμοποιήστε το συνελικτικό ολοκλήρωμα για να ορίσετε τη συνέλιξη μεταξύ δύο εκθετικών σημάτων με τον ίδιο εκθέτη, συγκεκριμένα

$$y(t) = [e^{-at}u(t)] * [e^{-at}u(t)].$$

Συγκρίνετε τα αποτελεσματά σας με το Παράδειγμα 9-9 της σελίδας 284 και την Άσκηση 9.4 της σελίδας 292.

Πρόβλημα.-9.9 Χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα και τη χρονική αμεταβλητότητα για να βρείτε τη βηματική απόκριση ενός συστήματος του οποίου η κρουστική απόκριση είναι ο παρακάτω ορθογώνιος παλμός

$$h(t) = 5u(t-1) - 5u(t-4)$$

(i) Διασπάστε τη συνέλιξη σε δύο όρους και εκμεταλλευτείτε τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 9-9 της Σελίδας 284 για να πάρετε $y(t) = u(t) * h(t)$.

(ii) Κάντε τη γραφική παράσταση του $y(t)$ συναρτήσει του t .

Πρόβλημα.-9.10 Χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα και τη χρονική αμεταβλητότητα για να υπολογίσετε τη συνέλιξη των ακόλουθων ορθογώνιων παλμών:

$$x(t) = 2u(t) - 2u(t-2)$$

$$h(t) = 3u(t-5) - 3u(t-1)$$

- (i) Διασπάστε τη συνέλιξη σε τέσσερις όρους και εκμεταλλευτείτε το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 9-9 για να πάρετε $y(t) = x(t) * h(t)$.
- (ii) Κάντε τη γραφική παράσταση του $y(t)$ συναρτήσει του t .

Πρόβλημα.-9.11 Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συνεχούς χρόνου συστήματος είναι τέτοια ώστε $h(t) = 0$ για $t \leq T_1$ και για $t \geq T_2$. Αποδείξτε ότι αν $x(t) = 0$ για $t \leq T_3$ και για $t \geq T_4$ τότε $y(t) = x(t) * h(t) = 0$ για $t \leq T_5$ και για $t \geq T_6$. Στα βήματα που θα ακολουθήσετε για την απόδειξη θα πρέπει να βρείτε εκφράσεις για το T_5 και το T_6 συναρτήσει των T_1, T_2, T_3 και T_4 . Ο καλύτερος τρόπος για να λύσετε αυτό το πρόβλημα είναι να σχεδιάσετε τυπικά σήματα εισόδου και κρουστικών αποκρίσεων (π.χ τετραγωνικούς παλμούς) και στη συνέχεια να τις μετατοπίσετε.

Ένας άλλος τρόπος για να προσεγγίσετε το πρόβλημα είναι να χρησιμοποιήσετε τη γραφική διεπαφή `convdemo`, και να κάνετε μερικά παραδείγματα συνέλιξης πεπερασμένης χρονικής διάρκειας σημάτων και να βρείτε από τα παραδείγματα αυτά τη σωστή απάντηση.

Πρόβλημα.-9.12 Η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου συστήματος είναι

$$h(t) = \begin{cases} e^{-0.1(t-2)} & 2 \leq t < 12 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- (i) Είναι το σύστημα ευσταθές; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- (ii) Είναι το σύστημα αιτιατό; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- (iii) Βρείτε την έξοδο $y(t)$ όταν η είσοδος είναι $x(t) = \delta(t-2)$.

Πρόβλημα.-9.13 Η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου συστήματος είναι

$$h(t) = \begin{cases} e^{-0.1(t-2)} & 2 \leq t < 12 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

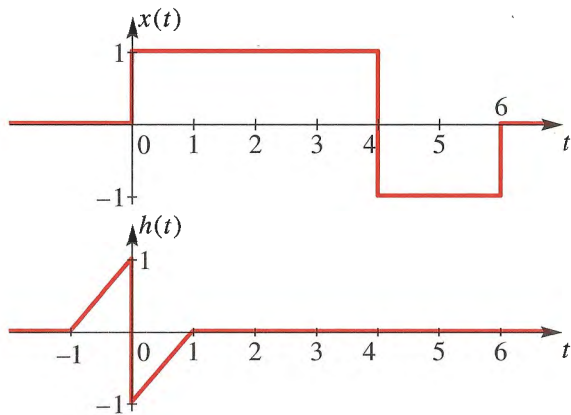
- (i) Σχεδιάστε την $h(t-\tau)$ συναρτήσει του τ για $t = 0, 8$ και 20 .
- (ii) Χρησιμοποιήστε τη συνέλιξη για να βρείτε την έξοδο $y(t)$ όταν η είσοδος είναι

$$x(t) = \begin{cases} e^{-0.25t} & 0 \leq t < 6 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ανατρέξτε στο αποτέλεσμα της Άσκησης 9.4 της Σελίδας 292 και μετά εκμεταλλευτείτε τη γραμμικότητα και τη χρονική αμεταβλητότητα για να επεκτείνετε τη συνέλιξη σε έναν αριθμό από όρους που χρησιμοποιούν αυτό το αποτέλεσμα.

- (iii) Κάντε τη γραφική παράσταση του αποτελέσματος που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Γράψτε την έξοδο για πέντε ξεχωριστές περιπτώσεις και να την περιγράψετε σε κάθε τμήμα της γραφικής παράστασης.
- (iv) Δείτε το πρόβλημα αυτό στη γραφική διεπαφή `convdemo` για να ελέγξετε την ορθότητα της γραφικής παράστασης της $y(t)$.

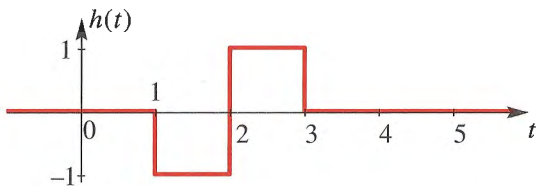
Πρόβλημα.-9.14 Αν η είσοδος $x(t)$ και η κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος είναι :



Χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- (i) Βρείτε την $y(0)$, την τιμή της εξόδου τη χρονική στιγμή $t = 0$.
- (ii) Βρείτε όλες τις τιμές του t για τις οποίες η έξοδος είναι $y(t) = 0$

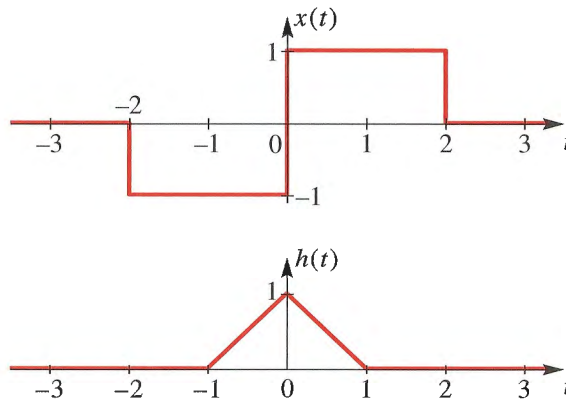
Πρόβλημα.-9.15 Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα έχει την ακόλουθη κρουστική απόκριση:



- (i) Είναι το ΓΧΑ σύστημα ευσταθές; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- (ii) Σχεδιάστε την $h(t - \tau)$ συναρτήσει του τ , για $t = 2$. Βαθμονομήστε προσεκτικά τη γραφική παράστασή σας.
- (iii) Αν η είσοδος είναι $x(t) = u(t)$, χρησιμοποιήστε το συνελκτικό ολοκλήρωμα για να βρείτε την $y(2)$, δηλαδή την τιμή της $y(t)$ τη χρονική στιγμή $t = 2$.

- (iv) Για το σήμα εισόδου $x(t) = u(t)$ και τη δοθείσα κρουστική απόκριση, η έξοδος είναι $y(t) = 0$ για $t < T_1$ και $t > T_2$. Βρείτε τα T_1 και T_2 και δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Πρόβλημα.-9.16 Στο σχήμα που ακολουθεί, $x(t)$ είναι η είσοδος και $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος του οποίου η έξοδος είναι $y(t)$:



Βρείτε μια απλή προσέγγιση για τα ακόλουθα:

- (i) Ποιό είναι το πλήρες σύνολο τιμών του t για το οποίο $y(t) = 0$;
- (ii) Για ποια τιμή του t η $y(t)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της; Ποιά είναι αυτή η τιμή;
- (iii) Σχεδιάστε προσεκτικά την πρώτη παράγωγο $y^{(1)}(t)$ της εξόδου όταν η είσοδος και η κρουστική απόκριση είναι όπως και πριν. Θα πρέπει να το κάνετε αυτό χωρίς να υπολογίσετε πρώτα την $y(t)$.

Πρόβλημα.-9.17 Ένα σύστημα συνεχούς χρόνου ορίζεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου

$$y(t) = \int_{t-2}^{t+2} x(\tau) d\tau$$

- (i) Βρείτε την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος.
Υπόδειξη: Αντικαταστήστε $x(\tau) = \delta(\tau)$ και βρείτε τις τιμές του t για τις οποίες το ολοκλήρωμα είναι μη μηδενικό.
- (ii) Είναι ευσταθές το σύστημα; Αποδείξτε το (αν είναι) ή δώστε ένα αντιπαράδειγμα (αν δεν είναι).
- (iii) Είναι το σύστημα αιτιατό; Αποδείξτε το (αν είναι) ή δώστε ένα αντιπαράδειγμα (αν δεν είναι).
- (iv) Χρησιμοποιήστε το συνελκτικό ολοκλήρωμα για να βρείτε την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι

$$x(t) = u(t + 1)$$

Κάντε γραφική παράσταση της απάντησής σας.

Πρόβλημα.-9.18 Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = \delta(t) - 3e^{-3t}u(t)$$

Χρησιμοποιήστε τη συνέλιξη για να βρείτε την έξοδο $y(t)$ για $-\infty < t < \infty$ όταν η είσοδος είναι

$$x(t) = u(-t)$$

Πρόβλημα.-9.19 Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 2 \leq t < 4 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- (i) Σχεδιάστε την $h(-1 - \tau)$ συναρτήσει του τ .
- (ii) Χρησιμοποιήστε τη συνέλιξη για να βρείτε την έξοδο $y(t)$ για $-\infty < t < \infty$ όταν η είσοδος είναι

$$x(t) = u(t) - \delta(t - 2)$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αρχή της υπέρθεσης.

Πρόβλημα.-9.20 Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα έχει κρουστική απόκριση: $h(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$

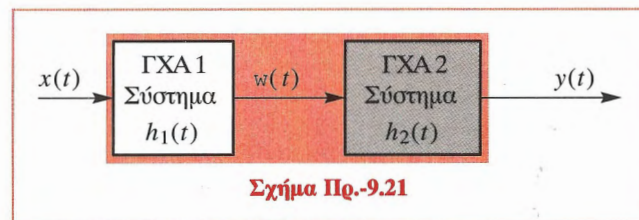
- (i) Σχεδιάστε την $h(t - \tau)$ συναρτήσει του τ , για $t = 1$. Βαθμονομήστε τη γραφική σας παράσταση.
- (ii) Είναι το σύστημα αιτιατό; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- (iii) Είναι το σύστημα ευσταθές; Αποδείξτε το ή δώστε ένα αντιπαράδειγμα.
- (iv) Αν η είσοδος είναι $x(t) = u(t)$, τότε θα ισχύει ότι η έξοδος $y(t)$ είναι μηδέν για $t \leq t_1$. Βρείτε το t_1 .
- (v) Το σήμα εξόδου, για $t > t_1$, είναι μη μηδενικό όταν η είσοδος είναι $x(t) = u(t)$. Χρησιμοποιήστε το συνελκτικό ολοκλήρωμα για να βρείτε το μη μηδενικό μέρος της εξόδου, βρείτε δηλαδή το $y(t)$ για $t > t_1$.

Πρόβλημα.-9.21 Θεωρήστε τη σειριακή σύνδεση των δυο ΓΧΑ συστημάτων που φαίνονται στο Σχήμα Πρ.-9.21. Το πρώτο σύστημα έχει κρουστική απόκριση

$$h_1(t) = \begin{cases} e^{-2t} & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

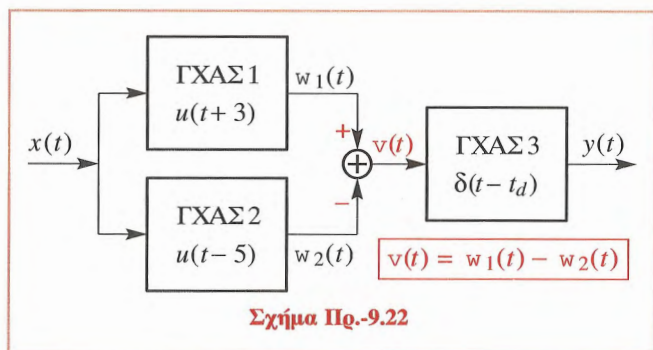
και το δεύτερο σύστημα είναι ένας διαφοριστής που περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση εισόδου/εξόδου

$$y(t) = \frac{dw(t)}{dt}$$



Βρείτε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος, δηλαδή βρείτε την έξοδο $y(t) = h(t)$ όταν η είσοδος είναι $x(t) = \delta(t)$. Δώστε την απάντησή σας και με τη μορφή εξίσωσης και με μια προσεκτικά βαθμονομημένη γραφική παράσταση.

Πρόβλημα.-9.22 Το σχηματικό διάγραμμα που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-9.22 απεικονίζει δύο ΓΧΑ συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα τα οποία είναι συνδεδεμένα στη σειρά με ένα τρίτο ΓΧΑ σύστημα. Οι κρουστικές αποκρίσεις των συστημάτων αναγράφονται μέσα σε κάθε κουτί του διαγράμματος.



- (i) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος, δηλαδή βρείτε την έξοδο $y(t) = h(t)$ όταν η είσοδος είναι $x(t) = \delta(t)$. Δώστε την απάντησή σας και με τη μορφή εξίσωσης και με ένα βαθμονομημένη γραφική παράσταση.
- (ii) Ποιά τιμή θα πρέπει να επιλεγεί για τη χρονική καθυστέρηση t_d έτσι ώστε το συνολικό σύστημα να είναι αιτιατό;
- (iii) Ποιά από τα συστήματα (#1, #2, #3) είναι ευσταθή; Είναι το συνολικό σύστημα ευσταθές; Εξηγήστε.

Πρόβλημα.-9.23 Θεωρήστε τη σειριακή συνδεσμολογία των δύο ΓΧΑ συστημάτων που παρουσιάζονται στο Πρόβλημα.-9.21. Το πρώτο σύστημα περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου

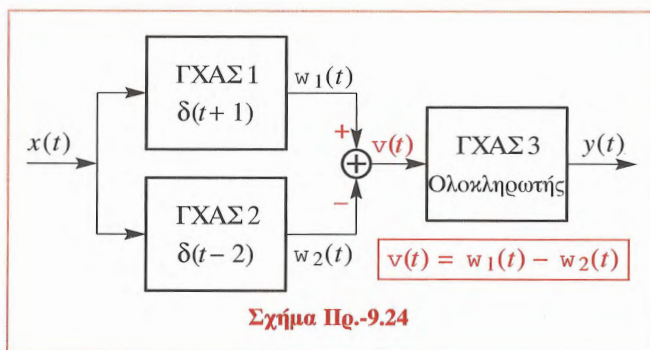
$$w(t) = x(t) - x(t - 2)$$

και το δεύτερο έχει κρουστική απόκριση

$$h_2(t) = u(t)$$

Βρείτε και σχεδιάστε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος δηλαδή, βρείτε την έξοδο $y(t) = h(t)$ όταν η είσοδος είναι $x(t) = \delta(t)$.

Πρόβλημα.-9.24 Το σύστημα που απεικονίζεται στο Σχήμα Πρ.-9.24 είναι ένα ΓΧΑ σύστημα.

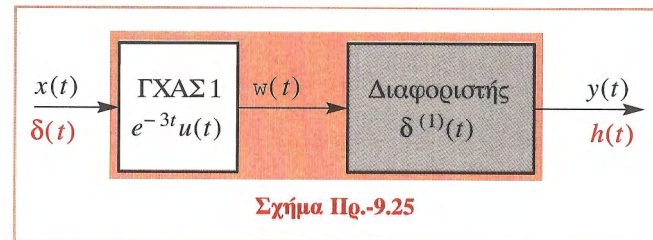


- (i) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος, δηλαδή βρείτε την έξοδο $y(t) = h(t)$ όταν η είσοδος είναι $x(t) = \delta(t)$. Δώστε την απάντησή σας και με τη μορφή εξίσωσης και με μια προσεκτικά βαθμονομημένη γραφική παράσταση.
- (ii) Είναι το σύστημα αιτιατό; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(iii) Είναι το σύστημα ευσταθές; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Πρόβλημα.-9.25 Θεωρήστε τα ΓΧΑ συστήματα σε σειρά όπως φαίνονται στο Σχήμα Πρ.-9.25.

- (i) Βρείτε την $h(t)$, την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος
- (ii) Βρείτε την $y(t)$ όταν η είσοδος είναι η $u(t)$ (δηλαδή, βρείτε τη μοναδιαία βηματική απόκριση του συνολικού συστήματος).



Υπόδειξη: Αναδιατάξτε τα συστήματα.

- (iii) Βρείτε την έξοδο $y(t)$ όταν η είσοδος είναι $x(t) = u(t) - u(t - 10)$. Εκμεταλλευτείτε τις ιδιότητες ενός ΓΧΑ συστήματος.

Απόκριση Συχνότητας

Στο Κεφάλαιο 9 είδαμε ότι η συνέλιξη συνεχούς χρόνου είναι συνώνυμη με τον ορισμό ενός ΓΧΑ συστήματος. Το συνελικτικό ολοκλήρωμα είναι εύκολο να χρησιμοποιηθεί ως ένα εργαλείο ανάλυσης όταν το σήμα εισόδου είναι το κρουστικό σήμα $\delta(t)$, η βηματική $u(t)$, ή συνδυασμός κατά τμήματα εκθετικών σημάτων. Ωστόσο, γνωρίζουμε από την εμπειρία μας με τα ψηφιακά φίλτρα (όπως στο Κεφάλαιο 6) ότι η *συνάρτηση της απόκρισης συχνότητας* αποτελεί ένα πολύ αποτελεσματικό τρόπο για να χαρακτηρίσουμε ένα ΓΧΑ σύστημα σε ημιτονοειδείς διεγέρσεις. Έτσι τώρα ξεκινάμε να κάνουμε τον ίδιο χαρακτηρισμό για τα αναλογικά φίλτρα (δηλαδή τα συστήματα συνεχούς χρόνου). Θα εξετάσουμε την περίπτωση που το σήμα εισόδου είναι ένα απλό ημίτονο, αλλά στη συνέχεια θα δείξουμε πως η ίδια μέθοδος εφαρμόζεται όταν το σήμα εισόδου είναι οποιαδήποτε περιοδική κυματομορφή.

10-1 Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας των ΓΧΑ Συστημάτων

Θέλουμε να αναπτύξουμε μια απλή μέθοδο για την απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος σε *ημιτονοειδείς* διεγέρσεις. Η γενική περιγραφή των ΓΧΑ συστημάτων μας λέει ότι η γενική έξοδος $y(t)$ προκύπτει από τη γενική είσοδο $x(t)$ με την εφαρμογή του συνελικτικού τελεστή ο οποίος ορίζεται ως ακολούθως:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau \quad (10.1)$$

όπου η κρουστική απόκριση $h(t)$ είναι η έξοδος το συστήματος όταν η είσοδος είναι το μοναδιαίο κρουστικό σήμα $\delta(t)$.

Αντί να αντιμετωπίσουμε την ημιτονοειδή περίπτωση άμεσα, θεωρούμε ότι το σήμα εισόδου είναι ένα μιγαδικό

εκθετικό σήμα της μορφής:

$$x(t) = Ae^{j\phi} e^{j\omega t} \quad -\infty < t < \infty \quad (10.2)$$

Θα αποδείξουμε ότι το αντίστοιχο σήμα εξόδου είναι ένα άλλο μιγαδικό εκθετικό σήμα της ίδιας συχνότητας. Γνωρίζουμε ότι αυτό είναι αλήθεια για τα ΓΧΑ συστήματα διακριτού χρόνου. Για να αποδείξουμε ότι τα παραπάνω ισχύουν και για τα ΓΧΑ συστήματα συνεχούς χρόνου, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη Σχέση (10.2) στο συνελκτικό ολοκλήρωμα (10.1) και να χρησιμοποιήσουμε γνωστές ιδιότητες των εκθετών για να απλοποιήσουμε την έκφραση ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) Ae^{j\phi} e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) Ae^{j\phi} e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) Ae^{j\phi} e^{j\omega t} \\ &= H(j\omega) Ae^{j\phi} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (10.3)$$

Παρατηρήστε ότι για συγκεκριμένη τιμή της συχνότητας ω , το ολοκλήρωμα μέσα στις παρενθέσεις μετατρέπεται σε μια μιγαδική σταθερά. Αυτή η μιγαδική σταθερά μας πληροφορεί κατά πόσο, το σύστημα, αλλάζει το μέτρο και τη φάση του σήματος εισόδου.



Παράδειγμα 10-1: Μιγαδική-Εκθετική Έξοδος

Υποθέστε ότι η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι $x(t) = 10e^{j3\pi t}$ και η τιμή της $H(j3\pi)$ είναι $2 - j2$. Η έξοδος μπορεί να εκφραστεί ως $y(t) = Be^{j\phi} e^{j3\pi t}$

αν μετατρέψουμε το $H(j3\pi)$ σε πολική μορφή και πολλαπλασιάσουμε.

$$y(t) = (2\sqrt{2}e^{-j\pi/4})10e^{j3\pi t} = 20\sqrt{2}e^{j(3\pi t - \pi/4)}$$

Άρα η μιγαδική εκθετική έξοδος έχει μέτρο $20\sqrt{2}$ και φάση $-\pi/4$. ■

Σύμφωνα με την (10.3), όταν η είσοδος είναι ένα εκθετικό μιγαδικό σήμα συχνότητας ω , η έξοδος είναι επίσης ένα εκθετικό μιγαδικό σήμα που έχει ακριβώς την ίδια συχνότητα. Ωστόσο, η επίδραση του συστήματος πάνω στο μιγαδικό εκθετικό σήμα εξαρτάται από τη συχνότητα του σήματος εισόδου. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η $H(j\omega)$ παίρνει διαφορετικές μιγαδικές τιμές καθώς αλλάζει το ω . Αν αφήσουμε τη συχνότητα να μεταβάλλεται, μπορούμε να ορίσουμε ως **απόκριση συχνότητας** ενός συστήματος συνεχούς χρόνου την ακόλουθη μιγαδική συνάρτηση του ω :

Απόκριση Συχνότητας ενός ΓΧΑ Συστήματος

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (10.4)$$

Γενικά, θέλουμε τη συναρτησιακή μορφή της $H(j\omega)$ έτσι ώστε να μπορούμε να σχεδιάσουμε την (10.4) συναρτήση της συχνότητας ω και να δούμε την επίδραση του συστήματος σε οποιοδήποτε μιγαδικό εκθετικό σήμα εισόδου. Δηλαδή, επιθυμούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της Σχέσης (10.4) για να βρούμε μια έκφραση της $H(j\omega)$ συναρτήσης γνωστών μαθηματικών συναρτήσεων. Το παράδειγμα που ακολουθεί διασαφηνίζει το σημείο αυτό για μια πραγματική μονόπλευρη εκθετική κρουστική απόκριση.



Παράδειγμα 10-2: Τύπος για την $H(j\omega)$

Υποθέστε ότι η κρουστική απόκριση είναι $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$. Μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα τύπο για την

απόκριση συχνότητας του ΓΧΑ συστήματος, υπολογίζοντας το ακόλουθο ολοκλήρωμα:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-2t}u(t)e^{-j\omega t} dt$$

Τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουμε είναι

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_0^{\infty} 2e^{-2t-j\omega t} dt \\ &= \left. \frac{2e^{-2t-j\omega t}}{-2-j\omega} \right|_0^{\infty} = 0 - \frac{2}{-2-j\omega} \\ &= \frac{2}{2+j\omega} \end{aligned} \quad (10.5)$$

Ο υπολογισμός στο πάνω όριο $t = \infty$ είναι μηδέν διότι $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-2t-j\omega t}| = e^{-2t} \rightarrow 0$. ■

10-1.1 Σχεδιάζοντας την Απόκριση Συχνότητας

Η απόκριση συχνότητας $H(j\omega)$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση η οποία εξαρτάται από το ω και ως εκ τούτου μπορεί να αποδοθεί από δύο γραφικές παραστάσεις: το μέτρο συναρτήσει της συχνότητας και τη φάση συναρτήσει της συχνότητας. Παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις της $H(j\omega)$ βλέπουμε ότι όπως ακριβώς στην περίπτωση των ψηφιακών φίλτρων, μπορούμε να μιλάμε για ζώνες διάβασης και ζώνες αποκοπής των αναλογικών φίλτρων.

Υποθέστε ότι θέλουμε να χαρακτηρίσουμε την απόκριση συχνότητας του ΓΧΑ συστήματος του Παραδείγματος 10-2, όπου

$$H(j\omega) = \frac{2}{2+j\omega} \quad (10.6)$$

η $H(j\omega)$ στη γενική περίπτωση είναι μια μιγαδική συνάρτηση του ω , όπως φαίνεται από την Εξίσωση (10.6). Για τη σχεδίαση ή τη χρησιμοποίηση της $H(j\omega)$ στον υπολογισμό της εξόδου που προκύπτει από την εφαρμογή ενός μιγαδικού-εκθετικού σήματος, είναι καλύτερα να

ω	$ H(j\omega) $
0	1
2	$2/\sqrt{8} = 0.707$
20	$2/\sqrt{404} \approx 0.0995$
∞	0

Πίνακας 10-1: Τιμές του $|H(j\omega)|$ για διάφορες τιμές του ω .

εκφράσουμε την $H(j\omega)$ σε πολική μορφή. Από τη Σχέση (10.6) προκύπτουν οι ακόλουθες συναρτήσεις μέτρου και φάσης:

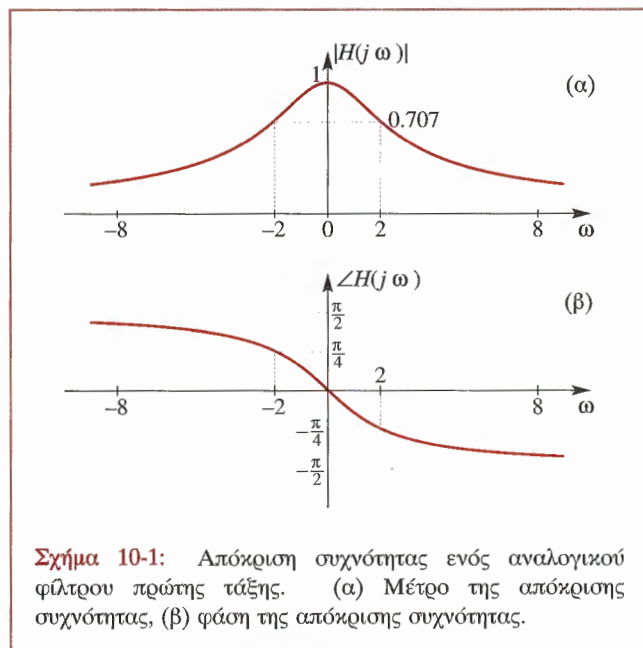
$$|H(j\omega)| = \left| \frac{2}{2+j\omega} \right| = \frac{2}{\sqrt{4+\omega^2}} \quad (10.7)$$

$$\angle H(j\omega) = 0 - \angle\{2+j\omega\} = -\tan^{-1}(\omega/2) \quad (10.8)$$

Το εύρος του άξονα της συχνότητας είναι $-\infty < \omega < \infty$ αφού τα μιγαδικά εκθετικά σήματα συνεχούς χρόνου μπορούν να έχουν οποιαδήποτε συχνότητα μέσα σ' αυτό το εύρος. Υπολογίζοντας το μέτρο της απόκρισης συχνότητας σε κάποιες κρίσιμες συχνότητες όπως $\omega = 0, 2, 20, \infty$, παίρνουμε τις τιμές που περιέχονται στον Πίνακα 10-1. Οι τιμές αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να κάνουμε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της απόκρισης μέτρου. Στο Σχήμα 10-1 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης της συνάρτησης της απόκρισης συχνότητας στο διάστημα $-8 \leq \omega \leq 8$.

10-1.1.1 Λογαριθμική Κλίμακα

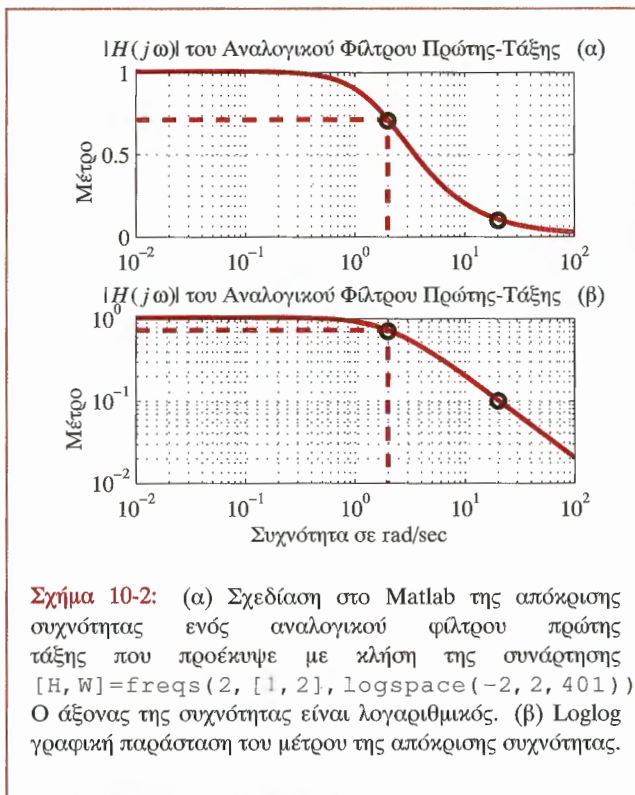
Στο Matlab μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση `freqs()` για να κάνουμε, πάνω σε ένα πυκνό σύνολο συχνοτήτων, πλήρη υπολογισμό και να σχεδιάσουμε την απόκριση συχνότητας. Από τη στιγμή που ο άξονας της συχνότητας εκτείνεται από το $-\infty$ μέχρι το ∞ , είναι σύνηθες να κάνουμε λογαριθμική βαθμονόμηση στον άξονα της συχνότητας για να καλύψουμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εύρος συχνοτήτων. Στο Σχήμα 10-2(α) απεικονίζεται η γραφική παράσταση του μέτρου της συνάρτησης της



Σχήμα 10-1: Απόκριση συχνότητας ενός αναλογικού φίλτρου πρώτης τάξης. (α) Μέτρο της απόκρισης συχνότητας, (β) φάση της απόκρισης συχνότητας.

απόκρισης συχνότητας του προηγούμενου παραδείγματος. Στη γραφική παράσταση σημειώνονται οι συχνότητες $\omega = 2$ και $\omega = 20$. Παρατηρήστε στο Σχήμα 10-2 ότι το μέτρο της απόκρισης συχνότητας έχει σχεδιαστεί μόνο για τις θετικές συχνότητες. Αυτό συμβαίνει γιατί το μέτρο της απόκρισης συχνότητας (10.7) είναι μια άρτια συνάρτηση, δηλαδή, $|H(-j\omega)| = |H(j\omega)|$. Στη γενική περίπτωση ενός συστήματος με πραγματική απόκριση συχνότητας, θα αποδείξουμε ότι $H(-j\omega) = H^*(j\omega)$, όπου * συμβολίζει το συζυγή μιγαδικό. Έπομένως, το μέτρο είναι μια άρτια συνάρτηση του ω , $|H(-j\omega)| = |H^*(j\omega)| = |H(j\omega)|$ και δεν χρειάζεται να το σχεδιάσουμε για ολόκληρο τον άξονα της συχνότητας.

Στο Σχήμα 10-2(β) απεικονίζεται η ίδια απόκριση συχνότητας, αλλά αυτή τη φορά χρησιμοποιούμε λογαριθμική κλίμακα και στους δύο άξονες. Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση αυτή η απόκριση συχνότητας για συχνότητες μεγαλύτερες από $\omega = 2$ rad/sec, φαίνεται να μειώνεται



Σχήμα 10-2: (α) Σχεδίαση στο Matlab της απόκρισης συχνότητας ενός αναλογικού φίλτρου πρώτης τάξης που προέκυψε με κλήση της συνάρτησης $[H, W]=\text{freqs}(2, [1, 2], \text{logspace}(-2, 2, 401))$. Ο άξονας της συχνότητας είναι λογαριθμικός. (β) Loglog γραφική παράσταση του μέτρου της απόκρισης συχνότητας.

γραμμικά με τη συχνότητα. Η καμπύλη βυθίζεται κατά ένα πολλαπλασιαστικό παράγοντα 0.1 σε κάθε αύξηση της συχνότητας κατά 10. Το χαρακτηριστικό αυτό της loglog γραφικής παράστασης της απόκρισης συχνότητας είναι πολύ χρήσιμο για τα συστήματα συνεχούς χρόνου υψηλότερης τάξης όπου η μετάβαση, αν και γραμμική, είναι περισσότερο απότομη. Γραφικές παραστάσεις αυτού του τύπου ονομάζονται γραφικές παραστάσεις του Bode.

10-1.2 Αλλαγές Μέτρου και Φάσης

Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα συχνότητας ω_0

$$x(t) = Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t} \quad (10.9)$$

τότε η αντίστοιχη έξοδος είναι

$$y(t) = H(j\omega_0) A e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} \quad (10.10)$$

όπου $H(j\omega)$ είναι η απόκριση συχνότητας του ΓΧΑ συστήματος. Αφού η συνάρτηση της απόκρισης συχνότητας στο $\omega = \omega_0$ ισούται με ένα μιγαδικό αριθμό ο οποίος μπορεί να εκφραστεί σε πολική μορφή

$$H(j\omega_0) = M e^{j\psi} \quad (10.11)$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε την έξοδο (10.10) ως ακολούθως

$$y(t) = M e^{j\psi} A e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} = (MA) e^{j(\omega_0 t + \phi + \psi)} \quad (10.12)$$

Παρατηρήστε ότι η προηγούμενη σχέση προέκυψε πολλαπλασιάζοντας τα μέτρα και προσθέτοντας τις φάσεις.

Παράδειγμα 10-3: Υπολογισμός της $H(j\omega)$

Υποθέστε ότι η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος είναι

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{200\pi + j\omega}$$

Για να υπολογίσουμε την απόκριση συχνότητας στο $\omega = 200\pi$, απλώς αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση την τιμή της επιθυμητής συχνότητας και παίρνουμε το μιγαδικό αριθμό

$$\begin{aligned} H(j200\pi) &= \frac{j200\pi}{200\pi + j200\pi} \\ &= \frac{j}{1+j} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+j\pi/4} \end{aligned}$$

Επομένως το μέτρο είναι $M = 1/\sqrt{2}$ και η μετατόπιση φάσης είναι $\psi = \pi/4$. ■

Παράδειγμα 10-4: Μιγαδική-Εκθετική Είσοδος

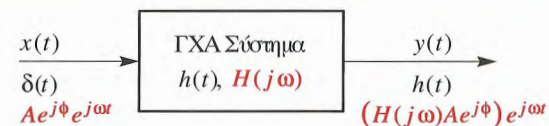
Υποθέστε τώρα ότι η είσοδος στο σύστημα του Παραδείγματος 10-3 είναι το ακόλουθο μιγαδικό εκθετικό σήμα

$$x(t) = 20e^{j0.3\pi} e^{j200\pi t}$$

Για το σύστημα του Παραδείγματος 10-3, η απόκριση συχνότητας (10.4) στη συχνότητα $\omega = 200\pi$ rad/sec ισούται με $H(j200\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+j\pi/4}$. Από τη Σχέση (10.10) γνωρίζουμε ότι η έξοδος του συστήματος θα είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+j\pi/4} (20e^{j0.3\pi} e^{j200\pi t}) \\ &= 10\sqrt{2} e^{j(200\pi t + 0.55\pi)} \end{aligned}$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι οι αριθμητικές τιμές του μέτρου (M) και της φάσης (ψ) της απόκρισης συχνότητας θα αλλάζουν όταν η συχνότητα ω_0 του σήματος εισόδου αλλάξει, αλλά η συχνότητα του σήματος εξόδου θα είναι η ίδια με αυτή του σήματος εισόδου. ■



Σχήμα 10-3: Απόκρισεις ενός ΓΧΑ συστήματος σε μοναδιαία κρουστική διέγερση και σε μιγαδικά-εκθετικά σήματα.

Το σύστημα στα Σχήματα 10-1 και 10-2 είναι φανερό ότι είναι ένα κατωπερατό φίλτρο αφού επιτρέπει τη διέλευση μιγαδικών-εκθετικών σημάτων χαμηλών συχνότητας πολλαπλασιάζοντάς τα με τιμές που προσεγγίζουν τη μονάδα, ενώ αποκόπτει τα μιγαδικά-εκθετικά σήματα υψηλών συχνότητων πολλαπλασιάζοντάς τα με τιμές που

προσεγγίζουν το μηδέν. Για το φίλτρο του Σχήματος 10-1, η συχνότητα $\omega = 2$ θεωρείται ως το τυπικό διαχωριστικό σημείο μεταξύ της περιοχής διάβασης χαμηλών συχνοτήτων και της περιοχής αποκοπής υψηλών συχνοτήτων.

10-2 Απόκριση σε Πραγματικά Ημιτονοειδή Σήματα

Η συζήτηση της προηγούμενης ενότητας μπορεί να συνοψιστεί με τη βοήθεια του Σχήματος 10-3, το οποίο δείχνει την απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος σε ένα απλό μιγαδικό εκθετικό σήμα. Σε πολλές περιπτώσεις, ενδιαφερόμαστε για πραγματικά σήματα τα οποία μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων. Σε αυτή την ενότητα, θα μελετήσουμε την απόκριση σε εισόδους αυτής της μορφής και θα δείξουμε ότι αν η κρουστική απόκριση είναι πραγματική, τότε η έξοδος μπορεί επίσης πάντα να εκφράζεται ως άθροισμα συνημιτονικών σημάτων. Θα εξηγήσουμε γιατί η κρουστική απόκριση πρέπει να είναι πραγματική έτσι ώστε να ισχύει η αλλαγή μέτρου και φάσης που προκύπτουν από την απόκριση συχνότητας.

Ένα από τα πλεονεκτήματα της ανάλυσης που θα ακολουθήσει είναι ότι αναδεικνύει τον καθοριστικό ρόλο της γραμμικότητας ενός συστήματος και προτείνει μια γενική προσέγγιση για τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να χρησιμοποιούμε την απόκριση συχνότητας και τον μετασχηματισμό Fourier.

10-2.1 Συνημιτονικοί Είσοδοι

Αν και για την παραγωγή της απόκρισης συχνότητας υποθέσαμε ότι το σήμα εισόδου ήταν ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα, $Ae^{j\phi}e^{j\omega t}$, συχνά ενδιαφερόμαστε για την απόκριση πραγματικών σημάτων όπως είναι για παράδειγμα ένα σήμα συνημιτόνου. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνώση της μιγαδικής εκθετικής απόκρισης για να εξάγουμε την απόκριση σε ημιτονοειδείς διεγέρσεις. Όταν η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι πραγματική,

ισχύει η ακόλουθη απλή σχέση:

Αλλαγή Μέτρου και Φάσης της Απόκρισης σε ημιτονοειδή διεγέρση:

Αν η είσοδος στο ΓΧΑ σύστημα είναι $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, και αν η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι *πραγματική*, η έξοδος θα είναι $y(t) = (MA) \cos(\omega t + \phi + \psi)$.

Δηλαδή, το ημιτονοειδές σήμα θα διατηρήσει την ίδια συχνότητα, αλλά θα υποστεί μια αλλαγή στο μέτρο και στη φάση, όπως ακριβώς στην περίπτωση των μιγαδικών εκθετικών διεγέρσεων. Οι τιμές του μέτρου $M = |H(j\omega)|$ και της μετατόπισης φάσης $\psi = \angle H(j\omega)$ προσδιορίζονται από τη συνάρτηση της απόκρισης συχνότητας υπολογισμένη στη συχνότητα του σήματος εισόδου ω .

Μιλώντας αυστηρά, οι αποδείξεις που κάναμε στην προηγούμενη ενότητα ήταν σωστές, μόνο για την περίπτωση των μιγαδικών εκθετικών σημάτων. Έτσι, αν θέλουμε να εκμεταλλευτούμε την ιδιότητα αλλαγής μέτρου και φάσης, πρέπει να συσχετίσουμε το πραγματικό ημιτονοειδές με το μιγαδικό εκθετικό σήμα. Ωστόσο, μπορούμε να γράψουμε μια συνημιτονική συνάρτηση μη τη βοήθεια μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο τύπο του Euler

$$A \cos(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} A e^{j\phi} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} A e^{-j\phi} e^{-j\omega t} \quad (10.13)$$

Μια ερμηνεία της Σχέσης (10.13) είναι ότι το συνημιτονικό σήμα έχει αναλυθεί σε άθροισμα δύο μιγαδικών εκθετικών σημάτων συχνότητας ω και $-\omega$ και μιγαδικών πλατών $\frac{1}{2} A e^{j\phi}$ and $\frac{1}{2} A e^{-j\phi}$ αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι το πραγματικό συνημιτονικό σήμα προκύπτει διότι τα μιγαδικά εκθετικά σήματα που το συνθέτουν είναι συζυγή το ένα με το άλλο.

Αφού ενδιαφερόμαστε μόνο για ΓΧΑ συστήματα, ισχύει η αρχή της υπέρθεσης. Έπομένως, αφού η είσοδος ισούται με το άθροισμα δύο σημάτων, $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, η έξοδος είναι ίση με το άθροισμα των αντίστοιχων εξόδων $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ όπου $y_1(t)$ είναι η έξοδος λόγω του σήματος $x_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι η έξοδος λόγω του σήματος

$x_2(t)$. Στην περίπτωση μας, πρέπει να βρούμε τα σήματα εξόδου που οφείλονται στα σήματα

$$x_1(t) = \frac{1}{2} A e^{j\phi} e^{j\omega t} \quad (10.14)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} A e^{-j\phi} e^{-j\omega t} \quad (10.15)$$

και στη συνέχεια να αθροίσουμε τα αποτελέσματα. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (10.10) της απόκρισης συχνότητας, βρίσκουμε ότι οι δύο επιθυμητές εξοδοί είναι οι ακόλουθες:

$$y_1(t) = H(j\omega) \frac{1}{2} A e^{j\phi} e^{j\omega t} \quad (10.16)$$

$$y_2(t) = H(-j\omega) \frac{1}{2} A e^{-j\phi} e^{-j\omega t} \quad (10.17)$$

και εξαιτίας της γραμμικότητας του συστήματος έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\ &= H(j\omega) \frac{1}{2} A e^{j\phi} e^{j\omega t} + H(-j\omega) \frac{1}{2} A e^{-j\phi} e^{-j\omega t} \end{aligned} \quad (10.18)$$

Δηλαδή, η ημιτονοειδής απόκριση είναι το άθροισμα της μιγαδικής εκθετικής απόκρισης στην θετική συχνότητα ω και της απόκρισης στην αντίστοιχη αρνητική συχνότητα $-\omega$.

10-2.2 Συμμετρία της $H(j\omega)$

Αφού έχουμε δηλώσει ότι υπάρχει μια απλοποίηση όταν η $h(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση, πρέπει να υπάρχει μια απλή σχέση μεταξύ της $H(j\omega)$ και της $H(-j\omega)$. Στην πραγματικότητα, η σχέση αυτή είναι η ακόλουθη

$$H(-j\omega) = (H(j\omega))^* = H^*(j\omega) \quad (10.19)$$

Δηλαδή, η απόκριση συχνότητας στο $-\omega$ είναι η συζυγής της απόκρισης συχνότητας στο $+\omega$. Η απόδειξη αυτής της σχέσης είναι σχετικά απλή, διότι όταν η $h(t)$ είναι

πραγματική συνάρτηση, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} H^*(j\omega) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \right)^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) e^{+j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j(-\omega)t} dt = H(-j\omega) \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία γραμμή έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι η $h(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση ($h^*(t) = h(t)$) και έχουμε γράψει τον εκθέτη με δύο αρνητικά πρόσημα για να δημιουργήσουμε τον αρνητικό εκθέτη που απαιτείται στον ορισμό της απόκρισης συχνότητας.

Η σημασία της **ιδιότητας της συζυγούς συμμετρίας** (10.19) είναι ότι το μέτρο και η φάση στο ω και στο $-\omega$ δεν είναι ανεξάρτητα. Στην πραγματικότητα, αν η απόκριση συχνότητας στο ω είναι

$$H(j\omega) = M e^{j\psi}$$

τότε παίρνουμε

$$H(-j\omega) = H^*(j\omega) = (M e^{j\psi})^* = M e^{-j\psi}$$

και βλέπουμε ότι, τα μέτρα είναι ίδια, αλλά οι φάσεις είναι αντίθετες.

Τώρα μπορούμε να επιστρέψουμε στο πρόβλημα της απλοποίησης του σήματος εξόδου της Σχέσης (10.18) και γράφουμε:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_2(t) \quad (10.20) \\ &= H(j\omega) \frac{1}{2} A e^{j\phi} e^{j\omega t} + H(-j\omega) \frac{1}{2} A e^{-j\phi} e^{-j\omega t} \\ &= M e^{j\psi} \frac{1}{2} A e^{j\phi} e^{j\omega t} + M e^{-j\psi} \frac{1}{2} A e^{-j\phi} e^{-j\omega t} \\ &= \frac{1}{2} M A e^{j(\omega t + \phi + \psi)} + \frac{1}{2} M A e^{-j(\omega t + \phi + \psi)} \\ &= M A \cos(\omega t + \phi + \psi) \end{aligned} \quad (10.21)$$

όπου η τελευταία γραμμή προκύπτει από τον τύπο του Euler. Συνοψίζοντας, έχουμε αποδείξει ότι το ημιτονοειδές σήμα $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ θα υφίσταται μια αλλαγή μέτρου και φάσης όταν περνάει από ένα ΓΧΑ σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση είναι πραγματική. Επίσης, η αλλαγή μέτρου και φάσης μπορούν να υπολογιστούν αριθμητικώς χρησιμοποιώντας την πολική μορφή της συχνότητας απόκρισης, δηλαδή,

$$y(t) = |H(j\omega)|A \cos(\omega t + \phi + \angle H(j\omega)) \quad (10.22)$$

Παράδειγμα 10-5: Ημιτονική Απόκριση

Υποθέστε ότι η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος είναι

$$H(j\omega) = \frac{40\pi}{40\pi + j\omega}$$

Να καθοριστεί το σήμα εξόδου όταν το σήμα εισόδου είναι $x(t) = 3 \cos(40\pi t - \pi)$.

Λύση: Πρέπει να υπολογίσουμε την $H(j\omega)$ στη συχνότητα $\omega = 40\pi$ rad/sec. Είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την πολική μορφή όπως αυτή που βρήκαμε στην Ενότητα 10-1.1, δηλαδή,

$$\begin{aligned} |H(j40\pi)| &= \frac{40\pi}{\sqrt{(40\pi)^2 + \omega^2}} \\ &= \frac{40\pi}{\sqrt{1600\pi^2 + 1600\pi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\angle H(j40\pi) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{40\pi}\right) = -\tan^{-1}(1) = -\pi/4$$


Τώρα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις αριθμητικές τιμές για να γράψουμε τον τύπο για την συνάρτηση του χρόνου, $y(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cos(40\pi t - \pi - \pi/4) \\ &= 2.1213 \cos(40\pi t - 5\pi/4) \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι πολλαπλασιάζουμε τα μέτρα και προσθέτουμε τις φάσεις, αλλά η συχνότητα παραμένει η ίδια. ■

Για να τονίσουμε αυτή την σημαντική ιδιότητα των ΓΧΑ συστημάτων, δημιουργήσαμε στο Matlab μια γραφική διεπαφή που επιτρέπει την επιλογή διαφορετικών αποκρίσεων συχνότητας και επεξηγεί μια από τις πιο βασικές ιδιότητες των συστημάτων συνεχούς χρόνου. Επίσης, το πλάτος, η φάση και η συχνότητα της ημιτονοειδούς εισόδου μπορούν να μεταβάλλονται. Το στιγμιότυπο της οθόνης στο Σχήμα 10-4 δείχνει τη διεπαφή με το φίλτρο και το σήμα εισόδου επιλεγμένα έτσι ώστε να λύνει το πρόβλημα του προηγούμενου παραδείγματος. Ο μαθηματικός τύπος για την έξοδο φαίνεται στο πάνω δεξί μέρος της διεπαφής.

Επίδειξη: Διεπαφή CLTI

 **Άσκηση 10.1:** Χρησιμοποιήστε την απόκριση συχνότητας για να υπολογίσετε το ακόλουθο συνελκτικό ολοκλήρωμα

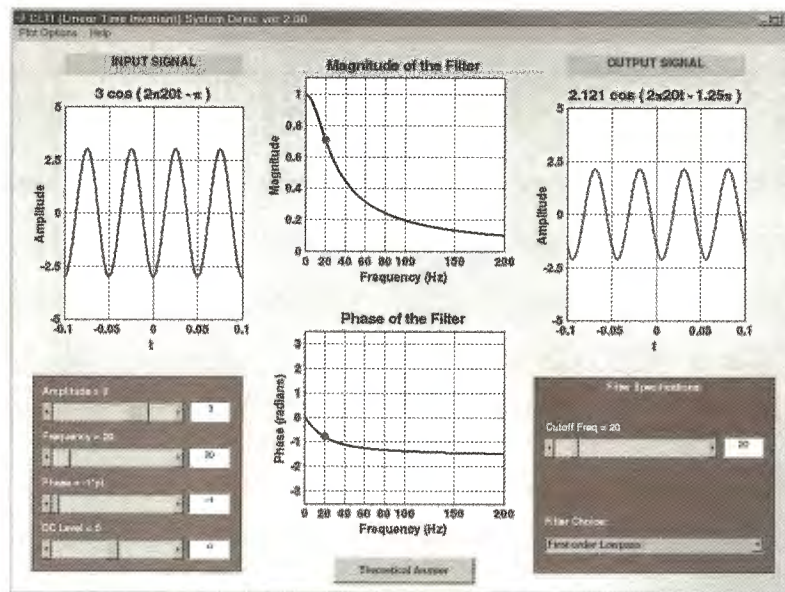
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) 3 \cos(t - \tau - \pi) d\tau$$

Υπόδειξη: από το παραπάνω ολοκλήρωμα, καθορίστε την $h(t)$

10-2.3 Απόκριση σε Άθροισμα Ημιτονοειδών

Η χρήση της γραμμικότητας που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να γενικευθεί στην περίπτωση που το σήμα εισόδου αποτελείται από πολλά ημιτονοειδή σήματα. Για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, υποθέτουμε ότι το σήμα εισόδου είναι το σταθμισμένο άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (10.23)$$



Σχήμα 10-4: Γραφική διεπαφή χρήστη CLTI demo που επεξηγεί το γεγονός ότι τα συστήματα συνεχούς χρόνου από ημιτονοειδή είσοδο παράγουν ημιτονοειδή έξοδο. Ο χρήστης μπορεί να αλλάξει το ΓΧΑ σύστημα καθώς και τη συχνότητα, το πλάτος και τη φάση της ημιτονοειδούς εισόδου. Όλες οι συχνότητες δίνονται σε hertz, για παράδειγμα, τα 20 Hz αντιστοιχούν σε 40π rad/sec.

όπου οι συχνότητες $\{\omega_k\}$ είναι όλες διαφορετικές και κάθε ημιτονοειδές έχει το δικό του πλάτος A_k και τη δική του φάση ϕ_k .

Αν γνωρίζουμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος συνεχούς χρόνου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γραμμικότητα για να κατασκευάσουμε ένα τύπο για το σήμα εξόδου. Η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε είναι να επεξεργαστούμε κάθε ημιτονοειδές χωριστά και στη συνέχεια να αθροίσουμε τα επιμέρους αποτελέσματα. Αν εστιάσουμε την προσοχή μας στη k -οστή ημιτονοειδή είσοδο, μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίστοιχη έξοδο,

μετά τον υπολογισμό της $H(j\omega_k)$, δηλαδή,

$$y_k(t) = A_k |H(j\omega_k)| \cos(\omega_k t + \phi_k + \angle H(j\omega_k)) \quad (10.24)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παράσταση μέτρου και φάσης αντί των M και ψ , αλλά ο αναγνώστης θα πρέπει να συγκρατήσει ότι αυτές είναι σταθερές.

Η γραμμικότητα μας επιτρέπει να αθροίσουμε όλες τις

επιμέρους εξόδους και να πάρουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$y(t) = \sum_{k=1}^N y_k(t) = \sum_{k=1}^N A_k |H(j\omega_k)| \cos(\omega_k t + \phi_k + \angle H(j\omega_k)) \quad (10.25)$$

Στην πραγματικότητα, αυτός ο τύπος δεν είναι πάρα πολύ χρήσιμος. Η βασική αξία του είναι ότι μας λέει ότι τα πλάτη και οι φάσεις αλλάζουν με ένα προβλεπόμενο, από την απόκριση συχνότητας, τρόπο. Τελικά, παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της Σχέσης (10.25) δεν εξαρτάται από ειδικές σχέσεις μεταξύ συχνοτήτων, σε αντίθεση με τα αποτελέσματα της επόμενης ενότητας όπου όλες οι συχνότητες είναι πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους.

Παράδειγμα 10-6: Απόκριση σε Δύο Ημιτονοειδή

Αν η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος συνεχούς χρόνου είναι

$$H(j\omega) = \frac{2 + j\omega}{1 + j\omega}$$

καθορίστε το σήμα εξόδου για το ακόλουθο σήμα εισόδου

$$x(t) = 2 \cos t + \cos(3t + 1.57)$$

Η απάντηση απαιτεί τον υπολογισμό της $H(j\omega)$ στις συχνότητες $\omega = 1$ και $\omega = 3$, δηλαδή,

$$H(j\omega)|_{\omega=1} = \frac{2 + j}{1 + j} = 1.581e^{-j0.322}$$

$$H(j\omega)|_{\omega=3} = \frac{2 + j3}{1 + j3} = 1.14e^{-j0.266}$$

Στη συνέχεια μπορούμε να γράψουμε

$$y(t) = 3.162 \cos(t - 0.322) + 1.14 \cos(3t + 1.304)$$

διότι το μέτρο του πρώτου συνημιτόνου ισούται με το γινόμενο: $2(1.581)$ και η φάση του δεύτερου συνημιτόνου ισούται με το άθροισμα: $(1.57 - 0.266) = (1.304)$. ■

Άσκηση 10.2: Υποθέστε ότι η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος συνεχούς χρόνου είναι

$$H(j\omega) = \frac{(j2 + j\omega)(-j2 + j\omega)}{1 + j\omega} = \frac{4 - \omega^2}{1 + j\omega}$$

και η είσοδος είναι

$$x(t) = 4 \cos t + \cos(2t)$$

Προσδιορίστε την έξοδο $y(t)$ του συστήματος.

10-2.4 Απόκριση ΓΧΑ Συστημάτων σε Περιοδικές Διεγέρσεις

Όταν το σήμα εισόδου είναι περιοδικό, είναι σχετικά εύκολο να δείξουμε ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος πρέπει να είναι περιοδική. Καταρχήν, ο μαθηματικός ορισμός της περιοδικότητας είναι

$$x(t) = x(t + T_0) \quad -\infty < t < \infty \quad (10.26)$$

όπου T_0 είναι η περίοδος. Αν το T_0 είναι η μικρότερη τιμή που ικανοποιεί την (10.26), τότε ονομάζεται θεμελιώδης περίοδος του σήματος. Αν γράψουμε το συνελικτικό ολοκλήρωμα για την $y(t + T_0)$, παίρνουμε

$$y(t + T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t + T_0 - \tau) d\tau \quad (10.27)$$

Ο όρος $x(t + T_0 - \tau)$ μέσα στο ολοκλήρωμα είναι περιοδικός με περίοδο T_0 και επομένως μπορεί να αντικατασταθεί από

$$x(t + T_0 - \tau) = x(t - \tau) \quad -\infty < t < \infty \quad (10.28)$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα (10.27) γίνεται

$$\begin{aligned} y(t+T_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t+T_0-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau = y(t) \end{aligned} \quad (10.29)$$

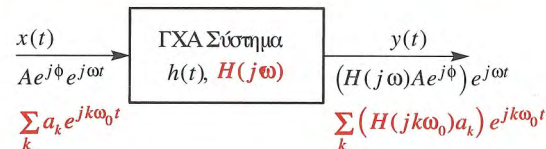
και με αυτό τον τρόπο έχουμε αποδείξει ότι αν η διέγερση του συστήματος είναι περιοδική με περίοδο T_0 , το σήμα εξόδου $y(t)$ θα είναι περιοδικό με περίοδο T_0 . Εκτός αυτού, παρατηρούμε ότι η θεμελιώδης περίοδος της εξόδου μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις να είναι μικρότερη από T_0 .

Άσκηση 10.3: Αποδείξτε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση είναι περιοδική θα παράγει πάντα σήματα εξόδου τα οποία είναι περιοδικά (υποθέστε ότι η είσοδος δεν είναι περιοδική). Σημείωση: συστήματα αυτού του τύπου είναι ασταθή, έτσι η έξοδος ίσως να μην είναι πάντα φραγμένη. Όταν όμως η $y(t)$ φράσσεται, το σύστημα θα είναι περιοδικό.

Το ενδιαφέρον με τα περιοδικά σήματα είναι ότι η θεωρία των σειρών Fourier μας λέει πώς να αναπαράστησουμε ένα σήμα ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων¹.

Αν συνδυάσουμε τα παραπάνω με την έννοια της απόκρισης συχνότητας που εισάγαμε σ' αυτό το κεφάλαιο, μπορούμε να αναπτύξουμε μια γενική προσέγγιση για να καθορίσουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με περιοδική είσοδο, η οποία δεν περιλαμβάνει τον υπολογισμό του συνελικτικού ολοκληρώματος. Το Σχήμα 10-5 δείχνει τα ουσιαστικά σημεία αυτής της προσέγγισης. Τα βήματα αυτής της προσέγγισης συνοψίζονται ως ακολούθως:

¹Μια ανασκόπηση της ύλης του Κεφάλαιου 3 μπορεί να αποδειχθεί χρήσιμη για την κατανόηση αυτών που θα συζητηθούν στο υπόλοιπο αυτού του κεφάλαιου.



Σχήμα 10-5: Αποκρίσεις ΓΧΑ συστήματος σε μιγαδικό εκθετικό σήμα ή σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων.

1. Εκφράστε το περιοδικό σήμα εισόδου $x(t)$ ως άθροισμα ημιτονοειδών χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των σειρών Fourier του Κεφάλαιου 3

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

όπου $\omega_0 = 2\pi/T_0$ είναι η θεμελιώδης συχνότητα σε radians/sec.

2. Για το k -οστο μιγαδικό εκθετικό σήμα της σειράς Fourier, χρησιμοποίησε τη Σχέση (10.10) στη Σελίδα 319 για να βρεις την αντίστοιχη έξοδο, η οποία είναι επίσης ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα στην k -οστή συχνότητα $\omega_k = k\omega_0$

$$y_k(t) = H(jk\omega_0) a_k e^{jk\omega_0 t}$$

3. Ο μιγαδικός πολλαπλασιασμός του a_k με την $H(jk\omega_0)$ δημιουργεί ένα νέο σύνολο συντελεστών της σειράς Fourier

$$b_k = H(jk\omega_0) a_k$$

4. Το σήμα εξόδου $y(t)$ συντίθεται στη συνέχεια από τον ορισμό των σειρών Fourier ως ακολούθως:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

Το σημαντικό βήμα είναι το τρίτο, το οποίο λέει ότι πρέπει να **πολλαπλασιάσουμε στο πεδίο της συχνότητας**. Το πιο δύσκολο βήμα είναι το #1 το οποίο απαιτεί τον υπολογισμό του ολοκληρώματος ανάλυσης των σειρών Fourier για να βρούμε τους συντελεστές a_k από το περιοδικό σήμα $x(t)$.

Εργ. Ασκ.: #13, Αριθμητικός Υπολογισμός Σειρών Fourier

10-3 Ιδανικά Φίλτρα

Σε κάθε πρακτική εφαρμογή των ΓΧΑ συστημάτων συνεχούς χρόνου, η συνάρτηση της απόκρισης συχνότητας $H(j\omega)$ μπορεί να προέρχεται από μια υλοποίηση ενός πραγματικού αναλογικού φίλτρου όπως ένα ηλεκτρονικό κύκλωμα ή από ένα μαθηματικό μοντέλο ενός αναλογικού συστήματος. Ωστόσο, στο αρχικό στάδιο της σχεδίασης ενός συστήματος είναι συχνά χρήσιμο να χρησιμοποιούμε **ιδανικά φίλτρα** τα οποία έχουν απλές αποκρίσεις συχνότητας που παρέχουν ιδανική συχνοτική επιλεκτικότητα. Ήδη έχουμε συναντήσει ιδανικά φίλτρα στο Κεφάλαιο 6 όταν μελετήσαμε την απόκριση συχνότητας των ψηφιακών φίλτρων. Η απόκριση συχνότητας $H(j\omega)$ των αναλογικών (συνεχούς χρόνου) φίλτρων πρέπει να καθοριστεί πάνω σε ολόκληρο τον άξονα συχνοτήτων $-\infty < \omega < \infty$.

10-3.1 Ιδανικό Σύστημα Καθυστερήσης

Στη θεωρία των συστημάτων διακριτού και συνεχούς χρόνου, η έννοια της χρονικής καθυστέρησης είναι εξαιρετικά σημαντική. Για τα συστήματα του συνεχούς χρόνου, το ιδανικό σύστημα καθυστέρησης ορίζεται από την ακόλουθη σχέση εισόδου-εξόδου

$$y(t) = x(t - t_d) \quad (10.30)$$

όπου t_d είναι η χρονική καθυστέρηση σε δευτερόλεπτα. Επομένως, ένα ιδανικό σύστημα καθυστέρησης παράγει μια έξοδο η οποία είναι ένα τέλειο αντίγραφο του σήματος εισόδου, αλλά μετατοπισμένο στο χρόνο κατά t_d δευτερόλεπτα.

Μπορούμε να βρούμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος αν πρώτα βρούμε την κρουστική απόκριση και στη συνέχεια χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (10.4). Η κρουστική απόκριση, εξ ορισμού είναι $h(t) = \delta(t - t_d)$. Κατά συνέπεια, η απόκριση συχνότητας είναι η ακόλουθη

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_d) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_d} \quad (10.31)$$

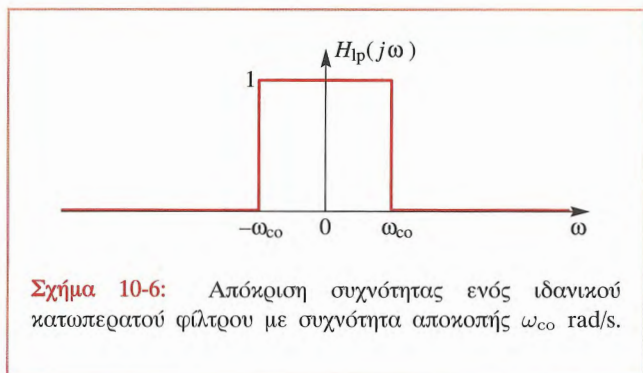
Μια άλλη προσέγγιση, η οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στην απλή αυτή περίπτωση, είναι να αντικαταστήσουμε το $x(t) = e^{j\omega t}$ στην (10.30) και χρησιμοποιώντας τον ορισμό (10.3) της Σελίδας 316 της απόκρισης συχνότητας, να καθορίσουμε την $H(j\omega)$ από την προκύπτουσα έκφραση της εξόδου $y(t)$. Η προσέγγιση αυτή προτείνεται στο Πρόβλημα.-10.1.

Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του ιδανικού συστήματος καθυστέρησης (10.31) είναι σταθερό (ίσο με 1) ανεξάρτητα από τη συχνότητα και έχει μια φάση $-\omega t_d$. Αφού $-\omega t_d$ είναι μια γραμμική συνάρτηση του ω , λέμε ότι η ιδανική χρονική καθυστέρηση έχει σταθερό μέτρο και **γραμμική φάση**. Αυτό σημαίνει ότι το ιδανικό σύστημα καθυστέρησης δεν αλλάζει το μέτρο ενός ημιτονικού σήματος εισόδου, αλλά εισάγει μια αλλαγή στη φάση του η οποία είναι ανάλογη της συχνότητας του ημιτονικού σήματος. Αυτό είναι ακριβώς που χρειαζόμαστε για να δημιουργήσουμε ένα τέλειο αντίγραφο καθυστέρησης του ημιτονικού ή του μιγαδικού εκθετικού σήματος συχνότητας ω .

Παράδειγμα 10-7: Απόκριση Ιδανικού Συστήματος Καθυστερήσης

Υποθέστε ότι το σήμα $x(t) = 10e^{j\pi/4} e^{j200\pi t}$ είναι η είσοδος σε ένα σύστημα ιδανικής καθυστέρησης με καθυστέρηση 0.001 sec. Τότε η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι $H(j\omega) = e^{-j\omega 0.001}$, η οποία υπολογιζόμενη στη συχνότητα 200π , είναι

$$H(j200\pi) = e^{-j200\pi(0.001)}$$



Σχήμα 10-6: Απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού κατωπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής ω_{c0} rad/s.

Η αντίστοιχη έξοδος δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} y(t) &= H(j200\pi) \left(10e^{j\pi/4} e^{j200\pi t} \right) \\ &= \left(e^{-j200\pi(0.001)} \right) 10e^{j\pi/4} e^{j200\pi t} \\ &= \left(e^{-j0.2\pi} \right) 10e^{j\pi/4} e^{j200\pi t} \end{aligned}$$

την οποία μπορούμε να γράψουμε ως $y(t) = 10e^{j\pi/4} e^{j200\pi(t-0.001)}$. Επομένως, όπως εύκολα θα μπορούσαμε να προβλέψουμε από την απόκριση συχνότητας, το σήμα εξόδου είναι ίσο με ένα καθυστερημένο κατά 0.001 sec αντίγραφο του σήματος εισόδου. ■

Η απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού συστήματος χρονικής καθυστέρησης έχει σταθερό μέτρο και γραμμική φάση. Ένα **φίλτρο** είναι ένα σύστημα το οποίο μπορεί να απορρίψει κάποιες συχνότητες ενώ παράλληλα επιτρέπει σε κάποιες άλλες να περνούν μέσω του συστήματος σχετικά αναλλοίωτες. Στη συνέχεια θα ορίσουμε διάφορα ιδανικά φίλτρα **επιλογής συχνότητων**.

10-3.2 Ιδανικό Κατωπερατό Φίλτρο

Ένα ιδανικό κατωπερατό φίλτρο ή φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων, έχει μια απόκριση συχνότητας η οποία αποτελείται από δύο περιοχές: Τη ζώνη διάβασης κοντά στο $\omega = 0$ (DC) όπου η απόκριση συχνότητας είναι

ένα και στη ζώνη αποκοπής όπου αυτή είναι μηδέν. Κατά συνέπεια ένα ιδανικό κατωπερατό φίλτρο ορίζεται ως ακολούθως

$$H_{LP}(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_{c0} \\ 0 & |\omega| > \omega_{c0} \end{cases} \quad (10.32)$$

Η συχνότητα ω_{c0} ονομάζεται **συχνότητα αποκοπής**, του κατωπερατού φίλτρου. Το Σχήμα 10-6 δείχνει τη γραφική παράσταση της $H(j\omega)$ ενός ιδανικού κατωπερατού φίλτρου από την οποία βλέπουμε ότι η $H(j\omega)$ είναι μια άρτια συνάρτηση του ω . Η ιδιότητα αυτή είναι αναγκαία διότι γνωρίζουμε ότι πραγματικές κρουστικές αποκρίσεις αντιστοιχούν σε φίλτρα με μια συζυγώς συμμετρική $H(j\omega)$. Αφού η $H(j\omega)$ είναι πραγματική και συζυγώς συμμετρική, πρέπει να είναι μια άρτια συνάρτηση.

Φίλτρα όπως τα ιδανικά κατωπερατά είναι αδύνατο να υλοποιηθούν. Θα δούμε ότι η κρουστική απόκριση ενός ιδανικού κατωπερατού φίλτρου παίρνει μη μηδενικές τιμές σε ολόκληρο τον άξονα του χρόνου και επομένως είναι μη-αιτιατό. Ωστόσο, αυτό δεν ακυρώνει την έννοια του ιδανικού κατωπερατού φίλτρου, δηλαδή την ιδέα του να επιλέξουμε τη ζώνη των χαμηλών συχνοτήτων και να απορρίψουμε όλες τις άλλες συχνότητες. Επίσης τα φίλτρα που απεικονίζονται στο Σχήμα 10-1, τα οποία υλοποιούνται με ένα απλό ηλεκτρικό κύκλωμα, μπορεί να είναι σε μερικές περιπτώσεις ικανοποιητικά. Σε πιο απαιτητικές εφαρμογές, απλά χρειάζεται να ξέρουμε πώς να δημιουργήσουμε καλές προσεγγίσεις των ιδανικών χαρακτηριστικών. Συνοψίζοντας, η διαδικασία σχεδίασης φίλτρων περιλαμβάνει τη μαθηματική προσέγγιση ενός ιδανικού φίλτρου με μια απόκριση συχνότητας η οποία προσεγγίζει την ιδανική και συγχρόνως αντιστοιχεί σε υλοποιήσιμο φίλτρο.

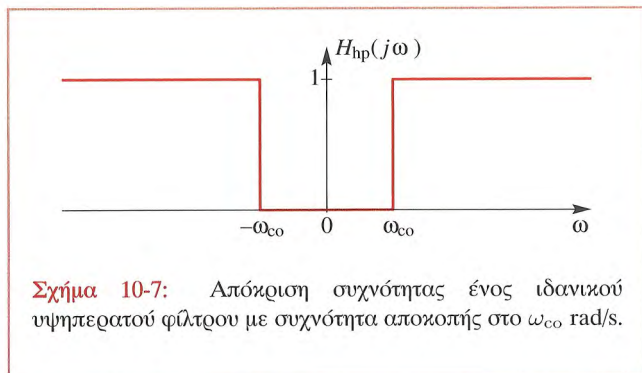
10-3.3 Ιδανικό Υψηπερατό Φίλτρο

Το ιδανικό υψηπερατό φίλτρο ή φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων έχει τη ζώνη αποκοπής στις χαμηλές συχνότητες και η ζώνη διάβασης εκτείνεται από το

$|\omega| = \omega_{co}$ μέχρι το $|\omega| = \infty$.

$$H_{hp}(j\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| \leq \omega_{co} \\ 1 & |\omega| > \omega_{co} \end{cases} \quad (10.33)$$

Το Σχήμα 10-7 δείχνει ένα ιδανικό υψηπερατό φίλτρο με τη συχνότητα αποκοπής στο ω_{co} rad/s. Σε αυτήν την περίπτωση οι συνιστώσες υψηλών συχνοτήτων ενός σήματος θα περάσουν μέσα από το φίλτρο αναλλοίωτες, ενώ οι χαμηλές συχνότητες θα εξαλειφθούν εντελώς. Παρατηρήστε ότι όπως στην περίπτωση του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου, έχουμε καθορίσει το ιδανικό υψηπερατό φίλτρο έτσι ώστε $H_{hp}(-j\omega) = H_{hp}^*(j\omega)$ και έτσι η αντίστοιχη κρουστική απόκριση θα είναι μια πραγματική συνάρτηση του χρόνου.



Σχήμα 10-7: Απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού υψηπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής στο ω_{co} rad/s.



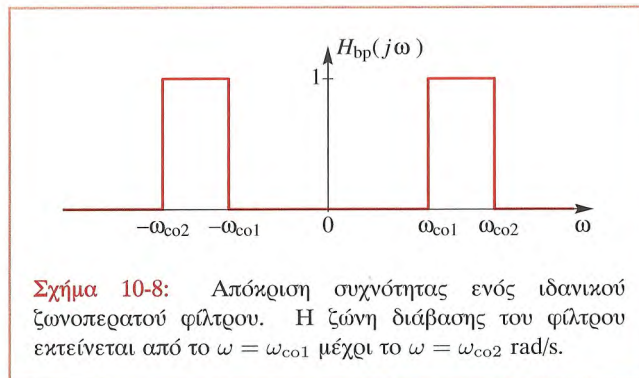
Άσκηση 10.4: Αν $H_{lp}(j\omega)$ είναι ένα κατωπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής ω_{co} όπως φαίνεται στο Σχήμα 10-6, δείξτε ότι η $G(j\omega)$ που ορίζεται από την $G(j\omega) = 1 - H_{lp}(j\omega)$ είναι ένα ιδανικό υψηπερατό φίλτρο με την ίδια συχνότητα αποκοπής. *Υπόδειξη:* Σχεδιάστε την $G(j\omega)$.

10-3.4 Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο

Το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο ή φίλτρο διέλευσης ζώνης συχνοτήτων έχει μια ζώνη διάβασης μακριά από την περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων και έτσι έχει δύο ζώνες αποκοπής, μια κοντά στη DC συχνότητα και μια άλλη στις υψηλές συχνότητες. Για να ορίσουμε ένα ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο πρέπει να μας δίνονται δύο συχνότητες αποκοπής, η ω_{co1} για τη χαμηλή συχνότητα αποκοπής και η ω_{co2} για την υψηλή.

$$H_{bp}(j\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_{co1} \\ 1 & \omega_{co1} \leq |\omega| \leq \omega_{co2} \\ 0 & |\omega| > \omega_{co2} \end{cases} \quad (10.34)$$

Το Σχήμα 10-8 δείχνει ένα ένα ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο με συχνότητες αποκοπής ω_{co1} rad/s και ω_{co2} rad/s. Παρατηρήστε το συμμετρικό ορισμό των ζωνών διάβασης και αποκοπής, ορισμός που εξασφαλίζει ότι η κρουστική απόκριση θα είναι μια πραγματική συνάρτηση. Στην περίπτωση αυτή, όλες οι συχνοτικές συνιστώσες του



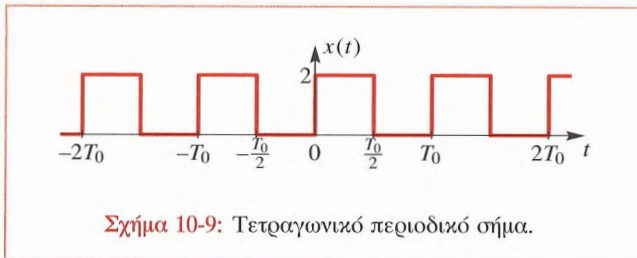
Σχήμα 10-8: Απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού ζωνοπερατού φίλτρου. Η ζώνη διάβασης του φίλτρου εκτείνεται από το $\omega = \omega_{co1}$ μέχρι το $\omega = \omega_{co2}$ rad/s.

σήματος που ανήκουν στη ζώνη $\omega_{co1} \leq |\omega| \leq \omega_{co2}$ περνούν αναλλοίωτες μέσα από το φίλτρο, ενώ όλες οι άλλες συνιστώσες εξαλείφονται εντελώς.

Άσκηση 10.5: Αν $H_{bp}(j\omega)$ είναι ένα ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο με συχνότητες αποκοπής στο ω_{co1} και στο ω_{co2} , δείξτε ότι η $G(j\omega)$ που ορίζεται από την $G(j\omega) = 1 - H_{bp}(j\omega)$ είναι ένα ιδανικό φίλτρο απόρριψης ζώνης. Σε ποια συχνοτική περιοχή βρίσκεται η ζώνη αποκοπής του φίλτρου απόρριψης ζώνης;

10-4 Εφαρμογές των Ιδανικών Φίλτρων

Τυπικά, τα ιδανικά φίλτρα χρησιμοποιούνται κατά το αρχικό στάδιο σχεδιασμού για να καθορίσουν τα υποσυστήματα ενός συστήματος επεξεργασίας σημάτων όπως, για παράδειγμα, ενός δέκτη επικοινωνίας. Παρά το γεγονός ότι το τελικό σύστημα απαιτεί υλοποιήσιμα φίλτρα, τα ιδανικά φίλτρα απλοποιούν την περιγραφή του συστήματος. Η απόδοση ενός πραγματικού συστήματος μπορεί συχνά να ελέγχεται ελαχιστοποιώντας το σφάλμα προσέγγισης μεταξύ των ιδανικών και των πραγματικών φίλτρων. Ως



ένα χειροπιαστό παράδειγμα της χρήσης των ιδανικών φίλτρων, ας θεωρήσουμε το πρόβλημα σχεδίασης ενός φίλτρου το οποίο θα μετατρέπει ένα τετραγωνικό κύμα σε ημιτονοειδές. Αυτό μπορεί να είναι χρήσιμο σε μια πρακτική εφαρμογή γιατί είναι σχετικά εύκολο να παραχθεί ένα τετραγωνικό κύμα με ένα διακόπτη ο οποίος κλείνει και ανοίγει περιοδικά, αλλά είναι δύσκολο να παραχθεί άμεσα ένα ημιτονοειδές σήμα. Το φίλτρο που απαιτείται για να λύσει αυτό το πρόβλημα είναι ένα ζωνοπερατό φίλτρο το οποίο θα εξάγει μια από τις αρμονικές του τετραγωνικού κύματος.

Υποθέστε ότι έχουμε στη διάθεσή μας ένα τετραγωνικό κύμα με περίοδο $T_0 = 500 \mu\text{s}$ ($f_0 = 2 \text{ kHz}$ ή $\omega_0 = 2\pi(2000) \text{ rad/sec.}$) Ένα τέτοιο σήμα φαίνεται στο Σχήμα 10-9. Μια περίοδος αυτού του περιοδικού κύματος ορίζεται από την σχέση

$$x(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t < T_0/2 \\ 0 & T_0/2 \leq t < T_0 \end{cases} \quad (10.35)$$

Στην Ενότητα 3-4 δείξαμε ότι περιοδικά σήματα μπορούν να παρασταθούν από μια σειρά Fourier της μορφής

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (10.36)$$

όπου οι συντελεστές Fourier δίνονται από το ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (10.37)$$

Αντικαθιστώντας τον ορισμό του $x(t)$ από τη Σχέση (10.35) στην (10.37) παίρνουμε

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} 2e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (10.38)$$

Αν υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της Σχέσης (10.38), μπορούμε να δείξουμε ότι τα μιγαδικά πλάτη στο φάσμα είναι

$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{j\pi k} & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots \\ 0 & k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots \end{cases} \quad (10.39)$$

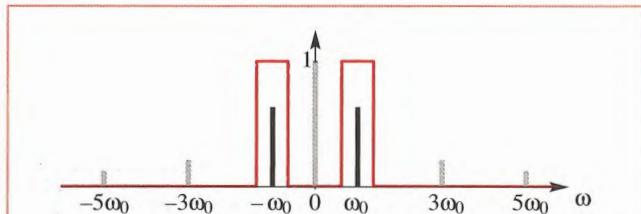
Άρα, η σειρά Fourier του τετραγωνικού κύματος περιέχει μόνο περιττές αρμονικές της θεμελιώδους συχνότητας. Επομένως, το φάσμα του τετραγωνικού κύματος με τη θεμελιώδη συχνότητα των 2kHz εμφανίζει φασματικές γραμμές στις συχνότητες $\omega = \pm 2\pi(2000) \text{ rad/sec.}$

$\omega = \pm 2\pi(6000)\text{rad/sec}$, $\omega = \pm 2\pi(1000)\text{ rad/sec}$, κ.λ.π. Αφού η μέση τιμή του τετραγωνικού κύματος (σε μια περίοδο) δεν είναι μηδέν, έχουμε

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} 2dt = 1 \quad (10.40)$$

Άσκηση 10.6: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της Σχέσης (10.38) και αποδείξτε ότι ισούται με αυτό που δίνεται από τη Σχέση (10.39).

Στο Σχήμα 10-10 φαίνεται το φάσμα του τετραγωνικού κύματος για τις πρώτες έξι μη μηδενικές (θετικές και αρνητικές) φασματικές γραμμές καθώς και τη DC συνιστώσα. Παρατηρήστε ότι έχουμε σχεδιάσει το φάσμα



Σχήμα 10-10: Φάσμα τετραγωνικού κύματος μαζί με την απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού ζωνοπερατού φίλτρου. Η ζώνη διάβασης του ζωνοπερατού φίλτρου εκτείνεται από τη συχνότητα $\omega_{co1} = 2\pi(1250)\text{ rad/sec}$ μέχρι τη συχνότητα $\omega_{co2} = 2\pi(2750)\text{ rad/sec}$. Η θεμελιώδης συχνότητα του τετραγωνικού κύματος είναι $\omega_0 = 2\pi(2000)\text{ rad/sec}$.

χρησιμοποιώντας κάθετες γραμμές δηλώνοντας το σχετικό μέτρο των μιγαδικών πλατών. Πληροφορίες για τη φάση του φάσματος δεν δίνονται.

Θέλουμε τώρα να εφαρμόσουμε ένα ΓΧΑ φίλτρο στο τετραγωνικό κύμα έτσι ώστε η έξοδος του να είναι ένα

ημιτονικό σήμα. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν δύο ιδιότητες για να καθορίσουμε ένα ιδανικό φίλτρο το οποίο θα κάνει αυτή τη δουλειά. Πρώτον, το επιθυμητό φάσμα του σήματος εξόδου συντίθεται από δύο φασματικές γραμμές, αν θέλουμε η ημιτονοειδής έξοδος να είναι συχνότητας $f=2\text{kHz}$, ή $\omega = 2\pi(2000)\text{ rad/sec}$, οι δύο απαιτούμενες φασματικές γραμμές θα είναι στα $\pm 2\text{kHz}$. Δεύτερον, η επίδραση του φίλτρου πάνω στο σήμα εισόδου μπορεί να περιγραφεί στο πεδίο της συχνότητας ως το γινόμενο του φάσματος του σήματος εισόδου με την απόκριση συχνότητας του φίλτρου. Άρα, αν a_k είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier του τετραγωνικού κύματος εισόδου, τότε οι συντελεστές Fourier του σήματος εξόδου θα είναι

$$b_k = H(jk\omega_0)a_k \quad (10.41)$$

Τα παραπάνω απεικονίζονται καλύτερα στο Σχήμα 10-10 όπου η απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού ζωνοδιαβατού φίλτρου παρουσιάζεται πάνω στη γραφική παράσταση του φάσματος του τετραγωνικού κύματος εισόδου. Η στενή ζώνη διάβασης του ζωνοδιαβατού φίλτρου είναι κεντραρισμένη γύρω από τις φασματικές γραμμές στις συχνότητες $\omega = \pm 2\pi(2000)\text{ rad/sec}$ (ή $\pm 2\text{ kHz}$). Το εύρος της ιδανικής περιοχής διάβασης μπορεί να είναι οποιοδήποτε αρκεί να περιλαμβάνει τη συχνότητα $\omega_0 = 2\pi(2000)$ και να μην περιλαμβάνει καμία άλλη από τις φασματικές γραμμές του σήματος εισόδου. Δηλαδή, απαιτούμε όλες οι άλλες φασματικές γραμμές να ανήκουν στην περιοχή αποκοπής του ζωνοπερατού φίλτρου και επομένως θα εξαλειφθούν από το φίλτρο, παραμένοντας έτσι στο σήμα εξόδου μόνο δύο φασματικές γραμμές, ή ισοδύναμα ένα ημιτονοειδές συχνότητας $2\pi(2000)$. Από το Σχήμα 10-10 είναι φανερό ότι για το τετραγωνικό κύμα του παραδείγματός μας, οποιοδήποτε ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο ικανοποιεί τις συνθήκες $0 < \omega_{co1} < 2\pi(2000)$ και $2\pi(2000) < \omega_{co2} < 2\pi(6000)$, θα δώσει την ίδια έξοδο.

Τα μιγαδικά πλάτη των δύο φασματικών γραμμών που περιέχει το φάσμα του σήματος εξόδου προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό των φασματικών γραμμών με τις τιμές της απόκρισης συχνότητας στις αντίστοιχες συχνότητες και θα μείνουν μόνο οι όροι που αντιστοιχούν στο $k = \pm 1$,


δηλαδή:

$$b_k = H(j2\pi(2000)k)a_k = \begin{cases} \frac{2}{j\pi k} & \text{for } k = \pm 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει ο ακόλουθος τύπος για το ημιτονοειδές σήμα εξόδου:


$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{2}{j\pi} e^{j2\pi(2000)t} + \frac{2}{j\pi(-1)} e^{-j2\pi(2000)t} \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2j} e^{j2\pi(2000)t} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi(2000)t} \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sin(2\pi(2000)t) = \frac{4}{\pi} \cos(2\pi(2000)t - \pi/2) \end{aligned}$$

Το σημείο που θα πρέπει να τονίσουμε στο παράδειγμα αυτό, είναι ότι το φιλτράρισμα εμπεριέχει τον πολλαπλασιασμό της απόκρισης συχνότητας με το φάσμα του σήματος εισόδου. Αυτό μας δίνει την έννοια των φίλτρων τα οποία είτε περνούν είτε εξαλείφουν συνιστώσες του σήματος εισόδου. Η αρχή αυτή θα γίνει πιο καθαρή και θα ενισχυθεί από τη μελέτη του μετασχηματισμού Fourier στα επόμενα κεφάλαια.

 **Άσκηση 10.7:** Σχεδιάστε την απόκριση συχνότητας του ιδανικού ζωνοπερατού φίλτρου έτσι ώστε η έξοδος του να είναι η ακόλουθη

$$y(t) = \sin(2\pi(6000)t)$$

όταν η είσοδος είναι η τετραγωνική κυματομορφή των Σχημάτων 10-9 και 10-10.

 **Άσκηση 10.8:** Πρέπει η είσοδος στο ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο να είναι οπωσδήποτε ένα τετραγωνικό σήμα, ή οποιοδήποτε άλλο περιοδικό σήμα μπορεί να δώσει ένα ημιτονοειδές συχνότητας 2 kHz;

10-5 Πεδίο Χρόνου ή Πεδίο Συχνότητας;

Έχουμε δει ότι ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου μπορεί να περιγραφεί στο πεδίο του χρόνου από την κρουστική του απόκριση και στο πεδίο της συχνότητας από την απόκριση συχνότητάς του. Δίνοντας δύο τόσο δυνατά εργαλεία, η ερώτηση που προκύπτει φυσιολογικά είναι ποιο από τα δύο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε σε μια δεδομένη περίπτωση. Ενώ δεν είναι δυνατόν να κάνουμε απόλυτα σχόλια σε τέτοια θέματα, είναι σίγουρο ότι όταν το σήμα εισόδου μπορεί να αναπαρασταθεί ως άθροισμα ημιτονοειδών ή μιγαδικών εκθετικών σημάτων τα οποία είναι μη μηδενικά σ' όλο το διάστημα $-\infty < t < \infty$, η μέθοδος της απόκρισης συχνότητας παρέχει συνήθως την πιο απλή λύση. Αντίθετα, αν ένα σήμα συντίθεται από κρουστικές συναρτήσεις ή βηματικές συναρτήσεις ή άλλες μη-ημιτονοειδείς συναρτήσεις, τότε ο πιο απλός τρόπος προσέγγισης είναι η κρουστική απόκριση. Για να επεξηγήσουμε τα παραπάνω παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 10-8: Υπέρθεση

Υποθέστε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα έχει την ακόλουθη κρουστική απόκριση

$$h(t) = \delta(t) - 200\pi e^{-200\pi t} u(t) \quad (10.42)$$

Επιπλέον, υποθέστε ότι η είσοδος που διεγείρει το σύστημα είναι

$$x(t) = 10 + 20\delta(t - 0.1) + 40 \cos(200\pi t + 0.3\pi)$$

για $-\infty < t < \infty$. Η είσοδος αυτή συντίθεται από τρεις όρους: ένα σταθερό σήμα, ένα κρουστικό σήμα και ένα συνημιτονικό σήμα. Επειδή το σύστημα είναι γραμμικό, μπορούμε να εξετάσουμε κάθε ένα από τα παραπάνω σήματα χωριστά και να χρησιμοποιήσουμε εκείνη τη μέθοδο που ταιριάζει καλύτερα σε κάθε ένα.

Για παράδειγμα, το σταθερό σήμα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ένα ημιτονικό σήμα μηδενικής συχνότητας. Για το σκοπό αυτό πρέπει να υπολογίσουμε

την απόκριση συχνότητας. Αντικαθιστώντας την κρουστική απόκριση στον ορισμό παίρνουμε

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t) - 200\pi e^{-200\pi t} u(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt - 200\pi \int_0^{\infty} e^{-200\pi t} e^{-j\omega t} dt \\ &= 1 - \frac{200\pi}{200\pi + j\omega} \\ &= \frac{j\omega}{200\pi + j\omega} \end{aligned} \quad (10.43)$$

Επομένως, η έξοδος που οφείλεται στο σταθερό σήμα είναι απλά η

$$10 \mapsto H(j0)10 = \frac{j0}{200\pi + j0} 10 = 0$$

Όμοίως, η έξοδος που οφείλεται στο συνημιτονικό σήμα μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί από την απόκριση συχνότητας ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} 40 \cos(200\pi t + 0.3\pi) &\mapsto \\ 40|H(j200\pi)| \cos(200\pi t + 0.3\pi + \angle H(j200\pi)) \end{aligned}$$

Αν υπολογίσουμε την $H(j200\pi)$ και προσδιορίσουμε το μέτρο και τη φάση της, βρίσκουμε ότι

$$40 \cos(200\pi t + 0.3\pi) \mapsto \frac{40}{\sqrt{2}} \cos(200\pi t + 0.55\pi)$$

Τέλος, ας θεωρήσουμε το κρουστικό σήμα. Στο σημείο αυτό δεν ξέρουμε πώς να παραστήσουμε ένα κρουστικό σήμα ως άθροισμα ημιτονοειδών. Ωστόσο, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα της εύρεσης της εξόδου που προκύπτει από την εφαρμογή του κρουστικού σήματος διότι μας έχει δοθεί η κρουστική απόκριση. Αφού η συνέλιξη με κρουστικό σήμα μπορεί να υπολογιστεί πολύ εύκολα

μετατοπίζοντας και σταθμίζοντας κατάλληλα την κρουστική απόκριση, δηλαδή:

$$20\delta(t - 0.1) \mapsto 20h(t - 0.1)$$

χρησιμοποιώντας την κρουστική απόκριση της Σχέσης (10.42), παίρνουμε

$$\begin{aligned} 20\delta(t - 0.1) &\mapsto \\ 20\delta(t - 0.1) - 4000\pi e^{-200\pi(t-0.1)} u(t - 0.1) \end{aligned}$$

Εξαιτίας της γραμμικότητας του συστήματος, η συνολική έξοδος είναι απλά το άθροισμα των επιμέρους εξόδων. Επομένως η έξοδος του συστήματος με την κρουστική απόκριση της Σχέσης (10.42) και την απόκριση συχνότητας της Σχέσης (10.43) είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= 0 \\ &+ 20\delta(t - 0.1) - 4000\pi e^{-200\pi(t-0.1)} u(t - 0.1) \\ &+ \frac{40}{\sqrt{2}} \cos(200\pi t + 0.55\pi) \end{aligned}$$

Καταλήξαμε στη λύση αυτή, χρησιμοποιώντας ότι γνωρίζαμε για τα ΓΧΑ συστήματα. Παρόλο που η λύση περιελάμβανε πολλά βήματα κανένα από αυτά δεν χρειαζόταν πολύπλοκη ανάλυση. Το μυστικό ήταν η επιλογή του κατάλληλου εργαλείου. ■

10-6 Ανακεφαλαίωση-Μελλοντικές Κατευθύνσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο είδαμε πώς σχετίζεται η κρουστική απόκριση και η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος. Επίσης είδαμε ότι όταν η είσοδος μπορεί να αναπαρασταθεί ως άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων, η απόκριση συχνότητας παρέχει μια άμεση μέθοδο εύρεσης της εξόδου του ΓΧΑ συστήματος. Στο επόμενο κεφάλαιο, το οποίο εισάγει την έννοια του μετασχηματισμού *Fourier*, θα δούμε ότι η απόκριση συχνότητας $H(j\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός *Fourier* της κρουστικής απόκρισης

$h(t)$. Η θεωρία των μετασχηματισμών Fourier θα μας δείξει ένα δρόμο για την αναπαράσταση, ως άθροισμα ημιτονοειδών μιας ευρύτερης κλάσης σημάτων, ανοίγοντας έτσι νέες δυνατότητες για τη χρησιμοποίηση της απόκρισης συχνότητας στην επίλυση προβλημάτων που αφορούν τα σήματα και τα συστήματα.

Η Εργαστηριακή άσκηση #13 ασχολείται με τον αριθμητικό υπολογισμό των συντελεστών των σειρών Fourier χρησιμοποιώντας τη δυνατότητα αριθμητικής ολοκλήρωσης που μας παρέχει το Matlab. Υπολογίζονται οι συντελεστές διαφόρων σημάτων και γίνεται η σύνθεσή των από τους υπολογισθέντες συντελεστές. Η εργαστηριακή άσκηση #15 χρησιμοποιεί τη δυνατότητα συμβολικού υπολογισμού που παρέχει το Matlab, για τον υπολογισμό των συντελεστών.



Εργ. Ασκ.: #13 Αριθμητικός Υπολογισμός Σειρών Fourier



Εργ. Ασκ.: #15 Σειρές Fourier (Κεφάλαιο 12)

Η διεπαφή των Σειρών Fourier, αυτοματοποιεί την εργασία που γίνεται χειρωνακικά στην Εργαστηριακή άσκηση #13. Στην διεπαφή αυτή, ο φοιτητής μπορεί να επιλέξει μεταξύ τριών σημάτων εισόδου καθώς και τον αριθμό των συντελεστών που επιθυμεί να υπολογίσει. Το μέτρο και η φάση του φάσματος σχεδιάζονται. Η παραπάνω διεπαφή ταυτίζεται μ' αυτή που σχολιάσαμε στο Κεφάλαιο 3.



Επίδειξη: Διεπαφή Σειρών Fourier

Το CLTIdemo είναι μια γραφική διεπαφή στο Matlab που επιδεικνύει τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην είσοδο και την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματα συνεχούς χρόνου, όταν η είσοδος είναι μια συνημιτονική συνάρτηση. Ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να ελέγχει τις τιμές των παραμέτρων της εισόδου (πλάτος, συχνότητα, φάση και το DC επίπεδο) και αυτές του φίλτρου (τύπο φίλτρου και συχνότητα αποκοπής).



Επίδειξη: Διεπαφή CLTI

Ως συνήθως, υπενθυμίζεται στον αναγνώστη ο μεγάλος αριθμός λυμένων προβλημάτων που υπάρχουν στο CD-ROM το οποίο διατίθεται για επανάληψη και εξάσκηση.



Υπόδειξη: Εκατοντάδες Λυμένα Προβλήματα

10-7 Προβλήματα

Πρόβλημα.-10.1 Υπολόγισε την απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού συστήματος καθυστέρησης αντικαθιστώντας το $x(t) = e^{j\omega t}$ στον ορισμό του συστήματος

$$y(t) = x(t - \frac{1}{2})$$

Σχεδιάστε επίσης το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του συστήματος.

Πρόβλημα.-10.2 Η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος είναι

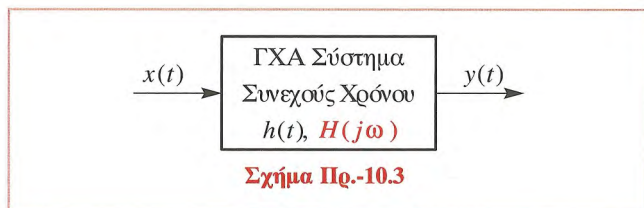
$$H(j\omega) = \frac{3 - j\omega}{3 + j\omega} e^{-j\omega}$$

- (i) Καθορίστε το μέτρο στο τετράγωνο της απόκρισης συχνότητας και απλοποιήστε το όσο είναι δυνατόν.
- (ii) Καθορίστε τη φάση $\angle H(j\omega)$ της απόκρισης συχνότητας.
- (iii) Αν η είσοδος στο ΓΧΑ σύστημα είναι $x(t) = 4 + \cos(3t)$ για $-\infty < t < \infty$, ποια είναι η αντίστοιχη έξοδος $y(t)$;

Πρόβλημα.-10.3 Υποθέστε πως το συνεχούς χρόνου ΓΧΑ σύστημα που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-10.3 καθορίζεται από την ακόλουθη σχέση εισόδου /εξόδου:

$$y(t) = x(t + 1) + 2x(t) + x(t - 2) \quad (10.44)$$

- (i) Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος, δηλαδή καθορίστε την έξοδο όταν η είσοδος είναι ένα κρουστικό σήμα.



- (ii) Αντικαταστήστε την $h(t)$ που βρήκατε στον ακόλουθο τύπο

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

για να βρείτε την απόκριση συχνότητας.

- (iii) Εφαρμόστε τον ορισμό του συστήματος της Εξίσωσης (10.44) άμεσα για είσοδο $x(t) = e^{j\omega t}$, $-\infty < t < \infty$ και αποδείξτε ότι $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$, όπου $H(j\omega)$ είναι η συνάρτηση που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

Πρόβλημα.-10.4 Η κρουστική απόκριση ενός συνεχούς χρόνου ΓΧΑ συστήματος είναι

$$h(t) = \delta(t) - 0.1e^{-0.1t}u(t)$$

- (i) Βρείτε την απόκριση συχνότητας $H(j\omega)$ του συστήματος. Εκφράστε την απάντησή σας με τη μορφή ρητής συνάρτησης με δυνάμεις του $(j\omega)$ στον αριθμητή και στον παρανομαστή.
- (ii) Σχεδιάστε το τετράγωνο του μέτρου της απόκρισης συχνότητας

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H^*(j\omega)$$

συναρτήσεως του ω . Σχεδιάστε επίσης τη φάση $\angle H(j\omega)$ συναρτήσεως του ω .

- (iii) Σε ποια συχνότητα ω το τετράγωνο του μέτρου της απόκρισης συχνότητας, εμφανίζει τη μέγιστη τιμή της; Σε ποια συχνότητα το τετράγωνο του μέτρου της

απόκρισης συχνότητας ισούται με το μισό της μέγιστης τιμής της; Το σημείο αυτό αναφέρεται ως σημείο *ημίσειας ισχύος* του φίλτρου αφού το τετράγωνο του μέτρου αντιστοιχεί σε ισχύ.

- (iv) Υποθέσετε ότι η είσοδος σε αυτό το σύστημα είναι

$$x(t) = 10 + 20 \cos(0.1t) + \delta(t - 0.2)$$

Χρησιμοποιήστε την αρχή της υπέρθεσης για να βρείτε την έξοδο $y(t)$, αφού βρείτε την απόκριση κάθε όρου χρησιμοποιώντας την απλούστερη μέθοδο, (κρουστική απόκριση ή απόκριση συχνότητας).

Πρόβλημα.-10.5 Η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι το περιοδικό παλμικό κύμα που απεικονίζεται στο Σχήμα Πρ.-10.5. Η είσοδος μπορεί να αναπαρασταθεί με την ακόλουθη σειρά Fourier

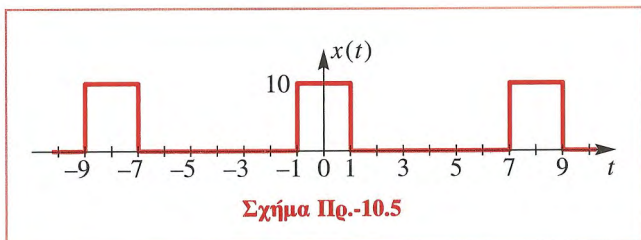
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{όπου} \quad a_k = \frac{10 \sin(\pi k/4)}{\pi k}$$

- (i) Βρείτε το ω_0 στην αναπαράσταση της σειράς Fourier του $x(t)$. Γράψτε επίσης το ολοκλήρωμα που πρέπει να υπολογίσουμε για να βρούμε τους συντελεστές a_k της σειράς Fourier.
- (ii) Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος $x(t)$, να κάνετε δηλαδή ένα διάγραμμα των συντελεστών a_k στις συχνότητες $k\omega_0$ για $-4\omega_0 \leq \omega \leq 4\omega_0$.
- (iii) Αν η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι αυτή του ιδανικού *υψηλερατού* φίλτρου

$$H(j\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| < \pi/8 \\ 1 & |\omega| \geq \pi/8 \end{cases}$$

σχεδιάστε την έξοδο του συστήματος, $y(t)$, όταν η είσοδος είναι η $x(t)$ του παραπάνω σχήματος.

Υπόδειξη: Πρώτα βρείτε ποια συχνότητα απομακρύνεται από το φίλτρο και στη συνέχεια βρείτε πώς επηρεάζει την κυματομορφή.



- (iv) Αν η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι αυτή του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_{co} \\ 0 & |\omega| > \omega_{co} \end{cases}$$

όπου ω_{co} είναι η *συχνότητα αποκοπής*, για ποιες τιμές του ω_{co} η έξοδος του συστήματος έχει τη μορφή

$$y(t) = A + B \cos(\omega_0 t + \phi)$$

όπου A και B είναι μη μηδενικές σταθερές;

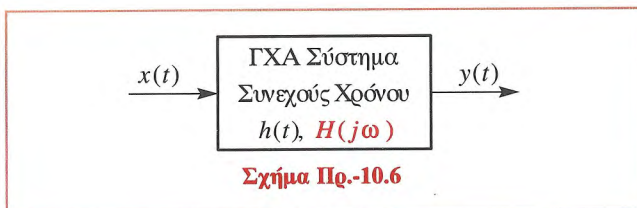
- (v) Αν η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος είναι $H(j\omega) = 1 - e^{-j2\omega}$, σχεδιάστε την έξοδο του συστήματος $y(t)$, όταν η είσοδος είναι η $x(t)$ του παραπάνω σχήματος.

Υπόδειξη: Στην περίπτωση αυτή είναι ευκολότερο να βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$ που αντιστοιχεί στην $H(j\omega)$ και από την $h(t)$ μπορείτε εύκολα να βρείτε τη σχέση που συνδέει το $y(t)$ με το $x(t)$. Αυτό θα σας επιτρέψει να σχεδιάσετε το $y(t)$.

Πρόβλημα.-10.6 Η είσοδος στο ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου που απεικονίζεται στο Σχήμα Πρ.-10.6 ορίζεται από τη Σχέση

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk200\pi t}, \quad \text{όπου } a_k = \begin{cases} \frac{1}{\pi k^2} & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

- (i) Βρείτε το φάσμα του $x(t)$ και σχεδιάστε το στο διάστημα $-1000\pi \leq \omega \leq 1000\pi$.



- (ii) Η απόκριση συχνότητας του ΓΧΑ συστήματος δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 10 & |\omega| \leq 300\pi \\ 0 & |\omega| > 300\pi \end{cases}$$

Σχεδιάστε την απόκριση πάνω στη γραφική παράσταση του φάσματος του προηγούμενου ερωτήματος.

- (iii) Υπολογίστε τη DC τιμή του σήματος εξόδου, δηλαδή, βρείτε το $b_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) dt$, όπου T_0 είναι η περίοδος του σήματος εξόδου.

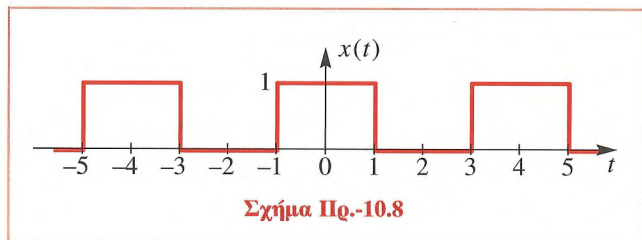
- (iv) Γράψτε μια εξίσωση για το $y(t)$. Αν μπορείτε, απλοποιήστε την εξίσωση έτσι ώστε να περιλαμβάνει μόνο ημιτονοειδείς συναρτήσεις.

Πρόβλημα.-10.7 Μια περιοδική κυματομορφή $x(t)$ με περίοδο $T = 4$ ορίζεται για μια περίοδο από τη σχέση:

$$x(t) = e^{-t} \quad 0 \leq t < 4$$

- (i) Σχεδιάστε προσεκτικά την $x(t)$.
- (ii) Προσδιορίστε τη θεμελιώδη συχνότητα, ω_0 , της $x(t)$.
- (iii) Προσδιορίστε τους συντελεστές a_k της σειράς Fourier της κυματομορφής $x(t)$. Δώστε ένα γενικό τύπο που θα ισχύει για κάθε ακέραιο k .
- (iv) Προσδιορίστε το σήμα εξόδου $y(t)$, αν επιδράσει πάνω στο $x(t)$ ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο του οποίου η συχνότητα αποκοπής είναι $\omega_{co} = 2\pi/3$ rad/sec.

Πρόβλημα.-10.8 Υποθέστε πως η είσοδος $x(t)$ σ' ένα ιδανικό φίλτρο επιλογής συχνοτήτων είναι το τετραγωνικό κύμα που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-10.8.



Σχήμα Πρ.-10.8

Η αναπαράσταση σε σειρά Fourier αυτής της κυματομορφής είναι

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad -\infty < t < \infty$$

- (i) Προσδιορίστε τη θεμελιώδη συχνότητα ω_0 .
- (ii) Προσδιορίστε του συντελεστές a_k της σειράς Fourier αυτού του σήματος.
- (iii) Εξετάστε αν είναι ή δεν είναι δυνατό η αντίστοιχη έξοδος του ΓΧΑ συστήματος να είναι το ακόλουθο σήμα

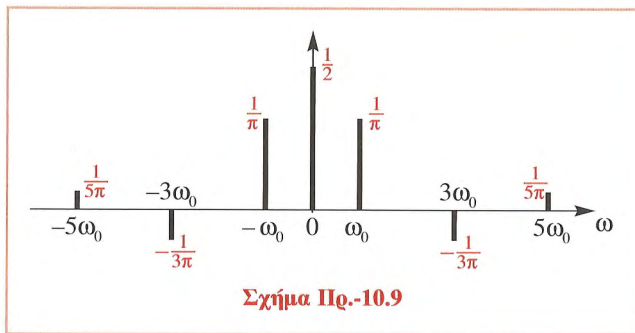
$$y(t) = 2 \cos(2\pi t/4) \quad -\infty < t < \infty$$

Αν δεν είναι δυνατόν, δικαιολογήστε. Αν είναι δυνατόν, προσδιορίστε την απόκριση συχνότητας $H(j\omega)$ ενός ιδανικού φίλτρου επιλογής συχνοτήτων (χαμηλοπερατό, υψηλοπερατό ή ζωνοδιαβατό) έτσι ώστε η έξοδος να είναι αυτή που αναφέρθηκε παραπάνω. Σχεδιάστε προσεκτικά την $H(j\omega)$ έτσι ώστε να φαίνεται το κέρδος και οι συχνότητες αποκοπής του φίλτρου.

- (iv) Επαναλάβετε το μέρος (γ) όταν η επιθυμητή έξοδος είναι η

$$y(t) = 2 \cos(2\pi t/3)$$

Πρόβλημα.-10.9 Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα του οποίου η απόκριση συχνότητας $H(j\omega)$ είναι άγνωστη. Το σύστημα δέχεται μια περιοδική είσοδο της οποίας το φάσμα φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-10.9.



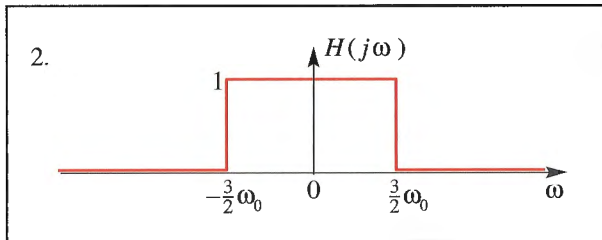
Σχήμα Πρ.-10.9

Για κάθε μέρος αυτού του προβλήματος, δίνεται η έξοδος ενώ η απόκριση συχνότητάς του θα πρέπει να προσδιοριστεί επιλέγοντας από την αριθμημένη λίστα (1-7) που φαίνεται παρακάτω. Επιλέξτε την απόκριση συχνότητας $H(j\omega)$ του συστήματος όταν το φάσμα του σήματος εισόδου είναι αυτό που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-10.9.

- (i) $y(t) = \frac{1}{2}$
- (ii) $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos[\omega_0(t - \frac{1}{2})]$
- (iii) $y(t) = \frac{2}{\pi} \cos(\omega_0 t)$
- (iv) $y(t) = x(t) - \frac{1}{2}$
- (v) $y(t) = x(t - \frac{1}{2})$

Τα πιθανά φίλτρα περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις (μερικές από τις οποίες δεν θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν):

$$1. H(j\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| < \frac{1}{2}\omega_0 \\ 1 & |\omega| \geq \frac{1}{2}\omega_0 \end{cases}$$

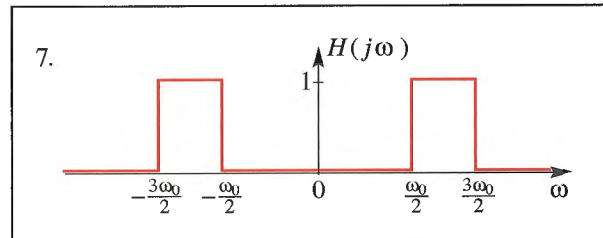


$$3. H(j\omega) = e^{-j\omega/2}$$

$$4. H(j\omega) = \frac{1}{2}[1 + \cos(\omega T_0)]$$

$$5. H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{1}{2}\omega_0 \\ 0 & |\omega| > \frac{1}{2}\omega_0 \end{cases}$$

$$6. H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega/2} & |\omega| \leq \frac{3}{2}\omega_0 \\ 0 & |\omega| > \frac{3}{2}\omega_0 \end{cases}$$



Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου

Σε προηγούμενα κεφαλαία, περιορίσαμε την παρουσίαση του φάσματος σε ημιτονοειδή και περιοδικά σήματα. Σκοπός μας στο κεφάλαιο αυτό είναι να αναπτύξουμε ένα *εντελώς γενικό ορισμό του φάσματος συχνοτήτων* τον οποίο θα μπορούμε να εφαρμόσουμε στην απεικόνιση οποιοδήποτε σήματος $x(t)$. Εφοδιασμένοι με το ισχυρό αυτό εργαλείο, θα μπορέσουμε: (1) να ορίσουμε αυστηρά την έννοια του εύρους ζώνης ενός σήματος, (2) να εξηγήσουμε τις εσωτερικές λειτουργίες των μοντέρνων επικοινωνιακών συστημάτων τα οποία είναι ικανά να εκπέμπουν ταυτόχρονα πολλά σήματα μοιράζοντας το διαθέσιμο εύρος ζώνης και (3) να ορίσουμε το φιλτράρισμα, μια αναγκαία διαδικασία σε τέτοια συστήματα για τον διαχωρισμό των σημάτων. Υπάρχουν πολλές άλλες εφαρμογές του μετασχηματισμού Fourier, γενικά μπορούμε να πούμε ότι η ανάλυση Fourier μας εξασφαλίζει την απαραίτητη γλώσσα που χρειαζόμαστε

για τον ορισμό και το σχεδιασμό μοντέρνων μηχανικών συστημάτων.

Σχεδόν από την αρχή του βιβλίου αυτού έχουμε βάσει στη έννοια της απεικόνισης ενός σήματος συνεχούς χρόνου από το φάσμα του, το οποίο μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει απλά ως την πληροφορία του πλάτους, της φάσης και της συχνότητας που είναι αναγκαία για τον ακριβή καθορισμό ενός αθροίσματος ημιτονοειδών σημάτων. Συγκεκριμένα, στο Κεφαλαίο 3 αποδείξαμε ότι *αν ένα σήμα συνεχούς χρόνου είναι περιοδικό με περίοδο T_0 , τότε μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων* με όλες τις συχνότητες να είναι ακέραια πολλαπλάσια της βασικής συχνότητας $\omega_0 = 2\pi T_0$ και αποδείξαμε επίσης ότι όταν γνωρίζουμε μια εξίσωση για την κυματομορφή $x(t)$ σε διάστημα μιας περιόδου τότε, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ολοκλήρωμα της σειράς Fourier για την εύρεση των πλατών και των

φάσεων. Στο Κεφαλαίο 10 συζητήσαμε επίσης για μια από τις σημαντικότερες ιδιότητες των ΓΧΑ συστημάτων, ότι δηλαδή η διέγερση ενός ΓΧΑ συστήματος από μια μιγαδική εκθετική είσοδο συχνότητας ω παράγει μια έξοδο που είναι επίσης μιγαδική εκθετική ίδιας συχνότητας, αλλά διαφοροποιημένη ως προς το πλάτος και τη φάση ανάλογα με την απόκριση συχνότητας $H(j\omega)$ του συστήματος. Αυτό είναι ένα αποτέλεσμα μεγάλης σημασίας που ισχύει για ΓΧΑ συστήματα τόσο διακριτού όσο και συνεχούς χρόνου. Μέχρι αυτό το σημείο του βιβλίου έχουμε περιοριστεί σε σήματα εισόδου που είναι είτε μεμονωμένα μιγαδικά εκθετικά, είτε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων διαφορετικών συχνοτήτων. Στο κεφαλαίο αυτό, δείχνουμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της απόκρισης συχνότητας με πιο γενικά σήματα, πρώτα όμως πρέπει να ορίσουμε το **μετασχηματισμό Fourier**¹. Γι' αυτόν το λόγο, το κεφαλαίο αυτό εστιάζεται στον μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου και τις ιδιότητές του. Θα συζητήσουμε πολλά χρήσιμα αποτελέσματα και θα δείξουμε με πολλά παραδείγματα πώς ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να χρησιμοποιηθεί και να μας βοηθήσει ουσιαστικά στην αντιμετώπιση και ανάλυση προβλημάτων που άπτονται των σημάτων και των συστημάτων συνεχούς χρόνου.

11-1 Ορισμός Μετασχηματισμού Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται με τη βοήθεια του ακόλουθου ζεύγους εξισώσεων:

$$\begin{array}{c} \text{Ευθύς} \\ \text{Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου} \end{array} \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (11.1)$$

¹Υπάρχει επίσης ο μετασχηματισμός Fourier για σήματα διακριτού χρόνου $x[n]$, ο οποίος ονομάζεται Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT). Αν και δεν θα αναφερθούμε στον DTFT σ' αυτό το κεφαλαίο, οι περισσότερες από τις ιδιότητές του είναι πανομοιότυπες με αυτές που θα μελετήσουμε για τον Μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου (CTFT). Ο DTFT θα εισαχθεί στο Κεφαλαίο 12 και θα παίξει σημαντικό ρόλο στο Κεφαλαίο 13.

και

$$\begin{array}{c} \text{Αντίστροφος} \\ \text{Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου} \end{array} \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (11.2)$$

Ο ευθύς μετασχηματισμός είναι ένα ολοκλήρωμα **ανάλυσης** διότι εξάγει πληροφορίες φάσματος από το σήμα $x(t)$. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι ένα ολοκλήρωμα **σύνθεσης** διότι χρησιμοποιείται για τη δημιουργία του σήματος στο πεδίο του χρόνου από φασματικές πληροφορίες. Όπως συνηθίζουμε σ' αυτό το βιβλίο, θα αναφερόμαστε στο $X(j\omega)$ σαν παράσταση στο **πεδίο της συχνότητας**, διότι μπορούμε να ερμηνεύσουμε την (11.2) ως “άθροισμα” άπειρου πλήθους μιγαδικών εκθετικών σημάτων, με το $X(j\omega)$ να ελέγχει τα πλάτη και τις φάσεις των σημάτων αυτών. Ομοίως, $x(t)$ είναι η παράσταση του σήματος στο **πεδίο του χρόνου**. Δηλώνουμε αυτήν την (ένα προς ένα) σχέση ανάμεσα στα δυο πεδία ως ακολούθως

$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο-Χρόνου} & & \text{Πεδίο-Συχνότητας} \\ x(t) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & X(j\omega) \end{array} \quad (11.3)$$

Ο συμβολισμός $\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ δηλώνει ότι είναι δυνατό να μεταβαίνουμε, με μοναδικό τρόπο, μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνότητας.

Δεδομένης της συνάρτησης $x(t)$, μπορούμε να καθορίσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση φάσματος $X(j\omega)$, υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα ανάλυσης της Σχέσης (11.1). Δηλαδή, η Σχέση (11.1) ορίζει μια μαθηματική “πράξη” για το μετασχηματισμό της $x(t)$ σε μια νέα ισοδύναμη αναπαράσταση $X(j\omega)$. Για το λόγο αυτόν, η $X(j\omega)$ ονομάζεται **μετασχηματισμός Fourier**. Συνηθίζουμε να λέμε ότι **παίρνουμε το μετασχηματισμό Fourier του $x(t)$** , εννοώντας ότι καθορίζουμε το $X(j\omega)$ έτσι ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση του σήματος στο πεδίο της συχνότητας.

Δεδομένης της συνάρτησης $X(j\omega)$, με μια παρόμοια διαδικασία, μπορούμε να καθορίσουμε την αντίστοιχη χρονική συνάρτηση $x(t)$ υπολογίζοντας από τη Σχέση (11.2) πάλι ένα ολοκλήρωμα, το ολοκλήρωμα σύνθεσης. Επομένως, η Σχέση (11.2) ορίζει τον *αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier*, δηλαδή την “πράξη” που υλοποιεί τη μετάβαση από το πεδίο συχνότητας στο πεδίο χρόνου. Και πάλι όταν υπολογίζουμε τη Σχέση (11.2), συνηθίζουμε να λέμε ότι *παίρνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier*.

Παράδειγμα 11-1: Ευθύς Μετασχηματισμός

Ως παράδειγμα υπολογισμού του μετασχηματισμού Fourier, θεωρήστε το ακόλουθο μονόπλευρο εκθετικό σήμα

$$x(t) = e^{-7t}u(t) \quad (11.4)$$

Αντικαθιστώντας αυτή τη συνάρτηση στη Σχέση (11.1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-7t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(7+j\omega)t} dt \\ &= \left. \frac{e^{-7t} e^{-j\omega t}}{-(7+j\omega)} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{7+j\omega} \end{aligned} \quad (11.5)$$

Παρατηρήστε ότι η τιμή του ολοκληρώματος στο άνω όριο είναι μηδέν αφού το μέτρο του $e^{-7t} e^{-j\omega t}$ είναι ίσο με e^{-7t} το οποίο τείνει στο μηδέν καθώς το $t \rightarrow \infty$. Άρα, έχουμε βρει το ακόλουθο ζεύγος μετασχηματισμών Fourier (χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της Σχέσης (11.3)):

²Θυμηθείτε ότι $|e^{-7t} e^{-j\omega t}| = |e^{-7t}| |e^{-j\omega t}|$ και $|e^{-j\omega t}| = 1$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο-Χρόνου} & & \text{Πεδίο-Συχνότητας} \\ e^{-7t}u(t) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{1}{7+j\omega} \end{array} \quad (11.6)$$

Παρατηρήστε ότι στον υπολογισμό του ολοκληρώματος της Σχέσης (11.5) δεν τέθηκαν καθόλου περιορισμοί στο ω , οπότε καταλήγουμε ότι όλες οι συχνότητες, $-\infty < \omega < \infty$, είναι αναγκαίες για την αναπαράσταση του $e^{-7t}u(t)$ από το μετασχηματισμό Fourier. ■

Σπάνια υπολογίζουμε άμεσα το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού Fourier (11.1), ή το ολοκλήρωμα του αντίστροφου μετασχηματισμού. Τις περισσότερες φορές για τη λύση προβλημάτων της επεξεργασίας σημάτων, χρησιμοποιούμε γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών Fourier μαζί με τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier. Για παράδειγμα, ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια ένα-προς-ένα αντιστοίχιση που σημαίνει ότι κάθε μετασχηματισμός $X(j\omega)$ αντιστοιχεί μόνο σε μια συνάρτηση χρόνου $x(t)$, και κάθε συνάρτηση $x(t)$ αντιστοιχεί σε μόνο ένα μετασχηματισμό $X(j\omega)$. Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει πώς μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη μοναδικότητα.

Παράδειγμα 11-2: Μοναδικότητα Αντίστροφου

Θεωρήστε το πρόβλημα του υπολογισμού του ακόλουθου ολοκληρώματος:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{7+j\omega} \right) e^{-j3\omega} d\omega = ; \quad (11.7)$$

Ο υπολογισμός αυτού του ολοκληρώματος είναι δύσκολος, αν όχι αδύνατος, χρησιμοποιώντας συνηθισμένες μεθόδους ολοκληρωτικού λογισμού. Παρ' όλα αυτά, το ολοκλήρωμα είναι ειδική περίπτωση ενός ολοκληρώματος αντίστροφου μετασχηματισμού, οπότε η μοναδικότητα της αναπαράστασης του μετασχηματισμού Fourier μας εγγυάται ότι είναι

ασφαλές να γράψουμε:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{7+j\omega} \right) e^{j\omega t} d\omega = e^{-7t} u(t) \quad (11.8)$$

Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να θυμόμαστε το ζεύγος των μετασχηματισμών Fourier της Σχέσης (11.6). Η μοναδικότητα εξασφαλίζει ότι υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση χρόνου που αντιστοιχεί σε δεδομένο μετασχηματισμό Fourier. Τελικά, μπορούμε να “υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα” της Σχέσης (11.7) παίρνοντας την ειδική περίπτωση $t = -3$ στην (11.8) που σημαίνει ότι υπολογίζουμε το $e^{-7t}u(t)$ στο $t = -3$ για να πάρουμε απάντηση μηδέν! Θα ήταν πολύ δύσκολο να βρούμε το αποτέλεσμα αυτό ακολουθώντας συνηθισμένες μεθόδους του ολοκληρωτικού λογισμού. ■

Το Παράδειγμα 11-2 μας δείχνει ότι μπορούμε να υπολογίζουμε μετασχηματισμούς Fourier με τη βοήθεια πινάκων. Δηλαδή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αποτελέσματα που έχουν εξαχθεί νωρίτερα, για να απλοποιήσουμε τις διαδικασίες στις οποίες εμπλέκονται μετασχηματισμοί Fourier. Στην Ενότητα 11-4, θα εξάγουμε ένα πλήθος από ζεύγη μετασχηματισμών Fourier τα οποία αργότερα συνοψίζονται στον Πίνακα 11-3 της Ενότητας 11-9³. Πρώτα όμως, πρέπει να δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί μια φυσική γενίκευση της σειράς Fourier.

11-2 Μετασχηματισμός Fourier και Φάσμα

Είναι δυνατόν να θεωρήσουμε ένα ολοκλήρωμα ως ένα άθροισμα⁴. Στην περίπτωση μας, μπορούμε να ερμηνεύσουμε το ολοκλήρωμα σύνθεσης (11.2) ως ένα

³Το λογισμικό συμβολικής άλγεβρας μπορεί να προγραμματιστεί για να βρίσκει τους περισσότερους μετασχηματισμούς Fourier, αν μπορεί να έχει πρόσβαση σε έναν μεγάλο πίνακα “γνωστών ζευγών μετασχηματισμών” και “γνωστών ιδιοτήτων του” τους οποίους χρησιμοποιεί ως κανόνες.

⁴Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα κατά Riemann προκύπτει από το όριο των αθροιζόμενων ορθογωνίων περιοχών που προσεγγίζουν την περιοχή κάτω από μια καμπύλη.

“άθροισμα” από μιγαδικά εκθετικά σήματα, καθένα από τα οποία έχει διαφορετικό μιγαδικό πλάτος, αν γράψουμε την υπό ολοκλήρωση ποσότητα ως:

$$\left[\frac{1}{2\pi} X(j\omega) d\omega \right] e^{j\omega t}$$

Ένα ολοκλήρωμα είναι μια ειδική περίπτωση “άθροισματος” επειδή είναι το “άθροισμα” απειροελάχιστα μικρών ποσοτήτων. Η συνάρτηση του μετασχηματισμού Fourier $X(j\omega)$ είναι το μιγαδικό πλάτος το οποίο πολλαπλασιάζει τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση $e^{j\omega t}$, ενώ το κλάσμα $\frac{1}{2\pi}$ είναι μια σταθερά αναγκαία για τη σωστή κανονικοποίηση σε μονάδες γωνιακής συχνότητας (rad/sec) και η ποσότητα $d\omega$ δίνει στο μιγαδικό πλάτος την απειροελάχιστη φύση του. Για το λόγο αυτόν, το $X(j\omega)$ είναι ο φορέας της πληροφορίας του πλάτους και της φάσης για όλες τις συχνότητες που είναι αναγκαίες για τη σύνθεση του $x(t)$, ως “άθροισμα” μιγαδικών εκθετικών σημάτων. Στον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, είναι αναγκαίες όλες οι συχνότητες $-\infty < \omega < \infty$ για την αναπαράσταση του σήματος, έτσι το $X(j\omega)$ είναι συνεχής συνάρτηση του ω και όχι απλά ένα μετρήσιμο σύνολο όπως οι συντελεστές της σειράς Fourier $\{a_k\}$ που χρησιμοποιούνται στην περίπτωση των περιοδικών σημάτων.

11-2.1 Το Όριο της Σειράς Fourier

Ένας άλλος τρόπος για να δούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένα άθροισμα απειροελάχιστων μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, είναι να εξετάσουμε τη σειρά Fourier στην περίπτωση που το διάστημα μεταξύ των φασματικών γραμμών είναι πολύ μικρό⁵. Θυμηθείτε ότι η αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος $x_{T_0}(t)$ σε σειρά Fourier δίνεται από το ζεύγος εξισώσεων

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (11.9)$$

⁵Η χρήση ορίων δεν αποτελεί μια αυστηρή από μαθηματική άποψη, μέθοδο παραγωγής του μετασχηματισμού Fourier, ωστόσο είναι ένας τρόπος που υποδεικνύει την ορθότητα της μορφής του ολοκληρώματος του μετασχηματισμού και δίνει μια χρήσιμη ερμηνεία.

και

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (11.10)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σήμα πεπερασμένης χρονικής διάρκειας $x(t)$ δηλαδή μη περιοδικό το οποίο επομένως δεν μπορεί να παρασταθεί ως σειρά Fourier. Παρόλα αυτά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το $x(t)$ για να ορίσουμε μια περίοδο μιας περιοδικής συνάρτησης αρκεί η περίοδος αυτή (T_0) να είναι μεγαλύτερη από τη διάρκεια του $x(t)$. Ως παράδειγμα της διαδικασίας αυτής, ας θεωρήσουμε ότι αρχίζουμε με ένα τετραγωνικό παλμό πεπερασμένης χρονικής διάρκειας:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2}T < t < \frac{1}{2}T \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (11.11)$$

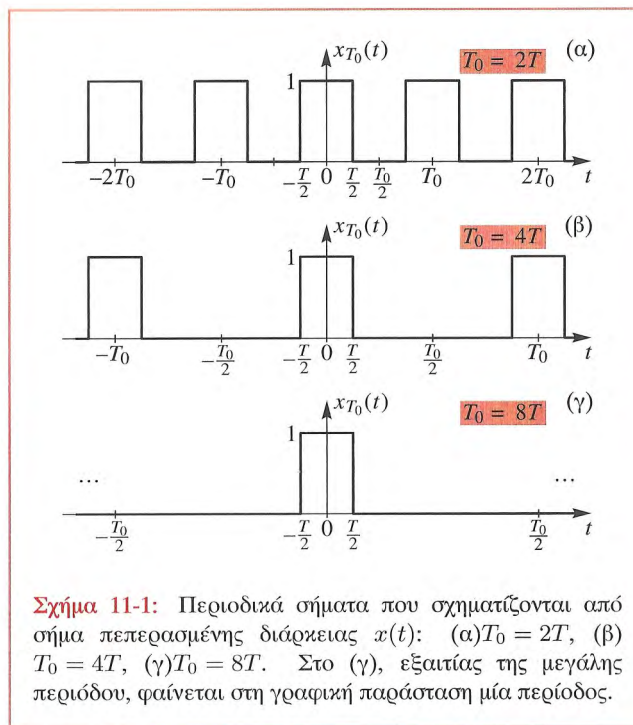
Αν $T_0 > T$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο T_0 , επαναλαμβάνοντας αντίγραφα του $x(t)$ κάθε T_0 δευτερόλεπτα. Ένας βολικός τρόπος να εκφράσουμε αυτή τη διαδικασία του “περιοδικού αντίγραφου” είναι να γράψουμε ένα άπειρο άθροισμα χρονικά μετατοπισμένων αντιγράφων του $x(t)$, δηλαδή,

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0)$$

όπου $x(t - nT_0)$ είναι το αντίγραφο με κέντρο το $t = nT_0$. Στο Σχήμα 11-1 φαίνονται τρία παραδείγματα, με διαφορετικές τιμές του T_0 , για το σήμα του τετραγωνικού παλμού της Σχέσης (11.11). Παρατηρήστε ότι όσο αυξάνει το T_0 σε σχέση με το T , το περιοδικό σήμα $x_{T_0}(t)$ γίνεται ίσο με $x(t)$ σε ένα μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, όποτε υποστηρίζουμε ότι:

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = x(t) \quad \text{for } -\infty < t < \infty$$

Θα εξετάσουμε τώρα τη σειρά Fourier για καθένα από αυτά τα περιοδικά σήματα και θα πάρουμε το όριο. Η θεμελιώδης συχνότητα του περιοδικού σήματος $x_{T_0}(t)$ είναι $\omega_0 = 2\pi/T_0$ και η σειρά Fourier έχει φασματικές γραμμές



Σχήμα 11-1: Περιοδικά σήματα που σχηματίζονται από σήμα πεπερασμένης διάρκειας $x(t)$: (α) $T_0 = 2T$, (β) $T_0 = 4T$, (γ) $T_0 = 8T$. Στο (γ), εξαιτίας της μεγάλης περιόδου, φαίνεται στη γραφική παράσταση μία περίοδος.

σε ακέραια πολλαπλάσια του ω_0 . Για το λόγο αυτόν, η απόσταση μεταξύ των φασματικών γραμμών είναι ω_0 . Όσο το $T_0 \rightarrow \infty$, βλέπουμε ότι οι συχνότητες που περιέχονται στο φάσμα του $x_{T_0}(t)$ γίνονται απείρως πυκνές διότι η απόσταση μεταξύ των συχνοτήτων είναι ω_0 και

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \omega_0 = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} 2\pi/T_0 = 0$$

Η επίδραση των παραπάνω στην αναπαράσταση της σειράς Fourier φαίνεται αν ξαναγράψουμε τις Σχέσεις (11.9) και (11.10) ως ακολούθως:

$$(a_k T_0) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (11.12)$$

και

$$x_{T_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k T_0) e^{jk\omega_0 t} \left(\frac{2\pi}{T_0} \right) \quad (11.13)$$

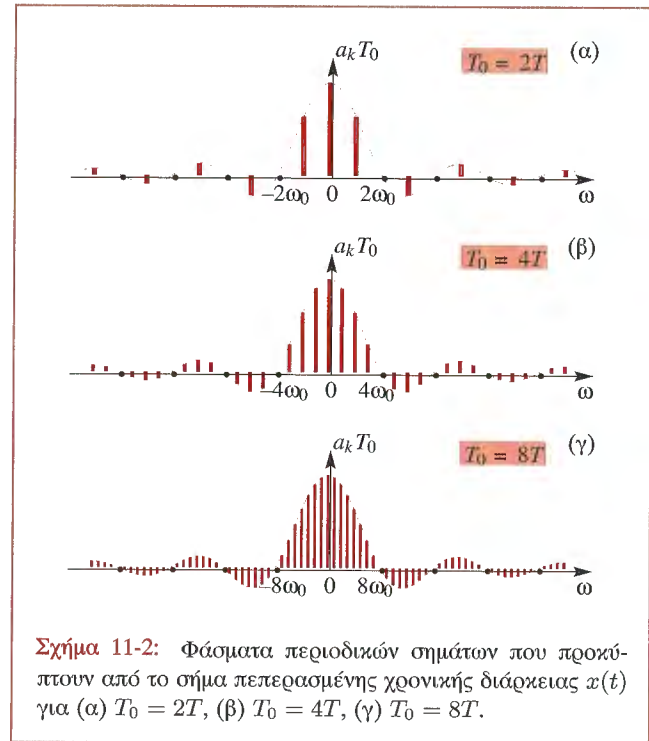
Καθώς το $T_0 \rightarrow \infty$, η θεμελιώδης συχνότητα ω_0 γίνεται πολύ μικρή και το σύνολο $\{k\omega_0\}$ ορίζει ένα πολύ πυκνό σύνολο σημείων πάνω στον άξονα των συχνοτήτων που προσεγγίζει τη συνεχή μεταβλητή ω . Επομένως, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η Σχέση (11.12) προσεγγίζει τη Σχέση (11.1), αν συνειδητοποιήσουμε ότι $a_k T_0 \rightarrow X(j\omega)$ και $x_{T_0}(t) \rightarrow x(t)$. Ομοίως, $\omega_0 = 2\pi/T_0 \rightarrow d\omega$ και το άθροισμα στην (11.13) γίνεται ολοκλήρωμα, ίσο με αυτό της Σχέσης (11.2). Τα παραπάνω διασαφηνίζονται για τα παραδείγματα του Σχήματος 11-1, από τα φάσματα που έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 11-2. Στην περίπτωση αυτή, οι ποσότητες $a_k T_0$ δίνονται από την ακόλουθη σχέση:⁶

$$\begin{aligned} a_k T_0 &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= -\frac{1}{jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = -\frac{e^{-jk\omega_0 T/2} - e^{jk\omega_0 T/2}}{jk\omega_0} \\ &= \frac{\sin(k\omega_0 T/2)}{k\omega_0/2} \end{aligned}$$

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 11-2, οι συχνότητες $k\omega_0$ πλησιάζουν η μια την άλλη καθώς $T_0 \rightarrow \infty$ και τελικά γίνονται πυκνές στο διάστημα $-\infty < \omega < \infty$. Οι ποσότητες $a_k T_0$ προσεγγίζουν τη συνεχή περιβάλλουσα συνάρτηση

$$X(j\omega) = \lim_{k\omega_0 \rightarrow \omega} \frac{\sin(k\omega_0 T/2)}{k\omega_0/2} = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2} \quad (11.14)$$

την οποία μπορούμε να δούμε στις γραφικές παραστάσεις των φασμάτων του Σχήματος 11-2.



Σχήμα 11-2: Φάσματα περιοδικών σημάτων που προκύπτουν από το σήμα πεπερασμένης χρονικής διάρκειας $x(t)$ για (α) $T_0 = 2T$, (β) $T_0 = 4T$, (γ) $T_0 = 8T$.

11-3 Ύπαρξη και Σύγκλιση του Μετασχηματισμού Fourier

Ο Μετασχηματισμός Fourier (11.1) και ο αντίστροφός του (11.2) είναι, γενικά, ολοκληρώματα με άπειρα όρια. Όταν ένα ολοκλήρωμα έχει άπειρα όρια, καλείται *Ιδιάζον* ολοκλήρωμα για να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι ένα τέτοιο άθροισμα, έστω και απειροελάχιστων ποσοτήτων, μπορεί να μη συγκλίνει σ' έναν πεπερασμένο αριθμό. Όταν το ένα ή και τα δύο από τα όρια είναι άπειρο, το ολοκλήρωμα μπορεί να είναι πεπερασμένο αν η προς ολοκλήρωση συνάρτηση έχει καλή συμπεριφορά (για παράδειγμα πλησιάζει το μηδέν αρκετά γρήγορα καθώς το $t \rightarrow \pm\infty$).

Κάθε συνάρτηση $x(t)$ δεν έχει απαραίτητα μετασχηματισμό Fourier. Για να βοηθηθούμε στη χρήση του

⁶Η ποσότητες $a_k T_0$ είναι φραγμένες, ακόμα και όταν το $T_0 \rightarrow \infty$.

μετασχηματισμού Fourier θα ήταν χρήσιμο να μπορούμε να καθορίσουμε αν ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης υπάρχει ή όχι. Ως μια απλή συνθήκη για τη σύγκλιση του ολοκληρώματος, μπορούμε να ελέγξουμε το μέτρο του $X(j\omega)$. Οι επόμενοι χειρισμοί καταλήγουν σ' ένα φράγμα για το μέτρο του $|X(j\omega)|$ το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποκτήσουμε μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier:

$$\begin{aligned} |X(j\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-j\omega t}| dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \end{aligned}$$

Το τελευταίο βήμα απορρέει από το γεγονός ότι $|e^{-j\omega t}| = 1$ για όλα τα t και ω . Άρα, μια *ικανή* συνθήκη⁷ για την ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier ($|X(j\omega)| < \infty$) είναι η ακόλουθη:

**Ικανή Συνθήκη
Ύπαρξης του $X(j\omega)$**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (11.15)$$

Σύμφωνα με τη συνθήκη (11.15) αν η συνάρτηση $x(t)$ είναι *απολύτως ολοκληρώσιμη*, τότε ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να υπολογισθεί από το ολοκλήρωμα της Σχέσης (11.1). Για το λόγο αυτόν είναι μια ικανή συνθήκη, αλλά μπορεί να αποδειχθεί ότι η Συνθήκη (11.15) δεν είναι και

⁷Όταν το σήμα $x(t)$ είναι η κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος, η ικανή συνθήκη είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη ευστάθειας (φραγμένης εισόδου φραγμένης εξόδου) του συστήματος. Για το λόγο αυτό μπορούμε να πούμε ότι “ευσταθή συστήματα” έχουν σίγουρα μετασχηματισμό Fourier.

αναγκαία. Θα δούμε πολλά παραδείγματα συναρτήσεων οι οποίες αν και δεν ικανοποιούν τη Συνθήκη (11.15), υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier. Ιδιαίτερα αν είμαστε διατεθειμένοι να επιτρέψουμε κρουστικά σήματα (τα οποία όπως γνωρίζουμε είναι συναρτήσεις με κακή συμπεριφορά) στις αναπαραστάσεις των σημάτων μας, στα πεδία χρόνου και συχνότητας. Στην ενότητα που ακολουθεί θα δώσουμε μερικά παραδείγματα.

11-4 Παραδείγματα Μετασχηματισμών Fourier

Τώρα που δείξαμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να αναπαραστήσει μη περιοδικά σήματα με τον ίδιο σχεδόν τρόπο που η σειρά Fourier αναπαριστά περιοδικά σήματα, μπορούμε να αρχίσουμε να αναπτύσσουμε μια βιβλιοθήκη από ζεύγη μετασχηματισμών Fourier η οποία θα είναι χρήσιμη στην επίλυση προβλημάτων.

11-4.1 Πραγματικά Εκθετικά Σήματα Δεξιάς Επέκτασης

Το σήμα $x(t) = e^{-at}u(t)$ ονομάζεται εκθετικό σήμα δεξιάς επέκτασης διότι είναι μη μηδενικό, μόνο στη δεξιά πλευρά της γραφικής παράστασης που φαίνεται στο Σχήμα 11-3(α). Στο Παράδειγμα 11-1 συναντήσαμε μια συγκεκριμένη περίπτωση ($a = 7$) του ακόλουθου ζεύγους μετασχηματισμού Fourier:

Πεδίο-Χρόνου	Πεδίο-Συχνότητας	
$e^{-at}u(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$\frac{1}{a + j\omega}$

(11.16)

Η συνθήκη απόλυτης ολοκληρωσιμότητας της (11.15) δείχνει ότι το a πρέπει να είναι θετικό έτσι ώστε να ισχύει το ζεύγος μετασχηματισμών της Σχέσης (11.16). Αν αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση $x(t) = e^{-at}u(t)$ στην (11.15) προκύπτει

$$\int_0^{\infty} |e^{-at}| dt = \int_0^{\infty} e^{-at} dt = -\frac{1}{a} e^{-at} \Big|_0^{\infty}$$

Το αποτέλεσμα αυτό θα είναι πεπερασμένο μόνο αν το e^{-at} στο άνω άκρο είναι φραγμένο, το οποίο είναι αληθές μόνο αν $a > 0$. Για αυτόν το λόγο, το εκθετικό σήμα δεξιάς επέκτασης έχει σίγουρα μετασχηματισμό Fourier αν φθίνει καθώς αυξάνεται το t , για το οποίο απαιτείται $a > 0$. Διαφορετικά, αν $a \leq 0$, το εκθετικό σήμα δεξιάς επέκτασης είτε δεν φθίνει είτε αυξάνεται απεριόριστα και επομένως αν $a \leq 0$ ο μετασχηματισμός Fourier δεν υπάρχει.



Άσκηση 11.1: Επιβεβαιώστε ότι η (11.16) αποτελεί ένα έγκυρο ζεύγος μετασχηματισμών Fourier ακόμα και όταν το a είναι ένας μιγαδικός αριθμός, εφόσον $\Re\{a\} > 0$.

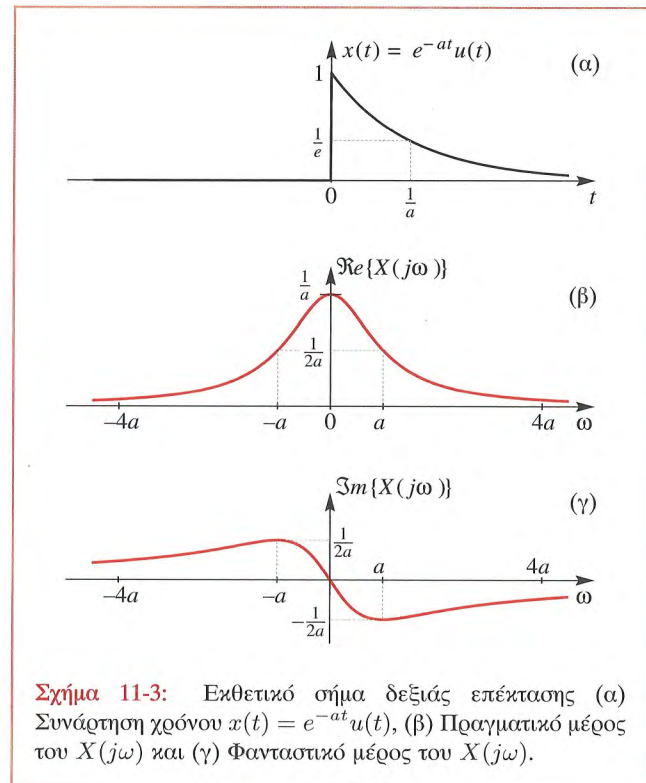
Ο μετασχηματισμός Fourier $X(j\omega) = 1/(a + j\omega)$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση του ω . Για να τη σχεδιάσουμε, θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη συναρτήσεως του ω , ή θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε το μέτρο και τη γωνία φάσης συναρτήσεως της συχνότητας. Τα πραγματικά και φανταστικά μέρη βρίσκονται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{1}{a + j\omega} = \frac{1}{a + j\omega} \left(\frac{a - j\omega}{a - j\omega} \right) \\ &= \frac{a}{a^2 + \omega^2} + \frac{-j\omega}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Επομένως, το πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι

$$\begin{aligned} \Re\{X(j\omega)\} &= \frac{a}{a^2 + \omega^2} \\ \Im\{X(j\omega)\} &= -\frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Στα Σχήματα 11-3(β) και 11-3(γ) απεικονίζονται το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier (δές Σχήμα 11-12 στη Σελίδα 358 για τις απεικονίσεις μέτρου και φάσης).



Σχήμα 11-3: Εκθετικό σήμα δεξιάς επέκτασης (α) Συνάρτηση χρόνου $x(t) = e^{-at}u(t)$, (β) Πραγματικό μέρος του $X(j\omega)$ και (γ) Φανταστικό μέρος του $X(j\omega)$.



Άσκηση 11.2: Το σήμα $x(t) = e^{bt}u(-t)$ είναι ένα παράδειγμα εκθετικού σήματος αριστερής επέκτασης. Σχεδιάστε το σήμα αυτό για $b > 0$ και στη συνέχεια δείξτε ότι αν $b > 0$ ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος αυτού είναι:

$$X(j\omega) = \frac{1}{b - j\omega}$$

Χρησιμοποιώντας την (11.15) δείξτε επίσης ότι αν $b \leq 0$, ο μετασχηματισμός Fourier δεν υπάρχει.




Άσκηση 11.3: Σχεδιάστε γραφήματα του πραγματικού και φανταστικού μέρους του $X(j\omega)$ από την

Άσκηση 11.2 συναρτήσει του ω και συγκρίνεται τα με τα Σχήματα 11-3(β) και 11-3(γ).

11-4.1.1 Εύρος Ζώνης και Ρυθμός Απόσβεσης

Το Σχήμα 11-3 μας δείχνει μια βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier και συγκεκριμένα την αντίστροφη σχέση που υπάρχει μεταξύ χρόνου και συχνότητας. Καταρχήν παρατηρήστε ότι η παράμετρος a ελέγχει το ρυθμό απόσβεσης του εκθετικού σήματος στο πεδίο του χρόνου. Καθώς αυξάνει το a , το εκθετικό σήμα φθίνει γρηγορότερα, με αποτέλεσμα το $x(t)$ να συγκεντρώνεται περισσότερο γύρω από το $t = 0$. Ενώ, στο πεδίο της συχνότητας, καθώς αυξάνει το a , ο μετασχηματισμός Fourier απλώνεται.

 **Άσκηση 11.4:** Να κάνετε γραφικές παραστάσεις στο Matlab όπως αυτές του Σχήματος 11-3 για $a = 1$ και $a = 2$.

Η αντίστροφη σχέση μεταξύ του πεδίου χρόνου και του πεδίου συχνότητας ισχύει με συνέπεια. Σήματα που έχουν μικρή χρονική διάρκεια εξαπλώνονται στη συχνότητα, δηλαδή έχουν μεγάλο "εύρος ζώνης". Αντιστρόφως, σήματα που είναι εξαπλωμένα στο χρόνο είναι συγκεντρωμένα στη συχνότητα. Ένας τυπικός ορισμός αυτής της ιδιότητας είναι η ιδιότητα της κλιμάκωσης στην οποία θα αναφερθούμε στην Ενότητα 11-5.1 στη Σελίδα 355.

11-4.2 Σήματα Ορθογώνιου Παλμού

Ένα κοινό μαθηματικό μοντέλο σήματος είναι το *σήμα ορθογώνιου παλμού* που ορίζεται με την ακόλουθη σχέση

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2}T \leq t < \frac{1}{2}T \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (11.17)$$

Στον ορισμό αυτό, το μήκος του παλμού είναι T και το σήμα είναι συμμετρικό γύρω από το $t = 0$. Στο Σχήμα 11-4(α) φαίνεται η γραφική παράσταση του σήματος $x(t)$.

Μπορούμε να προσδιορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier αντικαθιστώντας αυτή τη συνάρτηση στη Σχέση (11.1), η οποία δίνει:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}}{-j\omega} \\ &= \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2} \end{aligned} \quad (11.18)$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, αυτό το αποτέλεσμα ταυτίζεται με το αποτέλεσμα της Σχέσης (11.14) το οποίο προέκυψε από την εφαρμογή της διαδικασίας ορίων που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 11-2. Επομένως, έχουμε βρει το ακόλουθο ζεύγος μετασχηματισμών Fourier:

<i>Πεδίο-Χρόνου</i>	<i>Πεδίο-Συχνότητας</i>
$[u(t + \frac{1}{2}T) - u(t - \frac{1}{2}T)]$	$\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}$
$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	

(11.19)

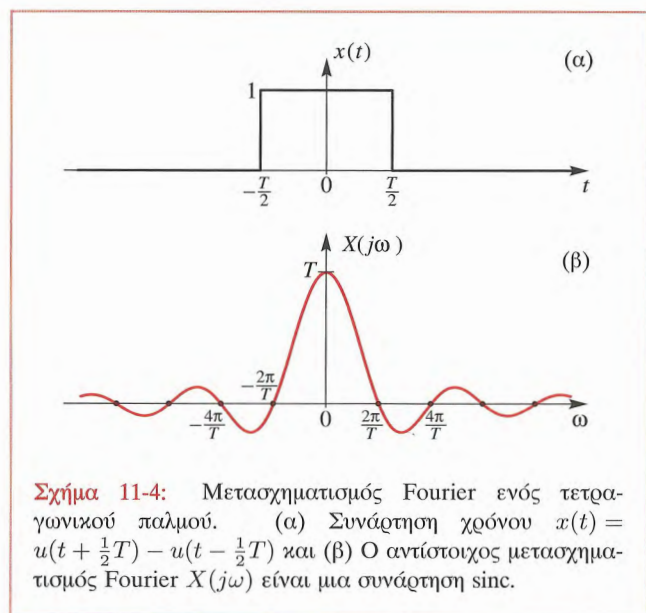
όπου ο ορισμός του ορθογώνιου παλμού της Σχέσης (11.17) έχει γίνει με τη βοήθεια του μοναδιαίου βηματικού σήματος.

Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος τετραγωνικού παλμού (που φαίνεται στο Σχήμα 11-4(β)) καλείται *συνάρτηση sinc*. Η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιείται ευρέως στη θεωρία σημάτων και συστημάτων. Ο τυπικός ορισμός της συνάρτησης "sinc" είναι⁸ ο ακόλουθος:

$$\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta} \quad (11.20)$$

Αν και ορισμένοι συγγραφείς για την απλοποίηση κάποιων εκφράσεων του μετασχηματισμού Fourier χρησιμοποιούν για την συνάρτηση sinc τη σημειογραφία η οποία

⁸Το Toolbox Signal Processing του Matlab διαθέτει τη συνάρτηση `sinc()`.



Σχήμα 11-4: Μετασχηματισμός Fourier ενός τετραγωνικού παλμού. (α) Συνάρτηση χρόνου $x(t) = u(t + \frac{1}{2}T) - u(t - \frac{1}{2}T)$ και (β) Ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Fourier $X(j\omega)$ είναι μια συνάρτηση sinc.

έχει οριστεί στη Σχέση (11.20)), η συνάρτηση $\text{sinc}(\cdot)$ μερικές φορές απαιτεί κλιμακώσεις των παραμέτρων της. Για παράδειγμα, ο μετασχηματισμός Fourier ενός τετραγωνικού παλμού μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια της συνάρτησης αυτής ως $X(j\omega) = T \text{sinc}(\omega T/2\pi)$. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε την αυστηρή σημειογραφία της συνάρτησης sinc, εκτός από το όνομα “συνάρτηση sinc” σαν γενικό χαρακτηρισμό οποιασδήποτε συνάρτησης της γενικής μορφής $\text{sinc}(\cdot)/(\cdot)$.

Αρκετές από τις σημαντικές ιδιότητες της συνάρτησης sinc είναι φανερές από το Σχήμα 11-4(β):

1. Η τιμή της συνάρτησης στο $\omega = 0$ είναι $X(j0) = T$. Αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης στο $\omega = 0$ από τη Σχέση (11.18), καταλήγουμε στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Παρόλα αυτά, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L'Hôpital, παίρνουμε:

$$X(j0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2} \right)$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{T/2 \cos(\omega T/2)}{1/2} \right) = T$$

Παρατηρήστε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση μικρής γωνίας της τριγωνομετρικής συνάρτησης του ημιτόνου ($\sin \theta \approx \theta$) για να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα αφού

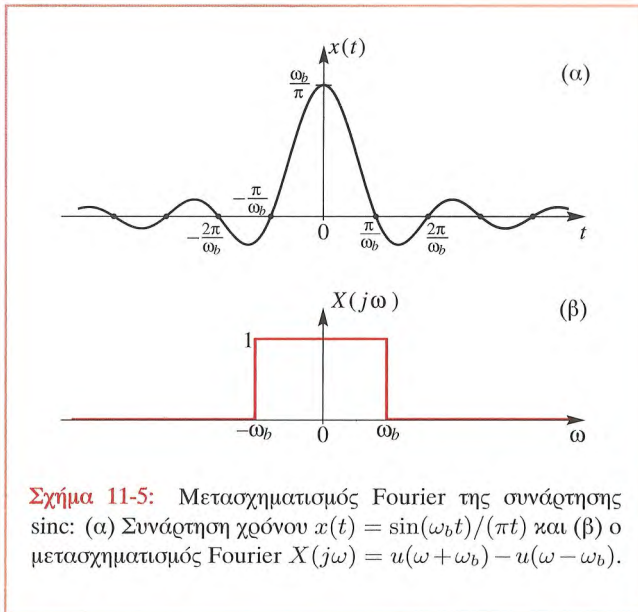
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2} \right) \approx \frac{(\omega T/2)}{\omega/2} = T$$

2. Οι μηδενισμοί της συνάρτησης sinc βρίσκονται σε μη μηδενικά ακέραια πολλαπλάσια του $\omega = 2\pi/T$, όπου T είναι η συνολική διάρκεια του παλμού. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση sinc ταλαντώνεται μεταξύ θετικών και αρνητικών τιμών. Συγκεκριμένα, μηδενίζεται σε κανονικά διαστήματα του άξονα της συχνότητας λόγω της παρουσίας της συνάρτησης $\sin(\omega T/2)$ στον αριθμητή του μετασχηματισμού. Οι μηδενισμοί της συνάρτησης sinc της εξίσωσης (11.18) εμφανίζονται στις τιμές του ω για τις οποίες μηδενίζεται ο αριθμητής του $X(j\omega)$. Αυτές οι τιμές του ω είναι τέτοιες ώστε $\sin(\omega T/2) = 0$. Αφού το $\sin(\theta) = 0$ για $\theta = n\pi$ όπου n ακέραιος, είναι φανερό ότι $X(j\omega) = 0$ για $\omega T/2 = n\pi$ ή $\omega = (2\pi/T)n$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11-4.
3. Εξαιτίας της ύπαρξης του ω στον παρονομαστή της $X(j\omega)$, η συνάρτηση “φθίνει” καθώς αυξάνει το ω , με ταχύτητα όμως που δεν ξεπερνάει το $1/\omega$.
4. Η $X(j\omega)$ είναι μία άρτια συνάρτηση, δηλαδή, $X(j\omega) = X(-j\omega)$.

$$X(-j\omega) = \frac{\sin(-\omega T/2)}{-\omega/2} = \frac{-\sin(\omega T/2)}{-\omega/2} = X(j\omega)$$

Για το λόγο αυτό ο πραγματικός άρτια-συμμετρικός ορθογώνιος παλμός έχει ένα πραγματικό άρτια-συμμετρικό μετασχηματισμό Fourier.

Αυτές τις ιδιότητες της συνάρτησης sinc θα τις εκμεταλλευτούμε σε ένα μεγάλο αριθμό εφαρμογών του μετασχηματισμού Fourier.



Σχήμα 11-5: Μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης sinc: (α) Συνάρτηση χρόνου $x(t) = \sin(\omega_b t) / (\pi t)$ και (β) ο μετασχηματισμός Fourier $X(j\omega) = u(\omega + \omega_b) - u(\omega - \omega_b)$.

11-4.3 Σήματα Περιορισμένου Εύρους Ζώνης

Η έννοια του εύρους ζώνης παίζει κεντρικό ρόλο στην κατανόηση και χρήση των μετασχηματισμών Fourier. Διαισθητικά, μια συνάρτηση συχνότητας που είναι συγκεντρωμένη κοντά στο $\omega = 0$ έχει μικρό εύρος στον άξονα ω . Το εύρος αυτό το ονομάζουμε εύρος ζώνης. Αυτό μας οδηγεί στο να ορίσουμε ένα *σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης* ως ένα σήμα του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier ικανοποιεί τη συνθήκη $X(j\omega) = 0$ για $|\omega| > \omega_b$ με $\omega_b < \infty$. Η συχνότητα ω_b καλείται *εύρος ζώνης του σήματος*⁹.

Ένα παράδειγμα ενός ιδεατού περιορισμένου εύρους ζώνης μετασχηματισμού Fourier είναι ένας ορθογώνιος παλμός στο πεδίο της συχνότητας:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & -\omega_b \leq \omega \leq \omega_b \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (11.21)$$

⁹Όταν ο μετασχηματισμός Fourier της Σχέσης (11.21) χρησιμοποιείται ως απόκριση συχνότητας, το ω_b ονομάζεται *συχνότητα αποκοπής*.

Ο μετασχηματισμός αυτός εμφανίζεται στο Σχήμα 11-5(β). Αφού ο μετασχηματισμός μηδενίζεται για $|\omega| > \omega_b$ είναι φανερό ότι είναι *περιορισμένου εύρους ζώνης*.

Θέλουμε να προσδιορίσουμε το σήμα, στο πεδίο του χρόνου, που έχει αυτό το μετασχηματισμό Fourier, δηλαδή θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να βρούμε την αντίστοιχη συνάρτηση χρόνου $x(t)$ αντικαθιστώντας τη Σχέση (11.21) στη Σχέση (11.2) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jt} e^{j\omega t} \Big|_{-\omega_b}^{\omega_b} = \frac{e^{j\omega_b t} - e^{-j\omega_b t}}{j2\pi t} \\ &= \frac{\sin(\omega_b t)}{\pi t} \end{aligned} \quad (11.22)$$

Στο Σχήμα 11-5(α) απεικονίζεται αυτή η συνάρτηση χρόνου, η οποία, και πάλι, έχει τη μορφή μιας συνάρτησης sinc. Για αυτόν το λόγο, έχει τις ίδιες ιδιότητες που συζητήθηκαν στην Ενότητα 11-4.2, εκτός του ότι αυτή τη φορά ορίζεται στο πεδίο του χρόνου. Στην περίπτωση αυτή, το σήμα έχει μέγιστη τιμή ω_b / π στο $t = 0$, και οι μηδενισμοί του εμφανίζονται σε μη μηδενικά πολλαπλάσια του π / ω_b . Για μια ακόμη φορά, σημειώνουμε την αντίστροφη σχέση μεταξύ χρονικού εύρους και συχνοτικού εύρους. Αν αυξήσουμε το ω_b , το εύρος ζώνης θα γίνει μεγαλύτερο, αλλά ο πρώτος μηδενισμός της συνάρτησης στο πεδίο του χρόνου πλησιάζει το $t = 0$ και επομένως το χρονικό εύρος θα γίνει μικρότερο. Τώρα μπορούμε να προσθέσουμε αυτό το ζεύγος μετασχηματισμών Fourier στον κατάλόγό μας:

$\frac{\sin(\omega_b t)}{\pi t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} [u(\omega + \omega_b) - u(\omega - \omega_b)]$	(11.23)
<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> Πεδίο-Χρόνου Πεδίο-Συχνότητας </div>	

11-4.4 Κρουστικά Σήματα στο Χρόνο και τη Συχνότητα

Στο πεδίο του χρόνου το κρουστικό σήμα είναι το πιο συγκεντρωμένο σήμα που μπορούμε να έχουμε. Για το λόγο αυτόν, μπορούμε να περιμένουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του κρουστικού σήματος θα έχει πολύ μεγάλο εύρος ζώνης, όπως και έχει. Ο μετασχηματισμός Fourier του $A\delta(t)$ συμπεριφέρεται σε όλες τις συχνότητες με τον ίδιο τρόπο. Για να το δούμε αυτό, αντικαθιστούμε $x(t) = A\delta(t)$ στην (11.1) και παίρνουμε:

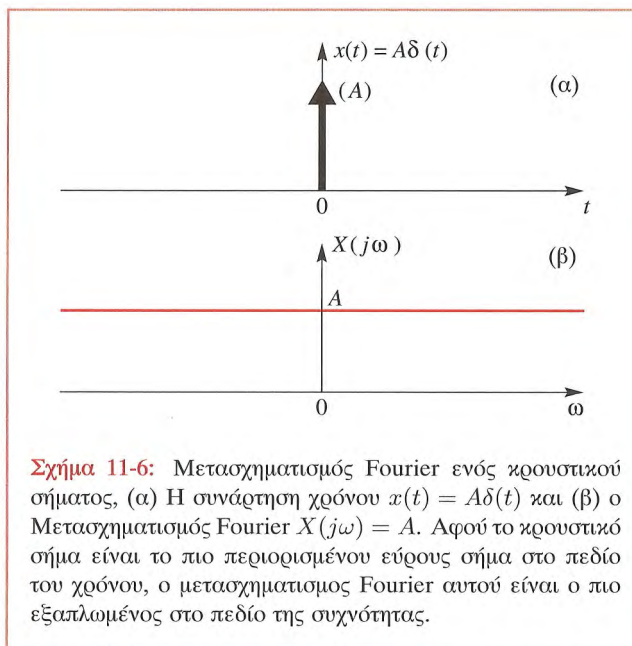
$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-j\omega 0}\delta(t) dt \\ &= A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt \\ &= A \end{aligned} \quad (11.24)$$

Το εξαγόμενο ζεύγος μετασχηματισμών Fourier που φαίνεται στο Σχήμα 11-6 είναι

Πεδίο-Χρόνου	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	Πεδίο-Συχνότητας	(11.25)
$A\delta(t)$		A	

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να εξετάσουμε έναν κρουστικό σήμα στο πεδίο της συχνότητας, αν ορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier ενός σήματος να είναι $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$. Αντικαθιστώντας στην (11.2) εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $x(t) = 1$ για κάθε t και ως εκ τούτου να εξάγουμε το ακόλουθο ζεύγος μετασχηματισμού Fourier:

Πεδίο-Χρόνου	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	Πεδίο-Συχνότητας	(11.26)
1		$2\pi\delta(\omega)$	



Σχήμα 11-6: Μετασχηματισμός Fourier ενός κρουστικού σήματος, (α) Η συνάρτηση χρόνου $x(t) = A\delta(t)$ και (β) ο Μετασχηματισμός Fourier $X(j\omega) = A$. Αφού το κρουστικό σήμα είναι το πιο περιορισμένου εύρους σήμα στο πεδίο του χρόνου, ο μετασχηματισμός Fourier αυτού είναι ο πιο εξαπλωμένος στο πεδίο της συχνότητας.

Το σταθερό σήμα $x(t) = 1$ για κάθε t έχει μόνο μία συχνότητα, συγκεκριμένα τη DC και βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός του είναι μία κρουστική συνάρτηση συγκεντρωμένη στο $\omega = 0$.



Άσκηση 11.5: Να κάνετε γραφική παράσταση, της μορφή του Σχήματος 11-6, του σήματος $x(t) = 1$ καθώς και του αντίστοιχου μετασχηματισμού Fourier $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$.

11-4.5 Ημιτονικά Σήματα

Σε αυτήν και την επόμενη ενότητα, θα δείξουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier ενός περιοδικού σήματος. Αυτό με μια πρώτη ματιά μπορεί να φαίνεται αντιφατικό αφού γνωρίζουμε ότι οι περιοδικές συναρτήσεις μπορούν να αναπαρασταθούν από

μια σειρά Fourier, η οποία είναι ένα τυπικό άθροισμα και όχι ένα ολοκλήρωμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων. Εντούτοις, υπάρχουν συγκεκριμένα πλεονεκτήματα με το να βάλουμε αυτή τη κλάση σημάτων κάτω από την ομπρέλα του γενικού μετασχηματισμού Fourier. Το παράδειγμα του σταθερού σήματος που μας απασχόλησε στην προηγούμενη ενότητα, αποτελεί ένδειξη ότι μπορούμε να προχωρήσουμε και να πετύχουμε το σκοπό μας. Ας υποθέσουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος είναι η κρουστική συνάρτηση $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ στο $\omega = \omega_0$. Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα του αντίστροφου μετασχηματισμού της Σχέσης (11.2), παίρνουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega \\ &= e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0)d\omega \\ &= e^{j\omega_0 t} \end{aligned} \quad (11.27)$$

από το οποίο γράφουμε το ακόλουθο ζεύγος μετασχηματισμών:

$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο-Χρόνου} & & \text{Πεδίο-Συχνότητας} \\ e^{j\omega_0 t} & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \end{array} \quad (11.28)$$

Το αποτέλεσμα αυτό δεν μας εκπλήσσει αφού ουσιαστικά λέει ότι ένα σήμα συχνότητας ω_0 , έχει μετασχηματισμό Fourier που είναι μη μηδενικός μονάχα στη συχνότητα ω_0 . Το αποτέλεσμα της Σχέσης (11.28) μας επιτρέπει να συμπεριλάβουμε όλες τις περιοδικές συναρτήσεις στο πλαίσιο εργασίας μας. Για να προχωρήσουμε ακόμη ένα βήμα, θεωρήστε το σήμα

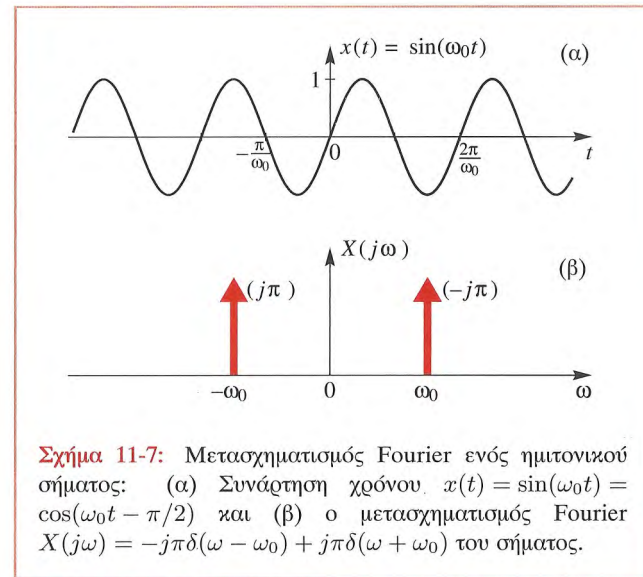
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad -\infty < t < \infty$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler, μπορούμε να ξαναγράψουμε το σήμα ως ακολούθως:

$$x(t) = \frac{1}{2}Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}Ae^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t} \quad (11.29)$$

Εξαιτίας του γεγονότος ότι το ολοκλήρωμα είναι ένας γραμμικός τελεστής, είναι επόμενο ότι ο μετασχηματισμός Fourier ενός αθροίσματος δυο ή περισσότερων σημάτων ισούται με το άθροισμα των επιμέρους μετασχηματισμών Fourier. Δηλαδή, αν $x_1(t)$ και $x_2(t)$ έχουν μετασχηματισμούς Fourier $X_1(j\omega)$ και $X_2(j\omega)$ αντίστοιχα και a, β είναι σταθερές, τότε μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη ιδιότητα γραμμικότητας:

$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο-Χρόνου} & & \text{Πεδίο-Συχνότητας} \\ ax_1(t) + bx_2(t) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega) \end{array} \quad (11.30)$$



Επομένως, χρησιμοποιώντας το ζεύγος μετασχηματισμών της Σχέσης (11.28), ο μετασχηματισμός Fourier του πραγματικού ημιτονικού σήματος $x(t)$ στην (11.29) είναι

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= 2\pi\delta(\omega - \omega_0)\left(\frac{1}{2}\right)Ae^{j\phi} \\ &\quad + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)\left(\frac{1}{2}\right)Ae^{-j\phi} \end{aligned} \quad (11.31)$$

Έτσι, έχουμε ένα ακόμα ζεύγος μετασχηματισμών Fourier

$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο-Χρόνου} & & \text{Πεδίο-Συχνότητας} \\ A \cos(\omega_0 t + \phi) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & \pi A e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0) + \pi A e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0) \end{array}$$

(11.32)

Το Σχήμα 11-7 δείχνει την περίπτωση μιας συνάρτησης ημίτονου και του μετασχηματισμού Fourier αυτής, που προκύπτει από τη Σχέση (11.32) για $A = 1$ και $\phi = -\pi/2$. Ας σημειωθεί ότι το μέγεθος (εμβαδόν) της κρουστικής συνάρτησης στην αρνητική συχνότητα $-\omega_0$ είναι το συζυγές του μεγέθους της κρουστικής συνάρτησης στη θετική συχνότητα. Θα δούμε ότι αυτού του είδους η συμμετρία μεταξύ θετικών και αρνητικών συχνοτικών συνιστωσών είναι μια γενική ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier ενός **πραγματικού** σήματος.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να σχολιάσουμε το γεγονός ότι ένα ημιτονικό σήμα έχει μετασχηματισμό Fourier, παρόλο που η Συνθήκη (11.15) ύπαρξης του μετασχηματισμού παραβιάζεται. Όπως όμως ήδη αναφέραμε, η Συνθήκη (11.15) είναι μια ικανή συνθήκη, αλλά όχι και αναγκαία για την ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier.

11-4.6 Περιοδικά Σήματα

Είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε έναν γενικό τύπο για το μετασχηματισμό Fourier οποιασδήποτε περιοδικής συνάρτησης για την οποία υπάρχει σειρά Fourier. Υπενθυμίζεται ότι αν ισχύει $x(t) = x(t + T_0)$ για κάθε t , τότε το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο T_0 και μπορεί να αναπαρασταθεί ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (11.33)$$

όπου $\omega_0 = 2\pi/T_0$ και


$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (11.34)$$

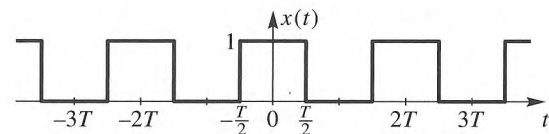
Αφού ο μετασχηματισμός Fourier ενός αθροίσματος είναι το άθροισμα των αντίστοιχων μετασχηματισμών Fourier και από τη Σχέση (11.28) γνωρίζουμε τους μετασχηματισμούς Fourier των εκθετικών σημάτων, προκύπτει εύκολα ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ στη Σχέση (11.33) είναι ο ακόλουθος:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (11.35)$$

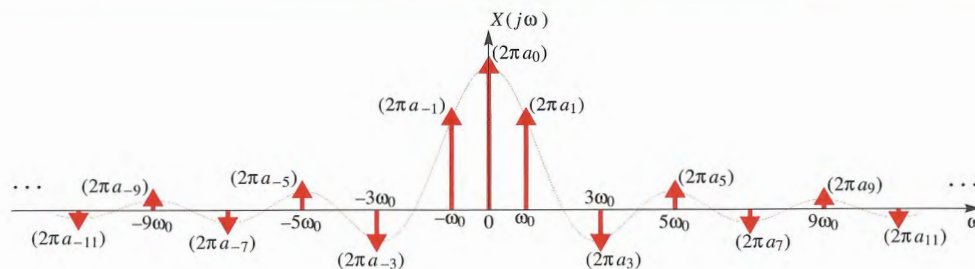
Άρα, οποιοδήποτε περιοδικό σήμα με θεμελιώδη συχνότητα ω_0 αναπαριστάται από το ακόλουθο ζεύγος μετασχηματισμών Fourier, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 11-8 για το τετραγωνικό σήμα του Σχήματος 11-9.

$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο-Χρόνου} & & \text{Πεδίο-Συχνότητας} \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \end{array} \quad (11.36)$$

 **Άσκηση 11.6:** Αντικαταστήστε την (11.35) στο ολοκλήρωμα του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier της Σχέσης (11.2) και αποδείξτε ότι όταν υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των κρουστικών συναρτήσεων, το αποτέλεσμα που προκύπτει ταυτίζεται με αυτό της Σχέσης (11.33).



Σχήμα 11-9: Το σήμα $x(t)$ είναι ένα τετραγωνικό σήμα του οποίου η περίοδος είναι $T_0 = 2T$. Ο μετασχηματισμός του φαίνεται στο Σχήμα 11-8.



Σχήμα 11-8: Μετασχηματισμός Fourier του τετραγωνικού σήματος που φαίνεται στο Σχήμα 11-9. Ο Μετασχηματισμός $X(j\omega)$ απαρτίζεται από ισαπέχουσες (κατά $\omega = 2\pi k/T_0$) κρουστικές συναρτήσεις.

Αποδεικνύοντας ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε οποιαδήποτε περιοδική συνάρτηση με ένα μετασχηματισμό Fourier, έχουμε τυποποιήσει την έννοια του φάσματος που χρησιμοποιούμε από το Κεφάλαιο 3. Το μυστικό είναι η χρησιμοποίηση της κρουστικής συνάρτησης η οποία μας επιτρέπει να ορίσουμε μετασχηματισμούς Fourier που είναι παντού μηδέν εκτός από ένα διακριτό σύνολο συχνοτήτων. Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει πώς μπορούμε να πάρουμε το μετασχηματισμό Fourier ενός σήματος τετραγωνικού παλμού.

Παράδειγμα 11-3: Μετασχηματισμός Τετραγωνικού Παλμού

Στο Σχήμα 11-9 φαίνεται ένα περιοδικό τετραγωνικό κύμα με $T_0 = 2T$. Αντικαθιστώντας αυτή τη συνάρτηση στη Σχέση(11.34) παίρνουμε

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left. \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} \right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{\sin(k\omega_0 T/2)}{k\omega_0 T/2} \quad (11.37)$$

όπου $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Μπορούμε επίσης να βρούμε το σταθερό συντελεστή υπολογίζοντας το ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{T}{T_0} = \frac{1}{2} \quad (11.38)$$

Αφού αντικαταστήσουμε $(\omega_0 T) = (2\pi/T_0)(T_0/2) = \pi$ στην (11.37), παίρνουμε

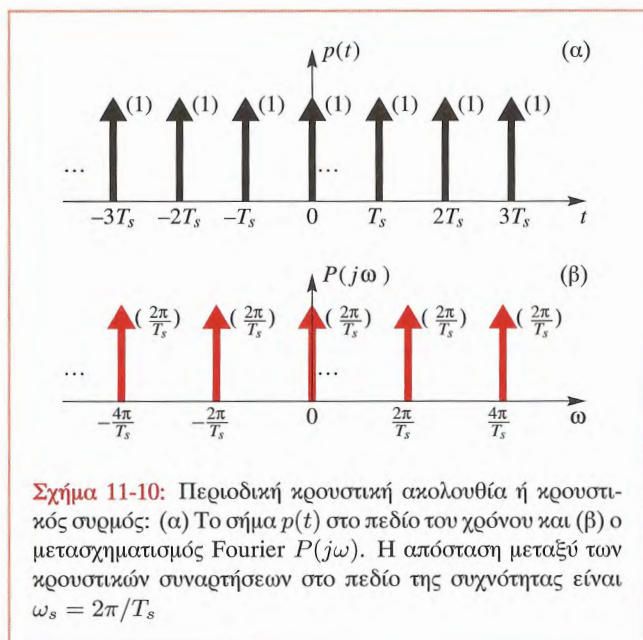
$$a_k = \begin{cases} \frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k} & k \neq 0 \\ \frac{1}{2} & k = 0 \end{cases} \quad (11.39)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την (11.39) στην (11.35) παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση για το μετασχηματισμό Fourier του περιοδικού τετραγωνικού κύματος:

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{2 \sin(\pi k/2)}{k} \right) \delta(\omega - k\omega_0) \quad (11.40)$$

Στο Σχήμα 11-8 παρουσιάζεται ο μετασχηματισμός Fourier του τετραγωνικού κύματος για την περίπτωση $T_0 = 2T$. Οι συντελεστές Fourier είναι μηδέν για τα άρτια πολλαπλάσια του ω_0 , με αποτέλεσμα να

μην εμφανίζονται κρουστικές συναρτήσεις σε αυτές τις συχνότητες. Οποιοδήποτε περιοδικό σήμα με θεμελιώδη περίοδο ω_0 θα έχει μετασχηματισμό παρόμοιας μορφής (κρουστικές συναρτήσεις σε ακέραια πολλαπλάσια του ω_0), αλλά με διαφορετικά μεγέθη που καθορίζονται από τους συντελεστές a_k . ■



Παράδειγμα 11-4: Μετασχηματισμός Κρουστικού Συρμού

Ως ένα ακόμη παράδειγμα εύρεσης του μετασχηματισμού Fourier ενός περιοδικού σήματος, ας θεωρήσουμε τον περιοδικό κρουστικό συρμό

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (11.41)$$

όπου η περίοδος συμβολίζεται με T_s . Το σήμα αυτό, το οποίο θα μας φανεί χρήσιμο στο Κεφάλαιο 12 για την απόδειξη του θεωρήματος δειγματοληψίας, έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 11-10(α). Επειδή το $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T_s , μπορούμε να εκφράσουμε την (11.41) ως σειρά Fourier

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_s t} \quad (11.42)$$

όπου $\omega_s = 2\pi/T_s$. Για να καθορίσουμε τους συντελεστές Fourier $\{a_k\}$, πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της σειράς Fourier στο διάστημα μιας περιόδου, δηλαδή

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T_s} \end{aligned} \quad (11.43)$$

Οι συντελεστές Fourier για τον περιοδικό κρουστικό συρμό είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους. Γενικά, ο μετασχηματισμός Fourier ενός περιοδικού σήματος ο οποίος αναπαριστάται από μια σειρά Fourier όπως στη Σχέση (11.42) είναι της μορφής

$$P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_s)$$

Αντικαθιστώντας την (11.43) στη γενική έκφραση για την $P(j\omega)$, παίρνουμε

$$P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{T_s}\right) \delta(\omega - k\omega_s) \quad (11.44)$$

Άρα, ο μετασχηματισμός Fourier του κρουστικού συρμού είναι επίσης ένας περιοδικός κρουστικός συρμός. ■

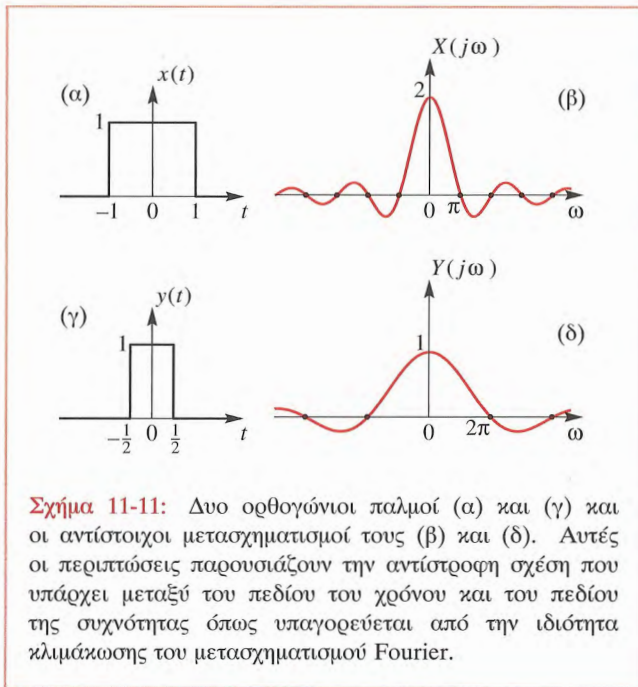
11-5 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier έχει ένα σύνολο από μαθηματικές ιδιότητες που είναι χρήσιμες στην απλοποίηση της

επίλυσης προβλημάτων. Στην ενότητα αυτή καθώς και στις Ενότητες 11-6, 11-7 και 11-8 θα αποδείξουμε αρκετές από τις πιο χρήσιμες ιδιότητές του και θα εξηγήσουμε τη χρήση τους με κάποια παραδείγματα. Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier συνοψίζονται στον Πίνακα 11-2 στη Σελίδα 372.

11-5.1 Ιδιότητα Κλιμάκωσης

Πρωτοσυναντήσαμε την αντίστροφη σχέση που υπάρχει μεταξύ εύρους ζώνης και χρονικής διάρκειας στην Ενότητα 11-4.1.1. Ένα άλλο παράδειγμα αυτής της σχέσης είναι η συνάρτηση του ορθογωνίου παλμού και ο μετασχηματισμός Fourier αυτής, που όπως είδαμε είναι μια συνάρτηση sinc. Στο Σχήμα 11-11 παρουσιάζονται δυο περιπτώσεις



στις οποίες η διάρκεια των παλμών διαφέρει κατά τον παράγοντα δύο. Παρατηρήστε ότι ο μεγαλύτερος σε

χρονική διάρκεια παλμός στο Σχήμα 11-11(α) έχει πιο στενό μετασχηματισμό όπως φαίνεται στο Σχήμα 11-11(β). Το παράδειγμα αυτό δηλώνει την ακόλουθη γενική ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier:

Το χρονικό άπλωμα ενός σήματος θα συμπίπτει το μετασχηματισμό Fourier του.

και το αντίστροφο:

Η χρονική συμπίεση ενός σήματος θα απλώσει το μετασχηματισμό Fourier του.

Για να αποδείξουμε αυτές τις γενικές προτάσεις, θεωρήστε το σήμα $y(t) = x(at)$ όπου a πραγματικός. Αν $a > 1$, τότε μια γραφική παράσταση του $y(t)$ θα είναι πιο σύντομη χρονικά από αυτή του $x(t)$. Για παράδειγμα, το σήμα $y(t)$ στο Σχήμα 11-11(γ) μπορεί να οριστεί ως

$$y(t) = x(2t)$$

συναρτήσει του $x(t)$ στο Σχήμα 11-11(α). Τώρα μπορούμε να καθορίσουμε το $Y(j\omega)$ συναρτήσει του $X(j\omega)$. Για να το κάνουμε αυτό έχουμε, εξ' ορισμού, ότι:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t} dt \quad (11.45)$$

Αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών $\lambda = at$, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$Y(j\omega) = (1/a) \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-j\omega\lambda/a} d\lambda \quad (11.46)$$

αν $a > 0$. Αν $a < 0$, τότε τα όρια ολοκλήρωσης πρέπει να αντιμετατεθούν και προκύπτει ένα μείον ως εξής:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \int_{\infty}^{-\infty} x(\lambda)e^{-j\omega\lambda/a} d\lambda/a \\ &= -(1/a) \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-j\omega\lambda/a} d\lambda \quad (11.47) \end{aligned}$$

Μπορούμε να ενοποιήσουμε τις δυο περιπτώσεις αφού ο παράγοντας $-(1/\alpha)$ είναι θετικός όταν $\alpha < 0$, δηλαδή,

$$Y(j\omega) = (1/|\alpha|) \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j(\omega/\alpha)\lambda} d\lambda \quad (11.48)$$

Έτσι, έχουμε εξάγει την ιδιότητα κλιμάκωσης του μετασχηματισμού

$$\begin{array}{c} \text{Πεδίο-Χρόνου} \\ y(t) = x(at) \end{array} \xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{array}{c} \text{Πεδίο-Συχνότητας} \\ Y(j\omega) = \frac{1}{|a|} X(j\omega/a) \end{array} \quad (11.49)$$

Η ιδιότητα κλιμάκωσης είναι πολύ χρήσιμη όταν περιγράφουμε το εύρος ζώνης ενός σήματος. Έτσι, οδηγούμαστε στο γενικό συμπέρασμα ότι σήματα σύντομης διάρκειας πρέπει να είναι ευρείας ζώνης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11-11. Το γεγονός αυτό μπορεί να τυποποιηθεί με τη βοήθεια της “αρχής της αβεβαιότητας” σύμφωνα με την οποία η χρονική διάρκεια ενός σήματος και το εύρος ζώνης του δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα αρκούντως μικρά. Πράγματι, έχουμε δει ότι το κρουστικό σήμα στο πεδίο του χρόνου, το οποίο έχει μηδενική διάρκεια, έχει μετασχηματισμό Fourier με άπειρο εύρος ζώνης.

Παράδειγμα 11-5: Ιδιότητα Αναστροφής

Ως παράδειγμα της χρήσης της (11.49), ας υποθέσουμε ότι αναστρέφουμε χρονικά το σήμα $x(t)$, δηλαδή $y(t) = x(-t)$. Μπορούμε να δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του ανεστραμμένου σήματος είναι επίσης ανεστραμμένος στη συχνότητα. Αφού $y(t) = x(-t)$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (11.49) με $\alpha = -1$ για να πάρουμε

$$Y(j\omega) = \frac{1}{|-1|} X(j(\omega/(-1))) = X(-j\omega)$$

Έτσι, εξάγαμε την ιδιότητα αναστροφής του μετασχηματισμού Fourier:

$$\begin{array}{c} \text{Πεδίο-Χρόνου} \\ x(-t) \end{array} \xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{array}{c} \text{Πεδίο-Συχνότητας} \\ X(-j\omega) \end{array} \quad (11.50)$$

Παράδειγμα 11-6: Σήμα Αριστερής Επέκτασης

Θεωρήστε το εκθετικό σήμα δεξιάς επέκτασης $x(t) = e^{-bt}u(t)$, με $b > 0$. Γνωρίζουμε ότι ο Μετασχηματισμός Fourier του σήματος αυτού είναι

$$X(j\omega) = \frac{1}{b + j\omega}$$

Τώρα ορίζουμε το εκθετικό σήμα αριστερής επέκτασης $w(t) = x(-t) = e^{bt}u(-t)$. Από τη Σχέση (11.50) και το Παράδειγμα 11-5 προκύπτει ότι

$$W(j\omega) = \frac{1}{b - j\omega}$$

το οποίο θα προέκυπτε και αν υπολογίζαμε άμεσα το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $w(t)$. ■

Άσκηση 11.7: ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $w(t)$ του Παραδείγματος 11-6 είναι

$$W(j\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{bt} e^{-j\omega t} dt$$

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα και αποδείξτε ότι το αποτέλεσμα που προκύπτει ταυτίζεται με αυτό του Παραδείγματος 11-6.

11-5.2 Συμμετρίες Μετασχηματισμού Fourier

Πολλές φορές ο μετασχηματισμός Fourier παρουσιάζει συμμετρίες οι οποίες οδηγούν σε διάφορες απλοποιήσεις. Για παράδειγμα, για ένα μετασχηματισμό με άρτια συμμετρία ισχύει ότι $X(j\omega) = X(-j\omega)$. Δηλαδή, οι τιμές για αρνητικά ω είναι ίσες με αυτές για θετικά ω . Έτσι η γραφική παράσταση του $X(j\omega)$ χρειάζεται να γίνει μόνο για $\omega \geq 0$ αφού περιέχει όλες τις πληροφορίες του $X(j\omega)$. Παρομοίως, υπολογίζοντας τις τιμές ενός συμμετρικού $X(j\omega)$, συχνά ο υπολογισμός μπορεί να μειωθεί στο μισό.

Για να παρουσιάσουμε τις διάφορες συμμετρίες του μετασχηματισμού Fourier και την αντιστοιχία τους με τις συμμετρίες του σήματος στο πεδίο του χρόνου, εξετάζουμε την επίδραση των τελεστών αναστροφής και συζυγίας στα πραγματικά και φανταστικά μέρη του μετασχηματισμού Fourier ενός πραγματικού σήματος. Αν πάρουμε το συζυγή του $X(-j\omega)$, έχουμε:

$$X^*(-j\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(-j\omega)t} dt \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t} dt$$

Δηλαδή, ο $X^*(-j\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $x^*(t)$. Επομένως η ακόλουθη ιδιότητα ισχύει για κάθε $x(t)$:

<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>Πεδίο-Χρόνου</p> $x^*(t)$ </div> <div style="text-align: center;"> $\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ </div> <div style="text-align: center;"> <p>Πεδίο-Συχνότητας</p> $X^*(-j\omega)$ </div> </div>	(11.51)
---	---------

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (11.51) για να εξάγουμε πολλές ενδιαφέρουσες συμμετρίες για πραγματικά σήματα. Αν το $x(t)$ είναι πραγματικό, τότε $x(t) = x^*(t)$ και επομένως αφού υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier πρέπει να ισχύει ότι $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$ ή ισοδύναμα, για το πραγματικό και φανταστικό μέρος έχουμε:

$$\Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X^*(-j\omega)\} \quad (11.52)$$

$$\Im\{X(j\omega)\} = \Im\{X^*(-j\omega)\} \quad (11.53)$$

Τελικά, παίρνουμε τις ακόλουθες ιδιότητες που ισχύουν όταν το $x(t)$ είναι πραγματικό,

$$\Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\} \quad (11.54)$$

$$\Im\{X(j\omega)\} = -\Im\{X(-j\omega)\} \quad (11.55)$$

Δηλαδή, όταν το $x(t)$ είναι πραγματικό, το πραγματικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier του σήματος, είναι μια άρτια συνάρτηση του ω και το φανταστικό μέρος του είναι μια περιττή συνάρτηση του ω . Οι συμμετρίες αυτές παρουσιάζονται στα Σχήματα 11-3(β) και 11-3(γ) στη Σελίδα 346. Η συνθήκη $X^*(-j\omega) = X(j\omega)$ υποδηλώνει επιπλέον ότι η αναπαράσταση πολικής μορφής $X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\angle X(j\omega)}$ έχει τις ακόλουθες συμμετρίες (δες Πρόβλημα.-11.16):

$$|X(j\omega)| = |X(-j\omega)| \quad (11.56)$$

$$\angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega) \quad (11.57)$$

Επομένως αν το $x(t)$ είναι πραγματικό, το μέτρο παρουσιάζει άρτια συμμετρία και η γωνία φάσης περιττή συμμετρία.



Παράδειγμα 11-7: Συμμετρίες Μέτρου/Φάσης

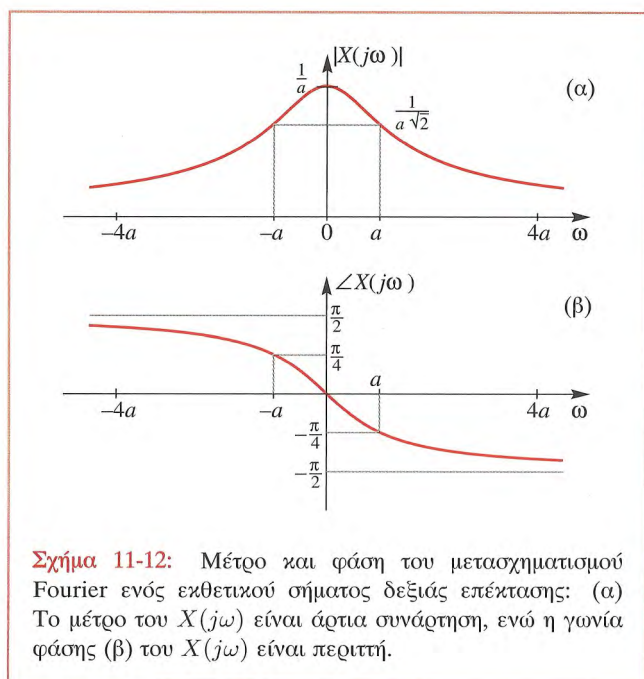
Ως μια ακόμη επεξήγηση της συμμετρίας, θυμηθείτε ότι ο Μετασχηματισμός Fourier του $x(t) = e^{-at}u(t)$ είναι

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

Το μέτρο είναι η τετραγωνική ρίζα του μέτρου στο τετράγωνο και η φάση εξάγεται από το τόξο της εφαπτόμενης

$$\begin{aligned} |X(j\omega)| &= [X(j\omega)X^*(j\omega)]^{1/2} \\ &= \frac{1}{(a^2 + \omega^2)^{1/2}} = |X(-j\omega)| \end{aligned}$$

$$\angle X(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) = -\angle X(-j\omega)$$



Σχήμα 11-12: Μέτρο και φάση του μετασχηματισμού Fourier ενός εκθετικού σήματος δεξιάς επέκτασης: (α) Το μέτρο του $X(j\omega)$ είναι άρτια συνάρτηση, ενώ η γωνία φάσης (β) του $X(j\omega)$ είναι περιττή.

Οι άρτιες και περιττές συμμετρίες του μέτρου και της φάσης στην παραπάνω εξίσωση φαίνονται στις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 11-12. Σε αυτήν την περίπτωση θα ήταν αρκετό να σχεδιάσουμε το μέτρο και τη φάση για $\omega \geq 0$.

Αν η $x(t)$ έχει πολλαπλές συμμετρίες, τότε η $X(j\omega)$ υπόκειται σε περισσότερους περιορισμούς. Ο Πίνακας 11-1 περιέχει τέσσερις τύπους συνδυασμένης συμμετρίας. Υποθέτουμε ότι το σήμα έχει άρτια συμμετρία έτσι ώστε $x(t) = x(-t)$. Τότε η ιδιότητα αναστροφής (11.50) εξασφαλίζει ότι $X(j\omega) = X(-j\omega)$. Αν η $x(t)$ είναι πραγματική, τότε ξέρουμε ότι $X^*(j\omega) = X(-j\omega)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, καταλήγουμε ότι όταν η $x(t)$ είναι πραγματική και συμμετρική, τότε $X(j\omega) = X^*(j\omega)$ δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier είναι πραγματικός και συμμετρικός. Επιπροσθέτως, μπορούμε να πούμε ότι η $X(j\omega)$ είναι μια πραγματική και άρτια συνάρτηση του ω αν

Πίνακας 11-1: Συμμετρίες του Μετασχηματισμού Fourier.

$x(t)$	$X(j\omega)$
Πραγματική, Άρτια	Πραγματική, Άρτια
Πραγματική, Περιττή	Φανταστική, Περιττή
Φανταστική, Άρτια	Φανταστική, Άρτια
Φανταστική, Περιττή	Πραγματική, Περιττή

η $x(t)$ είναι πραγματική και άρτια συνάρτηση του χρόνου. Με παρόμοιο επιχείρημα, μπορεί ναδειχτεί ότι αν η $x(t)$ είναι μια πραγματική αντισυμμετρική συνάρτηση, δηλαδή $x(t) = -x(-t)$, τότε η $X(j\omega)$ είναι φανταστική και αντισυμμετρική, δηλαδή, $X(j\omega) = -X(-j\omega) = -X^*(j\omega)$.



Παράδειγμα 11-8: Δίπλευρο Εκθετικό Σήμα

Θεωρήστε το δίπλευρο εκθετικό σήμα

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = e^{-a|t|}$$

το οποίο είναι μια πραγματική και άρτια συνάρτηση του χρόνου που φαίνεται στο Σχήμα 11-13(α). Χρησιμοποιώντας τις Σχέσεις (11.16) και (11.50), προκύπτει ότι

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

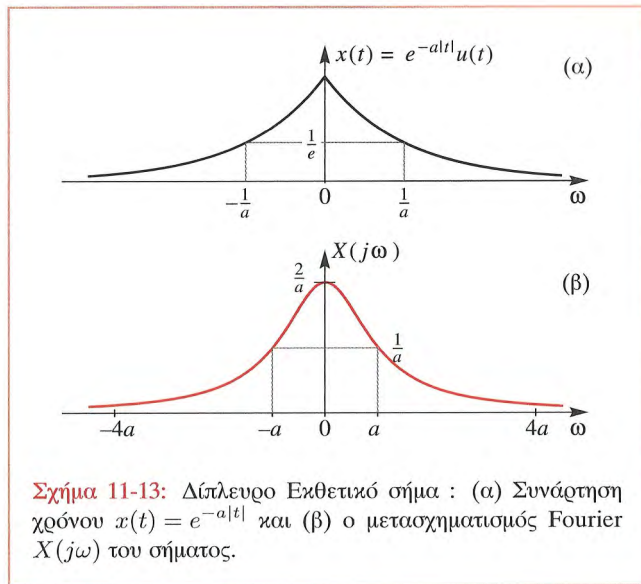
Παρατηρήστε στο Σχήμα 11-13(β) ότι η $X(j\omega)$ είναι επίσης μια πραγματική και άρτια συνάρτηση του ω .



Άσκηση 11.8: Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της πραγματικής και περιττής συνάρτησης $x(t) = e^{at}u(-t) - e^{-at}u(t)$, δίνεται από τη σχέση

$$X(j\omega) = \frac{2j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

και είναι μια φανταστική και περιττή συνάρτηση του ω .



Σχήμα 11-13: Δίπλευρο Εκθετικό σήμα : (α) Συνάρτηση χρόνου $x(t) = e^{-a|t|}$ και (β) ο μετασχηματισμός Fourier $X(j\omega)$ του σήματος.

11-6 Ιδιότητα Συνέλιξης

Προηγουμένως, εξάγαμε αρκετά ζεύγη μετασχηματισμών Fourier. Με έναν πίνακα σαν τον Πίνακα 11-3 της Ενότητας 11-9 και καλή γνώση μερικών επιπλέον σχέσεων του μετασχηματισμού Fourier τις οποίες αναφέρουμε ως ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα σημάτων και συστημάτων συνδυάζοντας ανάλυση στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας. Στην ενότητα αυτή και την Ενότητα 11-8, θα αναφερθούμε στις ιδιότητες της συνέλιξης και του γινομένου, οι οποίες είναι πιθανώς και οι πιο ισχυρές από όλες τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier. Επίσης θα δείξουμε πώς να εξάγουμε πολλές άλλες χρήσιμες ιδιότητες από αυτές. Σχετικά με την ιδιότητα της συνέλιξης, θα ξαναδοούμε την έννοια της κρουστικής απόκρισης μέσα στα νέα πλαίσια που θέτει ο μετασχηματισμός Fourier.

11-6.1 Απόκριση Συχνότητας

Θυμηθείτε ότι για ΓΧΑ συστήματα συνεχούς χρόνου, όταν η είσοδος είναι $x(t) = e^{j\omega t}$ για όλα τα t , τότε η έξοδος είναι

$y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$. Στο Κεφάλαιο 10, δείξαμε στη Σχέση (10.3) στη Σελίδα 316 ότι η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος σχετίζεται με την κρουστική απόκριση του συστήματος μέσω της σχέσης

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad (11.58)$$

Τώρα, βλέπουμε ότι η απόκριση συχνότητας είναι στην πραγματικότητα, ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Για το λόγο αυτόν, δεδομένης της κρουστικής απόκρισης $h(t)$, μπορούμε να βρούμε την απόκριση συχνότητας παίρνοντας το μετασχηματισμό Fourier της $h(t)$. Αν μας δίνεται η απόκριση συχνότητα, υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier της Σχέσης (11.2), μπορούμε να βρούμε την κρουστική απόκριση του συστήματος. Είναι επίσης προφανές ότι αν η $H(j\omega)$ περιέχεται στον πίνακα με τα ζεύγη των μετασχηματισμών Fourier, τότε μπορούμε να βρούμε την κρουστική απόκριση χωρίς να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό.

Ας θυμηθούμε ότι μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier της κρουστικής απόκρισης δόθηκε στη Σχέση (11.15) της Σελίδας 345 ως

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

που αποτελεί επίσης συνθήκη ευστάθειας για το ΓΧΑ σύστημα. Για το λόγο αυτόν, για όλα τα ευσταθή συστήματα ορίζεται η απόκριση συχνότητάς τους. Μια ισοδύναμη πρόταση είναι η ακόλουθη:

Η ύπαρξη της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος και η ευστάθειά του είναι ισοδύναμες συνθήκες.



Παράδειγμα 11-9: Ρητός Μετασχηματισμός

Για να εξηγήσουμε πώς ένα γνωστό ζεύγος μετασχηματισμών (του Πίνακα 11-3 στη Σελίδα 379) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της απόκρισης συχνότητας δεδομένης της κρουστικής απόκρισης, υποθέτουμε ότι:

$$h(t) = 2e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(t) \quad (11.59)$$

Γνωρίζουμε το μετασχηματισμό του μονόπλευρου εκθετικού σήματος και έτσι η ιδιότητα της γραμμικότητας δίνει ως αποτέλεσμα τους ακόλουθους δυο όρους:

$$H(j\omega) = \frac{2}{2+j\omega} - \frac{1}{1+j\omega} \quad (11.60)$$

$$= \frac{j\omega}{(2+j\omega)(1+j\omega)} \quad (11.61)$$

Αν θέλαμε να υπολογίσουμε την $h(t)$, αυτό θα μπορούσε να γίνει εύκολα αν ο $H(j\omega)$ δίνεται στη μορφή της Σχέσης (11.60) χρησιμοποιώντας την καταχώρηση του Πίνακα 11-3 της Σελίδας 379 που αφορά το εκθετικό σήμα δεξιάς επέκτασης, για να μεταβούμε από το πεδίο της συχνότητας στο πεδίο του χρόνου. Ωστόσο, αν ο $H(j\omega)$ δίνεται στη μορφή της Σχέσης (11.61) θα πρέπει πρώτα να τον εκφράσουμε στη μορφή της Σχέσης (11.60). Στην Ενότητα 11-6.3.3 θα δούμε πώς μπορούμε να το πετύχουμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διάσπασης σε απλά κλάσματα. ■

Η σχέση μεταξύ της κρουστικής απόκρισης και της απόκρισης συχνότητας υποδηλώνει μια πιο γενική ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier, την οποία και θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

11-6.2 Μετασχηματισμός Fourier Συνέλιξης

Η είσοδος και η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος σχετίζονται μέσω του ολοκληρώματος της συνέλιξης¹⁰

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (11.62)$$

¹⁰Θυμηθείτε ότι όταν θέλουμε να εκφράσουμε τη Σχέση (11.62) σε πιο συμπαγή μορφή, χρησιμοποιούμε τη συμβολική γραφή $y(t) = x(t) * h(t)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνέλιξης είναι το γινόμενο των μετασχηματισμών Fourier των δυο συναρτήσεων που συμμετέχουν, δηλαδή,

$$\begin{array}{cc} \text{Πεδίο-Χρόνου} & \text{Πεδίο-Συχνότητας} \\ y(t) = x(t) * h(t) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \end{array} \quad (11.63)$$

Η Σχέση (11.63) με λόγια λέει τα ακόλουθα:

Συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε γινόμενο στο πεδίο της συχνότητας.

Για να αποδείξουμε τη Σχέση (11.63), θα πάρουμε το μετασχηματισμό Fourier και των δυο μελών της Σχέσης (11.62) και έχουμε:

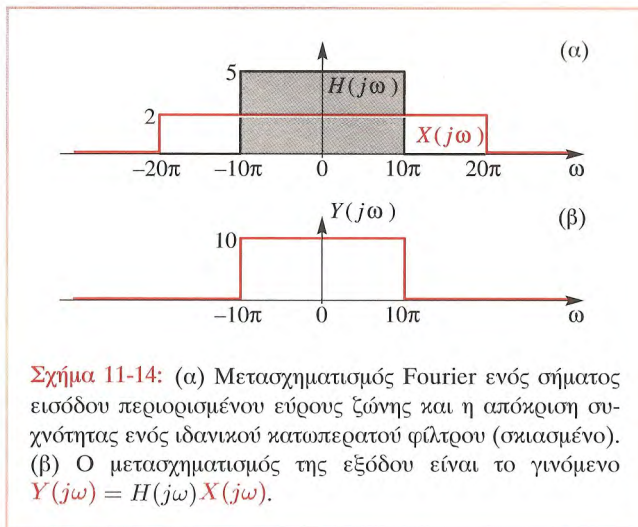
$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right) e^{-j\omega t} dt \quad (11.64) \end{aligned}$$

Εναλλάσσοντας τώρα τη σειρά ολοκλήρωσης στην (11.64), παίρνουμε

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right) d\tau \quad (11.65)$$

Το ολοκλήρωμα μέσα στην παρένθεση μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια αναγνωρίσιμη μορφή αν κάνουμε αντικατάσταση μεταβλητών $\sigma = t - \tau$ όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)e^{-j\omega\sigma} d\sigma \right) e^{-j\omega\tau} \\ &= H(j\omega)e^{-j\omega\tau} \quad (11.66) \end{aligned}$$



Σχήμα 11-14: (α) Μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος εισόδου περιορισμένου εύρους ζώνης και η απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού κατωπερατού φίλτρου (σκιασμένο). (β) Ο μετασχηματισμός της εξόδου είναι το γινόμενο $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$.

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τη Σχέση (11.66) στη Σχέση (11.65) και τελικά προκύπτει

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) (H(j\omega)e^{-j\omega\tau}) d\tau \\ &= H(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= H(j\omega)X(j\omega) \end{aligned} \quad (11.67)$$

που αποτελεί και το αποτέλεσμα στο οποίο στοχεύαμε. Αυτή είναι η ιδιότητα της Συνέλιξης, μια από τις πιο σημαντικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

11-6.3 Παραδείγματα Χρήσης της Ιδιότητας της Συνέλιξης

Για να αναδείξουμε τη δύναμη της ιδιότητας της Συνέλιξης, θα παρουσιάσουμε αρκετά παραδείγματα όπου ένας συνδυασμός ανάλυσης στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας μπορεί να οδηγήσει σε απλές λύσεις προβλημάτων που άπτονται των γραμμικών συστημάτων.

11-6.3.1 Συνέλιξη δυο Συναρτήσεων Περιορισμένου Εύρους Ζώνης

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση κατά την οποία και η είσοδος αλλά και η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι συναρτήσεις sinc

$$x(t) = \frac{2 \sin(20\pi t)}{\pi t} \quad \text{και} \quad h(t) = \frac{5 \sin(10\pi t)}{\pi t}$$

Η έξοδος αυτού του συστήματος για τη δοθείσα είσοδο, θα δίνεται από το ακόλουθο συνελικτικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2 \sin(20\pi\tau)}{\pi\tau} \right) \left(\frac{5 \sin[10\pi(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)} \right) d\tau \end{aligned}$$

που είναι αδύνατο να υπολογιστεί με τις μεθόδους του ολοκληρωτικού λογισμού. Ωστόσο αυτή η συνέλιξη είναι εύκολο να υπολογιστεί αν μεταφερθούμε στο πεδίο της συχνότητας. Στο Σχήμα 11-14(α) σχεδιάσαμε μαζί τους δυο μετασχηματισμούς Fourier $X(j\omega)$ και $H(j\omega)$. Οι δυο αυτοί μετασχηματισμοί, όπως προκύπτει από τον Πίνακα 11-3, είναι ορθογώνιοι και επομένως το γινόμενό τους είναι ίσο με ένα άλλο ορθογώνιο το οποίο έχει κατώτερη συχνότητα αποκοπής αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 11-14(β). Έτσι, εύκολα συμπεραίνουμε από τη γραφική παράσταση ότι

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H(j\omega)X(j\omega) \\ &= 5[u(\omega + 10\pi) - u(\omega - 10\pi)] \cdot \\ &\quad 2[u(\omega + 20\pi) - u(\omega - 20\pi)] \\ &= 10[u(\omega + 10\pi) - u(\omega - 10\pi)] \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή, το ΓΧΑ σύστημα “φιλτράρει” το μετασχηματισμό Fourier της εισόδου περιορίζοντας το εύρος ζώνης του μετασχηματισμού της εισόδου στα $\pm 10\pi$. Μπορούμε τώρα να γράψουμε την ακόλουθη ενδιαφέρουσα

συνελικτική μορφή

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2 \sin(20\pi\tau)}{\pi\tau} \right) \left(\frac{5 \sin[10\pi(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)} \right) d\tau \\ &= \frac{10 \sin(10\pi t)}{\pi t} \end{aligned}$$

Χωρίς τη χρήση των μετασχηματισμών Fourier, δεν θα ήταν δυνατόν να καταλήξουμε σε αυτό το αποτέλεσμα. Παρόλο που μπορεί να μοιάζει με εξειδικευμένο και ακραίο παράδειγμα, δεν είναι. Η ιδέα ενός συστήματος που “επιτρέπει” τη διέλευση όλων των συχνοτήτων μέχρι μια συχνότητα αποκοπής και απορρίπτει όλες τις συχνότητες πάνω από αυτό το όριο, αποτελεί την ουσία του **φιλτραρίσματος**.

11-6.3.2 Γινόμενο δύο Συναρτήσεων Sinc

Επειδή υπάρχει φόβος το προηγούμενο παράδειγμα να έδωσε τη λανθασμένη εντύπωση ότι είναι πάντα ευκολότερος ο υπολογισμός της συνέλιξης μέσω του μετασχηματισμού Fourier, θεωρήστε την περίπτωση όπου και το $x(t)$ και η $h(t)$ είναι δύο όμοιοι τετραγωνικοί παλμοί με κέντρο το $t = 0$ εύρους, δηλαδή:

$$x(t) = h(t) = u(t + \frac{1}{2}T) - u(t - \frac{1}{2}T) \quad (11.68)$$

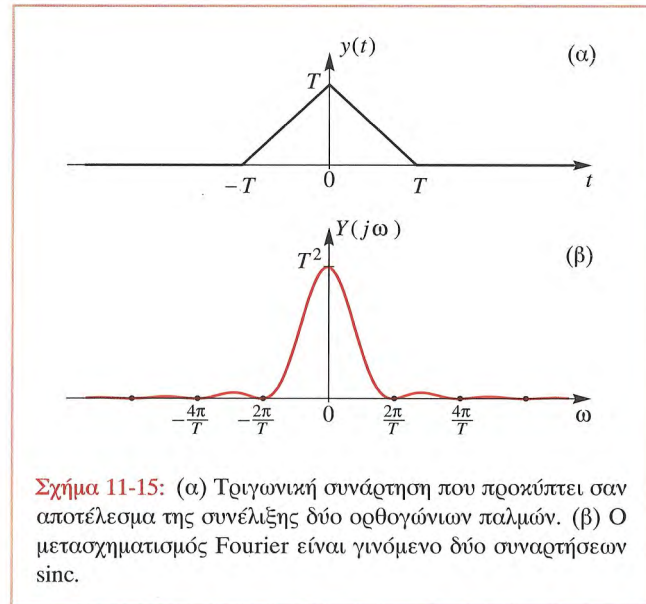
Χρησιμοποιώντας τη Σχέση (11.19) οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Fourier είναι οι ακόλουθοι

$$X(j\omega) = H(j\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega/2)}$$

και επομένως αν $y(t) = x(t) * h(t)$, τότε

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = T^2 \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega T/2)} \right)^2$$

Στο Σχήμα 11-15(β) φαίνεται ο μετασχηματισμός Fourier



Σχήμα 11-15: (α) Τριγωνική συνάρτηση που προκύπτει σαν αποτέλεσμα της συνέλιξης δύο ορθογώνιων παλμών. (β) Ο μετασχηματισμός Fourier είναι γινόμενο δύο συναρτήσεων sinc.


της εξόδου. Επομένως, ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα είναι ο ακόλουθος

$$y(t) = x(t) * h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega T/2)} \right)^2 e^{j\omega t} d\omega$$

Εκ πρώτης όψεως, φαίνεται ότι αυτό το ολοκλήρωμα δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε. Ωστόσο ο υπολογισμός της συνέλιξης δύο ορθογώνιων παλμών είναι μάλλον ένα εύκολο πρόβλημα. Το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι η τριγωνική συνάρτηση του Σχήματος 11-15(α).



Άσκηση 11.9: Δείτε, υπολογίζοντας τη συνέλιξη δυο πανομοιότυπων παλμών καθένας από τους οποίους ορίζεται μέσω της Σχέσης (11.68), ότι η έξοδος $y(t)$ είναι η τριγωνική συνάρτηση που φαίνεται στο Σχήμα 11-15(α).

 **Άσκηση 11.10:** Χρησιμοποιήστε τη συνέλιξη για να υπολογίσετε τη συνάρτηση στο πεδίο του χρόνου που αντιστοιχεί στο μετασχηματισμό Fourier

$$Y(j\omega) = \left(\frac{\sin(2\omega)}{(\omega/2)} \right) \left(\frac{\sin(\omega)}{(\omega/2)} \right)$$

11-6.3.3 Μέθοδος Διάσπασης σε απλά κλάσματα

Σε πολλές περιπτώσεις ενδιαφερόμαστε για τη συνέλιξη εκθετικών σημάτων μονόπλευρης επέκτασης. Τέτοια σήματα είναι συνηθισμένα στα ηλεκτρικά κυκλώματα και σε άλλα φυσικά συστήματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις. Για παράδειγμα, θεωρήστε την περίπτωση όπου

$$x(t) = \delta(t) - e^{-t}u(t)$$

$$\text{και } h(t) = e^{-2t}u(t)$$

Από τον Πίνακα 11-3 προκύπτουν οι μετασχηματισμοί Fourier

$$X(j\omega) = 1 - \frac{1}{1+j\omega} = \frac{j\omega}{1+j\omega}$$

$$\text{και } H(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega}$$

Για να υπολογίσουμε τη συνέλιξη $y(t) = x(t) * h(t)$, εργαζόμαστε στο πεδίο της συχνότητας και πολλαπλασιάζουμε τους μετασχηματισμούς

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= X(j\omega)H(j\omega) \\ &= \left(\frac{j\omega}{1+j\omega} \right) \left(\frac{1}{2+j\omega} \right) \\ &= \frac{j\omega}{(1+j\omega)(2+j\omega)} \end{aligned} \quad (11.69)$$

Έτσι τώρα έχουμε το μετασχηματισμό Fourier της $y(t)$, αλλά ίσως δεν μπορούμε να αναγνωρίσουμε αμέσως ποιος

μπορεί να είναι ο αντίστροφός του. Ο $Y(j\omega)$ δεν περιέχεται στο Πίνακα 11-3, όμως θα μπορούσαμε να αναγνωρίσουμε τους παράγοντες του παρονομαστή σαν χαρακτηριστικούς των μονόπλευρων εκθετικών σημάτων. Όταν αντιμετωπίζουμε μια τέτοια κατάσταση, συχνά είναι δυνατό να κάνουμε μερικούς αλγεβρικούς υπολογισμούς και να την εκφράσουμε ως άθροισμα (ή γινόμενο) πιο απλών όρων που ίσως βρίσκονται στον πίνακα μετασχηματισμών. Στην περίπτωση αυτή η Σχέση (11.69) βρίσκεται ήδη σε μορφή γινομένου το οποίο θα μας οδηγήσει πάλι στο να χρησιμοποιήσουμε συνέλιξη. Αν κοιτάξουμε προσεκτικά το δεξί μέλος της Σχέσης (11.69), παρατηρούμε ότι ο $Y(j\omega)$ είναι ρητή συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής $(j\omega)$ ¹¹. Επομένως μπορούμε να διασπάσουμε την $Y(j\omega)$ σε απλά κλάσματα για να προκύψει ένα **άθροισμα όρων πρώτης τάξης** των οποίων οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Fourier είναι γνωστοί. Συγκεκριμένα, θέλουμε να αναπαραστήσουμε τον $Y(j\omega)$ στην ακόλουθη μορφή:

$$Y(j\omega) = \frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{2+j\omega} \quad (11.70)$$

όπου A και B είναι σταθερές που πρέπει να υπολογιστούν. Απλές αλγεβρικές πράξεις μπορούν να επιβεβαιώσουν ότι αν αντικαταστήσουμε το δεξί μέλος της Σχέσης (11.70) μ' έναν κοινό παρονομαστή, θα δημιουργήσουμε τον όρο $j\omega$ που μας χρειάζεται στον αριθμητή της Σχέσης (11.69)¹². Για να υπολογίσουμε τη σταθερά A , μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη της Σχέσης (11.70) με τον όρο $(1+j\omega)$ οπότε προκύπτει

$$(1+j\omega)Y(j\omega) = \frac{A(1+j\omega)}{1+j\omega} + \frac{B(1+j\omega)}{2+j\omega}$$

¹¹Μια ρητή συνάρτηση έχει αριθμητή και παρονομαστή που είναι και τα δυο πολυώνυμα. Σε αυτήν την περίπτωση, είναι πολυώνυμα της μιγαδικής μεταβλητής $(j\omega)$.

¹²Ωστόσο, δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε το $(j\omega)^2$ ή μεγαλύτερες δυνάμεις της μιγαδικής μεταβλητής $j\omega$. Η διάσπαση σε απλά κλάσματα ισχύει μόνο αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από αυτόν του παρονομαστή. Αν αυτό δεν συμβαίνει, πρέπει να προβούμε στη διαίρεση των πολυωνύμων για να προκύψει μια ρητή συνάρτηση που είναι κατάλληλη για την εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου.

Αν τώρα αντικαταστήσουμε το $Y(j\omega)$ από τη Σχέση (11.69), μπορούμε να απαλείψουμε τον παράγοντα $(1 + j\omega)$, όταν υπάρχει και στον αριθμητή και στον παρονομαστή, οπότε προκύπτει ότι

$$\frac{j\omega}{2 + j\omega} = A + \frac{B(1 + j\omega)}{2 + j\omega} \quad (11.71)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το $(j\omega) = -1$ στην (11.71) για να πάρουμε για το A

$$\frac{(-1)}{2 + (-1)} = A + \frac{1 + (-1)}{2 + (-1)} = A = -1$$

Η ίδια μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε ότι $B = 2$, αν πολλαπλασιάσουμε με $(2 + j\omega)$. Συνεπώς προκύπτει η ακόλουθη ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$Y(j\omega) = -\frac{1}{1 + j\omega} + \frac{2}{2 + j\omega} \quad (11.72)$$

Από τη Σχέση (11.72) μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό συμβουλευόμενοι τον “πίνακα μετασχηματισμών”

$$y(t) = -e^{-t}u(t) + 2e^{-2t}u(t)$$

Η μέθοδος της διάσπασης σε απλά κλάσματα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μετατροπή οποιασδήποτε ρητής συνάρτησης της μιγαδικής μεταβλητής $(j\omega)$ σε άθροισμα όρων όπως στη Σχέση (11.72), όμως υπάρχουν δυο εμπόδια. Πρώτον, οι παράγοντες του παρονομαστή πρέπει να είναι διακριτοί (δες το Πρόβλημα-11.10 για την διάσπαση του $1/(a + j\omega)^2$) και δεύτερον, ο βαθμός του αριθμητή όπως ήδη αναφέραμε, πρέπει να είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή. Ωστόσο, όπως δείχνει και το επόμενο παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαίρεση πολωνύμων για να μειώσουμε το βαθμό του αριθμητή πριν εφαρμόσουμε τη μέθοδο της ανάλυσης σε απλά κλάσματα.

Ως παράδειγμα περίπτωσης που απαιτείται διαίρεση, θεωρήστε το μετασχηματισμό Fourier:

$$Y(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 + j\omega}{2 - \omega^2 + 3j\omega} \quad (11.73)$$

Αρχικά εκφράζουμε το $Y(j\omega)$ ως λόγο πολωνύμων του $j\omega$. Αυτό μπορεί να γίνει παρατηρώντας ότι $(j\omega)^k = \omega^k j^k$ και επομένως αν αντικαταστήσουμε το ω^k με το $(j\omega)^k / j^k$, δεν θα αλλάξουμε την τιμή της έκφρασης, αλλά θα προκύψει ρητή συνάρτηση με όρους δυνάμεις του $(j\omega)$. Για το παραπάνω παράδειγμα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1 - (j\omega)^2/j^2 + j\omega}{2 - (j\omega)^2/j^2 + 3j\omega} \\ &= \frac{1 + (j\omega) + (j\omega)^2}{2 + 3(j\omega) + (j\omega)^2} \end{aligned}$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στη διαίρεση πολωνύμων όπως φαίνεται παρακάτω:

$$(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2 \overline{\begin{array}{l} 1 \\ (j\omega)^2 + (j\omega) + 1 \\ \hline (j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2 \\ \hline -2(j\omega) - 1 \end{array}}$$

Με το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης μπορούμε να εκφράσουμε το $Y(j\omega)$ ως ακολούθως:

$$Y(j\omega) = 1 - \frac{1 + 2(j\omega)}{2 + 3(j\omega) + (j\omega)^2} \quad (11.74)$$

$$= 1 - \frac{1 + 2j\omega}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)} \quad (11.75)$$

Ο δεύτερος όρος του $Y(j\omega)$ στη Σχέση (11.75) μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα με τη διάσπασή του σε απλά κλάσματα

$$-\frac{1 + 2j\omega}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)} = \frac{A}{1 + j\omega} + \frac{B}{2 + j\omega} \quad (11.76)$$



Παράδειγμα 11-10: Διάσπαση Σε Απλά Κλάσματα

Για να υπολογίσουμε το A , πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με $(1 + j\omega)$ οπότε προκύπτει ότι

$$-\frac{(1 + 2j\omega)(1 + j\omega)}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)} = \frac{A(1 + j\omega)}{1 + j\omega} + \frac{B(1 + j\omega)}{2 + j\omega}$$

Στη συνέχεια απαλείφουμε τον παράγοντα $(1 + j\omega)$ όπου αυτό είναι δυνατό

$$-\frac{1 + 2j\omega}{(2 + j\omega)} = A + \frac{B(1 + j\omega)}{2 + j\omega}$$

Τώρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $(j\omega) = -1$ και στα δυο μέλη για να απαλείψουμε το B

$$-\frac{1 - 2}{2 - 1} = A + \frac{0}{2 - 1}$$

και βρίσκουμε ότι $A = 1$.

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, πολλαπλασιάζοντας δηλαδή και τα δυο μέλη της εξίσωσης (11.76) με $(2 + j\omega)$ και υπολογίζοντας στο $j\omega = -2$, βρίσκουμε ότι $B = -3$. Η επιθυμητή μορφή του $Y(j\omega)$ της Σχέσης (11.73) παίρνει τελικά τη μορφή

$$Y(j\omega) = 1 + \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{3}{2 + j\omega}$$

Παίρνοντας υπόψη μας ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του 1 είναι το κρουστικό σήμα $\delta(t)$, συμπεραίνουμε ότι η αντίστοιχη συνάρτηση στο πεδίο του χρόνου είναι

$$y(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t) - 3e^{-2t}u(t)$$

τελεστές των ΓΧΑ συστημάτων τους οποίους αναφέραμε για πρώτη φορά στην Ενότητα 9-5. Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στα συστήματα χρονικής καθυστέρησης και διαφόρισης και θα αναδείξουμε τον τρόπο που αυτές οι πράξεις μπορούν να συνδυαστούν για τη δημιουργία σύνθετων συστημάτων.

11-7.1 Χρονική Καθυστέρηση

Το ιδανικό σύστημα χρονικής καθυστέρησης ορίζεται από τη σχέση

$$y(t) = x(t - t_d) \quad (11.77)$$

Η κρουστική απόκριση αυτού του συστήματος είναι $h(t) = \delta(t - t_d)$ και επομένως η απόκριση συχνότητας προκύπτει από τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier, δηλαδή

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_d) e^{-j\omega t} dt \\ &= e^{-j\omega t_d} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_d) dt = e^{-j\omega t_d} \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτής της ανάλυσης μπορούμε να το διατυπώσουμε με δυο διαφορετικούς τρόπους. Πρώτον, έχει προκύψει το ζεύγος μετασχηματισμών Fourier

$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο-Χρόνου} & & \text{Πεδίο-Συχνότητας} \\ \delta(t - t_d) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & e^{-j\omega t_d} \end{array} \quad (11.78)$$

Δεύτερον, βασιζόμενοι στην ιδιότητα της συνέλιξης μπορούμε να διατυπώσουμε την ακόλουθη γενική ιδιότητα μετατόπισης των μετασχηματισμών Fourier:

$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο-Χρόνου} & & \text{Πεδίο-Συχνότητας} \\ x(t - t_d) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & e^{-j\omega t_d} X(j\omega) \end{array} \quad (11.79)$$

11-7 Βασικά ΓΧΑ συστήματα

Γνωρίζοντας ότι η συνέλιξη μετασχηματίζεται σε πολλαπλασιασμό των μετασχηματισμών Fourier, είναι χρήσιμο να αναφερθούμε ξανά σε μερικούς από τους βασικούς



Παράδειγμα 11-11: Ιδιότητα Χρονικής-Καθυστέρησης

Ως ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτής της ιδιότητας θεωρήστε το σήμα:

$$x(t) = e^{-2t}u(t-3)$$

Αν και δεν έχουμε αναφερθεί ξανά σ' αυτό το σήμα μ' αυτήν ακριβώς τη μορφή, με μια ελαφριά τροποποίηση προκύπτει μια χρονικά μετατοπισμένη και σταθμισμένη εκδοχή ενός σήματος του Πίνακα 11-3. Παρατηρήστε ότι μια ισοδύναμη μορφή είναι

$$x(t) = e^{-6}e^{-2(t-3)}u(t-3)$$

η οποία δείχνει ότι έχουμε το σήμα $e^{-2t}u(t)$ χρονικά καθυστερημένο κατά 3 και πολλαπλασιασμένο με τη σταθερά e^{-6} . Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα χρονικής μετατόπισης και να χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό του μονόπλευρου εκθετικού σήματος (η πρώτη καταχώρηση στον Πίνακα 11-3) και να πάρουμε

$$X(j\omega) = \frac{e^{-6}e^{-j\omega 3}}{2 + j\omega} \quad (11.80)$$

ο οποίος είναι ο μετασχηματισμός Fourier του αρχικού σήματος. ■

Η χρονική καθυστέρηση είναι μια συχνά συναντώμενη πράξη στα συστήματα και επομένως είναι πολύ χρήσιμο να γνωρίζουμε ότι οπουδήποτε εμφανίζεται το $e^{-j\omega t_a}$ (σε εκφράσεις στο πεδίο της συχνότητας) δηλώνει μετατόπιση κατά t_a στο πεδίο του χρόνου.

11-7.2 Διαφώριση

Ένα ιδανικό σύστημα διαφώρισης k τάξης ορίζεται μέσω της σχέσης

$$y(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (11.81)$$

Για $k = 1$ το σύστημα είναι ένας διαφοριστής του οποίου η κρουστική απόκριση είναι εξ ορισμού $h(t) = \delta^{(1)}(t)$, η πρώτη παράγωγος της κρουστικής συνάρτησης. Η απόκριση συχνότητας του συστήματος προκύπτει πολύ

εύκολα κατασκευάζοντας την έξοδο όταν η είσοδος είναι $x(t) = e^{j\omega t}$. Ακολουθώντας αυτή την προσέγγιση έχουμε

$$y(t) = \frac{d}{dt} (e^{j\omega t}) = (j\omega)e^{j\omega t}$$

και επομένως

$$\text{Απόκριση Συχνότητας Ιδανικού Διαφοριστή} \quad (11.82)$$

$$H(j\omega) = j\omega$$

Επίσης, αφού η απόκριση συχνότητας είναι ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης, καταλήγουμε στο ακόλουθο ζεύγος μετασχηματισμών Fourier:

$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο-Χρόνου} & & \text{Πεδίο-Συχνότητας} \\ \delta^{(1)}(t) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & j\omega \end{array} \quad (11.83)$$

Αν πάρουμε τη δεύτερη παράγωγο (διαφορίζοντας δύο φορές), δημιουργείται ένας επιπλέον παράγοντας $(j\omega)$ δίνοντας $(j\omega)^2$, άρα για το σύστημα διαφώρισης k τάξης η απόκριση συχνότητας θα είναι $H(j\omega) = (j\omega)^k$. Αφού αυτό το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε σήμα που εφαρμόζεται στην είσοδο του συστήματος για το οποίο υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier, προκύπτει η ακόλουθη γενική ιδιότητα διαφώρισης των μετασχηματισμών Fourier:

$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο-Χρόνου} & & \text{Πεδίο-Συχνότητας} \\ \frac{d^k x(t)}{dt^k} & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & (j\omega)^k X(j\omega) \end{array} \quad (11.84)$$

Παράδειγμα 11-12: Ιδιότητα Διαφώρισης

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της παραγώγου του σήματος του παραδείγματος 11-11, δηλαδή:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (e^{-2t}u(t-3))$$

Μια προσέγγιση στο πρόβλημα θα ήταν να παραγωγίσουμε το σήμα και να εφαρμόσουμε μετασχηματισμό Fourier στο αποτέλεσμα της παραγωγίσης. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του γινομένου, η παράγωγος είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-2t}\delta(t-3) - 2e^{-2t}u(t-3) \\ &= e^{-6}\delta(t-3) - 2e^{-6}e^{-2(t-3)}u(t-3) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 11-11 της Σελίδας 365 και το μετασχηματισμό Fourier της χρονικά μετατοπισμένης κρουστικής συνάρτησης της εξίσωσης (11.78) της Σελίδας 365, προκύπτει ότι

$$Y(j\omega) = e^{-6}e^{-j\omega 3} - \frac{2e^{-6}e^{-j\omega 3}}{2 + j\omega}$$

Κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα καταλήγουμε σε μια έκφραση η οποία δείχνει ότι θα μπορούσαμε απλά να πολλαπλασιάσουμε τον $X(j\omega)$ της εξίσωσης (11.80) με $(j\omega)$ αφού

$$Y(j\omega) = \frac{e^{-6}(j\omega)e^{-j\omega 3}}{2 + j\omega} = j\omega X(j\omega)$$

Δηλαδή, θα είχαμε οδηγηθεί στην ίδια απάντηση αν εφαρμόζαμε άμεσα την ιδιότητα διαφόρισης της Σχέσης (11.84) στο αποτέλεσμα του Παραδείγματος 11-11. ■

Η διαφόριση είναι και αυτή μια βασική πράξη στα συστήματα και είναι πολύ χρήσιμο να γνωρίζουμε ότι οπουδήποτε το $(j\omega)$ πολλαπλασιάζει μια έκφραση στο πεδίο της συχνότητας, υποδηλώνει διαφόριση στο πεδίο του χρόνου. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε πώς η ιδιότητα της διαφόρισης θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε σε βάθος μια μεγάλη κλάση χρήσιμων συστημάτων.

11-7.3 Συστήματα που περιγράφονται από Διαφορικές Εξισώσεις

Έστω ότι η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{(j\omega)}{(1 + (j\omega))(2 + (j\omega))} \\ &= \frac{(j\omega)}{2 + 3(j\omega) + (j\omega)^2} \end{aligned}$$

Από την ιδιότητα της συνέλιξης, ξέρουμε ότι

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{(j\omega)}{2 + 3(j\omega) + (j\omega)^2}$$

το οποίο μπορεί να εκφραστεί σε διαφορετική μορφή αν πολλαπλασιάσουμε χιαστί και τα δυο μέλη με καθέναν από τους παρονομαστές και κάνουμε τις δυνατές απλοποιήσεις

$$[(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2]Y(j\omega) = (j\omega)X(j\omega) \quad (11.85)$$

Αφού η εξίσωση (11.85) συσχετίζει το μετασχηματισμό $X(j\omega)$ της εισόδου με τον αντίστοιχο μετασχηματισμό $Y(j\omega)$ της εξόδου, συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να πάρουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό κάθε όρου της εξίσωσης (11.85) για να προκύψει η ακόλουθη σχέση μεταξύ των $x(t)$ και $y(t)$ στο πεδίο του χρόνου

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

η οποία πρέπει να ισχύει για κάθε t . Αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από την είσοδο και την έξοδο του συστήματος.



Παράδειγμα 11-13: Μετασχηματισμός Fourier Διαφορικής Εξίσωσης

Αν μας έδιναν μια διαφορική εξίσωση, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της διαφόρισης για να

πάρουμε το μετασχηματισμό Fourier των δυο μελών της εξίσωσης. Ξεκινώντας από την

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

θα προκύψει ότι:

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 2(j\omega)Y(j\omega) = (j\omega)X(j\omega) + 3X(j\omega)$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα $Y(j\omega)$ στο αριστερό μέλος της εξίσωσης και το $X(j\omega)$ στο δεξιό μέλος της, παίρνουμε

$$[(j\omega)^2 + 2(j\omega)]Y(j\omega) = [(j\omega) + 3]X(j\omega)$$

η οποία μπορεί να λυθεί ως προς $H(j\omega)$ ως:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{(j\omega) + 3}{(j\omega)^2 + 2(j\omega)}$$

■

Το προηγούμενο παράδειγμα μπορεί να γενικευτεί για διαφορικές εξισώσεις μεγαλύτερης τάξης. Συγκεκριμένα, αν η είσοδος $x(t)$ και η έξοδος $y(t)$ ικανοποιούν μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (11.86)$$

η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι της μορφής

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \quad (11.87)$$

Οι εξισώσεις (11.86) και (11.87) αποτελούν ένα σημαντικό ζεύγος μετασχηματισμών. Αν μας δίνεται η Εξίσωση (11.86), μπορούμε να καταλήξουμε στην Εξίσωση (11.87) παρατηρώντας ότι οι όροι που περιέχουν το $x(t)$

στη διαφορική εξίσωση καθορίζουν το πολυώνυμο του αριθμητή, ενώ οι όροι που περιέχουν στη διαφορική εξίσωση το $y(t)$, ορίζουν το πολυώνυμο του παρονομαστή. Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της διαφοράς στο μετασχηματισμό Fourier για τη μετάβαση από το πεδίο της συχνότητας στο πεδίο του χρόνου, το πολυώνυμο του αριθμητή στην εξίσωση (11.87) ορίζει την αλγεβρική δομή των όρων που περιέχουν το $x(t)$ στη διαφορική εξίσωση και το πολυώνυμο του παρονομαστή στην εξίσωση (11.87) ορίζει την αλγεβρική δομή των όρων που περιέχουν το $y(t)$ στη διαφορική εξίσωση της Σχέσης (11.86).

Διαφορικές εξισώσεις όπως αυτές της (11.86) προκύπτουν από την περιγραφή μιας μεγάλης κλάσης φυσικών συστημάτων που συμπεριλαμβάνει τα γραμμικά ηλεκτρικά κυκλώματα και τα μηχανικά συστήματα. Με τις Εξισώσεις (11.86) και (11.87) ο μετασχηματισμός Fourier γίνεται ένα πολύ ισχυρό εργαλείο στην ανάλυση γραμμικών φυσικών συστημάτων¹³.

11-8 Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού

Κάτι που είναι εμφανές σ' αυτό το σημείο είναι ότι συχνά παρατηρούμε μια **δυσικότητα** ανάμεσα στη μορφή μιας συνάρτησης στο πεδίο του χρόνου και στον αντίστοιχο μετασχηματισμό Fourier. Ένα παράδειγμα είναι το σήμα τετραγωνικού παλμού και ο μετασχηματισμός Fourier του, η συνάρτηση sinc δειγματοληψίας. Όταν τα πεδία του χρόνου και της συχνότητας εναλλαχθούν και η συνάρτηση χρόνου είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας, τότε ο μετασχηματισμός Fourier έχει σχήμα τετραγωνικού παλμού. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η ακριβής κλιμάκωση της συνάρτησης μπορεί να διαφέρει, αλλά η δυσικότητα είναι προφανής. Αυτό οφείλεται στη μεγάλη ομοιότητα ανάμεσα στις εξισώσεις (11.1) και (11.2). Ο ευθύς και αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διαφέρουν μόνο στο πρόσημο του εκθέτη και σ' έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα.

¹³Ο μετασχηματισμός Laplace είναι πιο βολικός για προβλήματα αυτού του τύπου γιατί τα πολυώνυμα του $(j\omega)$ γίνονται πολυώνυμα της απλής μεταβλητής s . Ωστόσο διαδικασίες όπως αυτή της διάσπασης σε απλά κλάσματα είναι πανομοιότυπες.

Αποτέλεσμα της δυϊκότητας είναι ότι πολλές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier εναλλάσσονται ανάμεσα στα πεδία. Θυμηθείτε ότι:

Η συνέλιξη συναρτήσεων στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό των μετασχηματισμών Fourier.

Επομένως, δεν θα πρέπει να μας εκπλήσσει η παρακάτω πρόταση:

Ο πολλαπλασιασμός συναρτήσεων στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier.

Στην ενότητα που ακολουθεί θα αποδείξουμε τη παραπάνω πρόταση.

11-8.1 Γενική Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού

Για να αποδείξουμε την ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, θεωρήστε το σήμα $y(t) = p(t)x(t)$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το $Y(j\omega)$ συναρτήσει των $P(j\omega)$ και $X(j\omega)$. Για να γίνει αυτό, σημειώστε ότι εξ ορισμού:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (11.88)$$

Θα αντικαταστήσουμε τώρα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier¹⁴

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\lambda)e^{j\lambda t} d\lambda \quad (11.89)$$

στη Σχέση (11.88) για να πάρουμε:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\lambda)e^{j\lambda t} d\lambda \right) e^{-j\omega t} dt$$

¹⁴Χρησιμοποιούμε ως ενδιάμεση μεταβλητή στην εξίσωση (11.89) το λ αντί για το ω αφού το ω είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή στην εξίσωση (11.88).

Αλλάζοντας τη σειρά των ολοκληρωμάτων

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\lambda) \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-j(\omega-\lambda)t} dt \right) d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\lambda)P(j(\omega-\lambda))d\lambda \quad (11.90)$$

$$= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) \quad (11.91)$$

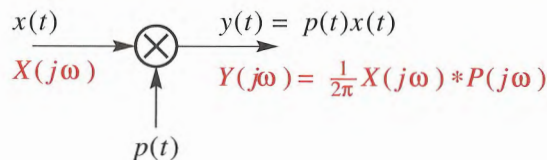
οδηγούμαστε στην ιδιότητα του πολλαπλασιασμού του μετασχηματισμού Fourier:

Πεδίο-Χρόνου Πεδίο-Συχνότητας

$$y(t) = p(t)x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

(11.92)

Η ιδιότητα του πολλαπλασιασμού είναι πολύ χρήσιμη για την περιγραφή μιας κλάσης συστημάτων που ονομάζονται Διαμορφωτές Πλάτους. Για αυτόν το λόγο, η ιδιότητα είναι γνωστή και ως *ιδιότητα διαμόρφωσης των μετασχηματισμών Fourier*. Το βασικό σύστημα διαμόρφωσης πλάτους απεικονίζεται στο Σχήμα 11-16.



Σχήμα 11-16: Σχηματικό διάγραμμα αναπαράστασης ενός Διαμορφωτή Πλάτους.



Άσκηση 11.11: Αποδείξτε ότι το σύστημα διαμόρφωσης του Σχήματος 11-16 είναι γραμμικό, αλλά χρονικά μεταβαλλόμενο.

11-8.2 Ιδιότητα Ολίσθησης στη Συχνότητα

Όταν η $p(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση, προκύπτουν μερικά ιδιαίτερος χρήσιμα αποτελέσματα. Για παράδειγμα, αν $p(t) = e^{j\omega_0 t}$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier είναι $P(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$. Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του συστήματος διαμόρφωσης, $y(t) = x(t)e^{j\omega_0 t}$, είναι:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\ &= X(j(\omega - \omega_0)) \end{aligned} \quad (11.93)$$

Αυτό σημαίνει ότι, πολλαπλασιασμός ενός σήματος $x(t)$ με μια μιγαδική εκθετική συνάρτηση συχνότητας ω_0 , απλά μετατοπίζει το μετασχηματισμό Fourier του $x(t)$ κατά ω_0 (προς τα δεξιά). Αφού αυτό ισχύει για κάθε σήμα $x(t)$, έχουμε καταλήξει στην ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier που ονομάζουμε *Ιδιότητα Ολίσθησης στη Συχνότητα*:

$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο-Χρόνου} & & \text{Πεδίο-Συχνότητας} \\ x(t)e^{j\omega_0 t} & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & X(j(\omega - \omega_0)) \end{array} \quad (11.94)$$

Υποθέτοντας ότι $p(t) = \cos(\omega_0 t)$, είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι οι θετικές και αρνητικές συχνότητες συνιστώσες του συνημίτονου οδηγούν στην ακόλουθη ιδιότητα *διαμόρφωσης συνημίτονου*:

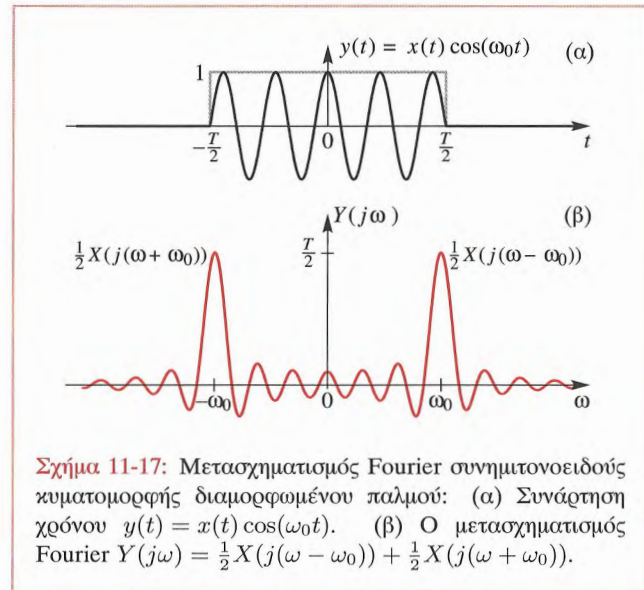
$$\begin{array}{ccc} \text{Πεδίο-Χρόνου} & & \text{Πεδίο-Συχνότητας} \\ x(t) \cos(\omega_0 t) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{1}{2}X(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2}X(j(\omega + \omega_0)) \end{array} \quad (11.95)$$

όπου $x(t)$ είναι κάθε σήμα για το οποίο υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier.



Παράδειγμα 11-14: *Ημιτονοειδές Πεπερασμένης Διάρκειας*

Ως παράδειγμα στο οποίο χρησιμοποιείται η Σχέση (11.95), ας θεωρήσουμε ότι η $x(t)$ είναι το σήμα



Σχήμα 11-17: Μετασχηματισμός Fourier συνημιτονοειδούς κυματομορφής διαμορφωμένου παλμού: (α) Συνάρτηση χρόνου $y(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$. (β) Ο μετασχηματισμός Fourier $Y(j\omega) = \frac{1}{2}X(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2}X(j(\omega + \omega_0))$.

τετραγωνικού παλμού $x(t) = [u(t+T/2) - u(t-T/2)]$, του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier είναι:

$$X(j\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega/2)}$$

Αν θεωρήσουμε το σήμα $y(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$, με τη βοήθεια της (11.95) ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Fourier θα δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{2}X(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2}X(j(\omega + \omega_0)) \\ &= \frac{\sin((\omega - \omega_0)T/2)}{(\omega - \omega_0)} + \frac{\sin((\omega + \omega_0)T/2)}{(\omega + \omega_0)} \end{aligned}$$

Στο Σχήμα 11-17(α) φαίνεται το παραγόμενο σήμα $y(t)$ και στο Σχήμα 11-17(β) φαίνεται ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Fourier. Αφού ο $X(j\omega)$ είναι σχεδόν περιορισμένου εύρους ζώνης στις χαμηλές συχνότητες, η συνημιτονοειδής κυματομορφή διαμορφωμένου παλμού έχει μετασχηματισμό Fourier που είναι συγκεντρωμένος

κοντά στο $\pm\omega_0$. Οι θέσεις των μετατοπισμένων αντίγραφων του $X(j\omega)$ φαίνονται στο Σχήμα 11-17(β). ■

Η ιδιότητα της διαμόρφωσης του μετασχηματισμού Fourier είναι πάρα πολύ χρήσιμη στην ανάλυση συστημάτων διαμόρφωσης πλάτους και στην απόδειξη του θεωρήματος της δειγματοληψίας. Αυτές, όπως και άλλες εφαρμογές, θα τις μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 12.

11-9 Πίνακας Ιδιοτήτων και Ζευγών Μετασχηματισμού Fourier

Στο κεφάλαιο αυτό υπολογίσαμε έναν αριθμό χρήσιμων ζευγών μετασχηματισμών και αποδείξαμε μερικές σημαντικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier. Ο Πίνακας 11-3 της Σελίδας 379 περιέχει ζεύγη μετασχηματισμών Fourier που εξάγαμε σ' αυτήν την ενότητα καθώς και κάποια ζεύγη (όπως αυτά της $u(t)$) τα οποία δεν συναντήσαμε ακόμα. Οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier είναι αυτές που τον καθιστούν κατάλληλο για χρήση στη σχεδίαση και την ανάλυση συστημάτων. Για αυτό το λόγο, για εύκολη αναφορά, δίνονται στον Πίνακα 11-2.

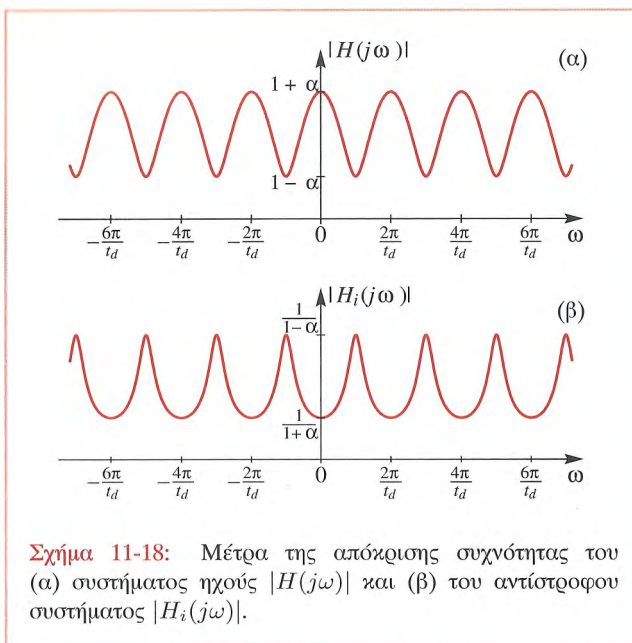
11-10 Ο Μετασχηματισμός Fourier στην Ανάλυση της Πολυόδευσης

Στην Ενότητα 9-9 παρουσιάσαμε μια ανάλυση στο πεδίο του χρόνου του προβλήματος της πολυόδευσης των σημάτων κατά τη μετάδοσή τους. Μοντελοποιήσαμε την πολυόδευση με το απλό σύστημα

$$y(t) = x(t) + \alpha x(t - t_d) \quad (11.96)$$

όπου α είναι το πλάτος της ηχούς και t_d η θέση της.

Παρόλο που φτάσαμε στο σωστό αντίστροφο φίλτρο για την απαλειφή της ηχούς, η προσέγγισή μας δεν ήταν συστηματική και στηριζόταν κυρίως σε μια διαδικασία δοκιμής-λάθους. Ο μετασχηματισμός Fourier παρέχει ένα πολύ πιο ισχυρό εργαλείο για την ανάλυση τέτοιων προβλημάτων.



Σχήμα 11-18: Μέτρα της απόκρισης συχνότητας του (α) συστήματος ηχούς $|H(j\omega)|$ και (β) του αντίστροφου συστήματος $|H_i(j\omega)|$.

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της εξίσωσης (11.96) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της χρονικής καθυστέρησης, παίρνουμε ότι

$$Y(j\omega) = X(j\omega) + \alpha e^{-j\omega t_d} X(j\omega)$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το $X(j\omega)$ παίρνουμε ότι

$$Y(j\omega) = (1 + \alpha e^{-j\omega t_d}) X(j\omega) \quad (11.97)$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier στην εξίσωση (11.97) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το σύστημα της ηχούς είναι ΓΧΑ και ότι η απόκριση συχνότητάς του δίνεται από τη σχέση

$$H(j\omega) = 1 + \alpha e^{-j\omega t_d} \quad (11.98)$$



Άσκηση 11.12:

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της χρονικής καθυστέρησης και το γεγονός ότι ο

Πίνακας 11-2: Βασικές Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier.

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Πεδίο-Χρόνου: $x(t)$	Πεδίο-Συχνότητας: $X(j\omega)$
Γραμμικότητα	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$
Συζυγηκότητα	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Χρονική-Αναστροφή	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Κλιμάκωση	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X(j(\omega/a))$
Καθυστέρηση	$x(t - t_d)$	$e^{-j\omega t_d}X(j\omega)$
Διαμόρφωση	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Διαμόρφωση	$x(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}X(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2}X(j(\omega + \omega_0))$
Παραγώγιση	$\frac{d^k x(t)}{dt^k}$	$(j\omega)^k X(j\omega)$
Συνέλιξη	$x(t) * h(t)$	$X(j\omega)H(j\omega)$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)p(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega) * P(j\omega)$

μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής συνάρτησης είναι η σταθερά 1, αποδείξτε ότι η απόκριση συχνότητας του συστήματος ηχούς δίνεται από τη σχέση

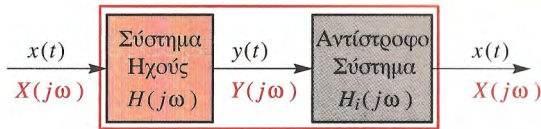
$$h(t) = \delta(t) + \alpha\delta(t - t_d)$$

Συγκρίνετε την απάντησή σας με την εξίσωση (9.73) στη Σελίδα 304 του Κεφαλαίου 9.



Άσκηση 11.13: Δείξτε ότι η απόκριση συχνότητας $H(j\omega)$ στην εξίσωση (11.98) είναι περιοδική συνάρτηση του ω με περίοδο $2\pi/t_d$.

Γραφική παράσταση της απόκρισης συχνότητας του συστήματος ηχούς φαίνεται στο Σχήμα 11-18(α). Παρα-



Σχήμα 11-19: Χρήση ενός ΓΧΑ συστήματος για την αντιστάθμιση του συστήματος ηχούς έτσι ώστε η τελική έξοδος να είναι ίση με την είσοδο.

τηρήστε ότι η $|H(j\omega)|$ που φαίνεται στο Σχήμα 11-18(α) είναι περιοδική συνάρτηση του ω με περίοδο $2\pi/t_d$. Επιπλέον, παρατηρήστε ότι η $|H(j\omega)|$ εμφανίζει βυθίσματα ή μηδενισμούς στα σημεία $\omega = \pm(2k-1)\pi/t_d$ όπου $k = 1, 2, \dots$. Κάθε βύθισμα στην απόκριση συχνότητας φτάνει στη τιμή $1 - \alpha$, έτσι αν $\alpha = 1$, η απόκριση συχνότητας είναι μηδέν και το βύθισμα γίνεται ένας μηδενισμός. Για ανακλάσεις ηχητικών σημάτων (ήχου) με καθυστέρηση της τάξης των 5 msec (που αντιστοιχεί σε απόσταση μετάδοσης λίγων χιλιομέτρων) οι μηδενισμοί αυτοί θα συμβούν σε κυκλικές συχνότητες της τάξης των $(k - \frac{1}{2})/t_d = 100, 300, 500, \dots$ Hz. Αυτό σημαίνει ότι μόνο ένας μικρός αριθμός μηδενισμών θα συμβούν στη ζώνη συχνοτήτων που είναι πολύ σημαντική για την αντίληψη της ομιλίας. Οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται το αποτέλεσμα αυτών των μηδενισμών ως αντήχηση (γνωστό και σαν το φαινόμενο “άδειο βαρέλι”) η οποία γενικά δεν υποβιβάζει την αντίληψη (intelligibility). Ωστόσο, για καθυστερήσεις πάνω από 50 msec, οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται το καθυστερημένο σήμα $\alpha x(t - t_d)$. Επιπλέον, η απόσταση μεταξύ των μηδενισμών γίνεται μικρότερη από 20 Hz, με αποτέλεσμα να υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός μηδενισμών στη ζώνη των ακουστικών συχνοτήτων. Αυτό μπορεί να υποβιβάσει την επικοινωνία αισθητά.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, αν θέλουμε να απαλείψουμε την ηχώ, μπορούμε να προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε ένα αντίστροφο φίλτρο ή αντισταθμιστή που πρέπει να συνδεθεί σε σειρά με το σύστημα ηχούς όπως φαίνεται στο Σχήμα 11-19. Σε αυτήν την περίπτωση,

έχουμε προσδιορίσει με ανάλυση στο πεδίο του χρόνου τις απαραίτητες σχέσεις για τον ορισμό αντίστροφου συστήματος. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η λύση του προβλήματος είναι πολύ εύκολη στο πεδίο της συχνότητας. Συγκεκριμένα, η τελική έξοδος του συστήματος επιθυμούμε να είναι

$$X(j\omega) = H_i(j\omega)Y(j\omega) = H_i(j\omega)H(j\omega)X(j\omega)$$

Πρέπει να σχεδιάσουμε το αντίστροφο φίλτρο $H_i(j\omega)$ έτσι ώστε να απαλείψει τις επιπτώσεις του $H(j\omega)$, άρα θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$H_i(j\omega)H(j\omega) = 1 \quad (11.99)$$

ή

$$H_i(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} = \frac{1}{1 + \alpha e^{-j\omega t_d}} \quad (11.100)$$

Η εξίσωση (11.99) δηλώνει ότι το $H_i(j\omega)$ πρέπει να είναι το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο του $H(j\omega)$.

Το Σχήμα 11-18(β) δείχνει το $|H_i(j\omega)|$ συναρτήσει του ω . Αφού το $|H_i(j\omega)|$ πρέπει να είναι το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο του $|H(j\omega)|$, συμπεραίνουμε ότι το $|H_i(j\omega)|$ πρέπει να έχει κορυφές στα σημεία στα οποία η $|H(j\omega)|$ εμφανίζει βυθίσματα και αντίστροφα. Προφανώς η υπόθεση $\alpha \approx 1$ είναι προβληματική αφού το κέρδος του φίλτρου αντιστροφής θα μπορούσε να είναι πολύ μεγάλο. Έτσι, οποιοσδήποτε θόρυβος προστεθεί στο σήμα μετά την έξοδο του συστήματος ηχούς, θα ενισχυόταν από τις κορυφές του φίλτρου αντιστροφής.

Η ανάλυση που κάναμε στο πεδίο της συχνότητας παρήγαγε πολλές γνώσεις για το θέμα του πώς το αντίστροφο φίλτρο οδηγεί στην καθολική απαλειφή της ηχούς. Στην πραγματικότητα, παρέχει επίσης και έναν σχετικά εύκολο τρόπο για την εύρεση της κρουστικής απόκρισης του αντίστροφου φίλτρου. Αν θέλουμε να βρούμε την κρουστική απόκριση από την απόκριση συχνότητας, πρέπει να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $H_i(j\omega)$. Δυστυχώς, ο μετασχηματισμός στην εξίσωση (11.100) δεν υπάρχει στον πίνακά μας και θα ήταν δύσκολο να υπολογίσουμε άμεσα το

ολοκλήρωμα του αντίστροφου μετασχηματισμού. Ωστόσο, μπορούμε να βασίσουμε την αντιστροφή στον γνωστό τύπο του αθροίσματος άπειρων όρων γεωμετρικής σειράς, η οποία χρησιμοποιήθηκε επίσης στο μετασχηματισμό- z στο Κεφάλαιο 8.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{1}{1-\beta} \quad (11.101)$$

Η συνθήκη για να συγκλίνει το παραπάνω άθροισμα είναι $|\beta| < 1$. Συγκρίνοντας το δεξί μέλος της εξίσωσης (11.100) και (11.101) οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$\begin{aligned} H_i(j\omega) &= \frac{1}{1 + \alpha e^{-j\omega t_d}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha e^{-j\omega t_d})^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k e^{-j\omega k t_d} \end{aligned} \quad (11.102)$$

στην οποία το άθροισμα συγκλίνει αν $|\alpha e^{-j\omega t_d}| < 1$, ή ισοδύναμα, αν $|\alpha| < 1$. Τώρα κάθε όρος του αθροίσματος στο δεξί μέλος της εξίσωσης (11.102) παριστάνει μια καθυστερημένη κρουστική συνάρτηση στο πεδίο του χρόνου. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$h_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k \delta(t - k t_d) \quad (11.103)$$

που είναι ίδιο με το αποτέλεσμα που καταλήξαμε από την ανάλυση που κάναμε στο πεδίο του χρόνου στην Ενότητα 9-9.

11-11 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγαμε το μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου και παρουσιάσαμε μερικές από τις βασικές ιδιότητες του. Εστίασαμε την προσοχή μας στις ιδιότητες της συνέλιξης και του πολλαπλασιασμού γιατί αυτές είναι οι πιο βασικές ιδιότητες για τη μελέτη των ΓΧΑ συστημάτων, των συστημάτων διαμόρφωσης

και των συστημάτων δειγματοληψίας που θα μελετηθούν στο επόμενο κεφάλαιο. Το CLTIdemo είναι μια γραφική διεπαφή χρήστη που επεξηγεί τη σχέση συνέλιξης-πολλαπλασιασμού που υπάρχει ανάμεσα στα φάσματα εισόδου και εξόδου ενός ΓΧΑ φίλτρου συνεχούς χρόνου, όταν η είσοδος είναι μια ημιτονοειδής συνάρτηση.

Επίδειξη: ΓΧΑΣ Συνεχούς Χρόνου

Η επίδειξη των σειρών Fourier, που προαναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να φανεί πώς το διάστημα συχνοτήτων του $X(j\omega)$ μειώνεται όσο αυξάνεται η περίοδος του $x(t)$.

Επίδειξη: Σειρές Fourier

Υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη το μεγάλο αριθμό λυμένων προβλημάτων που είναι διαθέσιμα στο CD-ROM που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για επανάληψη και εξάσκηση.

Υπόδειξη: Λυμένα Προβλήματα

11-12 Προβλήματα

Πρόβλημα.-11.1 Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $y(t) = x(3t)$ αν το σήμα $x(t)$ είναι ο ακόλουθος παλμός 2-sec

$$x(t) = u(t+1) - u(t-1)$$

Καθορίστε στη συνέχεια τη διάρκεια του $y(t)$.

Πρόβλημα.-11.2 Η ιδιότητα της καθυστέρησης στο μετασχηματισμό Fourier δηλώνει ότι αν $X(j\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$, τότε

$$x(t - t_d) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_d} X(j\omega)$$

Χρησιμοποιήστε αυτήν την ιδιότητα για να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier των ακόλουθων σημάτων:

(i) $x(t) = \delta(t+1) + 2\delta(t) + \delta(t-1)$

(ii) $x(t) = \frac{\sin(100\pi(t-2))}{\pi(t-2)}$

(iii) $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-t}u(t-4)$

Πρόβλημα.-11.3 Για κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις, χρησιμοποιώντας τον πίνακα γνωστών ζευγών μετασχηματισμών Fourier, βρείτε το $x(t)$ όταν:

(i) $X(j\omega) = \frac{j\omega}{0.1 + j\omega} e^{-j\omega 0.2}$

(ii) $X(j\omega) = 2 + 2\cos(\omega)$

(iii) $X(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{1}{2 + j\omega}$

(iv) $X(j\omega) = j\delta(\omega - 100\pi) - j\delta(\omega + 100\pi)$

Πρόβλημα.-11.4 Σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις, προσδιορίστε τον ευθύ ή τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier. Δώστε την απάντησή σας με έναν απλό τύπο ή μια γραφική παράσταση. Δικαιολογήστε κάθε απάντησή σας δηλώνοντας ποια ιδιότητα και ζεύγος μετασχηματισμού Fourier χρησιμοποιήσατε. Υπολογίστε:

(i) τον $X(j\omega)$ αν $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 4 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

(ii) το $s(t)$ αν $S(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + 2\pi\delta(\omega - 10\pi) + 2\pi\delta(\omega + 10\pi)$

(iii) το $r(t)$ αν $R(j\omega) = \frac{j\omega}{4 + j2\omega} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4 + j2\omega}$

(iv) τον $Y(j\omega)$ αν $y(t) = \delta(t+1) + 2\delta(t) + \delta(t-1)$

Πρόβλημα.-11.5 Προσδιορίστε το μετασχηματισμό Fourier του $H(j\omega)$ όταν

$$h(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t} \right\}$$

Στη συνέχεια, σχεδιάστε το $|H(j\omega)|$ συναρτήσει του ω .

Πρόβλημα.-11.6 Σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις, χρησιμοποιήστε γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών Fourier μαζί με ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier για να συμπληρώσετε τις ακόλουθες σχέσεις ζευγών μετασχηματισμών Fourier:

(i) $x(t) = u(t+3)u(3-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) =$

(ii) $x(t) = \sin(4\pi t)\sin(50\pi t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) =$

(iii) $x(t) = \frac{\sin 4\pi t}{\pi t} \sin(50\pi t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) =$

(iv) $x(t) = \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \left(\frac{\sin(200\omega)}{\omega} \right)^2$

(v) $x(t) = \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \cos^2(\omega)$

Πρόβλημα.-11.7 Παρακάτω, δίνεται το σήμα $x(t)$ στο πεδίο του χρόνου. Χρησιμοποιήστε τους πίνακες και τις ιδιότητες των μετασχηματισμών Fourier για να προσδιορίσετε το μετασχηματισμό Fourier για καθένα από τα σήματα. Μπορείτε να δώσετε την απάντησή σας ή σε μορφή σχέσης ή σε μορφή μιας προσεκτικά σχεδιασμένης γραφικής παράστασης.

(i) $x(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{10 \sin(200\pi t)}{\pi t} \right)$

(ii) $x(t) = \frac{2 \sin(400\pi t)}{\pi t} \cos(2000\pi t)$

(iii) Περιοδική Κρουστική Σειρά

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 10n)$$

Πρόβλημα.-11.8 Παρακάτω, δίνεται ο μετασχηματισμός Fourier $X(j\omega)$. Χρησιμοποιήστε τους πίνακες και τις ιδιότητες των μετασχηματισμών Fourier για να προσδιορίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier σε κάθε περίπτωση. Μπορείτε να δώσετε την απάντησή σας ή σε μορφή σχέσης ή σε μορφή μιας προσεκτικά σχεδιασμένης γραφικής παράστασης.

$$(i) X(j\omega) = \frac{e^{-j\omega 3}}{2 + j\omega}$$

$$(ii) X(j\omega) = \frac{j\omega}{2 + j\omega}$$

$$(iii) X(j\omega) = \frac{(j\omega)}{2 + j\omega} e^{-j\omega 3}$$

$$(iv) X(j\omega) = \left(\frac{2 \sin(\omega)}{\omega} \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi}{5} \right) \delta(\omega - 2\pi k/10)$$

Σημείωση: Αντιμετωπίστε το ερώτημα (iv) ως πρόβλημα συνέλιξης στο πεδίο του χρόνου.

Πρόβλημα.-11.9 Αποδείξτε ότι για μια πραγματική συνάρτηση $h(t)$ το μέτρο $|H(j\omega)|$ έχει άρτια συμμετρία και η φάση $\angle H(j\omega)$ έχει περιττή συμμετρία, δηλαδή,

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= |H(-j\omega)| \\ \angle H(j\omega) &= -\angle H(-j\omega) \end{aligned}$$

Αν η $h(t)$ είναι μια καθαρά φανταστική συνάρτηση, περιγράψτε πώς αλλάζουν οι συμμετρίες του μέτρου και της φάσης.

Πρόβλημα.-11.10 Προσδιορίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του

$$X(j\omega) = \frac{5}{(3 + j\omega)^2}$$

Αν και δεν υπάρχει καταχώρηση στον πίνακα μετασχηματισμών γι' αυτήν την περίπτωση, μπορεί να εφαρμοστεί η

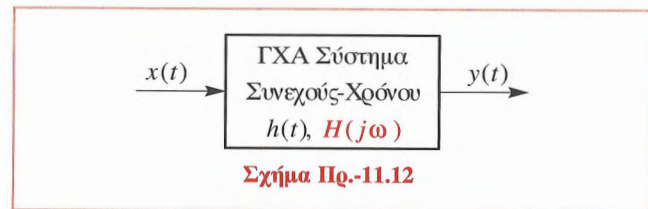
ιδιότητα της συνέλιξης αν εκφραστεί ο μετασχηματισμός $X(j\omega)$ ως γινόμενο.

Πρόβλημα.-11.11 Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$h(t) = \frac{10 \sin[4\pi(t-1)]}{\pi(t-1)}$$

- (i) Σχεδιάστε με ακρίβεια το $h(t)$. Σημειώστε τα πλάτη και τις χρονικές στιγμές που εμφανίζονται τα ακρότατα και οι μηδενισμοί.
- (ii) Προσδιορίστε το μετασχηματισμό Fourier $H(j\omega)$ αυτής της κρουστικής απόκρισης. Θυμηθείτε ότι ο $H(j\omega)$ είναι η απόκριση συχνότητας του συστήματος.
- (iii) Σχεδιάστε λεπτομερείς γραφικές παραστάσεις των $|H(j\omega)|$ και $\angle H(j\omega)$ συναρτήσει του ω .

Πρόβλημα.-11.12 Η κρουστική απόκριση του συστήματος που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-11.12 είναι



$$h(t) = \frac{4 \sin(\omega_{co}t)}{\pi t}$$

και η είσοδος του συστήματος είναι ένα περιοδικό σήμα (με περίοδο $T_0 = 1$) που δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$

- (i) Προσδιορίστε το μετασχηματισμό Fourier $X(j\omega)$ του σήματος εισόδου. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του $X(j\omega)$ στο διάστημα $-6\pi < \omega < 6\pi$.
- (ii) Προσδιορίστε την απόκριση συχνότητας $H(j\omega)$ του συστήματος και σχεδιάστε το $|H(j\omega)|$ στην ίδια γραφική παράσταση με το $X(j\omega)$ για την περίπτωση $\omega_{co} = 5\pi$.
- (iii) Χρησιμοποιήστε τη γραφική παράσταση του ερωτήματος (ii) για να προσδιορίσετε το $y(t)$, την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος για τη δοσμένη είσοδο $x(t)$ όταν η συχνότητα αποκοπής είναι $\omega_{co} = 5\pi$.
- (iv) Τι τιμή θα διαλέγατε για το ω_{co} έτσι ώστε η έξοδος να είναι σταθερά, δηλαδή $y(t) = C$ για κάθε t . Ποια είναι η σταθερά C ;

Πρόβλημα.-11.13 Η απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού χαμηλοπερατού ΓΧΑ συστήματος ορίζεται ως ακολουθώς:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 10 e^{-j0.0025\omega} & |\omega| < 1000\pi \\ 0 & |\omega| > 1000\pi \end{cases}$$

Για κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις, προσδιορίστε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος εισόδου και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε μεθόδους στο πεδίο της συχνότητας για να προσδιορίσετε το αντίστοιχο σήμα εξόδου.

- (i) Χρησιμοποιώντας μεθόδους στο πεδίο συχνότητων, προσδιορίστε την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι
- $$x(t) = \cos(200\pi t) + \frac{2 \sin(2000\pi t)}{\pi t}$$
- (ii) Προσδιορίστε την έξοδο αν η είσοδος είναι
- $$x(t) = \cos(200\pi t) + \frac{2 \sin(2000\pi t)}{\pi t} + \cos(3000\pi t)$$
- (iii) Προσδιορίστε την έξοδο αν η είσοδος είναι
- $$x(t) = \cos(200\pi t) + 2\delta(t)$$
- (iv) Ποιο είναι αυτό το στοιχείο στο σύστημα στο οποίο οφείλονται τα αποτελέσματα που πήρατε στα ερωτήματα (i)-(iii) παραπάνω;
- Πρόβλημα.-11.14** Η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος όπως αυτιού που απεικονίζεται στο Πρόβλημα.-11.12 ορίζεται από τη σχέση
- $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk200\pi t}, \quad \text{όπου } a_k = \begin{cases} \frac{1}{\pi k^2} & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$
- (i) Προσδιορίστε το μετασχηματισμό Fourier της $x(t)$ και σχεδιάστε τη γραφική παράσταση αυτού όταν η συχνότητα μεταβάλλεται στο διάστημα $-1000\pi \leq \omega \leq 1000\pi$
- (ii) Υποθέστε ότι η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:
- $$H(j\omega) = \begin{cases} 10 & |\omega| < 300\pi \\ 0 & |\omega| > 300\pi \end{cases}$$
- Σχεδιάστε την απόκριση συχνότητας στην ίδια γραφική παράσταση που σχεδιάσατε στο ερώτημα (i).
- (iii) Προσδιορίστε τη DC τιμή του σήματος εξόδου, προσδιορίστε δηλαδή το $b_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) dt$, όπου T_0 είναι η περίοδος του σήματος εξόδου.
- (iv) Γράψτε τη σχέση για την $y(t)$ και απλοποιήστε την, αν είναι δυνατόν, ώστε να περιέχει μόνο συναρτήσεις συνημίτονου.

Πρόβλημα.-11.15 Έστω ότι $x(t)$ είναι ένας τριγωνικός παλμός που ορίζεται από τη σχέση

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (i) Παίρνοντας την παράγωγο του $x(t)$, χρησιμοποιήστε την ιδιότητα παραγωγισιότητας για να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του $x(t)$.

Σημείωση: Εκφράστε την παράγωγο ως άθροισμα δυο παλμών, έναν πλάτους ένα, και έναν άλλο πλάτους μείον ένα. Από τους πίνακες των ζευγών και των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Fourier, γράψτε το μετασχηματισμό Fourier της παραγωγού του $x(t)$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε την ιδιότητα της παραγωγισιότητας στο πεδίο της συχνότητας για να βρείτε τον $X(j\omega)$.

- (ii) Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του $x(t)$ παραγωγίζοντας το $x(t)$ δυο φορές και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της δεύτερης παραγωγού. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά του ερωτήματος (i).

Πρόβλημα.-11.16

Οι συμμετρίες του μετασχηματισμού Fourier είναι αρκετά χρήσιμες. Στην Ενότητα 11-5.2, η ιδιότητα της συζυγούς συμμετρίας χρησιμοποιήθηκε για να δείξουμε ότι

για μια πραγματική συνάρτηση $x(t)$ το πραγματικό μέρος του μετασχηματισμού της είναι μια άρτια συνάρτηση και το φανταστικό μέρος μια περιττή συνάρτηση της συχνότητας. Σε αυτό το πρόβλημα, θεωρήστε ότι η $x(t)$ είναι ένα πραγματικό σήμα με μετασχηματισμό Fourier $X(j\omega)$.

- (i) Αποδείξτε ότι το μέτρο $|X(j\omega)|$ είναι μια άρτια συνάρτηση του ω , δηλαδή ότι $|X(-j\omega)| = |X(j\omega)|$.
- (ii) Αποδείξτε ότι η φάση $\angle X(j\omega)$ είναι περιττή συνάρτηση του ω , δηλαδή ότι $\angle X(-j\omega) = -\angle X(j\omega)$.

Πρόβλημα.-11.17 Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου βηματικού σήματος $u(t)$ δίνεται από σχέση

$$U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + K\delta(\omega)$$

όπου $K = \pi$. Με μια πρώτη ματιά, ίσως να φαίνεται ότι ο κρουστικός όρος $K\delta(\omega)$ είναι μηδέν, αλλά δείτε ότι $K \neq 0$ γιατί το ακόλουθο σήμα $s(t)$ έχει περιττή συμμετρία.

$$s(t) = \begin{cases} u(t) - \frac{1}{2} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Υποσημείωση: Αν και τα σήματα $s(t)$ και $u(t) - \frac{1}{2}$ διαφέρουν στο μεμονωμένο σημείο $t = 0$, έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό Fourier.

Πίνακας 11-3: Βασικά Ζεύγη Μετασχηματισμών Fourier.

Πίνακας Ζευγών Μετασχηματισμών Fourier	
<i>Πεδίο-Χρόνου: $x(t)$</i>	<i>Πεδίο-Συχνότητας: $X(j\omega)$</i>
$e^{-at}u(t) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a + j\omega}$
$e^{bt}u(-t) \quad (b > 0)$	$\frac{1}{b - j\omega}$
$u(t + \frac{1}{2}T) - u(t - \frac{1}{2}T)$	$\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}$
$\frac{\sin(\omega_b t)}{\pi t}$	$[u(\omega + \omega_b) - u(\omega - \omega_b)]$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_d)$	$e^{-j\omega t_d}$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$A \cos(\omega_0 t + \phi)$	$\pi A e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0) + \pi A e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$-j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T}k)$

Φιλτράρισμα, Διαμόρφωση και Δειγματοληψία

Στο Κεφάλαιο 11, εισάγαμε τον μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου και δείξαμε πώς να μεταβαίνουμε από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας και αντίστροφα. Δώσαμε έμφαση στις ιδιότητες της συνέλιξης και του πολλαπλασιασμού γιατί αυτές είναι οι πιο γενικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δείξουμε πώς αυτές οι δύο βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μελέτη διάφορων εφαρμογών, συμπεριλαμβανομένων του γραμμικού φιλτραρίσματος, της ημιτονοειδούς διαμόρφωσης και της δειγματοληψίας. Παρέχοντας μια μαθηματική αναπαράσταση, η οποία επίσης έχει μια απλή γραφική ερμηνεία, ο μετασχηματισμός Fourier συμβάλλει πολύ στο να κατανοήσουμε σε βάθος αυτές τις σημαντικές εφαρμογές της επεξεργασίας σημάτων. Το φιλτράρισμα παριστάνεται με τον πολλαπλασιασμό της απόκρισης συχνότητας, ο οποίος μας οδηγεί στο να σχηματίσουμε μια

σαφή εικόνα του τρόπου με τον οποίο το σύστημα επιδρά στις διαφορετικές φασματικές συνιστώσες του σήματος εισόδου. Η διαμόρφωση πλάτους και η δειγματοληψία γίνονται εύκολα κατανοητές και οπτικοποιούνται με τη μετατόπιση ή ολίσθηση του φάσματος από μια συχνотική θέση σε μια άλλη. Αυτό το κεφάλαιο περιέχει πολλά χρήσιμα και κατανοητά παραδείγματα σε σχέση με τα παραπάνω.

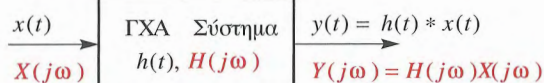
12-1 Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

Στο Κεφάλαιο 11 δείξαμε ότι η συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου μετατρέπεται με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier σε πολλαπλασιασμό στο πεδίο της συχνότητας. Αφού τα ΓΧΑ συστήματα ορίζονται πλήρως με τη συνέλιξη, η ιδιότητα της συνέλιξης των διαφόρων ειδών

μετασχηματισμών Fourier είναι άκρως απαραίτητη για να κατανοήσουμε τα ΓΧΑ συστήματα, καθώς επίσης και για να απλοποιήσουμε την ανάλυσή τους. Στο Σχήμα 12-1 παρουσιάζονται οι αναπαράστασεις ενός ΓΧΑ συστήματος στο πεδίο του χρόνου και το πεδίο της συχνότητας. Παρατηρήστε ότι η αναπαράσταση στο πεδίο του χρόνου δηλώνεται πάνω από τα βέλη και η αντίστοιχη αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας δηλώνεται από κάτω. Αφού ο μετασχηματισμός Fourier μας επιτρέπει να μεταβαίνουμε από το ένα πεδίο στο άλλο με ευκολία, έχουμε αυξήσει τις επιλογές μας στο πως να αναλύουμε τα ΓΧΑ συστήματα. Στην επίλυση των προβλημάτων, ουσιαστικό βήμα θα αποτελέσει η επιλογή εκείνης της αναπαράστασης η οποία απλοποιεί περισσότερο την ανάλυση.

12-1.1 Σύνδεση Συστημάτων σε Σειρά και Παράλληλα

Στο Κεφάλαιο 9 δείξαμε ότι οι σε σειρά και οι παράλληλες διατάξεις των ΓΧΑ συστημάτων μπορούν να συνδυαστούν και να απλοποιηθούν σε ένα απλό ισοδύναμο σύστημα. Σε αυτήν την ενότητα θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό κάνοντας ανάλυση στο πεδίο της συχνότητας. Το



Σχήμα 12-1: ΓΧΑ σύστημα απεικονιζόμενο στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας.

Σχήμα 12-2 δείχνει δύο ΓΧΑ συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά. Στο πεδίο της συχνότητας η έξοδος του πρώτου συστήματος, $W_1(j\omega) = H_1(j\omega)X(j\omega)$, οδηγείται στην είσοδο του δεύτερου συστήματος. Επομένως, η έξοδος του δεύτερου συστήματος, η οποία αποτελεί και τη συνολική έξοδο του συστήματος, είναι:

$$Y(j\omega) = H_2(j\omega)W_1(j\omega) = H_2(j\omega)H_1(j\omega)X(j\omega)$$

Αν ορίσουμε την $H(j\omega) = H_2(j\omega)H_1(j\omega)$, τότε $Y(j\omega)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$.

*Ισοδύναμη απόκριση συχνότητας
ΓΧΑ συστημάτων συνδεδεμένων σε σειρά.*

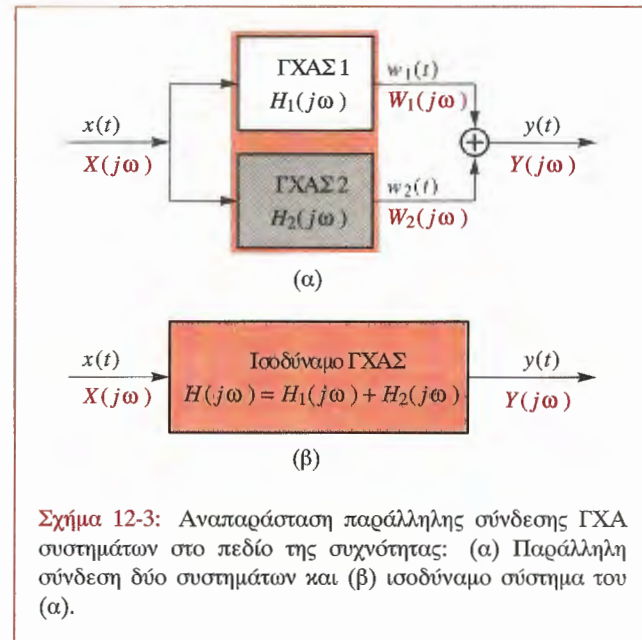
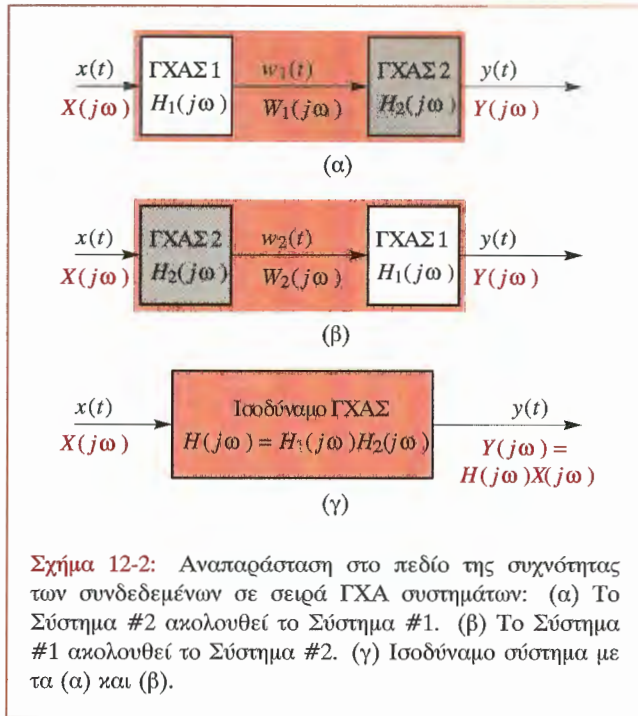
$$\begin{aligned} H(j\omega) &= H_2(j\omega)H_1(j\omega) \\ &= H_1(j\omega)H_2(j\omega) \end{aligned} \quad (12.1)$$

Οι δύο μορφές της Σχέσης (12.1) είναι ισοδύναμες διότι μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε μιγαδικούς αριθμούς, όπως τους μιγαδικούς αριθμούς $H_1(j\omega)$ και $H_2(j\omega)$, με οποιαδήποτε σειρά (βασιζόμενοι στην αντιμεταθετική ιδιότητα). Το γεγονός ότι μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τις αποκρισεις συχνότητας με οποιαδήποτε σειρά, σημαίνει ότι μπορούμε να συνδέσουμε σε σειρά δύο ΓΧΑ συστήματα με οποιαδήποτε σειρά και να πάρουμε την ίδια συνολική απόκριση συχνότητας. Επομένως, τα συστήματα που απεικονίζονται στα Σχήματα 12-2(α), (β), και (γ) έχουν την ίδια απόκριση συχνότητας που δίνεται από τη Σχέση (12.1) και είναι ισοδύναμα όσον αφορά τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της εισόδου $x(t)$ και της εξόδου $y(t)$. Αυτό βέβαια το έχουμε ήδη αποδείξει στην Ενότητα 9-8, χρησιμοποιώντας την αντιμεταθετική ιδιότητα της συνέλιξης.

Σε μια παράλληλη συνδεσμολογία, οι εισοδοί και των δύο συστημάτων τροφοδοτούνται ταυτόχρονα με το ίδιο σήμα και οι εξοδοί τους προστίθενται για να σχηματίσουν τη συνολική έξοδο όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 12-3(α). Η περιγραφή της παράλληλης συνδεσμολογίας στο πεδίο της συχνότητας, είναι η ακόλουθη

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H_1(j\omega)X(j\omega) + H_2(j\omega)X(j\omega) \\ &= [H_1(j\omega) + H_2(j\omega)]X(j\omega) \end{aligned}$$

έτσι η $Y(j\omega)$ είναι και πάλι της μορφής $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$, οδηγώντας μας στο ακόλουθο γενικό



αποτελεσμα:

**Ισοδύναμη απόκριση συχνότητας
παράλληλης συνδεσμολογίας ΓΧΑ συστημάτων.**

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) + H_2(j\omega)$$

(12.2)

Αυτό σημαίνει ότι τα συστήματα που απεικονίζονται στα Σχήματα 12-3(α) και (β) έχουν την ίδια συνολική απόκριση συχνότητας, που δίνεται από τη Σχέση (12.2) και επομένως είναι ισοδύναμα όσον αφορά τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της εισόδου $x(t)$ και της εξόδου $y(t)$.

12-1.2 Ιδανικό Σύστημα Καθυστερήσης

Στο Κεφάλαιο 11 δείξαμε ότι η απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού συστήματος καθυστέρησης δίνεται από τη σχέση:

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_d} \tag{12.3}$$

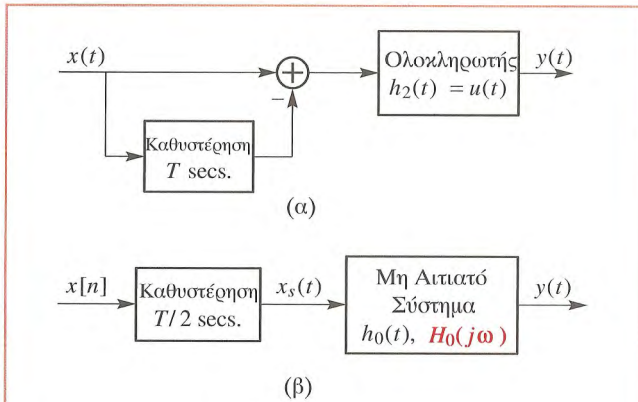
Οποτεδήποτε συναντάμε τον όρο $e^{-j\omega t_d}$ στην εξίσωση της απόκρισης συχνότητας μπορούμε να το συνδέσουμε με μια χρονική καθυστέρηση t_d δευτερολέπτων. Η καθυστέρηση είναι μια συχνή λειτουργία τόσο στα συστήματα διακριτού χρόνου όσο και στα συστήματα συνεχούς χρόνου. Στα συνεχούς χρόνου συστήματα, η ιδανική καθυστέρηση συχνά χρησιμοποιείται για να μοντελοποιήσει τις καθυστερήσεις που εκ φύσεως εμφανίζονται στα φυσικά συστήματα, όπως, για παράδειγμα, είναι οι καθυστερήσεις που εμφανίζονται κατά τη διάδοση των ηχητικών και των ηλεκτρικών σημάτων.

Σε πολλές περιπτώσεις για να διαχωρίσουμε τα αποτελέσματα της χρονικής καθυστέρησης από τα αποτελέσματα του φιλτραρίσματος που προκαλούνται κυρίως από το μέτρο της απόκρισης συχνότητας, παριστάνουμε ένα ΓΧΑ σύστημα με τη συνδεσμολογία σε σειρά επιμέρους ΓΧΑ

συστημάτων. Όταν η φάση της $H(j\omega)$ μεταβάλλεται γραμμικά με τη συχνότητα, δηλαδή $\angle H(j\omega) = -\omega t_d$, είναι ιδιαίτερα εύκολο να κατανοήσουμε την επίδραση της φάσης, αφού απλά εισάγει μια χρονική καθυστέρηση t_d δευτερολέπτων. Θα εξηγήσουμε αυτήν την αποσύνθεση με το ακόλουθο συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα 12-1: Τρέχουσα Τιμή Ολοκληρώματος

Η σε σειρά/παράλληλη συνδεσμολογία συστήματος που απεικονίζεται στο Σχήμα 12-4(α), αποτελείται από έναν ολοκληρωτή με μια παράλληλη συνδεσμολογία μιας απευθείας σύνδεσης και μιας χρονικής καθυστέρησης T δευτερολέπτων.



Σχήμα 12-4: (α) Παράδειγμα μιας σε σειρά/παράλληλης συνδεσμολογίας συστημάτων που περιέχει έναν ολοκληρωτή και έναν σύστημα καθυστέρησης. (β) Ισοδύναμη σε σειρά συνδεσμολογία μιας καθυστέρησης και ενός μη-αιτιατού συστήματος.

Θα καθορίσουμε την απόκριση συχνότητας αυτού του συστήματος με δύο διαφορετικούς τρόπους. Αρχικά, αν βρούμε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος, τότε θα μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό

Fourier και να καθορίσουμε την απόκριση συχνότητας. Εφόσον η κρουστική απόκριση της απευθείας σύνδεσης είναι η $\delta(t)$, η κρουστική απόκριση του παράλληλου συστήματος είναι $h_1(t) = \delta(t) - \delta(t - T)$. Η κρουστική απόκριση του ολοκληρωτή είναι $h_2(t) = u(t)$. Επομένως η κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος είναι

$$\begin{aligned} h(t) &= [\delta(t) - \delta(t - T)] * u(t) \\ &= u(t) - u(t - T) \\ &= \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \end{aligned} \quad (12.4)$$

Τώρα, αφού γνωρίζουμε τη συνολική κρουστική απόκριση μπορούμε να γράψουμε τη σχέση εισόδου/εξόδου για το συνολικό σύστημα ως εξής:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$$

Τα όρια αυτού του ολοκληρώματος αλλάζουν καθώς μεταβάλλεται ο χρόνος, όμως η ολοκλήρωση γίνεται πάντα για χρονικό διάστημα διάρκειας T δευτερολέπτων. Έτσι ένα κατάλληλο όνομα για το σύστημα του Σχήματος 12-4 (α) είναι το σύστημα *τρέχουσας τιμής ολοκληρώματος*.

Για να βρούμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος, αντικαθιστούμε τη Σχέση (12.4) στο ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού Fourier και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^T e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \left(\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j(\omega/2)} \right) e^{-j\omega T/2} \\ &= \frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega/2)} e^{-j\omega T/2} \end{aligned} \quad (12.5)$$

Ένας δεύτερος τρόπος για να βρούμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος του Σχήματος 12-4(α) είναι

να δουλέψουμε κατευθείαν με τις κρουστικές αποκρίσεις των επιμέρους συστημάτων και στη συνέχεια να τις συνδυάσουμε χρησιμοποιώντας τους κανόνες των Σχέσεων (12.1) και (12.2). Η απόκριση συχνότητας του παράλληλου τμήματος της συνδεσμολογίας είναι

$$H_1(j\omega) = 1 - e^{-j\omega T}$$

και από τον Πίνακα 11-3, η απόκριση συχνότητας του ολοκληρωτή είναι,

$$H_2(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Επομένως, η απόκριση συχνότητας του συνολικού συστήματος του Σχήματος 12-4(α) είναι το γινόμενο

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= H_1(j\omega)H_2(j\omega) \\ &= (1 - e^{-j\omega T}) \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) \\ &= \pi(1 - e^{-j\omega T})\delta(\omega) + (1 - e^{-j\omega T}) \left(\frac{1}{j\omega} \right) \\ &= 0\delta(\omega) + \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \\ &= \frac{(e^{+j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{j\omega} e^{-j\omega T/2} \\ &= \frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega/2)} e^{-j\omega T/2} \end{aligned}$$

αποτέλεσμα που ταυτίζεται με αυτό της Σχέσης (12.5).

Αν ορίσουμε την *συνάρτηση πλάτους* ως

$$H_0(j\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega/2)} \quad (12.6)$$

μπορούμε να εκφράσουμε την $H(j\omega)$ στη μορφή

$$H(j\omega) = H_0(j\omega) e^{-j\omega T/2} \quad (12.7)$$

Η μορφή της Σχέσης (12.7) είναι ενδιαφέρουσα γιατί το γινόμενο που περιλαμβάνει προοιδαίνει ότι το σύστημα

μπορεί να θεωρηθεί ως μια σε σειρά συνδεσμολογία μιας χρονικής καθυστέρησης $T/2$ δευτερολέπτων και ενός συστήματος του οποίου η απόκριση συχνότητας $H_0(j\omega)$ απεικονίζεται στο Σχήμα 12-4(β). Από την τρίτη καταχώρηση του Πίνακα 11-3, το σύστημα $H_0(j\omega)$ έχει μια μη-αιτιατή κρουστική απόκριση

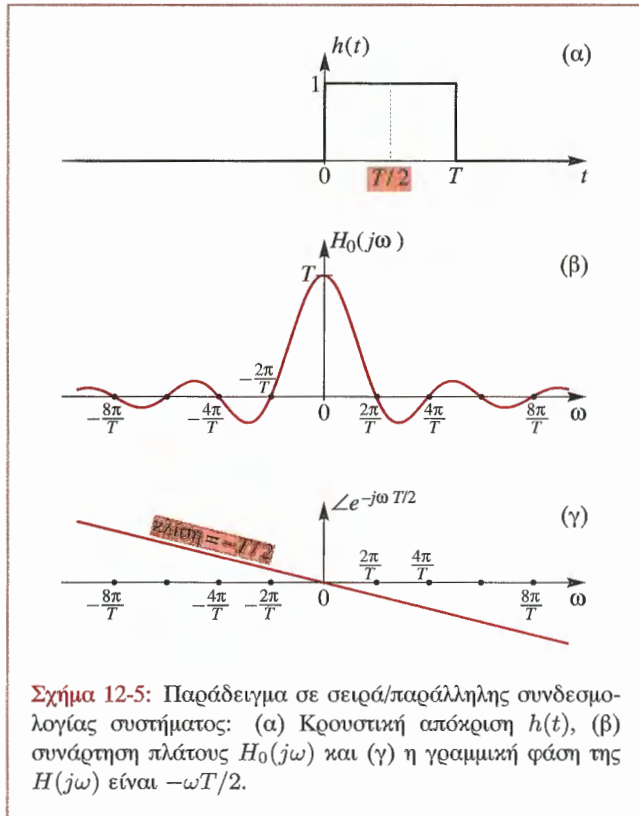
$$h_0(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$$

έτσι η συνολική κρουστική απόκριση της συνδεσμολογίας σε σειρά του Σχήματος 12-4(β) είναι

$$h(t) = h_0(t) * \delta(t - T/2) = u(t) - u(t - T)$$

η οποία είναι η ίδια με αυτή της Σχέσης (12.4). ■

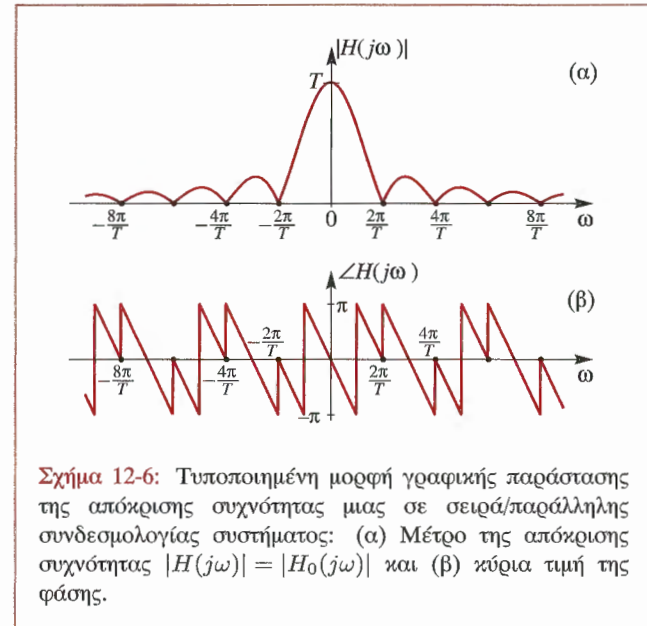
Το σχηματικό διάγραμμα του Σχήματος 12-4(α) αποτελείται από αιτιατά συστήματα, και για το λόγο αυτόν, μπορεί να αποτελέσει τη βάση για την υλοποίηση του συστήματος. Σίγουρα η συνολική κρουστική απόκριση $h(t)$ αντιστοιχεί σε ένα αιτιατό σύστημα. Από την άλλη μεριά, το σύστημα του Σχήματος 12-4(β) περιέχει ένα σύστημα με μια μη-αιτιατή κρουστική απόκριση $h_0(t)$. Ακόμα και αν αυτό δεν μπορεί να αποτελέσει τη βάση για την υλοποίηση του συστήματος το πλεονέκτημα της αναπαράστασης του Σχήματος 12-4(β) είναι ότι μας κατευθύνει στο να σκεφτούμε το σύστημα με έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο. Μπορούμε να θεωρήσουμε τη χρονική καθυστέρηση των $T/2$ ανεξάρτητα από την επίδραση του πλάτους που καθορίζεται από την $H_0(j\omega)$. Το Σχήμα 12-5(α) δείχνει την κρουστική απόκριση του συστήματος, το Σχήμα 12-5(β) δείχνει την $H_0(j\omega)$ και το Σχήμα 12-5(γ) δείχνει τη γραμμική συνιστώσα της φάσης η οποία αντιστοιχεί σε μια χρονική καθυστέρηση $T/2$ δευτερολέπτων. Παρατηρήστε ότι οι γραφικές παραστάσεις των Σχημάτων 12-5(β, γ) δεν είναι οι συνήθεις γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης της απόκρισης συχνότητας αφού η $H_0(j\omega)$ μπορεί να παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές και η γραμμική παράσταση της γραμμικής συνιστώσας της φάσης επιτρέπεται να αυξηθεί χωρίς το φυσιολογικό “τύλιγμα” που προκύπτει όταν υπολογίζεται η κύρια τιμή της. Στο Σχήμα 12-6 παριστάνονται γραφικά το μέτρο και η κύρια



Σχήμα 12-5: Παράδειγμα σε σειρά/παράλληλης συνδεσμολογίας συστήματος: (α) Κρουστική απόκριση $h(t)$, (β) συνάρτηση πλάτους $H_0(j\omega)$ και (γ) η γραμμική φάση της $H(j\omega)$ είναι $-\omega T/2$.

τιμή της φάσης. Το μέτρο καθορίζεται μόνο από την $H_0(j\omega)$ αφού $|H(j\omega)| = |H_0(j\omega)|$. Ωστόσο, εκτός από τη γραμμική συνιστώσα της φάσης $-\omega T/2$, η $H_0(j\omega)$ συνεισφέρει και αυτή στη φάση της $H(j\omega)$. Σε κάθε συχνότητα που η $H_0(j\omega)$ είναι αρνητική, ένα περίπλοκο πολλαπλάσιο του π πρέπει να προστεθεί στη φάση για να προσμετρηθεί το αρνητικό πρόσημο. Επιπλέον η φάση θα μπορούσε να υπολογιστεί (π.χ. στο Matlab) modulo 2π . Αυτό διευκρινίζεται στο Σχήμα 12-6 (β).

Προσέξτε ότι τα τμήματα της καμπύλης της φάσης μεταξύ των ασυνεχειών εξακολουθούν να είναι γραμμικές συναρτήσεις του ω . Τα άλματα των 2π οφείλονται στο φαινόμενο του τυλίγματος κατά τον υπολογισμό της φάσης



Σχήμα 12-6: Τυποποιημένη μορφή γραφικής παράστασης της απόκρισης συχνότητας μιας σε σειρά/παράλληλης συνδεσμολογίας συστήματος: (α) Μέτρο της απόκρισης συχνότητας $|H(j\omega)| = |H_0(j\omega)|$ και (β) κύρια τιμή της φάσης.

modulo 2π , ενώ τα άλματα ύψους π οφείλονται στις αλλαγές του προσήμου στα μηδενικά της $H_0(j\omega)$.

12-1.3 Φίλτρα Διέλευσης Συχνότητας

Το Παράδειγμα 12-1 διευκρινίζει πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ανάλυση στο πεδίο της συχνότητας για να χειριστούμε με διαφορετικούς τρόπους συστήματα που έχουν συνδεθεί παράλληλα ή και σε σειρά, και πως οι νέες μορφές του συστήματος μπορούν να μας δώσουν μια σαφή εικόνα της απόδοσης του συστήματος. Το σύστημα στο Παράδειγμα 12-1 είναι ένα “σύστημα” διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων ή “φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων”. Αυτό συμβαίνει γιατί το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier της εξόδου,

$$\begin{aligned} |Y(j\omega)| &= |H_0(j\omega)| |e^{-j\omega T/2}| |X(j\omega)| \\ &= |H_0(j\omega)| |X(j\omega)| \end{aligned}$$

εξαρτάται αποκλειστικά από την $|H_0(j\omega)|$. Στο Σχήμα 12-6(α) βλέπουμε ότι οι συχνοτικές συνιστώσες μέσα στις

ζώνες $\omega \geq 2\pi/T$ και $\omega \leq -2\pi/T$ εξασθενούν (μειώνονται σε μέγεθος) σε σχέση με τις συνιστώσες στη ζώνη των χαμηλών συχνοτήτων $-2\pi/T \leq \omega \leq 2\pi/T$.

Όπως ήδη έχουμε συζητήσει στην Ενότητα 10-3, είναι χρήσιμο να εξιδανικεύσουμε την έννοια του φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων καθώς και άλλων φίλτρων διέλευσης συχνοτήτων. Σε αυτήν την ενότητα κάνουμε μια ανασκόπηση και επεκτείνουμε τους ορισμούς των ιδανικών φίλτρων διέλευσης συχνοτήτων.

12-1.3.1 Ιδανικό Φίλτρο Διέλευσης Χαμηλών Συχνοτήτων

Το ιδανικό φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων ή κατωπερατό φίλτρο ορίζεται από την ακόλουθη συνάρτηση απόκρισης συχνότητας:

$$H_{lp}(j\omega) = \begin{cases} 1 & -\omega_{co} \leq \omega \leq \omega_{co} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (12.8)$$

Η συχνότητα ω_{co} , πέρα από την οποία η απόκριση συχνότητας είναι μηδενική, ονομάζεται **συχνότητα αποκοπής** του ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων.

Το ιδανικό φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων αποτελεί εξιδανίκευση μιας μεγάλης κλάσης φυσικών συστημάτων που διευκολύνουν τη διέλευση χαμηλών συχνοτήτων. Μια από τις πιο σημαντικές ιδιότητές τους είναι ότι η έξοδος ενός ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων είναι ένα τέλειο περιορισμένου εύρους ζώνης σήμα ανεξάρτητα από τη φύση του σήματος εισόδου. Επομένως

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H_{lp}(j\omega)X(j\omega) \\ &= \begin{cases} X(j\omega) & -\omega_{co} \leq \omega \leq \omega_{co} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 11-3 του Κεφαλαίου 11, προκύπτει από τον ορισμό της $H_{lp}(j\omega)$ ότι η κρουστική απόκριση του ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων είναι η ακόλουθη:

$$h_{lp}(t) = \frac{\sin(\omega_{co}t)}{\pi t} \quad (12.9)$$

Παίρνοντας υπόψη μας τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 12-1, το ιδανικό φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων με καθυστέρηση t_d θα έχει την ακόλουθη απόκριση συχνότητας

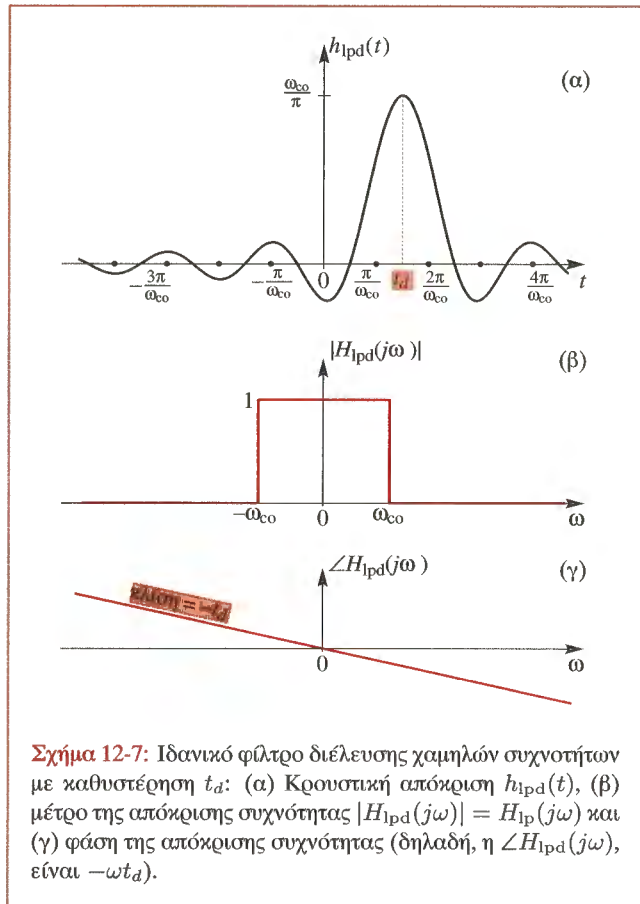
$$\begin{aligned} H_{lpd}(j\omega) &= H_{lp}(j\omega)e^{-j\omega t_d} \\ &= \begin{cases} e^{-j\omega t_d} & -\omega_{co} \leq \omega \leq \omega_{co} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \end{aligned} \quad (12.10)$$

και η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h_{lpd}(t) = h_{lp}(t - t_d) = \frac{\sin[\omega_{co}(t - t_d)]}{\pi(t - t_d)} \quad (12.11)$$

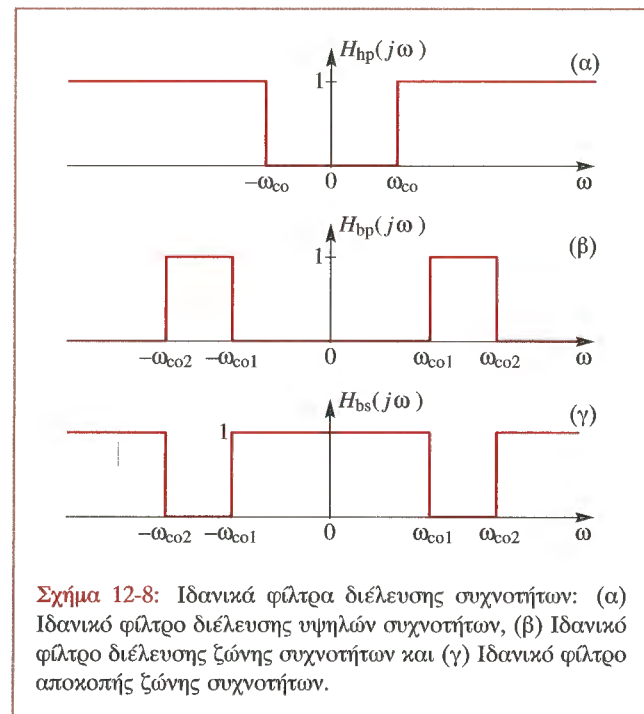
Η κρουστική απόκριση και η απόκριση συχνότητας του ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων με καθυστέρηση φαίνονται στο Σχήμα 12-7. Το Σχήμα 12-7(α) δείχνει την κρουστική απόκριση της Σχέσης (12.11) και τα Σχήματα 12-7(β) και (γ) δείχνουν το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας αντίστοιχα όπως αυτές ορίζονται στη Σχέση (12.10). Παρατηρήστε την ομοιότητα των Σχημάτων 12-5 και 12-7. Οι κρουστικές αποκρίσεις είναι και οι δύο συμμετρικές και έχουν τη μορφή παλμού με το κέντρο του τοποθετημένο δεξιά του $t = 0$. Και στις δύο περιπτώσεις, η μορφή του μέτρου της απόκρισης συχνότητας είναι κατωπερατή και η φάση είναι γραμμική, αντιστοιχώντας σε μια καθυστέρηση ή ισοδύναμα σε μια μετατόπιση προς τα δεξιά, της κρουστικής απόκρισης. Στην περίπτωση των ιδανικών φίλτρων διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων, η συνάρτηση πλάτους του Σχήματος 12-7(β) είναι μη αρνητική, έτσι δεν πρέπει να μας απασχολεί καμιά επιπλέον συνιστώσα της φάσης.

Υπάρχουν αρκετές σημαντικές διαφορές ανάμεσα στο σύστημα της τρέχουσας τιμής του ολοκληρώματος του Σχήματος 12-5 και του ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων του Σχήματος 12-7. Ενώ τα μέτρα των αποκρίσεών τους εμφανίζουν “κατωπερατά” χαρακτηριστικά, η κρουστική απόκριση του συστήματος του ολοκληρωτή βαθμιαία εξασθενεί καθώς αυξάνεται η συχνότητα ενώ η κρουστική απόκριση του ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων πάνω από τη



συχνότητα αποκοπής ω_{c0} μηδενίζεται απότομα. Από την άλλη πλευρά, το σύστημα του ολοκληρωτή είναι αιτιατό, ενώ όπως μπορούμε να δούμε από το Σχήμα 12-7(α) το ιδανικό φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων είναι μη-αιτιατό ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλη καθυστέρηση θα προσθέσουμε. Στην πραγματικότητα, το γεγονός ότι το μέτρο της κρουστικής απόκρισης του συστήματος του ολοκληρωτή αποκλίνει από την ιδανική απόκριση είναι μια άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι το σύστημα μπορεί να γίνει αιτιατό αν επιτρέψουμε τουλάχιστον

μια καθυστέρηση $T/2$ δευτερολέπτων. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ένα αιτιατό σύστημα δεν μπορεί να έχει μια κρουστική απόκριση η οποία είναι ιδανικά μηδενική πάνω σε μια μη μηδενικού εύρους ζώνης συχνοτήτων¹. Αυτό σημαίνει ότι το ιδανικό φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων δεν μπορεί να είναι ένα αιτιατό σύστημα ακόμα και αν ενσωματώσουμε χρονική καθυστέρηση. Αυτό δεν σημαίνει ότι το ιδανικό φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων με καθυστέρηση δεν είναι χρήσιμο. Πράγματι, αφού μπορούμε να προσεγγίσουμε τα χαρακτηριστικά του με μεγάλη ακρίβεια χρησιμοποιώντας υλοποιήσιμα συστήματα, εξυπηρετεί σαν μια χρήσιμη αφαιρετική έννοια που απλουστεύει την ανάλυση σύνθετων συστημάτων.



¹ Η απόδειξη αυτής της γενικής ιδιότητας είναι πέρα από τους σκοπούς του βιβλίου.

12-1.3.2 Άλλα Ιδανικά Φίλτρα Διέλευσης Συχνοτήτων

Το Σχήμα 12-8 μας θυμίζει τις αποκρίσεις συχνότητας τριών άλλων τύπων ιδανικών φίλτρων διέλευσης συχνοτήτων που είχαμε εισάγει στην Ενότητα 10-3. Όπως στη περίπτωση του ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων, αυτά τα φίλτρα είναι μη αιτιατά συστήματα, όμως μπορούν να χρησιμοποιηθούν αφαιρετικά ως εξιδανικεύσεις των αιτιατών συστημάτων με σκοπό να δούμε τι μπορεί να προσεγγισθεί με τα αιτιατά συστήματα.

Το Σχήμα 12-8(α) δείχνει την απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού φίλτρου διέλευσης υψηλών συχνοτήτων που ορίζεται από τη σχέση:

$$H_{\text{hp}}(j\omega) = \begin{cases} 0 & -\omega_{\text{co}} \leq \omega \leq \omega_{\text{co}} \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (12.12)$$

Δηλαδή, το ιδανικό φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων αφήνει να περάσουν συχνότητες πάνω από τη συχνότητα αποκοπής ω_{co} και απορρίπτει τις συχνότητες κάτω από τη συχνότητα αποκοπής. Μια άλλη χρήσιμη αναπαράσταση της απόκρισης συχνότητας ενός ιδανικού φίλτρου διέλευσης υψηλών συχνοτήτων με συχνότητα αποκοπής ω_{co} είναι η ακόλουθη:

$$H_{\text{hp}}(j\omega) = 1 - H_{\text{lp}}(j\omega) \quad (12.13)$$

Από τη Σχέση (12.13) συμπεραίνουμε ότι η κρουστική απόκριση του ιδανικού φίλτρου διέλευσης υψηλών συχνοτήτων είναι η ακόλουθη:

$$h_{\text{hp}}(t) = \delta(t) - h_{\text{lp}}(t) = \delta(t) - \frac{\sin(\omega_{\text{co}}t)}{\pi t} \quad (12.14)$$



Άσκηση 12.1:

Καθορίστε την απόκριση συχνότητας $H_{\text{hpd}}(j\omega)$ και την κρουστική απόκριση $h_{\text{hpd}}(t)$ ενός ιδανικού φίλτρου διέλευσης υψηλών συχνοτήτων με καθυστέρηση t_d .

Το ιδανικό φίλτρο διέλευσης ζώνης συχνοτήτων μπορεί να αναπαρασταθεί με τη βοήθεια ενός ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων με διάφορους τρόπους όπως προτείνεται σε κάποια προβλήματα στο τέλος του κεφαλαίου (π.χ., Πρόβλημα.-12.1, Πρόβλημα.-12.2 και στο Πρόβλημα.-12.3). Επίσης, καθένα από τα ιδανικά φίλτρα μπορεί να οριστεί με χρονική καθυστέρηση με απλό πολλαπλασιασμό της απόκρισης συχνότητάς του με το $e^{-j\omega t_d}$ ή καθυστερώντας την κρουστική απόκρισή του κατά t_d . Τα ιδανικά φίλτρα διέλευσης συχνοτήτων που έχουμε ορίσει παραπάνω είναι χρήσιμες εξιδανικεύσεις των φίλτρων που μπορούν να υλοποιηθούν σε πραγματικά συστήματα. Θα δούμε ότι τα φίλτρα διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων και τα φίλτρα διέλευσης ζώνης συχνοτήτων αποτελούν βασικά συστατικά σε πολλά συστήματα επικοινωνιών και γενικά χρήσιμων συστημάτων της επεξεργασίας σημάτων.

12-1.4 Παράδειγμα Φιλτραρίσματος Στο Πεδίο της Συχνότητας

Για να εξηγήσουμε πώς τα ιδανικά φίλτρα μπορούν να τροποποιήσουν ένα σήμα, θεωρήστε τον περιοδικό τετραγωνικό παλμό ως σήμα εισόδου. Θυμηθείτε την Εξίσωση (11.40) του Παραδείγματος 11-3 στη Σελίδα 353 όπου δείξαμε ότι ο περιοδικός τετραγωνικός παλμός των Σχημάτων 12-9(β, γ) έχει τον ακόλουθο μετασχηματισμό Fourier

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{2 \sin(\pi k/2)}{k} \delta(\omega - k\omega_0) \quad (12.15)$$

ο οποίος αποτελείται από κρουστικές στα ακέραια πολλαπλάσια του ω_0 όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 12-9(α). Αν αυτό το σήμα είναι η είσοδος σε ένα ιδανικό φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων με συχνότητα αποκοπής ω_{co} με $3\omega_0 < \omega_{\text{co}} < 5\omega_0$, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 12-9(β), τότε ο μετασχηματισμός Fourier της

εξόδου περιέχει πέντε φασματικές γραμμές (κρουστικές):

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H_{1p}(j\omega)X(j\omega) \\ &= \pi\delta(\omega) + 2\delta(\omega - \omega_0) + 2\delta(\omega + \omega_0) \\ &\quad - \frac{2}{3}\delta(\omega - 3\omega_0) - \frac{2}{3}\delta(\omega + 3\omega_0) \end{aligned} \quad (12.16)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της Σχέσης (12.16) είναι:

$$\begin{aligned} y_{1p}(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{\pi}e^{-j\omega_0 t} - \frac{1}{3\pi}e^{j3\omega_0 t} - \frac{1}{3\pi}e^{-j3\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_0 t) \end{aligned} \quad (12.17)$$

Αυτό το σήμα εξόδου παριστάνεται γραφικά στη δεξιά πλευρά του Σχήματος 12-9(β). Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα του ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων είναι να “εξομαλύνει” τις ακμές του τετραγωνικού σήματος. Εάν μειώσουμε την ω_{co} η έξοδος θα γίνει ακόμα πιο λεία. Εάν αυξήσουμε την ω_{co} η έξοδος τελικά θα προσεγγίζει την είσοδο καθώς θα περιέχεται ολόκληρο το φάσμα. Όπως έχουμε δει στο Κεφάλαιο 3 ωστόσο, ο χαρακτηριστικός “υπερακοντισμός” στις ασυνέχειες του τετραγωνικού σήματος θα παραμείνει, ακόμα και αν η κλίση του σήματος εξόδου στις αρχικές ασυνέχειες αυξάνει συνεχώς καθώς αυξάνει η ω_{co} .

Άσκηση 12.2: Για το σήμα της Σχέσης (12.15), καθορίστε μια συχνότητα αποκοπής ενός ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων έτσι ώστε η έξοδος του να είναι μια σταθερά

$$y_{1p}(t) = A \quad -\infty < t < \infty$$

Ποια είναι η τιμή της σταθεράς A ;

Αν το τετραγωνικό κύμα είναι η είσοδος ενός ιδανικού φίλτρου διέλευσης υψηλών συχνοτήτων με συχνότητα αποκοπής ω_{co} τέτοια ώστε $3\omega_0 < \omega_{co} < 5\omega_0$, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 12-9(γ), τότε το αντίστοιχο σήμα

εξόδου έχει τη μορφή της γραφικής παράστασης στη δεξιά πλευρά του Σχήματος 12-9(γ). Στην περίπτωση αυτή, βλέπουμε ότι το ιδανικό φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων “τονίζει” τις ακμές της εισόδου.



Άσκηση 12.3: Δείξτε ότι η έξοδος του ιδανικού φίλτρου διέλευσης υψηλών συχνοτήτων του Σχήματος 12-9(γ) ισούται με τη διαφορά του τετραγωνικού κύματος εισόδου και της εξόδου του ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων του Σχήματος 12-9(β), δηλαδή,

$$\begin{aligned} y_{hp}(t) &= x(t) - y_{1p}(t) \\ &= x(t) - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_0 t) \right) \end{aligned}$$

όπου $x(t)$ το τετραγωνικό κύμα εισόδου.



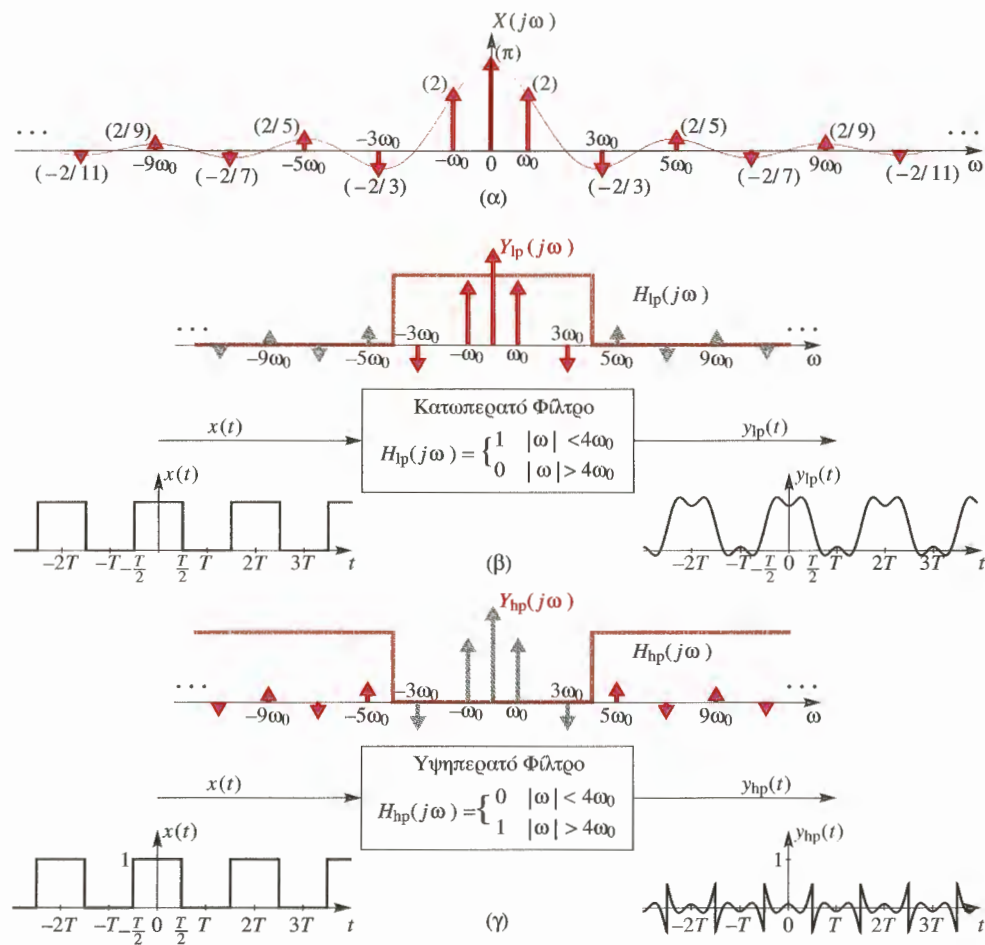
Άσκηση 12.4: Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της εξόδου του ιδανικού φίλτρου διέλευσης υψηλών συχνοτήτων αν η είσοδος είναι το τετραγωνικό κύμα του Σχήματος 12-9(γ) και η συχνότητα αποκοπής του φίλτρου είναι τέτοια ώστε $0 < \omega_{co} < \omega_0$.



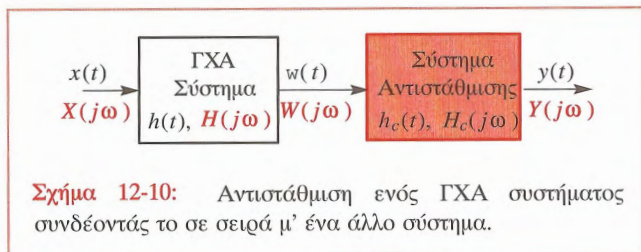
Εργ. Ασκ.: #14, Σχεδίαση με Σειρές Fourier

12-1.5 Αντιστάθμιση Επίδρασης ενός ΓΧΑ Φίλτρου

Τα φίλτρα διέλευσης συχνοτήτων σχεδιάζονται για να απομακρύνουν κάποιες συχνότητες ενώ διατηρούν κάποιες άλλες αναλλοίωτες. Ένας άλλος τύπος φίλτρου θα μπορούσε να σχεδιαστεί για να αντισταθμίσει τα αποτελέσματα τα οποία μπορούν να μοντελοποιηθούν ως ΓΧΑ συστήματα. Συχνά ένα σήμα $x(t)$ είναι παρατηρήσιμο ως η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος. Αυτό, για παράδειγμα, είναι αλήθεια όταν ένα όργανο μέτρησης παραμορφώνει αυτό που μετράει. Ένα άλλο παράδειγμα έχουμε όταν ένα ηχητικό σήμα εγγράφεται μέσα σε



Σχήμα 12-9: Παράδειγμα φιλτραρίσματος με χρήση ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων και φίλτρου διέλευσης υψηλών συχνοτήτων: (α) Μετασχηματισμός Fourier $X(j)$ του τετραγωνικού σήματος εισόδου $x(t)$ που εμφανίζει κρουστικές συναρτήσεις στα πολλαπλάσια της ω_0 . (β) Ιδανικό φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων $H_{lp}(j\omega)$ που επεξεργάζεται το $x(t)$ για να δώσει το σήμα εξόδου $y_{lp}(t)$. Η απόκριση συχνότητας του φίλτρου έχει σχεδιαστεί πάνω στη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Fourier $Y_{lp}(j\omega)$. Οι κρουστικές της $X(j\omega)$ που απομακρύνονται από το φίλτρο απεικονίζονται με γκρι. (γ) Φιλτράρισμα του τετραγωνικού σήματος εισόδου $x(t)$ από ιδανικό φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων. Η απόκριση συχνότητας του ιδανικού φίλτρου $H_{hp}(j\omega)$ έχει σχεδιαστεί πάνω στη γραφική παράσταση του $Y_{hp}(j\omega)$. Οι κρουστικές της $X(j\omega)$ που απομακρύνονται από το φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων απεικονίζονται με γκρι.



ένα δωμάτιο με αντήχηση. Σε μια τέτοια περίπτωση το ΓΧΑ σύστημα θα πρέπει να μοντελοποιήσει την κρουστική απόκριση του δωματίου, συνδεδεμένη σε σειρά με την απόκριση του μικροφώνου, του ενισχυτή και του συστήματος εγγραφής. Η κρουστική απόκριση του δωματίου θα μπορούσε να αποτελείται από μετατοπισμένες κρουστικές συναρτήσεις που αναπαριστούν τις χρονικές καθυστερήσεις των αντηχήσεων από τους τοίχους, το πάτωμα και το ταβάνι. Σε τέτοιες περιπτώσεις το ΓΧΑ σύστημα αναπαριστά μια παραμόρφωση η οποία επιβάλλεται πάνω στο σήμα εισόδου και το πρόβλημα είναι να επανορθώνει ή να αντισταθμίζει την παραμόρφωση αν είναι δυνατόν. Έχουμε ήδη συζητήσει ένα απλό παράδειγμα αυτού του τύπου στις Ενότητες 9-9 και 11-10. Σε αυτήν την ενότητα θα θεωρήσουμε μια πιο γενική διατύπωση αυτού του προβλήματος.

Για να δούμε ότι σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε να αντισταθμίσουμε τα αποτελέσματα ενός ΓΧΑ συστήματος, θεωρήστε τα συνδεδεμένα σε σειρά συστήματα του Σχήματος 12-10. Το πρώτο σύστημα αναπαριστά το σύστημα παραμόρφωσης έχοντας κρουστική απόκριση $h(t)$ και απόκριση συχνότητας $H(j\omega)$. Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο σύστημα για να τροποποιήσουμε τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας του πρώτου συστήματος $H(j\omega)$, έτσι ώστε η συνολική απόκριση συχνότητας να είναι μια επιθυμητή συνάρτηση $H_d(j\omega)$. Από τη Σχέση (12.1), έπεται ότι η συνολική απόκριση συχνότητας του συστήματος θα είναι:

$$H_d(j\omega) = H_c(j\omega)H(j\omega) \quad (12.18)$$

Έτσι, αν η $H(j\omega)$ είναι γνωστή, θέλουμε

$$H_c(j\omega) = \frac{H_d(j\omega)}{H(j\omega)} \quad (12.19)$$

Αν η $H_c(j\omega)$ ικανοποιεί τη Σχέση (12.19), τότε η Σχέση (12.18) θα είναι αληθής και μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα με απόκριση συχνότητας $H(j\omega)$ έχει αντισταθμιστεί τέλεια. Επομένως, η $H_c(j\omega)$ είναι η απόκριση συχνότητας του αντισταθμιστή της $H(j\omega)$.

Είναι φανερό ότι η Σχέση (12.18) δηλώνει ότι

$$h_d(t) = h(t) * h_c(t) \quad (12.20)$$

Σε αυτήν την εξίσωση, μας δίνονται η $h(t)$ και η επιθυμητή κρουστική απόκριση $h_d(t)$, και επομένως για να πάρουμε την $h_c(t)$ θέλουμε να βρούμε την αποσυνέλιξη. Γενικά, η λύση της Εξίσωσης (12.20) στο πεδίο του χρόνου είναι δύσκολη, αν όχι αδύνατη. Ωστόσο, η λύση της Εξίσωσης (12.19) στο πεδίο της συχνότητας είναι απλή γιατί έχουμε αντικαταστήσει τη συνέλιξη με πολλαπλασιασμό. Στην πραγματικότητα, η λύση στο πεδίο της συχνότητας ήταν παραπλανητικά απλή. Απλά χωρίσαμε τον ένα μετασχηματισμό Fourier από τον άλλον και υποθέσαμε ότι το αποτέλεσμα ήταν ένας έγκυρος μετασχηματισμός Fourier. Σε πολλές περιπτώσεις αυτό είναι είτε αναλήθες είτε απαιτεί μια πιο προσεκτική ανάλυση. Αυτό το σημείο θα εξηγηθεί με μερικά παραδείγματα, όμως πριν προχωρήσουμε στα παραδείγματα αυτά, αξίζει τον κόπο να αναφερθούμε στην ειδική περίπτωση του **αντίστροφου φίλτρου**. Σ' αυτήν την περίπτωση θέλουμε να εξουδετερώσουμε ολοκληρωτικά τα αποτελέσματα του συστήματος $H(j\omega)$ πράγμα που σημαίνει ότι θέλουμε η συνολική απόκριση συχνότητας να είναι $H_d(j\omega) = 1$. Ισοδύναμα, θέλουμε $h_d(t) = \delta(t)$ έτσι ώστε η $Y(j\omega) = X(j\omega)$ στο Σχήμα 12-10 και επίσης η $y(t) = x(t)$. Αν αντικαταστήσουμε αυτήν την επιθυμητή απόκριση συχνότητας στη Σχέση (12.19), παίρνουμε:

$$H_c(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} = H_i(j\omega) \quad (12.21)$$

Στην ειδική αυτήν περίπτωση το σύστημα αντιστάθμισης ταυτίζεται με το αντίστροφο σύστημα του συστήματος που μας δίνεται, και επομένως στο πεδίο της συχνότητας η απόκριση συχνότητας του συστήματος αντιστάθμισης θα είναι το αντίστροφο της $H(j\omega)$. Η ύπαρξη του αντίστροφου συστήματος δεν μπορεί να εξασφαλιστεί πάντα. Χρειάζεται να ελέγξουμε την $H_i(j\omega)$ για να αποφασίσουμε αν αντιστοιχεί σε μετασχηματισμό Fourier μιας αιτιατής και ευσταθούς κρουστικής απόκρισης $h_i(t)$. Έχουμε ήδη εξηγήσει το αντίστροφο φίλτράρισμα για την περίπτωση ενός συστήματος αντήχησης με ανάλυση στο πεδίο του χρόνου στην Ενότητα 9-9 και με ανάλυση στο πεδίο της συχνότητας στην Ενότητα 11-10. Μερικά επιπρόσθετα παραδείγματα θα διευκρινίσουν κάποια συγκεκριμένα σημεία του αντίστροφου φιλτραρίσματος.

Παράδειγμα 12-2: Εύρεση του Αντίστροφου Φίλτρου

Ένα απλό παράδειγμα στο οποίο η εύρεση του αντίστροφου φίλτρου είναι εξαιρετικά απλή, είναι όταν το πρώτο σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-at}u(t)$ με $a > 0$. Στην περίπτωση αυτή, η απόκριση συχνότητας του πρώτου συστήματος είναι

$$H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

και

$$H_i(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} = a + j\omega$$

Αυτός είναι ένας έγκυρος μετασχηματισμός Fourier, ο οποίος αντιστοιχεί στην ακόλουθη κρουστική απόκριση

$$h_i(t) = a\delta(t) + \frac{d\delta(t)}{dt}$$

Άσκηση 12.5: Επαληθεύστε, υπολογίζοντας τη συνέλιξη, ότι για το σύστημα του Παραδείγματος 12-2 ισχύει:

$$h(t) * h_i(t) = e^{-at}u(t) * \left(a\delta(t) + \frac{d\delta(t)}{dt} \right) = \delta(t)$$

Παράδειγμα 12-3: Μη Ύπαρξη Αντίστροφου Ιδανικού Φίλτρου Διέλευσης Χαμηλών Συχνοτήτων

Το ιδανικό φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων του οποίου η απόκριση συχνότητας είναι

$$H_{lp}(j\omega) = \begin{cases} 1 & -\omega_{co} \leq \omega \leq \omega_{co} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

δεν έχει αντίστροφο αφού η $H_{lp}(j\omega) = 0$ για $|\omega| > \omega_{co}$ και

$$H_i(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)}$$

Αυτό απαιτεί η $H_i(j\omega) = \infty$ για όλα τα $|\omega| > \omega_{co}$. Αυτό ξεκάθαρα δεν είναι ένας έγκυρος μετασχηματισμός Fourier κάτω από οποιεσδήποτε προϋποθέσεις, έτσι δεν υπάρχει το αντίστροφο σύστημα του ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων. Αυτό το αποτέλεσμα δεν προκαλεί έκπληξη αν θυμηθούμε ότι το ιδανικό φίλτρο πολλαπλασιάζει το μετασχηματισμό Fourier όλων των σημάτων εισόδου με το μηδέν για $|\omega| > \omega_{co}$. Επομένως θα ήταν αδύνατο να ανακτήσουμε το τμήμα του μετασχηματισμού Fourier της εισόδου που αντιστοιχεί στις συχνότητες πάνω από τη συχνότητα αποκοπής του ιδανικού φίλτρου. ■

Παράδειγμα 12-4: Αντίστροφο του Συστήματος Καθυστερήσης

Το ιδανικό σύστημα καθυστέρησης έχει απόκριση συχνότητας

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_a}$$

το οποίο σημαίνει ότι το αντίστροφο σύστημα έχει απόκριση συχνότητας

$$H_i(j\omega) = \frac{1}{e^{-j\omega t_d}} = e^{j\omega t_d}$$

Αυτός είναι ένας έγκυρος μετασχηματισμός Fourier ο οποίος αντιστοιχεί στην κρουστική απόκριση

$$h_i(t) = \delta(t + t_d)$$

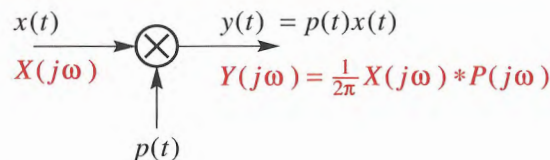
Επομένως, το αποτέλεσμα τους συστήματος καθυστέρησης μπορεί να αντισταθμιστεί ακριβώς αν μπορέσουμε να *προχωρήσουμε* την έξοδο του συστήματος καθυστέρησης κατά χρόνο ίσο με αυτό της καθυστέρησης. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το πρόβλημα με το αντίστροφο σύστημα είναι ότι αυτό δεν είναι αιτιατό και γι' αυτόν το λόγο δεν μπορεί να υλοποιηθεί. ■

Όπως δείχνουν τα παραπάνω παραδείγματα, ο καθορισμός του αντίστροφου συστήματος είναι μια διαδικασία γεμάτη δυσκολίες. Σε περιπτώσεις όπως αυτής της ιδανικής καθυστέρησης, το αντίστροφο σύστημα είναι μη-αιτιατό. Σε μερικές περιπτώσεις, όπως στα ιδανικά φίλτρα διέλευσης συχνότητας, ένα αντίστροφο σύστημα απλά δεν υπάρχει. Σε άλλες περιπτώσεις, όπως στο φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής το οποίο έχει μηδενικά σε απομονωμένες συχνότητες, μπορεί να βρεθεί ένα αιτιατό αντίστροφο σύστημα, του οποίου όμως το κέρδος σε όλα τα μηδενικά της αρχικής απόκρισης συχνότητας θα απειρίζεται και το κέρδος της θα αυξάνεται καθώς αυξάνεται η συχνότητα. Πρακτικά, μεγάλο κέρδος στις υψηλές συχνότητες θα ενισχύει οποιοδήποτε υψηλό θόρυβο έχει προστεθεί στο σήμα πριν σταλεί στην είσοδο του αντιστρόφου φίλτρου. Τέτοιος θόρυβος υπάρχει σχεδόν πάντα και όταν ενισχύεται από το αντίστροφο φίλτρο κάνει τη συνολική έξοδο άχρηστη. Δεδομένων όλων αυτών των δυσκολιών στο να βρούμε αντίστροφα φίλτρα, το γενικό πρόβλημα της ανάκτησης της εισόδου ενός ΓΧΑ συστήματος υπάρχει σε πολλές εφαρμογές. Πρέπει να γίνει αρκετή δουλειά για να αναπτύξουμε ικανοποιητικές προσεγγίσεις οι οποίες θα είναι λιγότερο

εναίσθητες στο θόρυβο και ταυτόχρονα δεν θα απαιτούν ακριβή γνώση του ΓΧΑ συστήματος παραμόρφωσης. Οι μεθοδολογίες αυτές είναι πέρα από τους σκοπούς αυτού του βιβλίου, όμως η έννοια του αντίστροφου φιλτραρίσματος αποτελεί ένα χρήσιμο και χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας προβλημάτων της επεξεργασίας σημάτων.

12-2 Ημιτονοειδής Διαμόρφωση Πλάτους

Στην Ενότητα 12-1 εξηγήσαμε το γραμμικό φιλτράρισμα εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier σύμφωνα με την οποία η συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στο πεδίο της συχνότητας. Τώρα θα στρέψουμε την προσοχή μας στο δυϊκό αποτέλεσμα σύμφωνα με το οποίο ο πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας. Στην περίπτωση κατά την οποία ένα από τα πολλαπλασιαζόμενα σήματα είναι περιοδικό, η ιδιότητα του πολλαπλασιασμού δηλώνει ότι το φάσμα του άλλου σήματος μετατοπίζεται στη συχνότητα.



Σχήμα 12-11: Σχηματικό διάγραμμα αναπαράστασης ενός διαμορφωτή πλάτους.

Στο Κεφάλαιο 11, δείξαμε ότι η ιδιότητα μετατόπισης στη συχνότητα θα μπορούσε να αποτελέσει ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για να περιγράψουμε μια κλάση συστημάτων επικοινωνιών που ονομάζονται διαμορφωτές πλάτους. Οι αναπαραστάσεις του γενικού συστήματος διαμόρφωσης πλάτους στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας παρουσιάζονται στο Σχήμα 12-11. Στην ενότητα αυτή θα

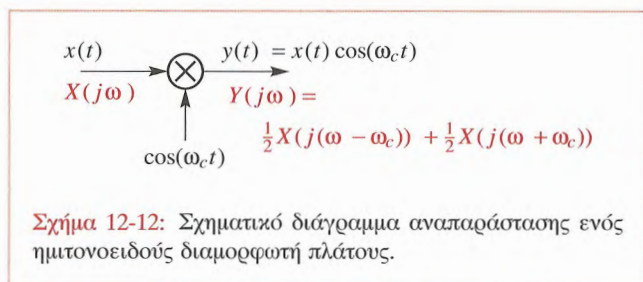
μελετήσουμε την ειδική περίπτωση όπου το σήμα $p(t)$ είναι ένα ημιτονοειδές σήμα.

12-2.1 Διαμόρφωση Πλάτους Διπλής Πλευρικής Ζώνης

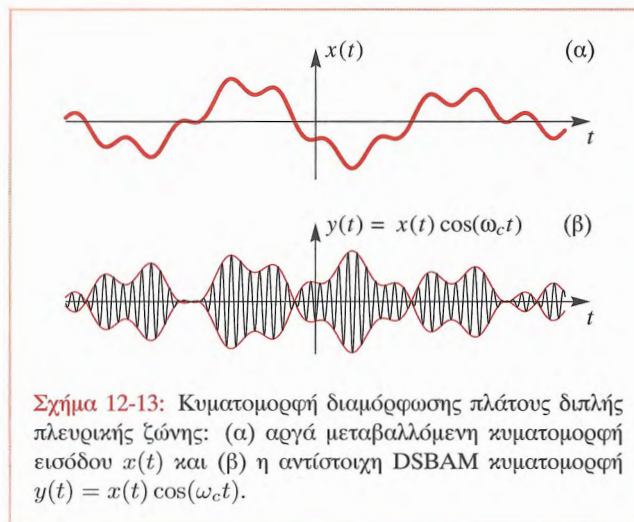
Όταν $p(t) = \cos(\omega_c t)$, το σύστημα διαμόρφωσης πλάτους που φαίνεται στο Σχήμα 12-12, περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση εισόδου-εξόδου:

$$\text{Ορισμός DSBAM} \quad y(t) = x(t) \cos(\omega_c t) \quad (12.22)$$

Για λόγους που σύντομα θα γίνουν ξεκάθαροι, το σύστημα του Σχήματος 12-12 ονομάζεται διαμορφωτής πλάτους διπλής πλευρικής ζώνης (DSBAM). Στα πλαίσια αυτά,



το $\cos(\omega_c t)$ ονομάζεται **φέρον**, το ω_c είναι η **συχνότητα φέροντος** και το $x(t)$ **σήμα διαμόρφωσης**. Όταν το $x(t)$ μεταβάλλεται αργά σε σχέση με το φέρον σήμα $\cos(\omega_c t)$, η Σχέση (12.22) απλά μας λέει ότι η $x(t)$ διαμορφώνει (μεταβάλλει) το πλάτος του φέροντος σήματος $\cos(\omega_c t)$. Το Σχήμα 12-13 επεξηγεί τη φύση της κυματομορφής του DSBAM στο πεδίο του χρόνου για ένα αργά μεταβαλλόμενο σήμα $x(t)$. Παρατηρήστε στη γραφική παράσταση του Σχήματος 12-13(β), ότι το φέρον ταλαντώνεται πολύ πιο γρήγορα από το σήμα διαμόρφωσης. Αυτό μας επιτρέπει να δούμε έναν **φωρατή** ο οποίος είναι μια ομαλή καμπύλη ανάμεσα στις κορυφές του $y(t)$. Ο φωρατής φανερώνει τη μεταβολή του $|x(t)|$,



όχι του $x(t)$, γιατί όταν το $x(t)$ είναι αρνητικό εισάγεται μια μετατόπιση φάσης κατά π . Αυτή την αλλαγή στη φάση μπορούμε να τη δούμε στο Σχήμα 12-13(β) τις χρονικές στιγμές που το $x(t)$ αλλάζει πρόσημο.

Άσκηση 12.6: Δείξτε ότι ο διαμορφωτής πλάτους είναι ένα γραμμικό σύστημα. Δείξτε επιπλέον ότι δεν είναι ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα.

Η αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας του διαμορφωτή πλάτους προκύπτει αν εκφράσουμε την $y(t)$ ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \cos(\omega_c t) \\ &= x(t) \left(\frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} x(t) e^{j\omega_c t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j\omega_c t} \end{aligned} \quad (12.23)$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα μετατόπισης στη συχνότητα σε κάθε όρο της Σχέσης (12.23), οδηγούμαστε στην ακόλουθη

σχέση:

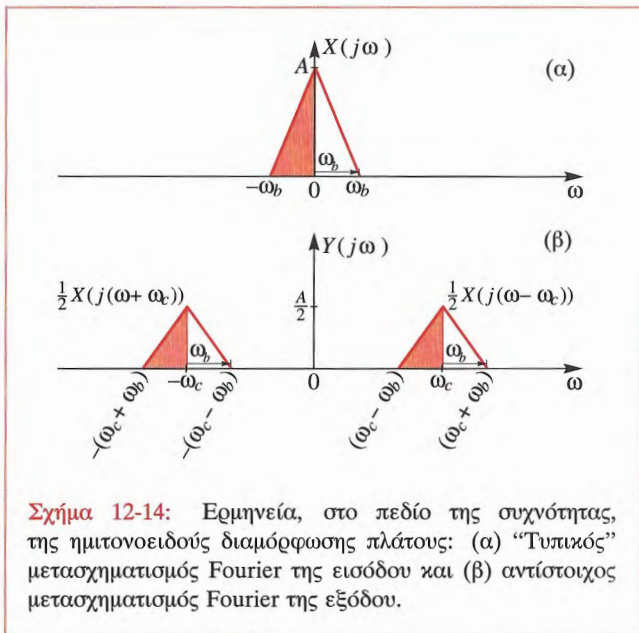
$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}X(j(\omega - \omega_c)) + \frac{1}{2}X(j(\omega + \omega_c)) \quad (12.24)$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του ημιτονοειδούς διαμορφωτή αποτελείται από δύο μετατοπισμένα στη συχνότητα αντίγραφα του μετασχηματισμού Fourier της εισόδου.



Άσκηση 12.7: Προσδιορίστε την αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας του DSBAM της Σχέσης (12.24) χρησιμοποιώντας τη γενική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού του μετασχηματισμού Fourier. Αυτό μπορεί να απαιτήσει τη συνέλιξη του $X(j\omega)$ με το μετασχηματισμό Fourier του $\cos(\omega_c t)$.

Στο Σχήμα 12-14 επεξηγείται το σύστημα DSBAM στο πεδίο της συχνότητας. Στο Σχήμα 12-14(α)



απεικονίζεται ένας “τυπικός” περιορισμένου εύρους ζώνης μετασχηματισμός Fourier $X(j\omega)$. Ο μετασχηματισμός αυτός είναι τυπικός με την έννοια ότι $X(j\omega) = 0$ για $|\omega| > \omega_b$. Προς το παρόν δεν μας απασχολεί ιδιαίτερα η ακριβής μορφή του μετασχηματισμού στις ζώνες $|\omega| < \omega_b$ και επομένως θα χρησιμοποιήσουμε, για ευκολία, ένα τριγωνικό σχήμα. Το βασικό στοιχείο είναι ότι τα σταθμισμένα αντίγραφα του $X(j\omega)$ είναι μετατοπισμένα στις θέσεις $\omega = \pm\omega_c$. Αν η $X(j\omega)$ είναι περιορισμένου εύρους ζώνης όπως αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 12-14(α), τότε τα αντίγραφα $\frac{1}{2}X(j(\omega \pm \omega_c))$ δεν επικαλύπτονται όταν προστίθενται. Επομένως, αυτά διατηρούν όλη την πληροφορία του αρχικού σήματος μ’ ένα ξεκάθαρο και αναγνωρίσιμο τρόπο όπως φαίνεται στο Σχήμα 12-14(β)². Η συνθήκη που εγγυάται ότι τα δύο αντίγραφα δεν θα επικαλύπτονται είναι η $(\omega_c - \omega_b) > 0$ ή ισοδύναμα $\omega_c > \omega_b$. Προσέξτε ότι έχουμε σκιασει το τμήμα του $X(j\omega)$ που αντιστοιχεί στην ημιευθεία των αρνητικών συχνοτήτων και έτσι μπορούμε να δούμε που μετακινήθηκε κάθε τμήμα του φάσματος. Ο μετασχηματισμός του Σχήματος 12-14(α) ονομάζεται φάσμα *βασικής ζώνης* γιατί είναι συμμετρικό με κέντρο τη συχνότητα $\omega = 0$.

Το Σχήμα 12-14(β) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξηγήσουμε γιατί αυτός ο τύπος διαμόρφωσης καλείται διαμόρφωση πλάτους διπλής πλευρικής ζώνης. Το φάσμα βασικής ζώνης περιέχει συχνότητες και στην αρνητική και στη θετική πλευρά οι οποίες ονομάζονται *πλευρικές ζώνες*. Όταν το σύστημα διαμόρφωσης πλάτους μετατοπίζει την $X(j\omega)$ στην ω_c μετακινούνται και οι δύο πλευρικές ζώνες. Η χαμηλότερη πλευρική ζώνη αντιστοιχεί στις αρνητικές συχνότητες της $X(j\omega)$ και η υψηλότερη πλευρική ζώνη αντιστοιχεί στις θετικές συχνότητες της $X(j\omega)$. Με τον ίδιο τρόπο οι δύο πλευρικές ζώνες μετατοπίζονται στη συχνότητα $-\omega_c$. Αυτό έχει αποτέλεσμα το φάσμα του Σχήματος 12-14(β) να καταλαμβάνει το διπλάσιο

²Σχήματα όπως αυτά του Σχήματος 12-14 είναι πολύ χρήσιμα για την κατανόηση των συστημάτων διαμόρφωσης, έτσι είναι καλή ιδέα να εξοικειωθούμε φτιάχνοντας σκίτσα αυτής της μορφής, δηλαδή αναπαριστώντας την $X(j\omega)$ με μια “τυπική” συνάρτηση περιορισμένου εύρους ζώνης όπως είναι η τριγωνική.

του εύρους συχνοτήτων του αρχικού φάσματος βασικής ζώνης. Αν και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη σπατάλη χώρου στο φάσμα συχνοτήτων, το DSBAM είναι δημοφιλές γιατί μπορεί να παραχθεί με ένα πολύ απλό σύστημα (Σχήμα 12-15). Από την άλλη μεριά, είναι δυνατόν να δημιουργήσουμε ένα σύστημα διαμόρφωσης πλάτους μονής πλευρικής ζώνης (SSBAM) που δεν απαιτεί επιπλέον συχνοτικό εύρος. Δείτε το Πρόβλημα.-12.4 στη Σελίδα 419.

Πριν προχωρήσουμε τη συζήτησή μας για τη διαμόρφωση πλάτους, πρέπει να απευθύνουμε την εύλογη ερώτηση γιατί ενδιαφερόμαστε για τη διαμόρφωση ενός ημιτονοειδούς σήματος με ένα άλλο σήμα $x(t)$. Η απάντηση είναι ότι τα σήματα βασικής ζώνης συχνοτήτων δεν μεταδίδονται πολύ μακριά, έχουν μικρή εμβέλεια μετάδοσης. Αν το $x(t)$ είναι για παράδειγμα ένα σήμα ομιλίας, ξέρουμε ότι ακόμα και στην περίπτωση που θα φωνάζαμε δεν μπορεί να μας ακούσει κάποιος που βρίσκεται σε μια μεγάλη απόσταση από εμάς. Όμως με το DSBAM αυτό το ίδιο ηχητικό σήμα μπορεί να μετατραπεί σε μια πολύ υψηλή συχνότητα φέροντος και να μεταδοθεί σε μια απομακρυσμένη θέση χρησιμοποιώντας ηλεκτρομαγνητικά κύματα (ραδιοκύματα). Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να πάρουμε ένα σήμα ομιλίας του οποίου το φάσμα συγκεντρώνεται σε συχνότητες κάτω των 5KHz (μετά το φίλτράρισμά του από ένα φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων) και να δημιουργήσουμε ένα σήμα του οποίου το φάσμα συγκεντρώνεται σε μια ζώνη εύρους 10KHz γύρω από μια αρκετά υψηλότερη συχνότητα όπως τα 750KHz η οποία είναι μία εκχωρημένη συχνότητα μετάδοσης σημάτων AM. Σε αυτή τη μορφή το σήμα μπορεί να μεταδοθεί για χιλιάδες μίλια. Εφόσον η διαμόρφωση πλάτους μετακινεί το φάσμα του σήματος σε μια καινούργια ζώνη συχνοτήτων και αφού η αναπαράσταση του αρχικού μετασχηματισμού Fourier φαίνεται να διατηρείται και στην $Y(j\omega)$, θα πρέπει να είναι δυνατή η ανάκτηση του αρχικού σήματος από το σήμα $y(t)$ επαναφέροντάς το στη βασική ζώνη συχνοτήτων. Ένα δεύτερο πλεονέκτημα του διαμορφωμένου σήματος είναι ότι ένα μονό κανάλι μετάδοσης μπορεί να μοιραστεί σε πολλά σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης αν σε διαφορετικούς πομπούς εκχωρηθούν

διαφορετικές συχνότητες φέροντος. Θα συζητήσουμε αυτό το σύστημα εκχώρησης συχνοτήτων περαιτέρω στην Ενότητα 12-2.3. Προς το παρόν θα επιστρέψουμε στην ανάλυση του συστήματος DSBAM.

Η διαδικασία της ανάκτησης του αρχικού σήματος $x(t)$ από το διαμορφωμένο σήμα $y(t)$ ονομάζεται *αποδιαμόρφωση*. Η δυνατότητα ανάκτησης του σήματος είναι αυτό που κάνει τα ραδιοφωνικά συστήματα μετάδοσης εφικτά. Για να ανακτήσουμε το σήμα $x(t)$ πρέπει να επαναφέρουμε τα αντίγραφα του μετασχηματισμού Fourier στη βασική ζώνη. Αυτό μπορεί να γίνει πολλαπλασιάζοντας ξανά με $\cos(\omega_c t)$ και φιλτράροντας στη συνέχεια το αποτέλεσμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 12-15. Για να δούμε τον τρόπο λειτουργίας του συστήματος του Σχήματος 12-15, παρατηρήστε ότι αφού $w(t) = y(t) \cos(\omega_c t)$, έπεται ότι η $W(j\omega)$ έχει δύο αντίγραφα της $Y(j\omega)$, δηλαδή,

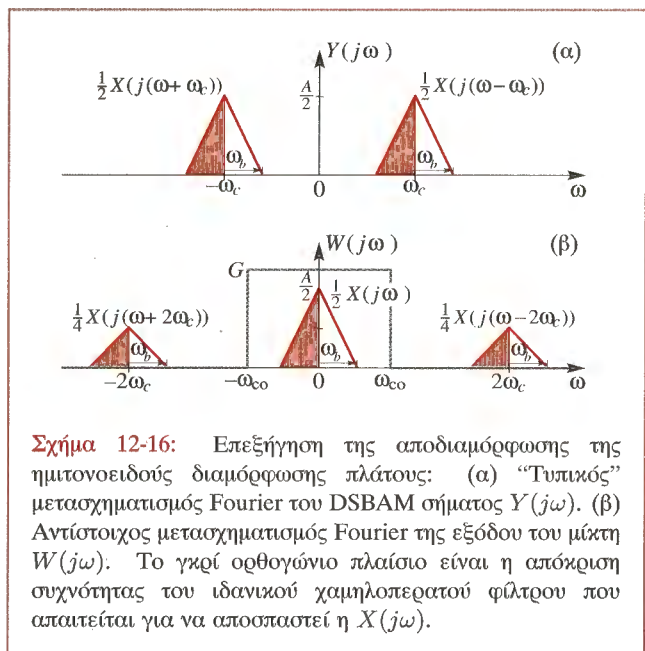
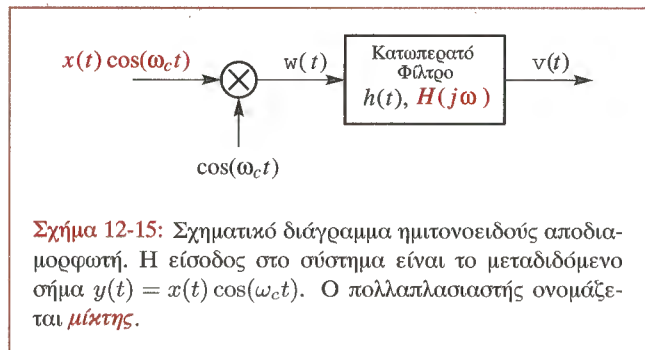
$$W(j\omega) = \frac{1}{2}Y(j(\omega - \omega_c)) + \frac{1}{2}Y(j(\omega + \omega_c))$$

Από την αντικατάσταση στη Σχέση (12.24) του $Y(j\omega)$ προκύπτει ότι η $W(j\omega)$ περιλαμβάνει *τρία αντίγραφα* του $X(j\omega)$

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \\ & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}X(j(\omega - \omega_c - \omega_c)) + \frac{1}{2}X(j(\omega - \omega_c + \omega_c)) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}X(j(\omega + \omega_c - \omega_c)) + \frac{1}{2}X(j(\omega + \omega_c + \omega_c)) \right] \\ & = \frac{1}{4}X(j(\omega - 2\omega_c)) + \frac{1}{2}X(j\omega) + \frac{1}{4}X(j(\omega + 2\omega_c)) \end{aligned} \quad (12.25)$$

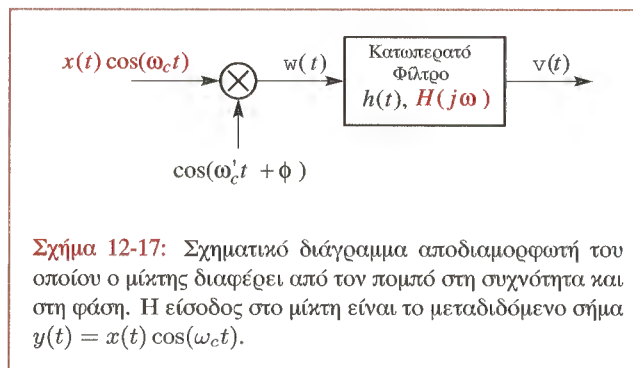
Το Σχήμα 12-16(α) δείχνει την $Y(j\omega)$ και το Σχήμα 12-16(β) δείχνει την $W(j\omega)$ του παραδείγματος που εξηγήθηκε στο Σχήμα 12-14. Παρατηρήστε ότι η $W(j\omega)$ περιλαμβάνει τον όρο βασικής ζώνης $\frac{1}{2}X(j\omega)$. Αν τώρα ικανοποιείται η συνθήκη $(2\omega_c - \omega_b) > \omega_b$, ή ισοδύναμα $\omega_c > \omega_b$, είναι δυνατόν να αποσπάσουμε την $X(j\omega)$ με ένα ιδανικό φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων του τύπου:

$$H(j\omega) = \begin{cases} G & -\omega_{co} \leq \omega \leq \omega_{co} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (12.26)$$



όπου το κέρδος του φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων θα είναι $G = 2$ και η συχνότητα αποκοπής θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $\omega_b < \omega_{co} < 2\omega_c - \omega_b$. Προσέξτε ότι αν και η όλη ανάλυση που μας οδήγησε στη σχέση $V(j\omega) = X(j\omega)$ έγινε στο πεδίο της συχνότητας, είναι προφανές ότι θα ισχύει και η σχέση $v(t) = x(t)$.


Αν και έχουμε δείξει ότι μπορούμε να διαμορφώνουμε και να αποδιαμορφώνουμε ένα σήμα $x(t)$ πάνω σε ένα ημιτονοειδές φέρον, έχουμε παραβλέψει πολλά πρακτικά ζητήματα. Πιο σημαντικό είναι το γεγονός ότι είναι εξαιρετικά δύσκολο να συγχρονίσουμε τις συχνότητες και τις φάσεις δύο ημιτονοειδών ταλαντωτών οι οποίοι δεν βρίσκονται στην ίδια φυσική θέση. Αυτό διευκρινίζεται στο σύστημα διαμόρφωσης/αποδιαμορφωσης του Σχήματος 12-17, το οποίο δείχνει τη γενική περίπτωση κατά την οποία οι συχνότητες φέροντος στο διαμορφωτή (στον πομπό) και στο μίκτη (στο δέκτη) είναι διαφορετικές. Επίσης θα μπορούσε να υπάρχει και μια σχετική μετακίνηση φάσης ϕ ανάμεσα στα δύο φέροντα. Για να εξηγήσουμε τα προβλήματα που υπάρχουν στο Σχήμα 12-17, θα παρουσιάσουμε δύο αποτελέσματα με τη μορφή ασκήσεων.



Άσκηση 12.8: Θεωρήστε την ειδική περίπτωση της εισόδου περιορισμένου εύρους ζώνης όπου $X(j\omega) = 0$ για $|\omega| > \omega_b$, και $\omega_c > \omega_b$. Αν δεν υπάρχει καμία διαφορά στη συχνότητα ανάμεσα στον πομπό και στο δέκτη, δηλαδή, $\omega_c = \omega_c'$, αλλά υπάρχει μια διαφορά φάσης, $\phi \neq 0$, δείξτε ότι η $v(t)$ στο Σχήμα 12-17 είναι:

$$v(t) = x(t) \cos \phi \quad (12.27)$$

Το αποτέλεσμα της Άσκησης 12.8 μας λέει ότι αν τα φέροντα του Σχήματος 12-17 έχουν την ίδια συχνότητα, αλλά είναι εκτός φάσης, η έξοδος θα είναι ανάλογη του $x(t)$, αλλά με μια σταθερά αναλογίας που εξαρτάται από το ϕ . Για παράδειγμα αν $\phi = 0$ τα φέροντα είναι συγχρονισμένα ακριβώς και παίρνουμε το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, δηλαδή, $v(t) = x(t)$. Όμως αν $\phi = \pi/2$ δεν λαμβάνουμε έξοδο, δηλαδή $v(t) = 0$ η οποία είναι μη αποδεκτή. Σε μερικές περιπτώσεις η διαφορά φάσης μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο έτσι ώστε το πλάτος να εμφανίζεται και να εξαφανίζεται ανάλογα με τη στιγμιαία τιμή της ϕ .

 **Άσκηση 12.9:** Δείξτε ότι αν $\phi = 0$, αλλά $\omega_c - \omega'_c = \Delta$, τότε για εισόδους περιορισμένου εύρους ζώνης για τις οποίες $\omega_c > \omega_b$ η έξοδος του αποδιαμορφωτή είναι

$$v(t) = x(t) \cos(\Delta t) \quad (12.28)$$

Για να οδηγηθούμε στο παραπάνω αποτέλεσμα, υποθέσαμε ότι η συχνότητα αποκοπής του φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων στη Σχέση (12.26) ικανοποιεί τη σχέση $\omega_{co} > \omega_b + \Delta$.

Από τη Σχέση (12.28) βλέπουμε ότι αν τα φέροντα δεν είναι ακριβώς συγχρονισμένα στη συχνότητα, ο μετασχηματισμός Fourier του $v(t)$ δεν ταυτίζεται με το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $x(t)$ όπως αναμέναμε. Στο πεδίο του χρόνου αυτό το φαινόμενο περιγράφεται εύκολα αν το Δ είναι μικρό. Συγκεκριμένα, θα είναι παρόμοιο με το φαινόμενο του διακροτήματος που συζητήθηκε στο Κεφάλαιο 3, κατά το οποίο ο παράγοντας $\cos(\Delta t)$ θα επιδράσει ως ένα αργά μεταβαλλόμενο πλάτος προκαλώντας το σήμα $x(t)$ να εμφανίζεται και να εξαφανίζεται με ένα ρυθμό που καθορίζεται από το Δ .

Οι Εξισώσεις (12.27) και (12.28) δείχνουν ότι οποιαδήποτε προσπάθεια για να αποδιαμορφώσουμε χρησιμοποιώντας συγχρονισμένα φέροντα παρουσιάζει μερικά πρακτικά προβλήματα. Για το λόγο αυτό στα συστήματα

μετάδοσης AM, χρησιμοποιείται ένας άλλος τύπος διαμόρφωσης πλάτους που μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε πολύ οικονομικούς δέκτες.

12-2.2 Σύστημα Διαμόρφωσης DSBAM με Μεταδιδόμενο Φέρον (DSBAM-TC)

Ένας τρόπος για να αποφύγουμε τα προβλήματα της σύγχρονης αποδιαμόρφωσης των AM σημάτων, είναι να μεταδίδουμε το φέρον σήμα μαζί με το διαμορφωμένο φέρον. Η σχέση εισόδου-εξόδου για ένα DSBAM σύστημα με μεταδιδόμενο φέρον (DSBAM-TC) είναι η ακόλουθη

$$\text{Ορισμός του DSBAM-TC} \quad (12.29)$$

$$y(t) = [C + x(t)] \cos(\omega_c t)$$

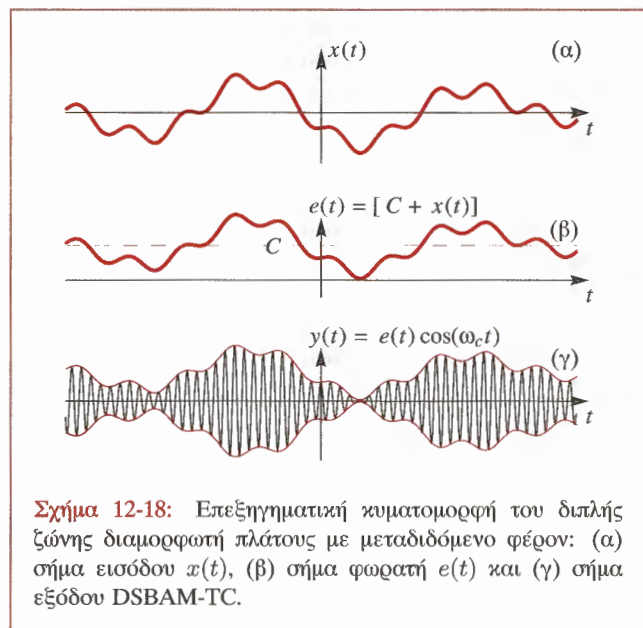
Η σταθερά C επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση $C \geq \max\{|x(t)|\}$ και επομένως $C + x(t) \geq 0$ για κάθε t . Αν ορίσουμε $e(t) = C + x(t)$, τότε η $e(t)$ είναι ο φωρατής των κορυφών του διαμορφωμένου συνημιτονοειδούς κύματος γιατί είναι μη αρνητική. Το Σχήμα 12-18 επεξηγεί τη διαδικασία της διαμόρφωσης DSBAM-TC ενός σήματος $x(t)$ στο πεδίο του χρόνου.

Το Σχήμα 12-18(α) δείχνει ένα σήμα $x(t)$, το Σχήμα 12-18(β) δείχνει την αντίστοιχη θετική συνάρτηση του φωρατή $e(t)$ και το Σχήμα 12-18(γ) δείχνει το σήμα που προκύπτει στην έξοδο του αποδιαμορφωτή $y(t)$. Αν κάνουμε πράξεις στη Σχέση (12.29), θα πάρουμε

$$y(t) = C \cos(\omega_c t) + x(t) \cos(\omega_c t) \quad (12.30)$$

η οποία δείχνει ότι το σήμα DSBAM-TC περιέχει ένα συνημίτονο με πλάτος C και έναν όρο ο οποίος ταυτίζεται με το σήμα DSBAM. Έτσι εξηγείται γιατί αυτός ο τύπος διαμόρφωσης ονομάζεται *διαμόρφωση πλάτους διπλής πλευρικής ζώνης με μεταδιδόμενο φέρον*. Προσέξτε ότι σ' αυτήν την περίπτωση το σήμα $y(t)$ είναι διάφορο του μηδενός ακόμη και αν $x(t) = 0$.

 **Άσκηση 12.10:** Δείξτε ότι το σύστημα διαμόρφωσης DSBAM-TC που ορίζεται από τη Σχέση



εισόδου/εξόδου (12.29) δεν είναι ένα γραμμικό σύστημα και ότι επίσης δεν είναι ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα.

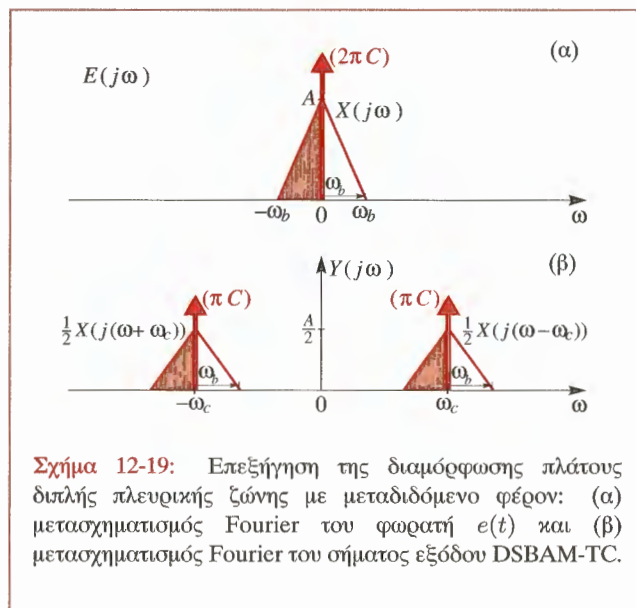
Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος φώρασης $e(t) = C + x(t)$ είναι

$$E(j\omega) = 2\pi C\delta(\omega) + X(j\omega) \quad (12.31)$$

Από τη Σχέση (12.29), την ιδιότητα της μετατόπισης συχνότητας και τη Σχέση (12.31) έπεται ότι

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{2}E(j(\omega - \omega_c)) + \frac{1}{2}E(j(\omega + \omega_c)) \\ &= \pi C\delta(\omega - \omega_c) + \pi C\delta(\omega + \omega_c) \\ &\quad + \frac{1}{2}X(j(\omega - \omega_c)) + \frac{1}{2}X(j(\omega + \omega_c)) \end{aligned} \quad (12.32)$$

Το Σχήμα 12-19 απεικονίζει το μετασχηματισμό Fourier ενός AM σήματος μεταδιδόμενου φέροντος. Το Σχήμα 12-19 (α) απεικονίζει την $E(j\omega)$ ως το άθροισμα του μετασχηματισμού μιας τυπικής εισόδου περιορισμένου



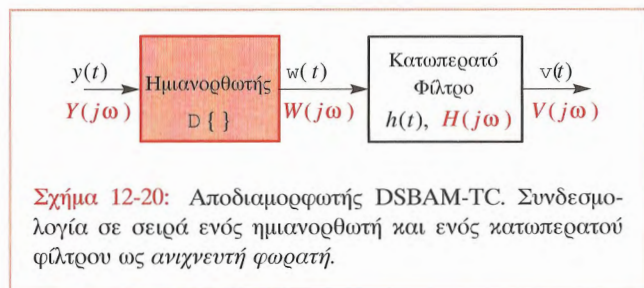
εύρου ζώνης και της κρουστικής συνάρτησης που οφείλεται στη σταθερά C , ενώ στο Σχήμα 12-19 (β) απεικονίζεται το μετατοπισμένο φάσμα συχνοτήτων του σήματος DSBAM-TC.

Άσκηση 12.11: Δείξτε ότι αν η $y(t) = [C + x(t)] \cos(\omega_c t)$ είναι η είσοδος του αποδιαμορφωτή του Σχήματος 12-15, τότε η έξοδος του θα πρέπει να δίνεται από τη σχέση $v(t) = C + x(t)$.

Στην Άσκηση 12.11 μπορείτε να δείξετε ότι το σήμα φωρατή $e(t)$ σε ένα DSBAM-TC σήμα μπορεί να αποδιαμορφωθεί με σύγχρονη αποδιαμόρφωση. Ωστόσο αυτό είναι ακριβώς που προσπαθούμε να αποφύγουμε. Εκπέμποντας το φέρον σήμα και εξασφαλίζοντας ότι ο φωρατής $e(t)$ είναι πάντα μη αρνητικός, μπορούμε να αποδιαμορφώσουμε με ένα πιο απλό σύστημα, όπως είναι ο **ανιχνευτής φωρατή** του Σχήματος 12-20 που αποτελείται από ένα σύστημα ημιανόρθωσης ακολουθούμενο από ένα

φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων. Το σύστημα ημιανόρθωσης κύματος στο Σχήμα 12-20 ορίζεται από τη σχέση:

$$w(t) = \mathcal{D}\{y(t)\} = \begin{cases} y(t) & \text{if } y(t) > 0 \\ 0 & \text{if } y(t) \leq 0 \end{cases} \quad (12.33)$$

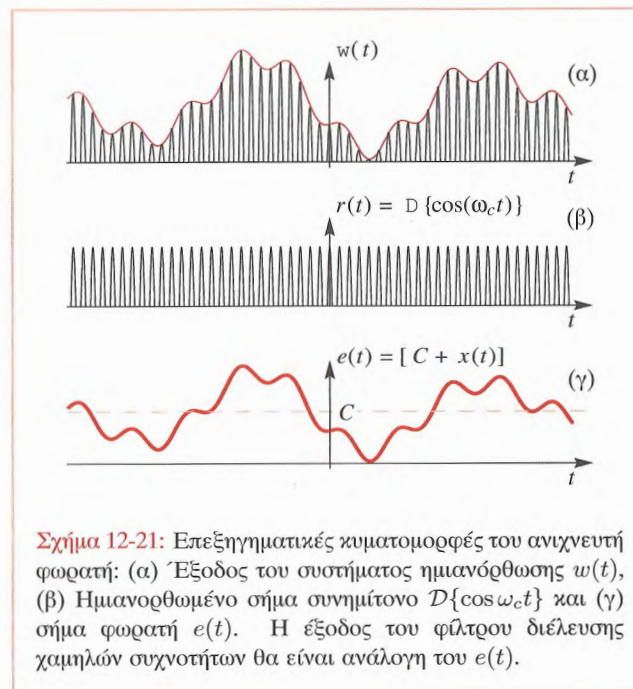


Άσκηση 12.12: Δείξτε ότι το σύστημα ημιανόρθωσης είναι μη γραμμικό σύστημα.

Το σύστημα ημιανόρθωσης “κόβει” τα αρνητικά τμήματα της κυματομορφής εισόδου, αφήνοντας έτσι ένα θετικό σήμα. Αφού η $e(t) \geq 0$ για όλα τα t , ο φωρατής του σήματος εξόδου του συστήματος ημιανόρθωσης είναι επίσης ο επιθυμητός φωρατής $e(t)$. Αυτό εξηγείται στο Σχήμα 12-21(α), το οποίο απεικονίζει την έξοδο του συστήματος ημιανόρθωσης για το DSBAM-TC σήμα που φαίνεται στο Σχήμα 12-18(γ).

Ας προχωρήσουμε τώρα στην ανάλυση του ανιχνευτή φωρατή του DSBAM-TC για να δείξουμε πώς ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να εξηγήσει τις εσωτερικές λειτουργίες αυτού του συστήματος. Η έξοδος του συστήματος ημιανόρθωσης για την DSBAM-TC κυματομορφή είναι

$$w(t) = \mathcal{D}\{y(t)\} = \mathcal{D}\{e(t) \cos \omega_c t\} \quad (12.34)$$



Επειδή $e(t) \geq 0$, η $e(t)$ δεν παίζει κανένα ρόλο στον καθορισμό του προσήμου της $y(t)$ και η Σχέση (12.34) μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

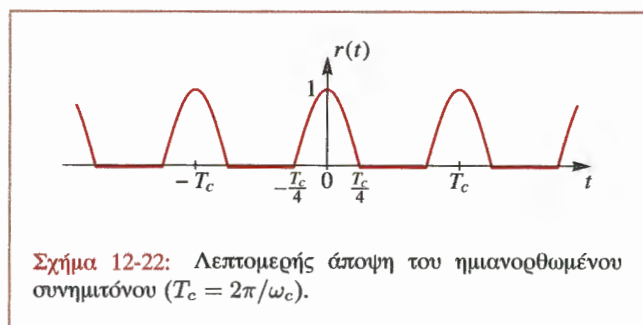
$$w(t) = e(t) \mathcal{D}\{\cos \omega_c t\} = e(t)r(t) \quad (12.35)$$

όπου $r(t)$ είναι ένα περιοδικό ημιανορθωμένο συνημίτονο

$$r(t) = \mathcal{D}\{\cos \omega_c t\}$$

που φαίνεται στο Σχήμα 12-21(β). Το Σχήμα 12-22 παρέχει μια πιο λεπτομερή αναπαράσταση της ανορθωμένης συνημιτονοειδούς κυματομορφής. Αφού το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T_c = 2\pi/\omega_c$, μπορούμε να το γράψουμε σε μορφή σειράς Fourier:

$$r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_c t} \quad (12.36)$$



Άσκηση 12.13: Δείξτε ότι οι συντελεστές Fourier του ημιανορθωμένου συνημιτονοειδούς κύματος δίνονται από τη σχέση:

$$a_k = \frac{1}{T_c} \int_{-T_c/4}^{T_c/4} \cos(\omega_c t) e^{-jk\omega_c t} dt$$

$$= \begin{cases} \frac{\cos(\pi k/2)}{\pi(1-k^2)} & k \neq \pm 1 \\ \frac{1}{4} & k = \pm 1 \end{cases} \quad (12.37)$$

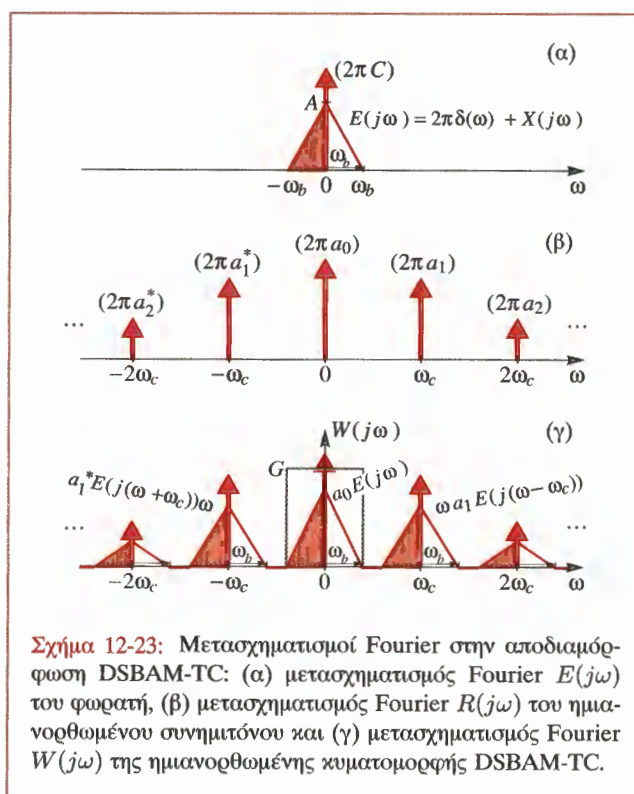
Τώρα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της εξόδου του συστήματος ημιανόρθωσης. Χρησιμοποιώντας τη σειρά Fourier (12.37) του σήματος $r(t)$, μπορούμε να γράψουμε

$$w(t) = e(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_c t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e(t) e^{jk\omega_c t} \quad (12.38)$$

Από τη σχέση αυτή και την ιδιότητα μετατόπισης στη συχνότητα, προκύπτει ότι:

$$W(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k E(j(\omega - k\omega_c)) \quad (12.39)$$

Το Σχήμα 12-23(α) δείχνει ένα τυπικό μετασχηματισμό Fourier ενός περιορισμένου εύρους ζώνης σήματος φωρατή



$e(t) = C + x(t)$. Η κρουστική συνάρτηση είναι ο μετασχηματισμός Fourier της σταθεράς C και το τρίγωνο αναπαριστά την $X(j\omega)$, το μετασχηματισμό Fourier του $x(t)$. Το Σχήμα 12-23(β) είναι μια γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Fourier $R(j\omega)$ που προκύπτει από τη σειρά Fourier της Σχέσης (12.37). Το Σχήμα 12-23(γ) απεικονίζει τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Fourier $W(j\omega)$ της εξόδου του ημιανορθωτή που αποτελείται από μετατοπισμένα, στη συχνότητα, και κατάλληλα σταθμισμένα αντίγραφα του $E(j\omega)$. Παρατηρήστε ότι αν $\omega_c - \omega_b > \omega_b$, μια συνθήκη η οποία ικανοποιείται εύκολα σ' ένα σύστημα μετάδοσης AM, τότε η $W(j\omega)$ περιέχει ένα πιστό αντίγραφο της $E(j\omega)$, το οποίο μπορεί να αποσπαστεί χρησιμοποιώντας ένα φίλτρο διέλευσης

χαμηλών συχνοτήτων $H(j\omega)$ με κέρδος $G = 1/a_0 = \pi$ και συχνότητα αποκοπής τέτοια ώστε $\omega_b < \omega_c < \omega_c - \omega_b$. Ένα παράδειγμα μιας κατάλληλης $H(j\omega)$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 12-23(γ) σαν ένα γκρι ορθογώνιο πλαίσιο. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του κατωπερατού φίλτρου του Σχήματος 12-20 θα είναι $V(j\omega) = E(j\omega)$ και έτσι η χρονική συνάρτηση της εξόδου θα είναι $v(t) = e(t) = C + x(t)$. Έτσι ο ανιχνευτής φωρατή μπορεί να ανακτήσει το σήμα εισόδου $x(t)$ συν μια προσθετική σταθερά.

Στην πράξη, ο συνδυασμός του ημιανορθωτή και του φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων προσεγγίζονται πολύ καλά από ένα ηλεκτρονικό κύκλωμα που αποτελείται μόνο από μια δίοδο, μια αντίσταση και ένα πυκνωτή. Για το λόγο αυτό οι AM δέκτες μπορούν να κατασκευαστούν με πολύ μικρό κόστος και έτσι εξηγείται γιατί το DSBAM-TC χρησιμοποιούνταν για χρόνια στο σύστημα μετάδοσης AM. Υπάρχει ένα μειονέκτημα, ωστόσο, γιατί το DSBAM-TC απαιτεί επιπλέον ισχύ για να εκπέμψει το φέρον σήμα.

12-2.3 Πολύπλεξη Διάρθρωσης Συχνότητας

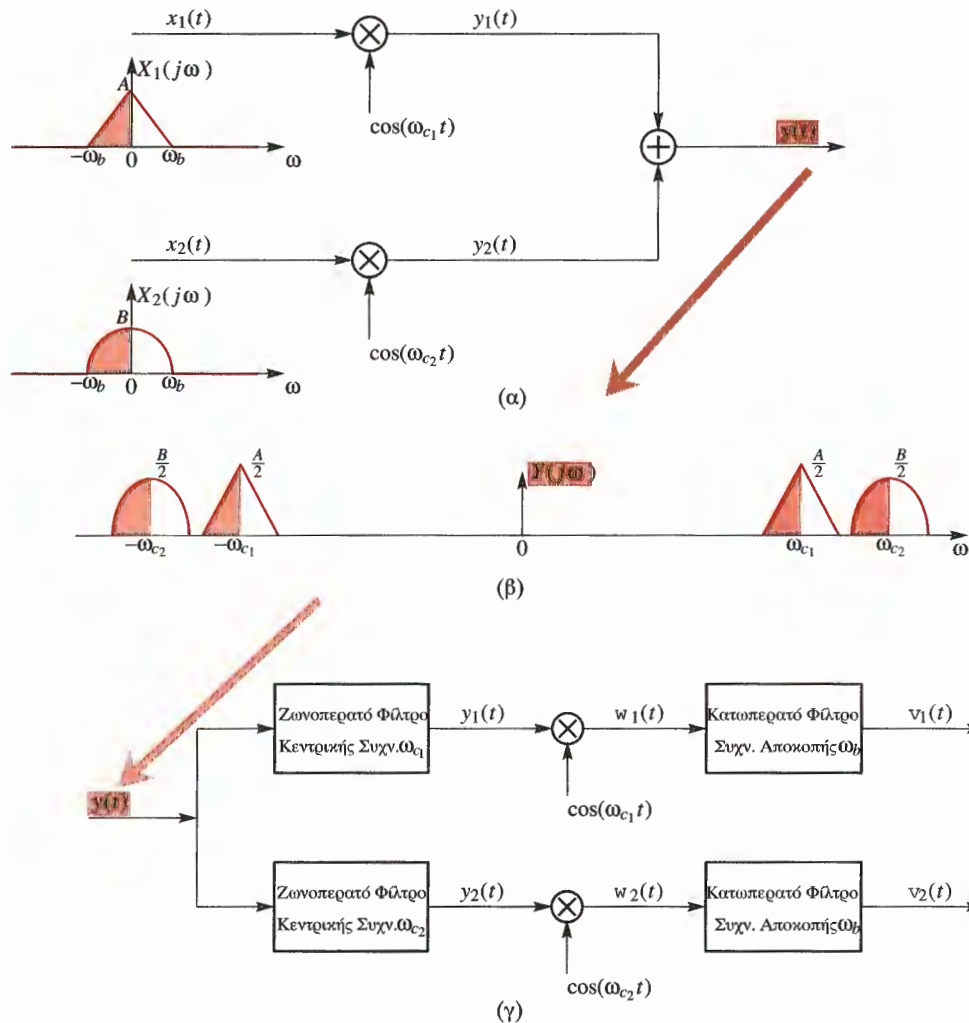
Στις Ενότητες 12-2.1 και 12-2.2 δείξαμε ότι το φάσμα Fourier ενός περιορισμένου εύρους ζώνης σήματος μπορεί να μετατοπιστεί με διαμόρφωση πλάτους σε μια ζώνη υψηλότερων συχνοτήτων όπως απαιτείται για τη ραδιοφωνική μετάδοση ομιλίας, μουσικής, ή δεδομένων. Μια δεύτερη, και ίσως ίδιας σημαντικότητας, όψη αυτής της ιδιότητας είναι ότι επιλέγοντας διάφορες συχνότητες φέροντος, έτσι ώστε τα μετατοπισμένα φάσματα από δύο ή περισσότερα σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης να μην επικαλύπτονται, μπορούμε να μεταδώσουμε ένα μεγάλο αριθμό σημάτων πάνω στο ίδιο κανάλι (π.χ. την ατμόσφαιρα, το μεσοαστρικό διάστημα, ή το καλώδιο οπτικής ίνας). Αυτή η σώρευση των σημάτων στο πεδίο της συχνότητας ονομάζεται *πολύπλεξη διάρθρωσης συχνότητας* ή *FDM*³. Η ουσία της πολύπλεξης διάρθρωσης συχνότητας απεικονίζεται στο Σχήμα 12-24, το οποίο δείχνει δύο σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης που διαμορφώνουν διαφορετικά

³ Στην οπτική, ο όρος πολύπλεξη διάρθρωσης μήκους κύματος (WDM) είναι ισοδύναμος με τον όρο FDM.

ημιτονοειδή φέροντα με συχνότητες ω_{c1} και ω_{c2} . Το ζευγάρι των DSBAM σημάτων $y_1(t) = x_1(t) \cos(\omega_{c1}t)$ και $y_2(t) = x_2(t) \cos(\omega_{c2}t)$ προστίθενται και επομένως προστίθενται και οι μετασχηματισμοί Fourier αυτών των σημάτων⁴. Η γραφική παράσταση του Σχήματος 12-24(β) απεικονίζει τον προκύπτοντα μετασχηματισμό Fourier $Y(j\omega) = Y_1(j\omega) + Y_2(j\omega)$. Παρατηρήστε ότι τα αντίγραφα των αρχικών περιορισμένου εύρους ζώνης μετασχηματισμών Fourier, δεν επικαλύπτονται όσο ικανοποιούμε τη συνθήκη $\omega_{c2} > \omega_{c1} + 2\omega_b$. Ο λόγος που απαιτούμε να μην επικαλύπτονται τα μετατοπισμένα φάσματα των σημάτων εισόδου, είναι γιατί θέλουμε να είναι δυνατό να ανακτήσουμε τα σήματα $y_1(t)$ και $y_2(t)$ από το άθροισμά τους. Η διαδικασία διαχωρισμού των σημάτων ονομάζεται *αποπολύπλεξη*. Εάν τα μετατοπισμένα φάσματα δεν επικαλύπτονται η αποπολύπλεξη μπορεί να επιτευχθεί με φίλτρα διέλευσης ζώνης συχνοτήτων όπως αυτά του Σχήματος 12-24(γ). Για παράδειγμα, για να ανακτήσουμε το σήμα $x_1(t)$ χρειαζόμαστε το ζωνοπερατό φίλτρο του Σχήματος 12-25(α), το οποίο επιλέγει το κανάλι που περιέχει τη φασματική πληροφορία του σήματος $y_1(t)$. Μόλις το σήμα $y_1(t)$ αποσπαστεί από το $y(t)$ μπορούμε να την αποδιαμορφώσουμε με ένα κατάλληλο αποδιαμορφωτή. Στο Σχήμα 12-24 θεωρούμε ότι έχουμε DSBAM αποδιαμορφωση. Αν όμως χρησιμοποιηθεί DSBAM-TC, τότε ο αποδιαμορφωτής θα πρέπει να είναι ένας ανιχνευτής φωρατή. Στο Σχήμα 12-24(γ), το δεύτερο κανάλι έχει αποπολύπλεχθεί από το φίλτρο του Σχήματος 12-25(β) ακολουθούμενο από τον DSBAM αποδιαμορφωτή.

Το σύστημα του Σχήματος 12-24 μπορεί να γενικευτεί σε περισσότερα από δύο κανάλια συμπεριλαμβανοντας απλά περισσότερες συχνότητες φέροντος. Οι συχνότητες φέροντος ενός FDM συστήματος για πολύπλεξη δύο ή περισσότερων σημάτων με το καθένα να έχει υψηλότερη συχνότητα ω_b (χρησιμοποιώντας διαμόρφωση πλάτους)

⁴ Στη ραδιομετάδοση, τα σήματα είναι υπερθεμένα με φυσικό τρόπο διότι κάθε σταθμός εκπέμπει το σήμα του στην ατμόσφαιρα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το μέσο μετάδοσης είναι γραμμικό και επομένως τα σήματα προστίθενται.

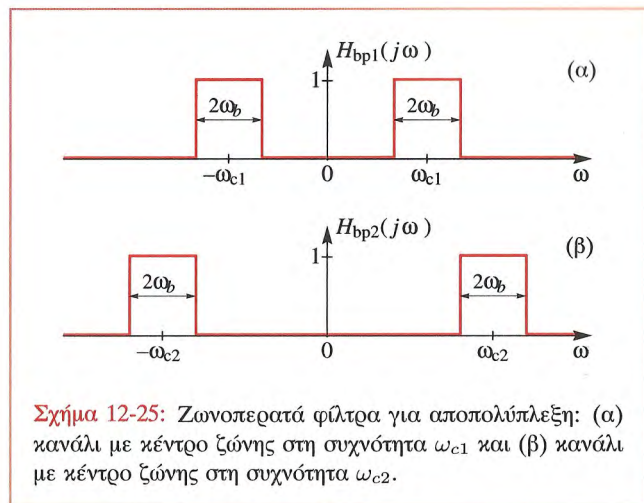


Σχήμα 12-24: Πολύπλεξη Διάρεσης Συχνότητας. Οι συχνότητες φέροντος πρέπει να απέχουν αρκετά μεταξύ τους έτσι ώστε τα μεταπορισμένα φάσματα από τα οποία συντίθεται η $Y(j\omega)$ να μην επικαλύπτονται.

πρέπει να ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη:

$$\omega_{c(k+1)} > \omega_{ck} + 2\omega_b$$

Ο κανονισμός επικοινωνιών κάθε χώρας, δεσμεύει τμήματα του άξονα των συχνοτήτων για συγκεκριμένες



εφαρμογές και τεχνικές διαμόρφωσης. Για παράδειγμα, η επιτρεπτή ζώνη συχνοτήτων για τις συχνότητες φέροντος του συστήματος μετάδοσης AM, οριοθετείται από 530 kHz μέχρι 1620 kHz με τα κανάλια (ραδιοφωνικοί σταθμοί AM) να απέχουν μεταξύ τους 10 kHz. Αυτό σημαίνει ότι τα προς μετάδοση σήματα ομιλίας και μουσικής θα πρέπει πριν από την διαμόρφωση, να είναι περιορισμένου εύρους ζώνης με ονομαστική συχνότητα 5 kHz. Στην περίπτωση της FM μετάδοσης, η επιτρεπτή ζώνη συχνοτήτων για τις συχνότητες φέροντος, οριοθετείται από 88,1 MHz μέχρι 107,9 MHz και τα σήματα εισόδου σε έναν FM διαμορφωτή είναι περιορισμένου εύρους ζώνης στα 15 kHz. Η διαδικασία της FM διαμόρφωσης διευρύνει το εύρος ζώνης και μετατοπίζει το διευρυμένο φάσμα γύρω από την συχνότητα φέροντος. Επομένως, είναι αναγκαίο τα κανάλια FM να απέχουν μεταξύ τους 200kHz έτσι ώστε τα διευρυμένα φάσματα των μεταδιδόμενων σημάτων να μην επικαλύπτονται και να μπορούν να αποπολυπλεχθούν με ζωνοδιαβατό φιλτράρισμα. Στις εφαρμογές μετάδοσης όπως αυτές που αναφέραμε, ο ακροατής πρέπει να “συντονίζεται” σε ένα κανάλι κάθε φορά. Επομένως, ο αποπολυπλέκτης γενικά αποτελείται από ένα απλό ζωνοδιαβατό φίλτρο, του οποίου η κεντρική

συχνότητα μπορεί να ρυθμιστεί στην επιθυμητή συχνότητα φέροντος.



Εργ. Ασκ.: #16 Σύστημα Επικοινωνίας AM

12-3 Δειγματοληψία και Ανακατασκευή

Μέχρι το σημείο αυτό, έχουμε κατανοήσει ικανοποιητικά το μετασχηματισμό Fourier ώστε να μπορούμε να κάνουμε μια εκτενή συζήτηση της δειγματοληψίας και της ανακατασκευής των σημάτων περιορισμένου εύρους ζώνης. Όπως και στην περίπτωση της ημιτονοειδούς διαμόρφωσης, η ανάλυσή μας θα βασιστεί στις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού, της μετατόπισης συχνότητας και της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς-χρόνου.

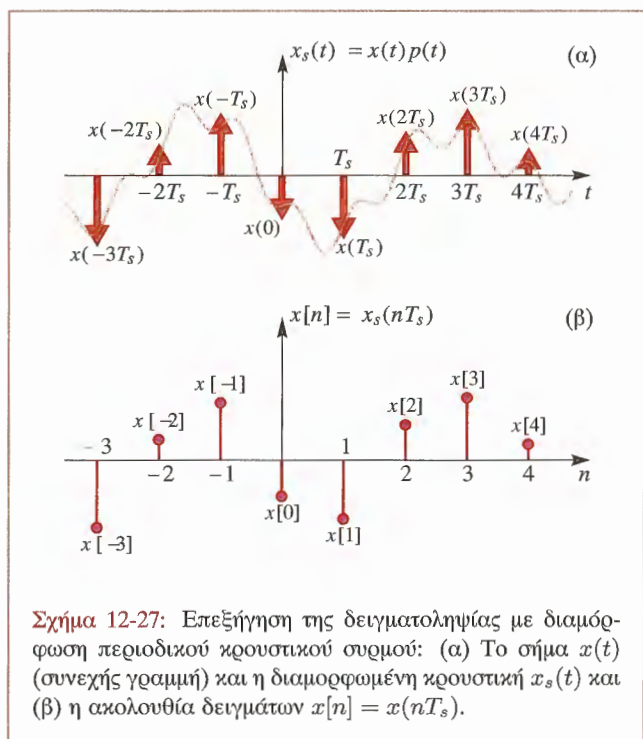
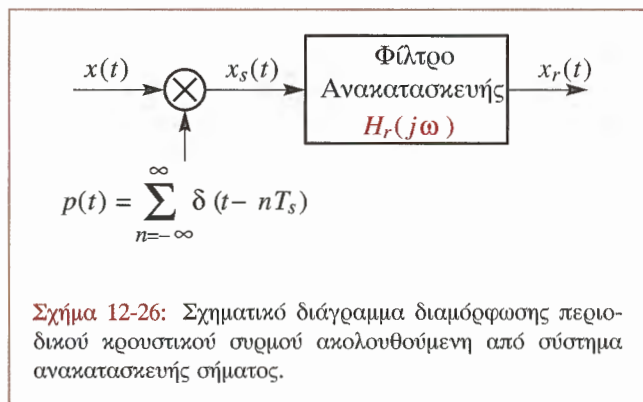
12-3.1 Το θεώρημα Δειγματοληψίας και το Φαινόμενο της Ψευδωνυμίας

Στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάστηκε για πρώτη φορά το θεώρημα δειγματοληψίας των Shannon/Nyquist. Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε αυτό το τόσο σημαντικό θεώρημα, ακολουθώντας μια κάπως έμμεση προσέγγιση. Καταρχήν, πρέπει να αποδείξουμε ότι η δειγματοληψία είναι ισοδύναμη με τη διαμόρφωση πλάτους μιας περιοδικής κρουστικής σειράς. Το σήμα $x(t)$ του Σχήματος 12-26 που θα δειγματοληφθεί, πολλαπλασιάζει τον κρουστικό συρμό $p(t)$ για να προκύψει το ακόλουθο σήμα $x_s(t)$:

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t)p(t) \\ &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \end{aligned} \quad (12.40)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \end{aligned} \quad (12.41)$$

Η Εξίσωση (12.41) δηλώνει ότι η περιοδική κρουστική σειρά του Σχήματος 12-26 “δειγματοληπτεί” το σήμα



$x(t)$ τις χρονικές στιγμές που εμφανίζονται οι κρουστικές.

Το σήμα συνεχούς-χρόνου $x_s(t)$ που προκύπτει, είναι μια κρουστική σειρά με το μέγεθος (εμβαδόν) των κρουστικών να είναι οι τιμές του $x(t)$ τις χρονικές στιγμές $t_n = nT_s$. Αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα 12-27(α). Αν απομονώσουμε τις τιμές των δειγμάτων από τις κρουστικές και τις διατάξουμε σε μορφή ακολουθίας, θα έχουμε την ακολουθία διακριτού-χρόνου των δειγμάτων $x[n] = x(nT_s)$ που απεικονίζεται στο Σχήμα 12-27(β). Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι το σήμα $x_s(t)$ αναπαριστά το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας του σήματος συνεχούς-χρόνου $x(t)$.

Για να βρούμε την αναπαράσταση του δειγματοληπτημένου σήματος στο πεδίο της συχνότητας, μπορούμε να ξεκινήσουμε εξάγοντας πρώτα μια έκφραση για το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $x_s(t)$. Για να το κάνουμε αυτό, εκφράζουμε τον περιοδικό κρουστικό συρμό σε σειρά Fourier. Οι συντελεστές της σειράς Fourier του περιοδικού κρουστικού συρμού έχουν υπολογιστεί στο Παράδειγμα 11-4 στη Σελίδα 354 και είναι $a_k = 1/T_s$ για $-\infty < k < \infty$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε τη Σχέση (12.40) ισοδύναμα με τον ακόλουθο τρόπο

$$x_s(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} e^{jk\omega_s t} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk\omega_s t} \quad (12.42)$$

όπου $\omega_s = 2\pi/T_s$. Εφαρμόζοντας τώρα την ιδιότητα της μετατόπισης συχνότητας του μετασχηματισμού Fourier παίρνουμε

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \quad (12.43)$$



Παράδειγμα 12-5: Χρήση της ιδιότητας του Πολλαπλασιασμού

Το αποτέλεσμα της Σχέσης (12.43) θα μπορούσε να εξαχθεί εφαρμόζοντας την ιδιότητα του πολλαπλασιασμού

του μετασχηματισμού Fourier στη Σχέση (12.40). Εφόσον αποδείχθηκε στο Παράδειγμα 11-4 ότι

$$P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{T_s} \right) \delta(\omega - \omega_s)$$

και εφόσον $x_s(t) = x(t)p(t)$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} X_s(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{T_s} \right) \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \end{aligned}$$

που είναι το ίδιο με αυτό της Σχέσης (12.43). ■

Αφού ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι $\omega_s = 2\pi/T_s$, μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα:

Ο μετασχηματισμός Fourier μιας περιοδικής χρονικής σειράς διαμορφωμένης από το $x(t)$ συντίθεται από περιοδικά επαναλαμβανόμενα αντίγραφα του $X(j\omega)$.

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - 2\pi k/T_s))$$

(12.44)

Η περιοδική επανάληψη του φάσματος απεικονίζεται στο Σχήμα 12-28. Το Σχήμα 12-28(α) δείχνει ένα τυπικό περιορισμένου εύρους ζώνης μετασχηματισμό Fourier που αναπαριστά τη $X(j\omega)$. Το Σχήμα 12-28(β) δείχνει την περιοδική επανάληψη των αντιγράφων της $X(j\omega)$ σύμφωνα με τη Σχέση (12.44). Το Σχήμα 12-28(β) κατασκευάστηκε υποθέτοντας ότι $\omega_s = 2\pi/T_s > 2\omega_b$ και επομένως τα μετατοπισμένα αντίγραφα της $X(j\omega)$ δεν επικαλύπτονται. Μπορούμε να δούμε ότι για το παράδειγμα που παρουσιάζεται στο Σχήμα 12-28(β), διατηρούμε ένα ακριβές αντίγραφο της $X(j\omega)$ (σταθμισμένο $1/T_s$) στο γραμμικό συνδυασμό που συνθέτει την περιοδική συνάρτηση μετασχηματισμού $X_s(j\omega)$. Από την άλλη

μεριά, το Σχήμα 12-28(γ), απεικονίζει την περίπτωση που $\omega_s = 2\pi/T_s < 2\omega_b$. Στην περίπτωση αυτή, οι αρνητικές συχνότητες του $X(j(\omega - \omega_s))$ επικαλύπτονται με τις θετικές συχνότητες του $X(j\omega)$. Αυτό, φυσικά, είναι αυτό που έχουμε ονομάσει *παραμόρφωση ψευδωνυμίας (αναδίπλωσης)*. Γενικεύοντας, από τα Σχήματα 12-28(β, γ), φαίνεται ότι η παραμόρφωση αναδίπλωσης είναι δυνατόν να αποφευχθεί αν ισχύουν οι δύο παρακάτω συνθήκες:

1. Το σήμα που θα υποστεί δειγματοληψία πρέπει να είναι περιορισμένου εύρους ζώνης ώστε η $X(j\omega) = 0$ για $|\omega| \geq \omega_b$.
2. Η συχνότητα δειγματοληψίας πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη $\omega_s = 2\pi/T_s \geq 2\omega_b$.

Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, αν ισχύουν αυτές οι δύο συνθήκες, μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το σήμα μοναδικά από τα δείγματά του χρησιμοποιώντας ένα ιδανικό φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων με κέρδος T_s και συχνότητα αποκοπής $\omega_s/2$. Αυτό αποτελεί, φυσικά, την ουσία αυτού που ονομάσαμε *Θεώρημα δειγματοληψίας των Shannon/Nyquist* στο Κεφάλαιο 4.

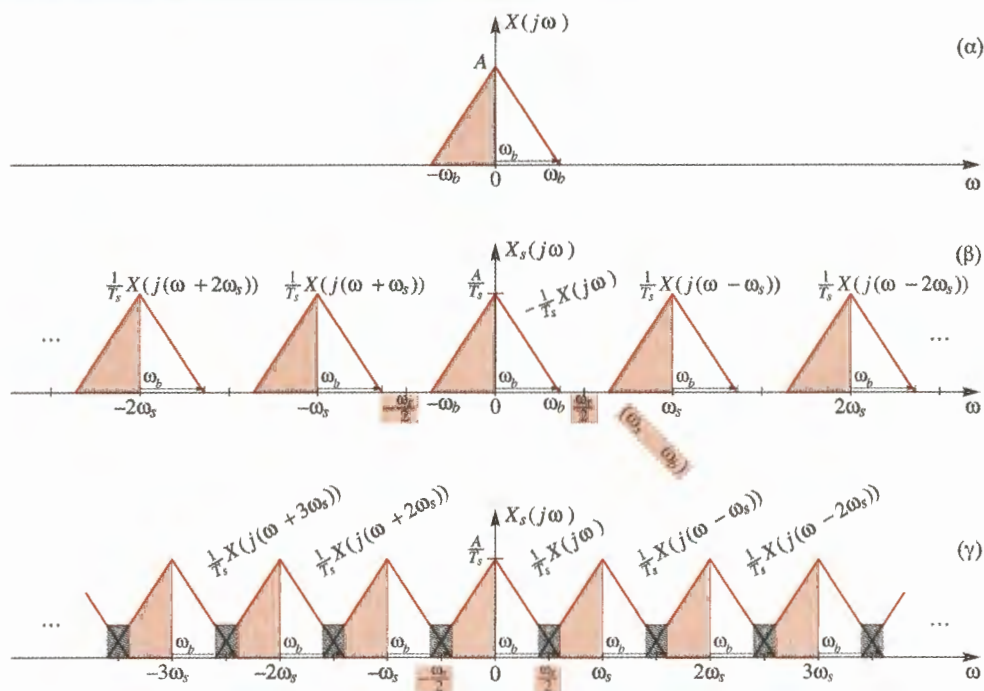
12-3.2 Ανακατασκευή Σήματος Περιορισμένου Εύρους Ζώνης

Για να δούμε πώς ένα σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης μπορεί να ανακατασκευαστεί από τα δείγματά του, επιστρέφουμε στο Σχήμα 12-26, το οποίο δείχνει την ανακατασκευή ενός σήματος από ένα ΓΧΑ φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων με απόκριση συχνότητας $H_r(j\omega)$

$$X_r(j\omega) = H_r(j\omega)X_s(j\omega) \quad (12.45)$$

$$= H_r(j\omega) \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

Καθένας από τους Μετασχηματισμούς Fourier της Σχέσης(12.45) απεικονίζεται στο Σχήμα 12-29, όπου υποθέτουμε ότι ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι αρκετά υψηλός



Σχήμα 12-28: Επεξήγηση της δειγματοληψίας και του φαινομένου της ψευδωνυμίας στο πεδίο της συχνότητας. (α) Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$, (β) Ο μετασχηματισμός Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος $x_s(t) = p(t)x(t)$ με $\omega_s > 2\omega_b$ και (γ) ο μετασχηματισμός Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος $x_s(t) = p(t)x(t)$ με εμφανή παραμόρφωση εξαιτίας του φαινομένου της ψευδωνυμίας όταν $\omega_s < 2\omega_b$.

ώστε να αποφευχθεί παραμόρφωση εξαιτίας της αναδίπλωσης. Αν η απόκριση συχνότητας του φίλτρου είναι ιδανική

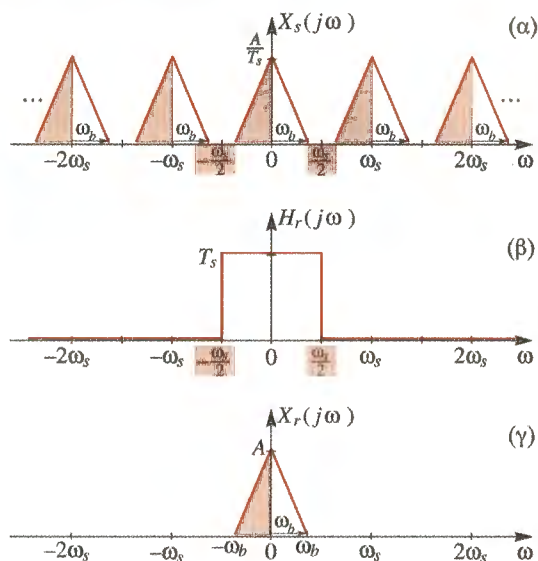
$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \leq \omega_s/2 = \pi/T_s \\ 0 & |\omega| > \omega_s/2 = \pi/T_s \end{cases} \quad (12.46)$$

όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 12-29(β), το φίλτρο θα απομονώσει την $X(j\omega)$ από το άθροισμα των αντιγράφων του Σχήματος 12-29(α) και θα δώσει το τελικό αποτέλεσμα $X_r(j\omega) = X(j\omega)$ του Σχήματος 12-29(γ). Επομένως, όταν το σήμα εισόδου είναι περιορισμένου εύρους

ζώνης και ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι τουλάχιστον διπλάσιος της μέγιστης συχνότητας του σήματος εισόδου, τότε η ανακατασκευή είναι τέλεια και ισχύει η σχέση $x_r(t) = x_s(t) * h_r(t) = x(t)$.

Παράδειγμα 12-6: Το Φάσμα κατά τη Διάρκεια της Δειγματοληψίας

Ως ένα παράδειγμα δειγματοληψίας και ανακατασκευής ενός σήματος περιορισμένου εύρους ζώνης, θεωρήστε το



Σχήμα 12-29: Επεξήγηση ανακατασκευής με αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας, του δειγματοληπτημένου σήματος: (α) Μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x_s(t)$, (β) ιδανικό φίλτρο ανακατασκευής και (γ) μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του περιορισμένου εύρους ζώνης ιδανικού φίλτρου ανακατασκευής.

σήμα

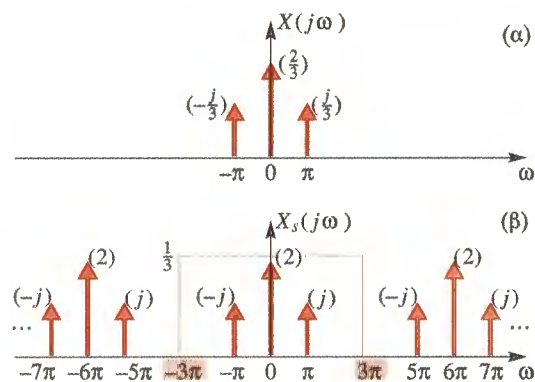
$$x(t) = \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{3\pi} \cos(\pi t + \pi/2)$$

του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier δίνεται από τη σχέση

$$X(j\omega) = \frac{2}{3}\delta(\omega) + \frac{j}{3}\delta(\omega - \pi) - \frac{j}{3}\delta(\omega + \pi)$$

Η υψηλότερη συχνότητα του σήματος είναι π rad/sec, έτσι οποιοσδήποτε ρυθμός δειγματοληψίας που ικανοποιεί την $\omega_s = 2\pi/T_s > 2\pi$ θα εξασφαλίσει ότι μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το ακριβές σήμα $x(t)$ από τα δείγματα του $x[n] = x(nT_s)$. Στο Σχήμα 12-30(α) φαίνεται η $X(j\omega)$

και στο Σχήμα 12-30(β) η $X_s(j\omega)$ αντίστοιχα, για $\omega_s = 6\pi$, ή $T_s = \frac{1}{3}$ sec. Το ελαφρώς σκιασμένο πλαίσιο στο Σχήμα



Σχήμα 12-30: Επεξήγηση της δειγματοληψίας με αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας: (α) Μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{3\pi} \cos(\pi t + \pi/2)$ και (β) μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x_s(t)$. Το ελαφρώς σκιασμένο πλαίσιο παριστά το ιδανικό φίλτρο ανακατασκευής με συχνότητα αποκοπής $\omega = 3\pi$.

12-30(β) παριστά την απόκριση συχνότητας του ιδανικού φίλτρου ανακατασκευής $H_r(j\omega)$ για ρυθμό δειγματοληψίας 6π rad/sec. Δηλαδή, η συχνότητα αποκοπής του είναι 3π rad/sec. Παρατηρήστε ότι η $X_r(j\omega) = H_r(j\omega)X_s(j\omega)$ θα είναι ακριβώς ίδια με τον αρχικό Μετασχηματισμό Fourier, όπως άλλωστε αναμενόταν. Επομένως, η έξοδος του ιδανικού φίλτρου ανακατασκευής στο Σχήμα 12-30 θα είναι

$$x_r(t) = x(t) = \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{3\pi} \cos(\pi t + \pi/2)$$

Άσκηση 12.14: Επαναλάβετε το Παράδειγμα 12-6 για την περίπτωση του $\omega_s = 1.5\pi$. Σχεδιάστε την

$X_s(j\omega)$ όπως στο Σχήμα 12-30(β) και δώστε μια εξίσωση για το σήμα που ανακατασκευάζεται από το ιδανικό φίλτρο ανακατασκευής για $\omega_s = 1.5\pi$.

12-3.3 Παρεμβολή Περιορισμένου Εύρους Ζώνης

Το Σχήμα 12-31(α) δείχνει την κρουστική απόκριση του ιδανικού φίλτρου ανακατασκευής της Σχέσης (12.47). Η αντίστοιχη απόκριση συχνότητας της Σχέσης (12.46) φαίνεται στο Σχήμα 12-31(β). Παρατηρήστε ότι το ιδανικό φίλτρο ανακατασκευής έχει κέρδος T_s και συχνότητα αποκοπής $\omega_{co} = \omega_s/2 = \pi/T_s$. Η κρουστική απόκριση, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$h_r(t) = \frac{\sin \frac{\pi}{T_s} t}{\frac{\pi}{T_s} t} \quad (12.47)$$

έχει μέγιστη τιμή 1 στο $t = 0$ και είναι μηδέν στα μη μηδενικά ακέραια πολλαπλάσια του T_s όπως φαίνεται στο Σχήμα 12-31(α). Η έκφραση της εξόδου του φίλτρου ανακατασκευής στο πεδίο του χρόνου, προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στην ακόλουθη σχέση

$$x_r(t) = x_s(t) * h_r(t)$$

την $x_s(t)$ με τη Σχέση (12.41) της Σελίδας 405. Η αντικατάσταση αυτή οδηγεί στην ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_s(t) * h_r(t) \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right) * h_r(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) h_r(t - nT_s) \end{aligned} \quad (12.48)$$

Κατά συνέπεια, το συνεχούς χρόνου ανακατασκευασμένο σήμα $x_r(t)$ αποτελείται από ένα άπειρο άθροισμα από σταθμισμένες και μετατοπισμένες κρουστικές αποκρίσεις του φίλτρου ανακατασκευής, όπως αναφέραμε στην

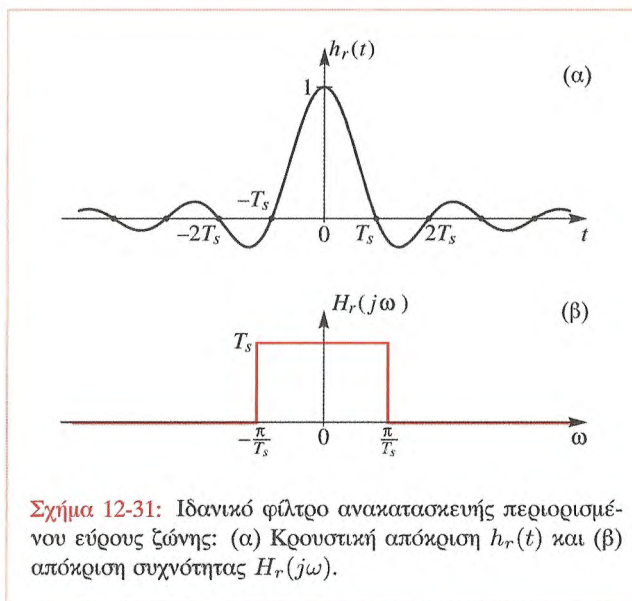
Ενότητα 4-4 του Κεφαλαίου 4. Με την αντικατάσταση της (12.47) στη Σχέση (12.48), προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Ένα σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης $x(t)$ τέτοιο ώστε $X(j\omega) = 0$ για $|\omega| \geq \omega_b$ μπορεί να ανακατασκευασθεί ακριβώς από δείγματα που έχουν προκύψει με ρυθμό δειγματοληψίας $\omega_s = 2\pi/T_s \geq 2\omega_b$ μέσω της παρεμβολής περιορισμένου εύρους ζώνης:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \frac{\sin \left[\frac{\pi}{T_s} (t - nT_s) \right]}{\frac{\pi}{T_s} (t - nT_s)}$$

(12.49)

Η διαδικασία της παρεμβολής περιορισμένου εύρους



Σχήμα 12-31: Ιδανικό φίλτρο ανακατασκευής περιορισμένου εύρους ζώνης: (α) Κρουστική απόκριση $h_r(t)$ και (β) απόκριση συχνότητας $H_r(j\omega)$.

ζώνης απεικονίζεται στο Σχήμα 12-32, το οποίο δείχνει την κρουστική σειρά με κρουστικές συναρτήσεις $x(nT_s)\delta(t - nT_s)$ διαμορφωμένες από τις τιμές των δειγμάτων και τις αντίστοιχες εξόδους $x(nT_s)h_r(t - nT_s)$

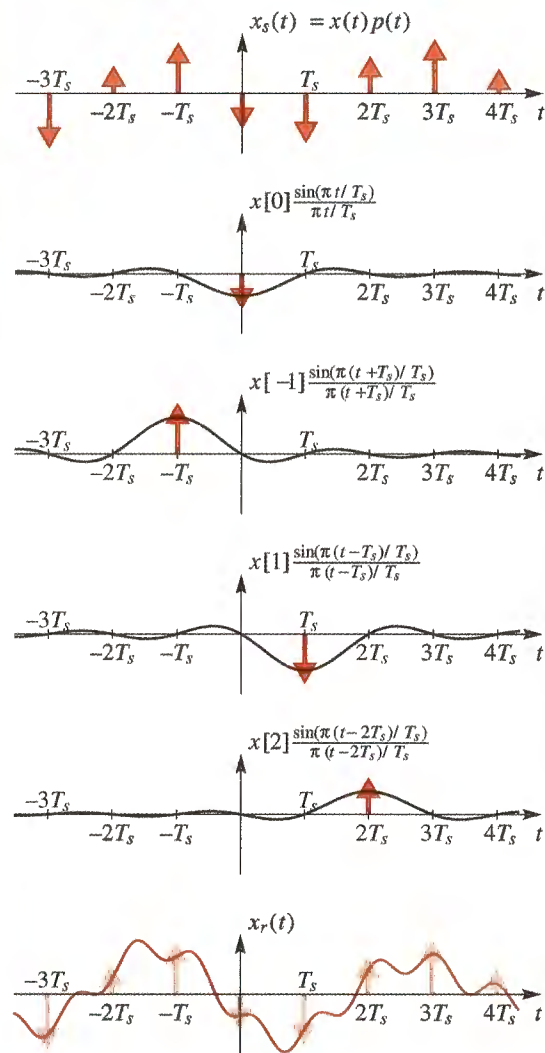
για κάθε κρουστική συνάρτηση. Σημειώστε ότι εφόσον η $h_r(t)$ έχει άπειρη διάρκεια, στην ανακατασκευή του σήματος $x(t)$ συμβάλουν όλα τα δείγματα. Ωστόσο, αφού $h_r(0) = 1$ και $h_r(t_n) = 0$ για $t_n = \pm T_s, \pm 2T_s, \dots$, είναι πάντα αληθές ότι $x_r(nT_s) = x(nT_s)$ ανεξάρτητα από το γεγονός αν υπάρχει παραμόρφωση αναδίπλωσης κατά τη δειγματοληψία. Αν δεν υφίσταται παραμόρφωση αναδίπλωσης, τότε η συζήτησή μας στο πεδίο της συχνότητας δείχνει ότι η Σχέση (12.49) ανακατασκευάζει τέλεια το αρχικό σήμα για κάθε t .

12-3.4 Ιδανικοί Μετατροπείς Σ-σε-Δ και Δ-σε-Σ

Το σχηματικό διάγραμμα στο Σχήμα 12-26 απετέλεσε μια κατάλληλη βάση για μια ανάλυση η οποία απέδειξε την ορθότητα του θεωρήματος δειγματοληψίας των Shannon/Nyquist. Επιπλέον, μας οδήγησε σε μια μέθοδο ανακατασκευής ενός σήματος περιορισμένου εύρους ζώνης από τα δείγματα του σήματος συνεχούς-χρόνου. Αυτό το σχηματικό διάγραμμα βέβαια συνδέεται μόνο γενικά με το πώς η δειγματοληψία και η ανακατασκευή υλοποιούνται πραγματικά στην πράξη. Μια παράσταση που είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα, αλλά παραμένει εξιδανικευμένη, φαίνεται στο Σχήμα 12-33. Στο Σχήμα 12-33(α) παρουσιάζεται ο **Ιδανικός Μετατροπέας Συνεχούς-σε-Διακριτό (Σ-σε-Δ)** ως ένας διαμορφωτής κρουστικής σειράς ακολουθούμενος από ένα σύστημα που απλώς απομονώνει τις τιμές των δειγμάτων από τις κρουστικές και τα τοποθετεί σε μια ακολουθία. Κατά συνέπεια, ο ιδανικός μετατροπέας Σ-σε-Δ ορίζεται από την ακόλουθη σχέση εισόδου-εξόδου:

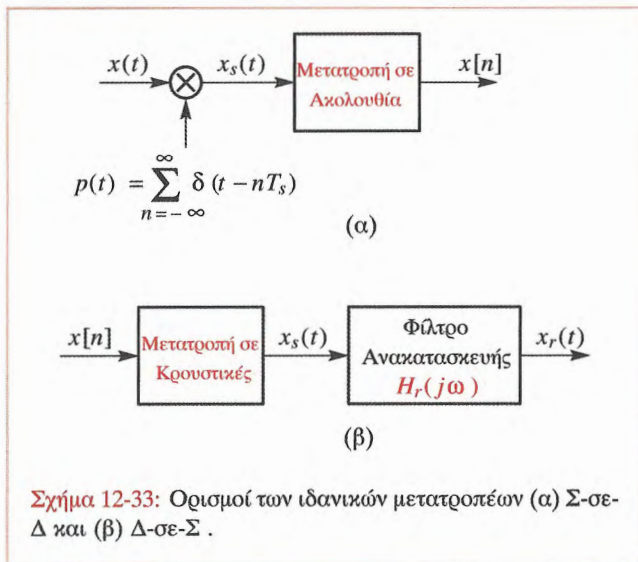
$$\boxed{\begin{aligned} \text{Ο Ιδανικός Μετατροπέας Σ-σε-Δ} \\ x[n] = x(nT_s) \quad n \text{ ακέραιος.} \end{aligned}} \quad (12.50)$$

Η είσοδος σε ένα ιδανικό μετατροπέα Σ-σε-Δ είναι ένα σήμα συνεχούς-χρόνου και η έξοδος του είναι μια ακολουθία δειγμάτων. Αυτό παρουσιάστηκε στο Σχήμα 12-27(β) στη Σελίδα 406. Ο ιδανικός μετατροπέας Σ-σε-Δ αποτελεί μια εξιδανίκευση ενός πρακτικού συστήματος υλικού που συνήθως αποτελείται από ένα κύκλωμα



Σχήμα 12-32: Απεικόνιση του ανακατασκευασμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου ως άθροισμα σταθμισμένων και μετατοπισμένων συναρτήσεων sinc.

δειγματοληψίας και συγκράτησης (το οποίο συλλαμβάνει την τάση εισόδου σε μια χρονική στιγμή και συγκρατεί αυτή την τιμή για T_s δευτερόλεπτα) ακολουθούμενο από ένα μετατροπέα αναλογικού-σε-ψηφιακό (Α-σε-Ψ) (ο οποίος αποδίδει μια αριθμητική τιμή στην τάση). Η βασική διαφορά είναι ότι ένας μετατροπέας Α-σε-Ψ αποδίδει τιμές δειγμάτων που είναι “κβαντισμένες” σε ένα πεπερασμένο πλήθος ψηφίων. Για παράδειγμα, ένας 16-bit μετατροπέας Α-σε-Ψ παράγει 65536 διαφορετικές πιθανές τιμές για τα δείγματα εξόδου του. Αν η κβάντιση του πλάτους είναι αρκετά μικρή, αυτό το 16-bit όριο είναι συχνά αμελητέο. Περισσότερο λεπτομερείς αναλύσεις για τις επιδράσεις της κβάντισης των τιμών μπορούν να βρεθούν σε βιβλία με προχωρημένα θέματα της Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων.



Στο Σχήμα 12-33(β) ο *ιδανικός μετατροπέας Διακριτού-σε-Συνεχές (Δ-σε-Σ)* παριστάνεται από τη συνδεσμολογία σε σειρά δύο συστημάτων. Το πρώτο δέχεται μια ακολουθία εισόδου και δημιουργεί μια διαμορφωμένη κρουστική σειρά, η οποία στη συνέχεια οδηγείται στην

είσοδο του δευτέρου συστήματος, ενός ιδανικού φίλτρου ανακατασκευής περιορισμένου εύρους ζώνης. Επομένως, η σχέση εισόδου/εξόδου του ιδανικού μετατροπέα Δ-σε-Σ θα είναι:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin \left[\frac{\pi}{T_s} (t - nT_s) \right]}{\frac{\pi}{T_s} (t - nT_s)} \quad (12.51)$$

Σε μια συνδεσμολογία σε σειρά των μετατροπέων Σ-σε-Δ και Δ-σε-Σ, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 12-33, η διαδικασία της δημιουργίας μιας ακολουθίας από την κρουστική σειρά θα πρέπει να ακολουθείται άμεσα από τη διαδικασία της δημιουργίας της κρουστικής σειράς από την ακολουθία δειγμάτων. Άρα, από τη σύνδεση σε σειρά των συστημάτων που φαίνονται στο (α) και (β) του Σχήματος 12-33 προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα του Σχήματος 12-26. Επομένως, η ανάλυση του Σχήματος 12-26 έχει δείξει ότι αν ο μετατροπέας Σ-σε-Δ δειγματοληπτεί ένα περιορισμένου εύρους ζώνης σήμα s' ένα *αρκετά υψηλό ρυθμό δειγματοληψίας*, ο ιδανικός μετατροπέας Δ-σε-Σ θα ανακατασκευάσει με ακρίβεια το αρχικό σήμα.

12-3.5 Ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού-Χρόνου

Ο βασικός σκοπός του ορισμού των ιδανικών μετατροπέων Σ-σε-Δ και Δ-σε-Σ είναι για να εξαλείψουμε την ανάγκη ακριβούς αναφοράς της διαμορφωμένης κρουστικής σειράς $x_s(t)$. Το σήμα $x_s(t)$ απετέλεσε τη βάση στην αναπαράσταση της δειγματοληψίας και της ανακατασκευής, αλλά συνήθως στην πραγματικότητα δεν έχουμε διαθέσιμο ένα τέτοιο σήμα, έχουμε μόνο μια ακολουθία δειγμάτων όπως αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 12-27(β). Ως τελικό βήμα προς την ελαχιστοποίηση της εξάρτησή μας από την κρουστική σειρά, ας θυμηθούμε ότι έχουμε ήδη βρει τις

ακόλουθες δύο μορφές για το σήμα $x_s(t)$:

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \\ &= x_c(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} e^{jk\omega_s t} \end{aligned} \quad (12.52)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (12.53)$$

όπου $x_c(t)$ (ο δείκτης c προστίθεται για έμφαση σε αυτή την ενότητα) είναι ένα σήμα συνεχούς-χρόνου το οποίο δειγματοληπτείται. Η Εξίσωση (12.52) μας επέτρεψε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα μετατόπισης στη συχνότητα για να πάρουμε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $x_s(t)$

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s)) \quad (12.54)$$

ο οποίος είναι μια περιοδική συνάρτηση του ω με περίοδο $\omega_s = 2\pi/T_s$. Η Εξίσωση (12.54) εκφράζει την $X_s(j\omega)$ συναρτήσει μετατοπισμένων αντιγράφων της $X_c(j\omega)$, του μετασχηματισμού Fourier του σήματος συνεχούς-χρόνου $x_c(t)$. Χρησιμοποιώντας τη Σχέση (12.53) και την ιδιότητα καθυστέρησης του μετασχηματισμού Fourier, προκύπτει ότι μια ισοδύναμη σχέση για την $X_s(j\omega)$ είναι η ακόλουθη

$$X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) e^{-j\omega n T_s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n T_s} \quad (12.55)$$

η οποία εκφράζει την $X_s(j\omega)$ συναρτήσει των δειγμάτων της $x_c(t)$. Παρατηρήστε και πάλι ότι αυτή η μορφή του $X_s(j\omega)$ είναι περιοδική συνάρτηση του ω με περίοδο $\omega_s = 2\pi/T_s$ αφού οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις είναι περιοδικές. Τώρα μπορούμε να απαλείψουμε την $X_s(j\omega)$. Εξισώνοντας τις Σχέσεις (12.54) και (12.55) παίρνουμε:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n T_s} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - 2\pi k/T_s)) \quad (12.56)$$

Το αριστερό μέλος της Σχέσης (12.56) αρχίζει να μοιάζει με το μετασχηματισμό- z της ακολουθίας των δειγμάτων $x[n] = x_c(nT_s)$, ο οποίος εξ ορισμού είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad (12.57)$$

Αντικαθιστώντας $z = e^{j\omega T_s}$ στην παραπάνω σχέση, παίρνουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n T_s} = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_s}} = X(e^{j\omega T_s}) \quad (12.58)$$

Ο στόχος μας είναι να λάβουμε μια συνάρτηση της συχνότητας διακριτού-χρόνου $\hat{\omega}$ η οποία ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$\hat{\omega} = \omega T_s \quad (12.59)$$

Άρα μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο μετασχηματισμό, που ονομάζεται *μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου* ή *DTFT*, με τη σχέση

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\hat{\omega} n} \quad (12.60)$$

Ο DTFT σχετίζεται με το μετασχηματισμό- z μέσω της σχέσης $X(e^{j\hat{\omega}}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}$.



Άσκηση 12.15: Να δειχθεί ότι ο $X(e^{j\hat{\omega}})$ είναι περιοδική συνάρτηση του $\hat{\omega}$ με περίοδο 2π και ότι ο $X(e^{j\omega T_s})$ είναι περιοδική συνάρτηση του ω με περίοδο $2\pi/T_s$.

Χρησιμοποιώντας τη Σχέση (12.60), μπορούμε να εκφράσουμε την επόμενη θεμελιώδη σχέση που υπάρχει μεταξύ του DTFT μιας ακολουθίας δειγμάτων $x[n] = x_c(nT_s)$ και

του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς-χρόνου (CTFT) του $x(t)$:

Σχέση μεταξύ του DTFT και του CTFT

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega T_s}) &= X(e^{j\hat{\omega}}) \Big|_{\hat{\omega} = \omega T_s} \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - 2\pi k/T_s)). \end{aligned} \quad (12.61)$$

12-3.6 Ο Αντίστροφος DTFT

Στη Σχέση (12.51) της Ενότητας 12-3.4, δείξαμε ότι η έξοδος ενός ιδανικού μετατροπέα Δ-σε-Σ σε μια ακολουθία εισόδου $x[n] = x_c(nT_s)$ είναι

$$x_r(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \frac{\sin \frac{\pi}{T_s}(t - mT_s)}{\frac{\pi}{T_s}(t - mT_s)} \quad (12.62)$$

η οποία έχει τον ακόλουθο CTFT

$$X_r(j\omega) = \begin{cases} T_s X(e^{j\omega T_s}) & |\omega| \leq \pi/T_s \\ 0 & |\omega| > \pi/T_s \end{cases}$$

Αυτό σημαίνει ότι ένας άλλος τρόπος να γραφεί το $x_r(t)$ είναι ο ακόλουθος

$$x_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} T_s X(e^{j\omega T_s}) e^{j\omega t} d\omega$$

Τώρα, αν χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (12.62) για να υπολογίσουμε το $x_r(nT_s)$, παίρνουμε

$$x_r(nT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \frac{\sin \pi(n-m)}{\pi(n-m)} = x[n]$$

αφού όλοι οι όροι, εκτός από έναν, είναι μηδενικοί, δηλαδή,

$$\frac{\sin \pi(n-m)}{\pi(n-m)} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Επομένως, ακόμα και αν ο αρχικός μετασχηματισμός Fourier δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης, έχουμε μόλις αποδείξει ότι $x_r(nT_s) = x[n] = x_c(nT_s)$. Επομένως, έπεται ότι

$$x_c(nT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} T_s X(e^{j\omega T_s}) e^{j\omega T_s n} d\omega \quad (12.63)$$

Αν αντικαταστήσουμε $\hat{\omega} = \omega T_s$, η Σχέση (12.63) μπορεί να γραφεί ως ακολούθως

Αντίστροφος DTFT

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\hat{\omega}}) e^{j\hat{\omega} n} d\hat{\omega}. \quad (12.64)$$

Η Εξίσωση (12.64) δίνει τον αντίστροφο DTFT συναρτήσει της κανονικοποιημένης συχνότητας $\hat{\omega}$. Η εξίσωση αυτή μαζί με την Εξίσωση (12.60) αποτελούν τις σχέσεις σύνθεσης και ανάλυσης του σήματος διακριτού χρόνου $x[n]$.

Παράδειγμα 12-7: Ο DTFT της Συνάρτησης sinc

Θεωρήστε το σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης

$$x_c(t) = \frac{\sin(\omega_b t)}{\pi t}$$

Αν δειγματοληψήσουμε αυτό το σήμα με περίοδο δειγματοληψίας T_s , λαμβάνουμε την ακολουθία

$$x[n] = x_c(nT_s) = \frac{\sin(\omega_b nT_s)}{\pi nT_s} = \frac{\sin(\hat{\omega}_b n)}{\pi nT_s} \quad (12.65)$$

όπου $\hat{\omega}_b = \omega_b T_s$. Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος συνεχούς-χρόνου $x_c(t)$ είναι

$$X_c(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_b \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η Εξίσωση (12.61) δίνει

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega T_s}) &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\hat{\omega}_b n)}{\pi n} e^{-j\omega n T_s} \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s)) \end{aligned}$$

και αντιστοιχίζοντας του όρους, ανακαλύπτουμε ότι ο DTFT της συνάρτησης sinc είναι ο ακόλουθος

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\hat{\omega}_b n)}{\pi n} e^{-j\hat{\omega} n} = \begin{cases} 1 & |\hat{\omega}| \leq \hat{\omega}_b \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

12-3.7 Επεξεργασία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου με Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Μια από τις σημαντικότερες έννοιες που σχετίζεται με τη δειγματοληψία είναι η ιδέα του φιλτραρίσματος ενός σήματος συνεχούς-χρόνου δειγματοληπώντας το σήμα, φιλτράροντάς το με ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού-χρόνου και μετατρέποντάς το στη συνέχεια σε ένα σήμα εξόδου συνεχούς-χρόνου. Η ιδέα αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 12-34. Η γνώση που διαθέτουμε για τη δειγματοληψία και την ανακατασκευή σημάτων περιορισμένου εύρους ζώνης, μας επιτρέπει να κατανοήσουμε τη λειτουργία αυτού του συστήματος. Θυμηθείτε από τα Κεφάλαια 7 και 8 ότι το σύστημα διακριτού-χρόνου μπορεί να περιγραφεί από το μετασχηματισμό- z ως ακολούθως

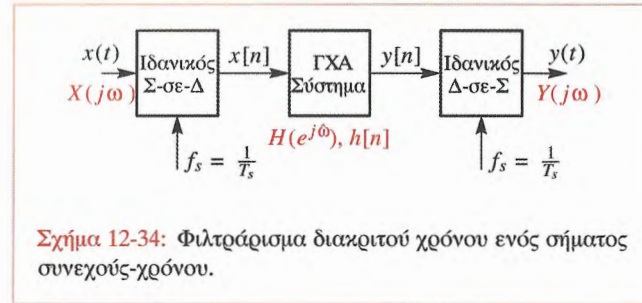
$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (12.66)$$

ή ισοδύναμα, μέσω του DTFT

$$Y(e^{j\hat{\omega}}) = H(e^{j\hat{\omega}})X(e^{j\hat{\omega}}) \quad (12.67)$$

Η έξοδος του μετατροπέα Δ-σε-Σ στο πεδίο του χρόνου, δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]h_r(t - nT_s) \quad (12.68)$$



Σχήμα 12-34: Φιλτράρισμα διακριτού χρόνου ενός σήματος συνεχούς-χρόνου.

όπου η $h_r(t)$ δίνεται από τη Σχέση (12.47) στη Σελίδα 410. Τώρα η αναπαράσταση του μετατροπέα Δ-σε-Σ στο πεδίο της συχνότητας μπορεί εύκολα να προκύψει αν πάρουμε το μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου της Σχέσης (12.68),

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]H_r(j\omega)e^{-j\omega n T_s} \\ &= H_r(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega T_s n} \\ &= H_r(j\omega)Y(e^{j\omega T_s}) \end{aligned} \quad (12.69)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις Σχέσεις (12.67) και (12.61) στη Σχέση (12.69), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H_r(j\omega)H(e^{j\omega T_s})X(e^{j\omega T_s}) \\ &= H_r(j\omega)H(e^{j\omega T_s})\frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - 2\pi k/T_s)) \end{aligned} \quad (12.70)$$

Παρόλο που η Σχέση (12.70) φαίνεται αρκετά πολύπλοκη, δεν είναι δύσκολο να ερμηνευτεί. Καταρχήν παρατηρούμε ότι έχουμε ένα άθροισμα μετατοπισμένων αντιγράφων του $X_c(j\omega)$. Εκ κατασκευής, το άθροισμα αυτό είναι αναγκαστικά περιοδική συνάρτηση του ω με περίοδο $\omega_s = 2\pi/T_s$. Επιπροσθέτως, αν $X_c(j\omega) = 0$ για $|\omega| > \omega_b$ και $\omega_s > 2\omega_b$, τότε τα μετατοπισμένα

αντίγραφα δεν επικαλύπτονται και μια περίοδος της συνάρτησης είναι ακριβώς ίση με $(1/T_s)X_c(j\omega)$ στο διάστημα $-\pi/T_s < \omega < \pi/T_s$. Ο μεσαίος όρος, $H(e^{j\omega T_s})$, είναι επίσης περιοδικός με περίοδο $\omega_s = 2\pi/T_s$. Ο αριστερός όρος, $H_r(j\omega)$ έχει κέρδος T_s και μηδενίζεται έξω από το διάστημα $|\omega| \leq \omega_s/2 = \pi/T_s$. Επομένως, αν δεν υπάρχει παραμόρφωση εξαιτίας της αναδίπλωσης, ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου θα είναι:

$$Y(j\omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega T_s})X_c(j\omega) & |\omega| \leq \pi/T_s \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (12.71)$$

Η Σχέση (12.70) απεικονίζεται στο Σχήμα 12-35. Το Σχήμα 12-35(α) δείχνει το μετασχηματισμό Fourier $X_c(j\omega)$ ενός τυπικού σήματος περιορισμένου εύρους ζώνης και το Σχήμα 12-35(β) δείχνει το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega T_s})$ του δειγματοληπτημένου σήματος $x[n] = x_c(nT_s)$, ενώ το Σχήμα 12-35(γ) δείχνει το $X(e^{j\hat{\omega}})$ συναρτήσει της κανονικοποιημένης συχνότητας $\hat{\omega}$. Η απόκριση συχνότητας του ψηφιακού φίλτρου φαίνεται στο Σχήμα 12-35(δ). Το φίλτρο που φαίνεται στο Σχήμα 12-35(δ) είναι ένα χαμηλοπερατό φίλτρο διακριτού-χρόνου με συχνότητα αποκοπής $0 < \hat{\omega}_{co} < \pi$. Μια περίοδος της $H(e^{j\hat{\omega}})$ ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \begin{cases} 1 & |\hat{\omega}| \leq \hat{\omega}_{co} \\ 0 & \hat{\omega}_{co} < |\hat{\omega}| < \pi \end{cases} \quad (12.72)$$

όπου η $H(e^{j\hat{\omega}})$ είναι περιοδική με περίοδο 2π . Τώρα έχουμε ότι $Y(e^{j\hat{\omega}}) = H(e^{j\hat{\omega}})X(e^{j\hat{\omega}})$ και επομένως σ' αυτό το παράδειγμα, οι υψηλές συχνότητες θα απομακρυνθούν από το φίλτρο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 12-35(ε). Το ιδανικό φίλτρο ανακατασκευής φαίνεται ως ένα γκρι πλαίσιο στο Σχήμα 12-35(ε). Αφού αυτό απομακρύνει όλες τις συχνότητες που είναι εκτός της ζώνης $|\omega| \leq \pi/T_s$, ο μετασχηματισμός Fourier της τελικής εξόδου είναι ο μετασχηματισμός που φαίνεται στο Σχήμα 12-35(στ). Όπως εξηγήσαμε στο παράδειγμα του Σχήματος 12-35, η συνολική επίδραση του συστήματος του Σχήματος 12-34 είναι ότι ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου έχει την

ακόλουθη μορφή

$$Y(j\omega) = H_{\text{eff}}(j\omega)X_c(j\omega) \quad (12.73)$$

όπου η συνολική ενεργός απόκριση συχνότητας είναι

$$H_{\text{eff}}(j\omega) = H(e^{j\omega T_s}) \quad (12.74)$$

Η Εξίσωση (12.73) ισχύει μόνο αν η $X_c(j\omega) = 0$ για $|\omega| \geq \pi/T_s$. Δηλαδή, μόνο αν το σήμα εισόδου είναι περιορισμένου εύρους ζώνης και δειγματοληπτηθεί σε ένα αρκετό υψηλό ρυθμό δειγματοληψίας για να αποφευχθούν παραμορφώσεις εξαιτίας της αναδίπλωσης. Στην περίπτωση του ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων της Σχέσης (12.72), η ενεργός απόκριση συχνότητας είναι

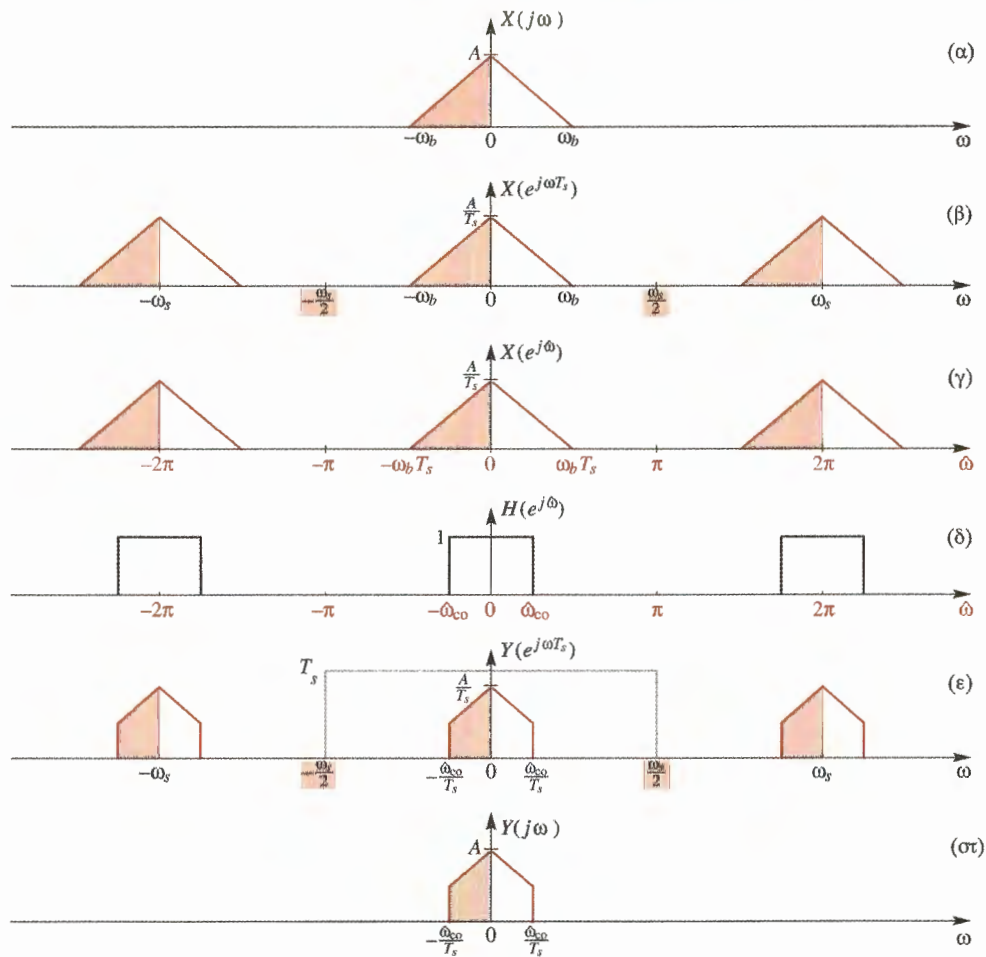
$$H_{\text{eff}}(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \hat{\omega}_{co}/T_s \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Το αποτέλεσμα αυτό διευκρινίζει ένα σημαντικό σημείο της Σχέσης (12.74), ότι η ενεργός απόκριση συχνότητας του συνολικού συστήματος του Σχήματος 12-34 εξαρτάται από την περίοδο δειγματοληψίας T_s . Στην περίπτωση του ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων του Σχήματος 12-35(δ), βλέπουμε ότι η συχνότητα αποκοπής του συνολικού συστήματος είναι $\omega_{co} = \hat{\omega}_{co}/T_s$. Άρα, αν αυξηθεί ο ρυθμός δειγματοληψίας, η ενεργός συχνότητα αποκοπής αυξάνεται με ανάλογο τρόπο και αντίστροφα.



Άσκηση 12.16:

Στο παράδειγμα του Σχήματος 12-35, το σήμα εισόδου είναι υπερ-δειγματοληπτημένο, δηλαδή, $\omega_s = 2\pi/T_s > 2\omega_b$. Στο Σχήμα 12-35(στ), κάποιες από τις υψηλές συχνότητες έχουν αποκοπεί από το ιδανικό χαμηλοπερατό ψηφιακό φίλτρο. Ωστόσο, υποθέτοντας ότι η $\hat{\omega}_{co}$ είναι σταθερή, θα έπρεπε να είναι δυνατόν να επιλέξουμε την ω_s τέτοια ώστε $y(t) = x_c(t)$ για το παράδειγμα που παρουσιάζεται. Αν η $X_c(j\omega)$ είναι περιορισμένου εύρους ζώνης όπως φαίνεται στο Σχήμα 12-35(α), δώστε μια συνθήκη που συσχετίζει την T_s , την $\hat{\omega}_{co}$ και την ω_b έτσι ώστε να ισχύει $y(t) = x_c(t)$.



Σχήμα 12-35: Επεξήγηση του φιλτραρίσματος διακριτού χρόνου ενός δειγματοληπτημένου σήματος περιορισμένου εύρους ζώνης: (α) Ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς-χρόνου (CTFT) ενός σήματος $x_c(t)$ περιορισμένου εύρους ζώνης, (β) ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού-χρόνου (DTFT) του σήματος εξόδου ενός ιδανικού μετατροπέα Σ -σε- Δ , συναρτήσει του ω , (γ) ο DTFT του σήματος εξόδου ενός ιδανικού μετατροπέα Σ -σε- Δ , συναρτήσει της κανονικοποιημένης συχνότητας $\hat{\omega}$, (δ) η απόκριση συχνότητας κατωπερατού ψηφιακού φίλτρου (συναρτήσει του $\hat{\omega}$), (ε) ο DTFT του σήματος εξόδου του ψηφιακού χαμηλοπερατού φίλτρου και απόκριση συχνότητας ιδανικού φίλτρου ανακατασκευής (συναρτήσει του $\hat{\omega}$) και (στ) ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του ιδανικού μετατροπέα Δ -σε- Σ .



Παράδειγμα 12-8: Η $H_{\text{eff}}(j\omega)$ του Συστήματος
Χρονικής Καθυστερήσης

Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα διακριτού-χρόνου είναι ένα σύστημα καθυστέρησης 10-δειγμάτων που ορίζεται από τη σχέση $y[n] = x[n - 10]$. Η συχνότητα απόκρισης του συστήματος είναι

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = e^{-j\hat{\omega}10}$$

Επομένως, η συνολική ενεργός απόκριση συχνότητας σημάτων εισόδου περιορισμένου εύρους ζώνης που δειγματοληπτούνται πάνω από το ρυθμό του Nyquist είναι

$$H_{\text{eff}}(j\omega) = e^{-j\omega 10T_s}$$

η οποία, βεβαίως, είναι η απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού συστήματος χρονικής καθυστέρησης με καθυστέρηση $t_d = 10T_s$ sec. ■



Παράδειγμα 12-9: Η $H_{\text{eff}}(j\omega)$ ενός Συστήματος
Διαφορών Πρώτης Τάξης

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου είναι το σύστημα διαφορών πρώτης τάξης που περιγράφεται από τη σχέση $y[n] = x[n] - x[n - 1]$. Η αντίστοιχη απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = 1 - e^{-j\hat{\omega}} = 2j \sin(\hat{\omega}/2)e^{-j\hat{\omega}/2}$$

Αν το σύστημα χρησιμοποιείται όπως το σύστημα διακριτού χρόνου στο Σχήμα 12-34, και δεν υφίσταται παραμόρφωση εξαιτίας της αναδίπλωσης κατά τη δειγματοληψία του περιορισμένου εύρους ζώνης σήματος εισόδου, η συνολική ενεργός απόκριση συχνότητας είναι

$$H_{\text{eff}}(j\omega) = 2j \sin(\omega T_s/2)e^{-j\omega T_s/2}$$



Άσκηση 12.17: Καθορίστε την απόκριση συχνότητας ενός φίλτρου διακριτού-χρόνου έτσι ώστε, όταν χρησιμοποιείται στο σύστημα του Σχήματος 12-34, θα δώσει την ακόλουθη ολική ενεργό απόκριση συχνότητας

$$H_{\text{eff}}(j\omega) = \begin{cases} 1 & 1000\pi < |\omega| < 2000\pi \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όταν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι $\omega_s = 10000\pi$ rad/sec.

12-4 Ανακεφαλαίωση

Σ' αυτό το κεφάλαιο συζητήσαμε για τρεις πολύ σημαντικές εφαρμογές του μετασχηματισμού Fourier, το γραμμικό φίλτράρισμα, τη διαμόρφωση πλάτους και τη δειγματοληψία. Έχουμε δείξει ότι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού και της συνέλιξης καθιστούν τον μετασχηματισμό Fourier ένα ιδανικό εργαλείο για την ανάλυση αυτών των συστημάτων.

Αρκετές από τα εργαστηριακές ασκήσεις αυτού του κεφαλαίου έχουν σαν θέμα τους τις σειρές Fourier. Οι Εργαστηριακές ασκήσεις #14α και #14β δείχνουν ότι η ανάλυση με τις σειρές Fourier είναι μια καλή μέθοδος για την πρόβλεψη της απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος όταν η είσοδος είναι ένα περιοδικό σήμα. Το θέμα της Εργαστηριακής άσκησης #14α είναι η σχεδίαση μιας γεννήτριας ισχύος με έλεγχο της κυμάτωσης. Στην Εργαστηριακή άσκηση #14β οι φοιτητές σχεδιάζουν ένα φίλτρο διέλευσης ζώνης που παράγει μια επιθυμητή ημιτονοειδή έξοδο ενώ ταυτόχρονα μειώνει τις παραμορφώσεις. Η Εργαστηριακή άσκηση #15 δείχνει πώς να βρούμε τους συντελεστές της σειράς Fourier χρησιμοποιώντας το Toolbox (βασισμένο στο Maple) symbolic του Matlab. Στη συνέχεια η συμβολική σειρά Fourier χρησιμοποιείται στην ανάλυση της γεννήτριας ισχύος της Εργαστηριακής άσκησης #14α. Στην Εργαστηριακή άσκηση #16, οι φοιτητές έχουν τη δυνατότητα να διερευνήσουν την Διαμόρφωση Πλάτους έτσι ώστε να μπορούν να υλοποιήσουν και να περιγράψουν ένα λειτουργικό σύστημα AM που θα ενεργεί σε ένα σήμα ομιλίας. Τέλος, στις Εργαστηριακές ασκήσεις #17 και #18 διερευνάται ο

σχεδιασμός και η υλοποίηση ενός συστήματος διαμόρφωσης/αποδιαμόρφωσης βασισμένο στο FSK.



Εργ. Ασκ.: #14α, #14β, #15, #16, #17 και #18

Ως συνήθως, υπενθυμίζεται στον αναγνώστη ο μεγάλος αριθμός των λυμένων προβλημάτων που περιέχονται στο CD-ROM και είναι διαθέσιμα για ανασκόπηση και πρακτική εξάσκηση.



Υπόδειξη: Εκατοντάδες Λυμένων Προβλημάτων

12-5 Προβλήματα

Πρόβλημα.-12.1 Ένα ζωνοπερατό φίλτρο έχει μια ζώνη διάβασης από ω_{co1} μέχρι ω_{co2} , όπως φαίνεται στο Σχήμα 12-8(β) στη Σελίδα 388. Δείξτε ότι η κρουστική απόκρισή του μπορεί να αναπαρασταθεί ως η κρουστική απόκριση του διαμορφωμένου φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων

$$h_{bp}(t) = \frac{\sin(\omega_{co}t)}{\pi t} \cos(\omega_0 t) \quad (12.75)$$

Βρείτε την ω_0 και ω_{co} στη Σχέση (12.75) συναρτήσει των συχνοτήτων αποκοπής ω_{co1} και ω_{co2} . Εκφράστε την $H_{bp}(j\omega)$ συναρτήσει της $H_{lp}(j\omega)$ για να βρείτε την αναπαράσταση της (12.75) στο πεδίο της συχνότητας.

Πρόβλημα.-12.2 Αν ένα ιδεατό ζωνοδιαβατό φίλτρο έχει μια ζώνη διαβάσης από ω_{co1} μέχρι ω_{co2} , όπως φαίνεται στο Σχήμα 12-8(β) στη Σελίδα 388, δείξτε ότι η κρουστική απόκρισή του μπορεί να αναπαρασταθεί ως η διαφορά δύο κρουστικών αποκρίσεων χαμηλοπερατών φίλτρων

$$h_{bp}(t) = \frac{\sin(\omega_{co1}t)}{\pi t} - \frac{\sin(\omega_{co2}t)}{\pi t} \quad (12.76)$$

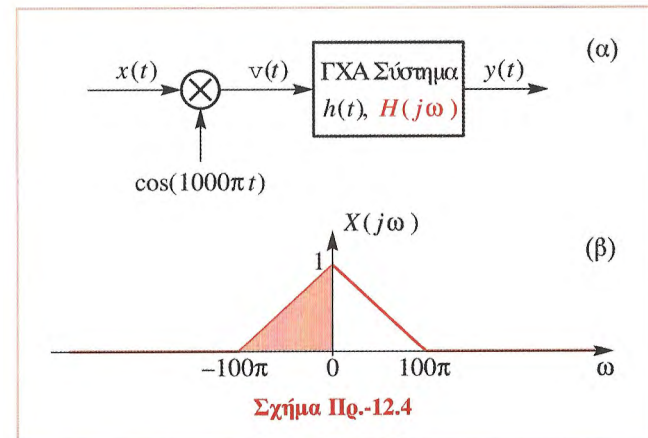
Πρόβλημα.-12.3 Αν ένα ιδεατό ζωνοδιαβατό φίλτρο έχει μια ζώνη διάβασης από ω_{co1} το ω_{co2} , όπως φαίνεται στο Σχήμα 12-8(β) στη Σελίδα 388, δείξτε ότι η κρουστική

απόκρισή του μπορεί να αναπαρασταθεί ως η συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης ενός ιδανικού υψηλοπερατού φίλτρου και ενός ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου όπως στην εξίσωση

$$h_{bp}(t) = \left[\delta(t) - \frac{\sin(\omega_{co1}t)}{\pi t} \right] * \frac{\sin(\omega_{co2}t)}{\pi t} \quad (12.77)$$

όπου ω_{co1} και ω_{co2} είναι οι συχνότητες αποκοπής. Ποιά είναι η αναπαράσταση της (12.77) στο πεδίο της συχνότητας;

Πρόβλημα.-12.4 Θεωρήστε το σύστημα διαμόρφωσης πλάτους που απεικονίζεται στο Σχήμα Πρ.-12.4(α) με ένα σήμα εισόδου $x(t)$, περιορισμένου εύρους ζώνης, όπως



αυτό που απεικονίζεται στο Σχήμα Πρ.-12.4(β). Υποθέστε ότι η απόκριση συχνότητας του ΓΧΑ συστήματος είναι αυτή του ιδανικού ζωνοπερατού φίλτρου

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & 900\pi < |\omega| < 1000\pi \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- (i) Σχεδιάστε το μετασχηματισμό Fourier $H(j\omega)$ του ιδανικού φίλτρου διέλευσης ζώνης που ορίστηκε παραπάνω. Σχεδιάστε για τις αρνητικές και τις θετικές συχνότητες.
- (ii) Σχεδιάστε το μετασχηματισμό Fourier $V(j\omega)$ του σήματος $v(t)$ στην έξοδο του πολλαπλασιαστή.
- (iii) Σχεδιάστε το μετασχηματισμό Fourier $Y(j\omega)$ του σήματος εξόδου $y(t)$ (Χωρίς να υπολογίσετε το $y(t)$).
- (iv) Το σήμα εξόδου ονομάζεται σήμα “μονής-πλευρικής ζώνης”. Μπορείτε να δικαιολογήσετε την ονομασία αυτή;

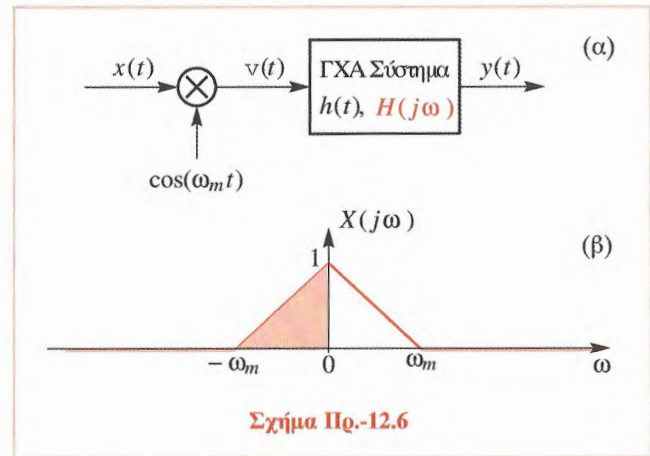
Παρατηρήστε ότι το τμήμα αρνητικών συχνοτήτων του μετασχηματισμού Fourier $X(j\omega)$ που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.4 (β) είναι σκιασμένο. Σημειώστε την αντίστοιχη περιοχή ή περιοχές των σχεδιαγραμμάτων σας για τα $V(j\omega)$ και $Y(j\omega)$.

Πρόβλημα.-12.5 Ανατρέξτε στο σύστημα διαμόρφωσης μονής πλευρικής ζώνης (SSB) που φαίνεται στο Πρόβλημα.-12.4. Σχεδιάστε το σχηματικό διάγραμμα ενός συστήματος που θα ανακτά το αρχικό σήμα εισόδου $x(t)$ από το σήμα εξόδου $y(t)$ του συστήματος διαμόρφωσης μονής πλευρικής ζώνης.

Πρόβλημα.-12.6 Θεωρήστε το σύστημα διαμόρφωσης πλάτους που απεικονίζεται στο Σχήμα Πρ.-12.6(α) με ένα σήμα εισόδου $x(t)$, περιορισμένου εύρους ζώνης, του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier απεικονίζεται στο Σχήμα Πρ.-12.6(β). Υποθέστε ότι η απόκριση συχνότητας του ΓΧΑ συστήματος είναι αυτή του ιδανικού φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων

$$H(j\omega) = \begin{cases} 2 & |\omega| \leq \omega_m \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- (i) Σχεδιάστε το μετασχηματισμό Fourier $V(j\omega)$ του σήματος $v(t)$ στην έξοδο του πολλαπλασιαστή. Υποδείξτε τις συχνότητες του $V(j\omega)$ που αντιστοιχούν



Σχήμα Πρ.-12.6

στη σκιασμένη περιοχή του $X(j\omega)$ στο Σχήμα Πρ.-12.6 (β).

- (ii) Σχεδιάστε το μετασχηματισμό Fourier $Y(j\omega)$ του σήματος εξόδου $y(t)$ (Χωρίς να υπολογίσετε το $y(t)$).
- (iii) Βασιζόμενοι στο σχεδιάγραμμα του ερωτήματος (i), δώστε μια απάντηση στο πώς το σύστημα αυτό επηρεάζει το φάσμα του σήματος εισόδου $X(j\omega)$.
- (iv) Πώς μπορείτε να ανακτήσετε το $x(t)$ από το $y(t)$; Σχεδιάστε το σχηματικό διάγραμμα της λύσης που βρήκατε.

Πρόβλημα.-12.7 Το σύστημα που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.7(α) ονομάζεται *σύστημα ορθογώνιας διαμόρφωσης*. Είναι μια μέθοδος αποστολής δύο σημάτων περιορισμένου εύρους ζώνης πάνω από το ίδιο κανάλι. Ο αποδιαμορφωτής που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.7(β) θα ανακτήσει ένα από τα δύο σήματα εισόδου. Υποθέστε ότι και τα δύο σήματα είναι περιορισμένου εύρους ζώνης έτσι ώστε η μέγιστη συχνότητα να είναι ω_m , δηλαδή, $X_1(j\omega) = 0$ για $|\omega| \geq \omega_m$ και $X_2(j\omega) = 0$ για $|\omega| \geq \omega_m$, με $\omega_m \ll \omega_c$.

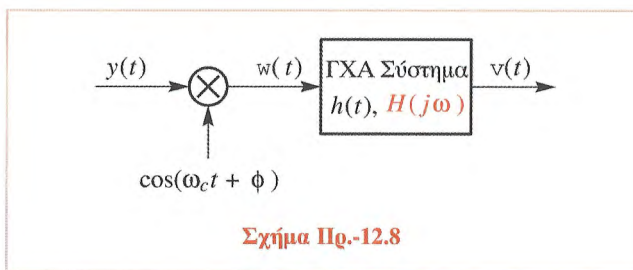
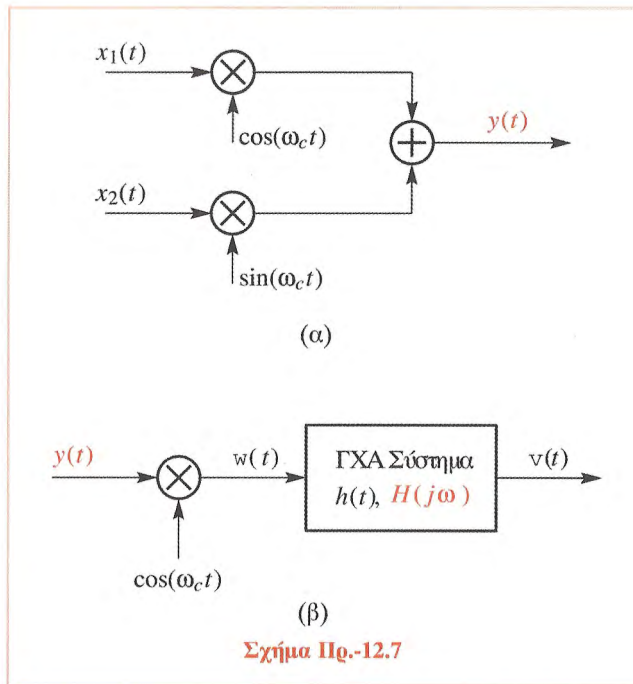
- (i) Η έξοδος του συστήματος ορθογωνικής διαμόρφωσης που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.7(α) είναι $y(t) = x_1(t) \cos(\omega_c t) + x_2(t) \sin(\omega_c t)$. Βρείτε μια έκφραση του μετασχηματισμού Fourier $Y(j\omega)$ συναρτήσει των $X_1(j\omega)$ και $X_2(j\omega)$. Σχεδιάστε την $Y(j\omega)$. Υποθέστε απλές (αλλά διαφορετικές) μορφές για τους μετασχηματισμούς περιορισμένου εύρους ζώνης $X_1(j\omega)$ και $X_2(j\omega)$ και χρησιμοποιήστε τους στη σχεδίαση του $Y(j\omega)$.
- (ii) Από την έκφραση που βρήκατε στο ερώτημα (i) και τη γραφική παράσταση που κάνατε, θα έπρεπε να δείτε ότι ο $Y(j\omega) = 0$ για $|\omega| \leq \omega_a$ και για $|\omega| \geq \omega_b$. Καθορίστε τα ω_a και ω_b .
- (iii) Δοθέντων των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$, $2 \sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)$ και $2 \cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)$, δείξτε ότι στον αποδιαμορφωτή που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.7(β), η έξοδος του μίκτη είναι

$$w(t) = \frac{1}{2}x_1(t)[1 - \cos(2\omega_c t)] + \frac{1}{2}x_2(t) \sin(2\omega_c t)$$

- (iv) Το σήμα $w(t)$ όπως καθορίστηκε στο ερώτημα (iii) είναι η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα. Καθορίστε την απόκριση συχνότητας του συστήματος αυτού έτσι ώστε η έξοδος του να είναι $v(t) = x_1(t)$. Δώστε την απάντησή σας με τη μορφή ενός προσεχτικά σχεδιασμένου διαγράμματος της $H(j\omega)$.
- (v) Σχεδιάστε ένα σχηματικό διάγραμμα του συστήματος του αποδιαμορφωτή του οποίου η έξοδος θα είναι $x_2(t)$ όταν η είσοδος είναι $y(t)$. Αυτό απαιτεί τη μετατροπή του μίκτη.

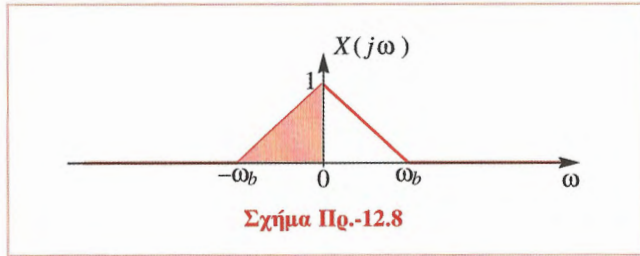
Πρόβλημα.-12.8 Θεωρήστε το σύστημα διαμόρφωσης DSBAM στο Σχήμα Πρ.-12.8 όπου

$$H(j\omega) = \begin{cases} 2 & |\omega| \leq \omega_{co} \\ 0 & |\omega| > \omega_{co} \end{cases}$$



Έχουμε αποδείξει ότι εάν το $x(t)$ έχει ένα περιορισμένου εύρους ζώνης μετασχηματισμό Fourier τέτοιο ώστε $X(j\omega) = 0$ για $|\omega| \geq \omega_b$, $\omega_c > \omega_b$, $\phi = 0$ και $\omega_b < \omega_{co} < (2\omega_c - \omega_b)$, τότε το DSBAM σήμα $y(t) = x(t) \cos(\omega_c t)$ μπορεί να αποδιαμορφωθεί από το σύστημα που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.8. Κατά συνέπεια, για τέλει συγχρονισμό της συχνότητας και της φάσης του

αποδιαμορφωτή, θα ισχύει $v(t) = x(t)$. Στα ερωτήματα που ακολουθούν υποθέστε ότι το σήμα εισόδου $x(t)$ έχει έναν περιορισμένου εύρους ζώνης μετασχηματισμό Fourier που αναπαρίσταται από το ακόλουθο σχεδιάγραμμα:



(i) Τώρα υποθέστε ότι $\phi \neq 0$. Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Euler για να δείξετε ότι:

$$\begin{aligned} w(t) &= y(t) \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= x(t) \cos(\omega_c t) \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} x(t) \cos \phi + \frac{1}{2} x(t) \cos(2\omega_c t + \phi) \end{aligned}$$

(ii) Από την εξίσωση αυτή βρείτε μια εξίσωση για το $W(j\omega)$ σε σχέση με το $X(j\omega)$ και χρησιμοποιήστε την εξίσωση αυτή για να φτιάξετε ένα σχεδιάγραμμα του $W(j\omega)$ για το δοσμένο $X(j\omega)$.

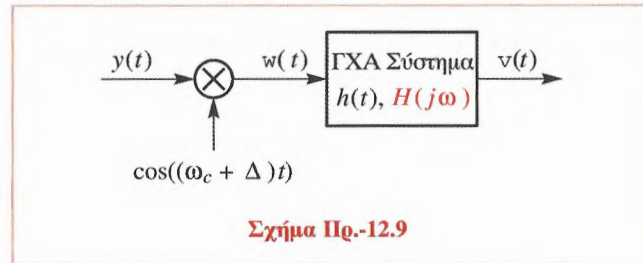
(iii) Από το σχεδιάγραμμα αυτό, υποθέτοντας ότι $\omega_{co} = \omega_b$, φτιάξτε ένα σχεδιάγραμμα του $V(j\omega)$.

(iv) Από το σχεδιάγραμμα του $V(j\omega)$, βρείτε μια εξίσωση για το $v(t)$ συναρτήσει του $x(t)$ και ϕ .

Πρόβλημα.-12.9 Χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις για το $X(j\omega)$ και το ω_c του προηγούμενου προβλήματος, θεωρήστε την περίπτωση που ο διαμορφωτής και ο αποδιαμορφωτής είναι σε φάση ($\phi = 0$) αλλά η συχνότητα φέροντος του αποδιαμορφωτή διαφέρει κατά ένα μικρό ποσό $\Delta \ll \omega_c$ όπως απεικονίζεται στο σχηματικό διάγραμμα που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.9.

(i) Φτιάξτε σχεδιάγραμμα του $W(j\omega)$ για το περιορισμένου εύρους ζώνης $X(j\omega)$ του Προβλήματος 12.8.

(ii) Χρησιμοποιήστε το σχεδιάγραμμα για να βρείτε μια εξίσωση για το $v(t)$ συναρτήσει των $x(t)$ και Δ . Στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει να υποθέσετε ότι η συχνότητα αποκοπής του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου ικανοποιεί τη σχέση $(\omega_b + \Delta) < \omega_{co} < (2\omega_c + \Delta - \omega_b)$.



Πρόβλημα.-12.10 Το Σχήμα Πρ.-12.10(α) απεικονίζει ένα σύστημα που είναι σχεδιασμένο να εντοπίζει σήματα δύο διαφορετικών συχνοτήτων όπως σε ένα modem μεταλλαγής μετατόπισης συχνότητας (FSK).

(i) Υποθέστε ότι το σήμα εισόδου στο σύστημα που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.10(α) είναι $x(t) = x_1(t) = \cos(\omega_1 t)$ όπου $\omega_1 = \omega_c - \omega_0$ με $\omega_0 > 0$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα μετατόπισης στη συχνότητα του Μετασχηματισμού Fourier και το μετασχηματισμό Fourier του συνημιτονικού σήματος, καθορίστε και σχεδιάστε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $w(t)$.

- (ii) Υποθέστε τώρα ότι το κατωπερατό φίλτρο στο Σχήμα Πρ.-12.10(α) έχει απόκριση συχνότητας όπως αυτή που απεικονίζεται στο Σχήμα Πρ.-12.10(β). Καθορίστε την ελάχιστη τιμή της ω_p και τη μέγιστη τιμή της ω_s έτσι ώστε η έξοδος του φίλτρου να είναι

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}.$$

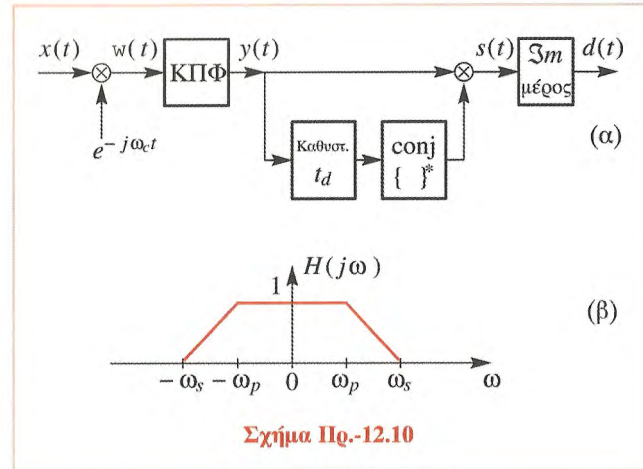
Αυτό θα δώσει την ευρύτερη δυνατή περιοχή μετάβασης ανάμεσα στις περιοχές διάβασης και αποκοπής και επομένως το πιο απλό σε υλοποίηση φίλτρο.

- (iii) Δείξτε ότι στις συχνότητες των περιοχών διάβασης και αποκοπής που βρήκατε στο ερώτημα (ii), η συνολική έξοδος είναι μια σταθερά, δηλαδή, $d(t) = d_1(t) = -\frac{1}{4}\sin(\omega_0 t_d)$.

- (iv) Υποθέστε τώρα ότι $x(t) = x_2(t) = \cos(\omega_2 t)$ όπου $\omega_2 = \omega_c + \omega_0$ και οι συχνότητες αποκοπής του φίλτρου είναι ίδιες μ' αυτές που βρήκατε στο ερώτημα (ii). Δείξτε ότι η συνολική έξοδος είναι πάλι μια σταθερά αλλά σ' αυτή την περίπτωση, $d(t) = d_2(t) = \frac{1}{4}\sin(\omega_0 t_d)$.

- (v) Θεωρήστε ότι το σήμα εισόδου μπορεί να είναι είτε το $x_1(t)$ είτε το $x_2(t)$. Δώστε ένα απλό αλγόριθμο που θα βρίσκει ποιο σήμα χρησιμοποιήθηκε.

- (vi) Εξηγήστε πώς θα υλοποιούσατε το σύστημα που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.10(α) χρησιμοποιώντας ψηφιακή επεξεργασία σημάτων. Σχεδιάστε ένα σχηματικό διάγραμμα που να δείχνει το σήμα $x(t)$ να δειγματοληπτείται από ένα ιδανικό μετατροπέα Σ-σε-Δ που θα ακολουθείται από μία διακριτού-χρόνου εκδοχή του συστήματος στο Σχήμα Πρ.-12.10(α). Για τα σήματα εισόδου που χρησιμοποιήθηκαν στα ερωτήματα (i)-(v), ποια είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{\text{samp}} = 1/T_s$ που μπορεί να χρησιμοποιηθεί; Για αυτόν το ρυθμό δειγματοληψίας, καθορίστε τη συχνότητα του μιγαδικού-εκθετικού σήματος $e^{-j\omega_c n}$ και τις κανονικοποιημένες συχνότητες αποκοπής του χαμηλοπερατού φίλτρου διακριτού χρόνου που θα απαιτηθεί.



Σχήμα Πρ.-12.10

Πρόβλημα.-12.11 Το Σχήμα Πρ.-12.11(α) απεικονίζει ένα σύστημα *παλμοκωδικής διαμόρφωσης* (PAM). Γενικά, το $p(t)$ είναι ένα περιοδικό παλμικό σήμα με βασική συχνότητα $\omega_p = 2\pi/T_p$. Επομένως, μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μια σειρά Fourier όπως φαίνεται Σχήμα Πρ.-12.11(α). Γι' αυτό το πρόβλημα, θεωρούμε ότι το $p(t)$ είναι ένα περιοδικό τετραγωνικό κύμα που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.11(β).

- (i) Υποθέστε ότι $x(t) = \cos(200\pi t)$. Κάντε μια γραφική στο διάστημα $0 \leq t \leq 0.02$ των σημάτων $x(t)$, $p(t)$ και $x_p(t) = p(t)x(t)$. Στο σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων των $p(t)$ και $x_p(t)$, υποθέστε ότι $\omega_p = 500\pi$. Παρατηρήστε ότι ο πολλαπλασιασμός του $x(t)$ με το περιοδικό τετραγωνικό κύμα έχει σαν αποτέλεσμα το $x(t)$ να περνάει και να αποκόπτεται περιοδικά με περίοδο $T_p = 1/250 = 0.004$ δευτερολέπτα.
- (ii) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του $x_p(t) = p(t)x(t)$ είναι

$$X_p(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X(j(\omega - k\omega_p))$$

(iii) Για είσοδο $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(j\omega)$ που απεικονίζεται στο Σχήμα Πρ.-12.11(γ), σχεδιάστε την $X_p(j\omega)$ όταν $\omega_p = 2\pi/T_p = 500\pi$.

(iv) Αν η απόκριση συχνότητας του ΓΧΑ συστήματος είναι

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} G & |\omega| \leq \omega_{co} \\ 0 & |\omega| > \omega_{co} \end{cases}$$

και $\omega_p = 2\pi/T_p = 500\pi$, χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα του ερωτήματος (ii) για να καθορίσετε το κέρδος G και τη συχνότητα αποκοπής ω_{co} έτσι ώστε $x_r(t) = x(t)$.

(v) Καθορίστε την *ελάχιστη* τιμή της ω_p και τις αντίστοιχες τιμές του G και του ω_{co} , έτσι ώστε $x_r(t) = x(t)$.

(vi) Το σύστημα αυτό ουσιαστικά συμπεριφέρεται με τον ίδιο τρόπο για σχεδόν οποιοδήποτε περιοδικό σήμα $p(t)$ με βασική συχνότητα ω_p . Ωστόσο πρέπει να ικανοποιείται μια σημαντική συνθήκη για το συντελεστή a_0 της σειράς Fourier. Ποια είναι αυτή η συνθήκη;

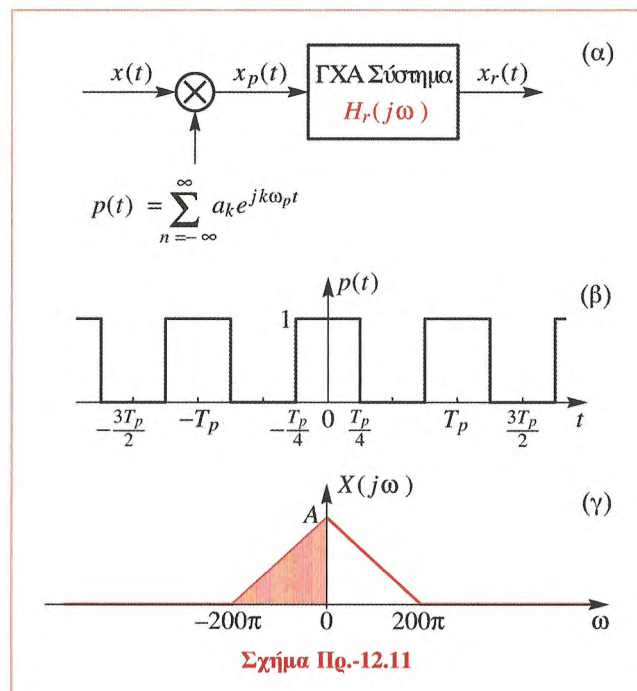
Πρόβλημα.-12.12 Η απόδειξη του θεωρήματος δειγματοληψίας περιλαμβάνει τις διαδικασίες της δειγματοληψίας του χρονικού συρμού και της ανακατασκευής όπως φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.12(α).

(i) Για την είσοδο με μετασχηματισμό Fourier που απεικονίζεται στο Σχήμα Πρ.-12.12(β), χρησιμοποιήστε το θεώρημα δειγματοληψίας για να επιλέξετε το ρυθμό δειγματοληψίας $\omega_s = 2\pi/T_s$, έτσι ώστε η $x_r(t) = x(t)$ όταν

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \leq \pi/T_s \\ 0 & |\omega| > \pi/T_s \end{cases} \quad (12.78)$$

Σχεδιάστε την $X_s(j\omega)$ για την τιμή της $\omega_s = 2\pi/T_s$ που είναι ίση με το ρυθμό του Nyquist⁵.

⁵Θυμηθείτε ότι ο ρυθμός Nyquist είναι ο ελάχιστος δυνατός ρυθμός δειγματοληψίας που δεν προκαλεί αναδιπλώσεις.

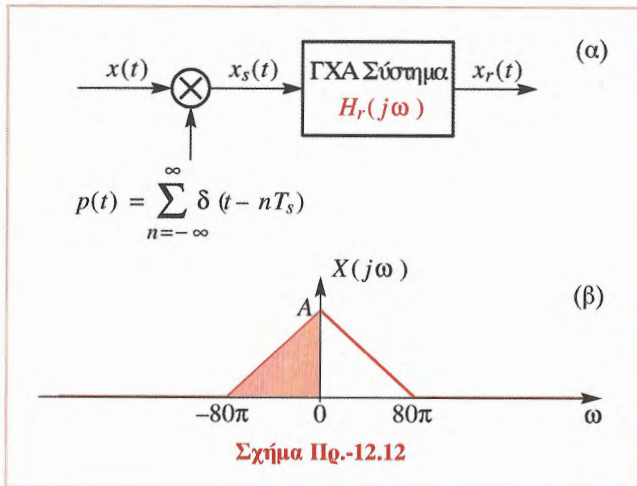


(ii) Αν στο παραπάνω σύστημα $\omega_s = 2\pi/T_s = 100\pi$ και η $X(j\omega)$ είναι όπως φαίνεται παραπάνω, σχεδιάστε το μετασχηματισμό Fourier $X_s(j\omega)$ και δείξτε ότι υπάρχει αναδίπλωση. Θα υπάρχει άπειρο πλήθος μετατοπισμένων αντιγράφων της $X(j\omega)$, δηλώνοντας έτσι το περιοδικό πρότυπο συναρτήσεως του ω .

(iii) Για τις συνθήκες του ερωτήματος (ii), καθορίστε και σχεδιάστε το μετασχηματισμό Fourier της εξόδου $X_r(j\omega)$ αν η απόκριση συχνότητας του ΓΧΑ συστήματος δίνεται από τη Σχέση (12.78).

Πρόβλημα.-12.13 Το σήμα εισόδου του συστήματος δειγματοληψίας και ανακατασκευής που φαίνεται στο Πρόβλημα.-12.12(α) είναι

$$x(t) = 2 \cos(100\pi t - \pi/4) + \cos(300\pi t + \pi/3)$$



Σχήμα Πρ.-12.12

για $-\infty < t < \infty$. Η απόκριση συχνότητας του χαμηλοπερατού φίλτρου ανακατασκευής είναι

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \leq \pi/T_s \\ 0 & |\omega| > \pi/T_s \end{cases}$$

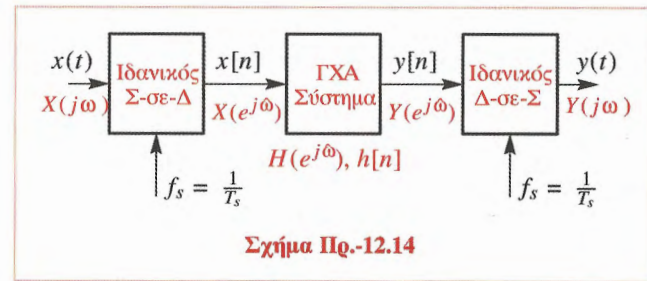
όπου T_s η περίοδος δειγματοληψίας.

- (i) Καθορίστε το μετασχηματισμό Fourier $X(j\omega)$ και σχεδιάστε το μετασχηματισμό Fourier $X_s(j\omega)$ για $-2\pi/T_s < \omega < 2\pi/T_s$ για την περίπτωση που $2\pi/T_s = 1000\pi$. Βαθμονομήστε προσεκτικά τη γραφική παράστασή σας. Ποια είναι η έξοδος $x_r(t)$ σ' αυτήν την περίπτωση;
- (ii) Υποθέστε τώρα ότι $\omega_s = 2\pi/T_s = 500\pi$. Προσδιορίστε μια εξίσωση για την έξοδο $x_r(t)$.
- (iii) Είναι δυνατόν να επιλεγεί ο ρυθμός δειγματοληψίας τέτοιος ώστε

$$x_r(t) = A + 2\cos(100\pi t - \pi/4)$$

όπου A μια σταθερά; Αν ναι, ποια είναι η τιμή του T_s και ποια η αριθμητική τιμή της A ;

Πρόβλημα.-12.14 Όλα τα ερωτήματα αυτού του προβλήματος αφορούν το σύστημα που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.14.



Σχήμα Πρ.-12.14

Σε όλα τα ερωτήματα του προβλήματος, υποθέστε ότι η $X(j\omega) = 0$ για $|\omega| \geq 1000\pi$. Επιπλέον, υποθέστε ότι οι μετατροπείς Σ-σε-Δ και Δ-σε-Σ είναι ιδανικοί, δηλαδή,

$$x[n] = x(nT), \quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\sin \frac{\pi}{T_s}(t - nT_s)}{\frac{\pi}{T_s}(t - nT_s)}$$

- (i) Υποθέστε ότι για το σύστημα διακριτού-χρόνου ισχύει ότι $y[n] = x[n]$. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του $2\pi/T_s$ για την οποία ισχύει ότι $y(t) = x(t)$;
- (ii) Υποθέστε ότι το ΓΧΑ σύστημα διακριτού-χρόνου έχει σαν συνάρτηση μεταφοράς την $H(z) = z^{-10}$ και υποθέστε ότι ο ρυθμός δειγματοληψίας ικανοποιεί τη συνθήκη του ερωτήματος (α). Βρείτε τη συνολική ενεργό απόκριση συχνότητας $H_{\text{eff}}(j\omega)$ και από αυτήν προσδιορίστε μια γενική σχέση μεταξύ του $y(t)$ και της $x(t)$.

- (iii) Η σχέση εισόδου/εξόδου του συστήματος διακριτού-χρόνου είναι

$$y[n] = \frac{1}{3} (x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

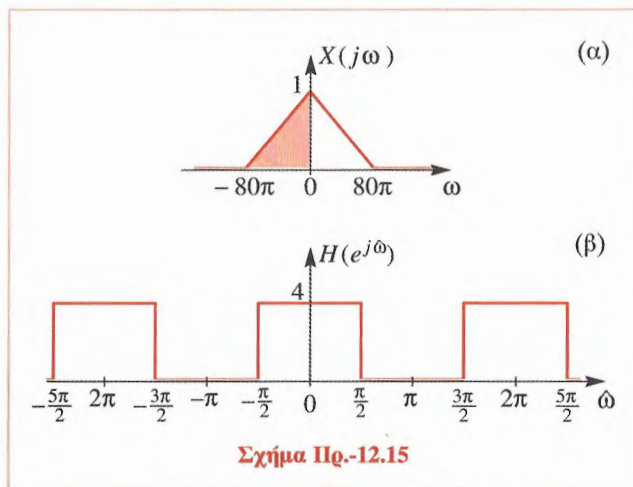
Για την τιμή του T_s που επιλέξατε στο ερώτημα (i), οι μετασχηματισμοί Fourier της εισόδου και της εξόδου σχετίζονται με μια εξίσωση της μορφής $Y(j\omega) = H_{\text{eff}}(j\omega)X(j\omega)$. Βρείτε μια εξίσωση για τη συνολική ενεργό απόκριση συχνότητας $H_{\text{eff}}(j\omega)$. Σχεδιάστε το μέτρο και τη φάση της $H_{\text{eff}}(j\omega)$ είτε στη Matlab είτε με το χέρι.

Πρόβλημα.-12.15 Θεωρήστε το σύστημα διακριτού-χρόνου φιλτραρίσματος ενός σήματος συνεχούς-χρόνου που φαίνεται στο Πρόβλημα.-12.14. Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εισόδου φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.15(α) και η απόκριση συχνότητας του συστήματος διακριτού-χρόνου που φαίνεται στο Σχήμα Πρ. 12.14 φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.15(β).

- (i) Υποθέστε ότι το σήμα εισόδου $x(t)$ έχει ένα μετασχηματισμό Fourier $X(j\omega)$ περιορισμένου εύρους ζώνης όπως φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.15(α). Γι' αυτό το σήμα εισόδου, ποιά είναι η *μικρότερη* τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας $f_s = 1/T_s$ έτσι ώστε οι μετασχηματισμοί Fourier της εισόδου και της εξόδου να ικανοποιούν τη σχέση $Y(j\omega) = H_{\text{eff}}(j\omega)X(j\omega)$;
- (ii) Υποθέστε ότι το σύστημα διακριτού-χρόνου είναι ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο διακριτού-χρόνου με απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ που ορίζεται από το σχεδιάγραμμα που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.-12.15(β). Θυμηθείτε ότι η $H(e^{j\omega})$ είναι περιοδική με περίοδο

2π. Τώρα, αν $f_s = 100$ δείγματα/δευτερόλεπτο, σχεδιάστε προσεκτικά τη συνολική ενεργό απόκριση συχνότητας $H_{\text{eff}}(j\omega)$ του συνολικού συστήματος. Σχεδιάστε επίσης το μετασχηματισμό Fourier $Y(j\omega)$, της εξόδου $y(t)$, όταν ο μετασχηματισμός Fourier $X(j\omega)$ της εισόδου είναι αυτός που απεικονίζεται στο Σχήμα Πρ.-12.15(α).

- (iii) Για την είσοδο που απεικονίζεται στο Σχήμα Πρ.-12.15(α) και το σύστημα που ορίζεται στο Σχήμα Πρ.-12.15(β), ποιος είναι ο *μικρότερος ρυθμός δειγματοληψίας* έτσι ώστε το σήμα εισόδου να περνά μέσα από το χαμηλοπερατό φίλτρο ανεπηρέαστο, δηλαδή, ποια είναι η ελάχιστη f_s η οποία εξασφαλίζει ότι $Y(j\omega) = X(j\omega)$;



Υπολογισμός Φάσματος

Από αυτά που έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα καθώς και από τη δειγματοληψία, το γραμμικό φιλτράρισμα και την διαμόρφωση πλάτους και συχνότητας, έχει αναδειχθεί η αξία της ανάλυσης των σημάτων και των συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας. Η *έννοια του φάσματος* είναι θεμελιώδης σε αυτή τη μορφή αντίληψης σημάτων και συστημάτων. Παρόλο που αποκτήσαμε αρκετή γνώση από τα απλά σήματα των οποίων το μετασχηματισμό Fourier είμασταν σε θέση να υπολογίζουμε από το ολοκλήρωμα Fourier, τα περισσότερα σήματα που προκύπτουν στην πράξη δεν μπορούν να περιγραφούν με απλές εξισώσεις οι οποίες υπάρχουν σε πίνακες ή εφαρμόζονται κατευθείαν στο ολοκλήρωμα Fourier. Γι αυτό το λόγο εάν θέλουμε να εφαρμόσουμε στην πράξη όσα περιγράφουμε σε αυτό το βιβλίο, θα πρέπει πρώτα να διευθετήσουμε το πρόβλημα του προσδιορισμού του φάσματος ενός σήματος που μπορεί να προκύψει σε πραγματικές συνθήκες.

Η φασματική ανάλυση με τη βοήθεια του ταχύ μετασχηματισμού Fourier (FFT) είναι η πιο συχνά εμφανιζόμενη περίπτωση κατά την οποία ένας μηχανικός, ή γενικότερα ένας επιστήμονας, εφαρμόζει στην πράξη τη θεωρία του μετασχηματισμού Fourier. Σήμερα, όταν καταγράφονται σήματα από ένα σύστημα, η καταγραφή είναι σχεδόν πάντα ψηφιακή με έναν μετατροπέα σήματος αναλογικού σε ψηφιακό ο οποίος και ψηφιοποιεί το σήμα πριν αυτό αποθηκευτεί στο υπολογιστικό σύστημα. Η διαδικασία υπολογισμού του φάσματος του αποθηκευμένου σήματος συνήθως συνίσταται στην *εκτέλεση ενός προγράμματος μετασχηματισμού Fourier* το οποίο βασίζεται στον FFT. Στην ουσία, ο μετασχηματισμός Fourier προσεγγίζεται από έναν υπολογιστικό αλγόριθμο. Ο FFT είναι ιδιαίτερα ελκυστικός όχι μόνο επειδή παρουσιάζει μια ευκολονόητη διατύπωση ως προσέγγιση του ολοκληρώματος του μετασχηματισμού Fourier αλλά

και επειδή το υπολογιστικό κόστος του είναι μικρό σε σχέση με αυτό που απαιτούν άλλες μέθοδοι. Για το λόγο αυτόν, ο FFT χρησιμοποιείται τόσο από αρχάριους όσο και από ειδήμονες στον υπολογισμό του φασματικού περιεχομένου των σημάτων. Παρόλα αυτά, η φασματική ανάλυση με τη χρήση του FFT παρουσιάζει κάποια σημαντικά μειονεκτήματα. Με την επεξεργασία σημάτων, μπορούμε να καταλάβουμε τον τρόπο με τον οποίο ο FFT προσεγγίζει το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού Fourier και έτσι αποφεύγεται η παρερμηνεία των δεδομένων. Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί μια εισαγωγή σε αυτά τα θέματα έτσι ώστε ο “υπολογισμός του φάσματος” να οδηγεί στη σωστή ερμηνεία των δεδομένων. Επιπρόσθετα για την περιγραφή των τεχνικών λεπτομερειών του υπολογισμού του φάσματος, ο βασικός στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι να τονισθεί πώς ο υπολογισμός του φάσματος με τον FFT σχετίζεται με το “πραγματικό” φασματικό περιεχόμενο του σήματος που όπως γνωρίζουμε δίνεται από το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού Fourier. Ένας ακόμη στόχος είναι να εισάγει στοιχειώδεις ιδέες αυτού που συχνά αναφέρεται ως χρονο-συχνοτική ανάλυση. Σ’ έναν τύπο της ανάλυσης αυτής, αναλύουμε ένα σήμα πολύ μεγάλου μήκους κάνοντας πολλούς FFT οι οποίοι στη συνέχεια ενοποιούνται σε μια εικόνα διαβαθμίσεων του γκρι η οποία και ονομάζεται *φασματογράφημα*. Η εικόνα αυτή που προκύπτει δείχνει στον αναλυτή του φάσματος με ποιον τρόπο το φάσμα, σε συγκεκριμένη συχνότητα, εξελίσσεται στο χρόνο. Η βαθιά κατανόηση του φασματογραφήματος απαιτεί μελέτη σε προχωρημένο επίπεδο, αλλά θα προσπαθήσουμε να βοηθήσουμε τον αναγνώστη να κατανοήσει τους περιορισμούς καθώς και την ισχύ της χρονο-συχνοτικής φασματικής ανάλυσης και ίσως του δημιουργήσουμε ένα κίνητρο για επιπλέον μελέτη επί του θέματος.

13-1 Πεπερασμένο Άθροισμα Fourier

Έχουμε ήδη δει πως ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος συνεχούς χρόνου $x_c(t)$ ορίζεται

ως ¹

Ο Συνεχούς Χρόνου Μετασχηματισμός Fourier

$$X_c(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)e^{-j\omega t} dt \quad (13.1)$$

και αποτελεί την τυπική μαθηματική ενσάρκωση του φάσματος όπως αυτό παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3 και χρησιμοποιείται σε όλο το βιβλίο. Επειδή το φάσμα είναι τόσο χρήσιμο, είναι φυσικό να επιδιώκουμε να προσδιορίζουμε το φάσμα ενός σήματος ακόμη και αν αυτό δεν περιγράφεται από μια απλή μαθηματική φόρμουλα. Πράγματι, δεδομένης της ισχύος του ψηφιακού υπολογισμού, θα ήταν βολικό να είχαμε ένα πρόγραμμα το οποίο θα μπορούσε να υπολογίζει το φάσμα από τα δείγματα ενός σήματος.

Μπορεί να προκύψει μια απλή προσέγγιση της Σχέσης (13.1) αν αντικαταστήσουμε το ολοκλήρωμα από ένα άθροισμα. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα κατά Riemann ισούται με το όριο του αθροίσματος των δειγμάτων της προς ολοκλήρωση συνάρτησης. Το άθροισμα κατά Riemann γίνεται ολοκλήρωμα κατά Riemann καθώς η απόσταση μεταξύ των δειγμάτων τείνει προς το μηδέν. Με πεπερασμένη απόσταση μεταξύ των δειγμάτων παίρνουμε το άθροισμα (13.2) το οποίο προσεγγίζει το ολοκλήρωμα της Σχέσης (13.1)

$$\hat{X}_c(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s)e^{-j\omega nT_s} \quad (13.2)$$

στην οποία έχουμε αντικαταστήσει το t με το nT_s , το dt από τη χρονική διαφορά μεταξύ των δειγμάτων, T_s και το ολοκλήρωμα με το άθροισμα των μη μηδενικών δειγμάτων της προς ολοκλήρωση συνάρτησης $x_c(nT_s)e^{-j\omega nT_s}$. Καθώς το $T_s \rightarrow 0$, το άθροισμα αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση

¹θα χρησιμοποιούμε τον υποδείκτη c όταν θέλουμε να τονίσουμε ότι η $x_c(t)$ είναι μια συνάρτηση συνεχούς μεταβλητής.

του ολοκληρώματος Fourier της ομαλής² συνάρτησης, αν και πάντα υπάρχει ένα σφάλμα προσέγγισης όταν το T_s είναι μη μηδενικό.

Υπάρχουν και δύο άλλα σημαντικά ζητήματα με την Σχέση (13.2). Καταρχήν, το ω είναι μια συνεχής μεταβλητή και επομένως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την (13.2) για όλες τις τιμές του ω . Πρέπει να αρκестούμε σε ένα πεπερασμένο σύνολο συχνοτήτων που συμβολίζονται ω_k . Δεύτερον, τα όρια του αθροίσματος στην Σχέση (13.2) είναι άπειρα, το οποίο σημαίνει πως το άθροισμα συμπεριλαμβάνει όλες τις μη μηδενικές τιμές της προς ολοκλήρωση συνάρτησης. Ένα σήμα $x_c(t)$ άπειρης διάρκειας θα απαιτούσε ένα άπειρο άθροισμα το οποίο ωστόσο για να το υπολογίσουμε θα έπρεπε να το περιορίζαμε σε έναν πεπερασμένο αριθμό όρων. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε μια προσέγγιση του μετασχηματισμού Fourier ενός δεξιόπλευρου σήματος χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$\hat{X}_c(j\omega_k) = T_s \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j\omega_k n T_s} \quad (13.3)$$

Το άνω όριο L θα έπρεπε να είναι αρκετά μεγάλο ώστε τα δείγματα του σήματος $x[n] = x_c(nT_s)$ να είναι είτε μηδενικά είτε αμελητέα έξω από το διάστημα $0 \leq nT_s < LT_s$.

Μπορούμε να επιλέξουμε για ανάλυση ένα πεπερασμένο σύνολο συχνοτήτων, $\{\omega_k\}$, αλλά ποιες συχνότητες πρέπει να επιλέξουμε για να υπολογίσουμε την (13.3);

Επειδή η προσέγγιση της Σχέσης (13.3) βασίζεται στα δειγματοληπτημένα δεδομένα $x[n] = x_c(nT_s)$, γνωρίζουμε ότι πρέπει να υπάρχει περιοδικότητα³ στο φάσμα $\hat{X}_c(j\omega_k)$. Για αυτόν το λόγο αρκεί να περιορίσουμε την εκτίμηση σε μια ζώνη συχνοτήτων εύρους $\omega_s = 2\pi/T_s$. Για λόγους

²Εξαιτίας της δειγματοληψίας που υπεισέρχεται στη Σχέση (13.2), έμμεσα υποθέτουμε ότι το σήμα $x_c(t)$ είναι περιορισμένου εύρους και τέτοια σήματα είναι πολύ ομαλά.

³Εξαιτίας της δειγματοληψίας θα πρέπει να περιμένουμε, αν το σήμα δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης, ότι οι αναδιπλώσεις θα είναι ένα πρόβλημα στον προσδιορισμό της ακρίβειας της προσέγγισης της Σχέσης (13.3).

που αργότερα θα γίνουν προφανείς, είναι συνηθισμένο να επιλέγουμε τιμές στο ακόλουθο διάστημα

$$0 \leq \omega_k < \frac{2\pi}{T_s}$$

και να υπολογίζουμε την (13.3) στις N ισαπέχουσες συχνότητες:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{NT_s} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (13.4)$$

Αντικαθιστώντας την (13.4) στη Σχέση (13.3) προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$\frac{1}{T_s} \hat{X}_c \left(j \frac{2\pi k}{NT_s} \right) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-j(2\pi k/N)n} \quad (13.5)$$

για $k = 0, 1, \dots, N-1$. Η Εξίσωση (13.5) αποτελεί το ζητούμενο “πεπερασμένο άθροισμα Fourier”. Εάν ορίσουμε $X[k] = (1/T_s) \hat{X}_c \left(j \frac{2\pi k}{NT_s} \right)$, τότε η ακολουθία $X[k]$ είναι μια προσέγγιση του $(1/T_s) X(j\omega)$ στο διακριτό σύνολο συχνοτήτων $\omega_k = 2\pi/(NT_s)$ και μπορούν να υπολογιστούν από το δεξιό μέλος της Σχέσης (13.5), την οποία γράφουμε ως ακολούθως:

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

$$X[k] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (13.6)$$

Παρατηρήστε ότι η Σχέση (13.6) είναι μια ακολουθία του k , που είναι ένας διακριτός συχνοτικός δείκτης⁴. Η Εξίσωση (13.6) ονομάζεται *Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier* ή *DFT* αφού είναι πράγματι μετασχηματισμός τύπου Fourier

⁴Εξαιτίας της περιοδικότητας στο πεδίο συχνότητας, περιοδικότητα που προκύπτει από την δειγματοληψία του $x_c(t)$, οι συχνότητες $\omega_k = 2\pi k/(NT_s)$ για $N/2 < k \leq N-1$ αντιστοιχούν στις αρνητικές συχνότητες $\omega_{k-N} = 2\pi(k-N)/(NT_s)$ της $X_c(j\omega)$. Θα συζητήσουμε αυτό το σημείο διεξοδικότερα στην Ενότητα 13-5.

και παράλληλα είναι διακριτός τόσο στον χρόνο όσο και στην συχνότητα.

Γενικά θεωρούμε ότι στη Σχέση (13.6) ισχύει $L = N$ αφού όταν $L = N$ έχουμε εάν ακριβή *αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμός Fourier* και επίσης, υπάρχουν απλοδοτικοί αλγόριθμοι για τον υπολογισμό των μιγαδικών αριθμών που προκύπτουν από την (13.6). Οι αλγόριθμοι αυτοί που υλοποιούν τον αποδοτικό υπολογισμό του DFT είναι ευρέως γνωστοί ως *Ταχείς μετασχηματισμοί Fourier* ή *FFT*. Στο υπολογιστικό περιβάλλον Matlab ο υπολογισμός της (13.6) γίνεται με την χρήση μιας συνάρτησης η οποία ονομάζεται `fft()`. Θα μιλήσουμε περισσότερο για τον FFT στις Ενότητες 13-5.3 και 13-9 αφού πρώτα μάθουμε περισσότερα για τις ιδιότητες του DFT και την χρήση του στην φασματική ανάλυση.

13-2 Πολλοί Μετασχηματισμοί Fourier;

Συχνά οι φοιτητές διαμαρτύρονται (δικαιολογημένα κάποιες φορές) ότι πρέπει να μάθουν πολλούς μετασχηματισμούς Fourier. Πράγματι, στο σημείο αυτό φαίνεται πως υπάρχει διαφορετικός μετασχηματισμός Fourier για κάθε είδος σήματος. Σε ένα βαθμό, αυτό είναι αληθές αλλά ουσιαστικά τα πράγματα δεν είναι τόσο πολύπλοκα όσο φαίνονται. Ορίσαμε πριν λίγο τον DFT (διακριτό μετασχηματισμό Fourier) στην Σχέση (13.6) και σημειώσαμε ότι πρόκειται για έναν μετασχηματισμό Fourier όταν και ο χρόνος και η συχνότητα είναι διακριτά μεγέθη. Καταλήξαμε στον DFT κάνοντας μια προσέγγιση στον CTFT (συνεχούς χρόνου μετασχηματισμός Fourier) ο οποίος αποτελεί και την σωστή επιλογή όταν και ο χρόνος και η συχνότητα είναι συνεχείς μεταβλητές. Στο Κεφάλαιο 11, δείξαμε ότι οι σειρές Fourier μπορούν να θεωρηθούν ειδικές περιπτώσεις του CTFT στις οποίες ο χρόνος είναι συνεχής και η συχνότητα διακριτή. Τέλος, στο Κεφάλαιο 12, ορίσαμε τον DTFT (μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου) για την περίπτωση που ο χρόνος είναι διακριτός και η συχνότητα είναι συνεχής μεταβλητή (δες Πίνακα 13-1). Ενώ οι ορισμοί αυτών των μετασχηματισμών Fourier είναι διαφορετικοί, και είναι σημαντικό να κατανοήσουμε τις μεταξύ τους διαφορές,

Πίνακας 13-1: Τύποι Μετασχηματισμών Fourier.

	Διακριτός-Χρόνος	Συνεχής-Χρόνος
Διακριτή Συχνότητα	DFT, $X[k]$	Σειρές Fourier $\{a_k\}$
Συνεχής Συχνότητα	DTFT, $X(e^{j\omega})$	CTFT, $X_c(j\omega)$

η βασική δομή είναι κοινή για όλους, δηλαδή το σήμα πολλαπλασιάζεται με ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα μεταβλητής συχνότητας και το γινόμενο ανάλογα με το αν η μεταβλητή του χρόνου είναι διακριτή ή συνεχής είτε αθροίζεται είτε ολοκληρώνεται. Σε αυτό οφείλεται το γεγονός πως οι βασικές ιδιότητες των διαφορετικών μετασχηματισμών είναι όμοιες, για παράδειγμα η συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου πάντα υποδηλώνει πολλαπλασιασμό στο πεδίο της συχνότητας και καθυστέρηση στον χρόνο υπονοεί πολλαπλασιασμό του μετασχηματισμού Fourier από ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα στο πεδίο της συχνότητας.

Δεν θα πρέπει να μας εκπλήσσει το γεγονός ότι αυτοί οι διαφορετικοί μετασχηματισμοί Fourier συνδέονται μεταξύ τους μέσω της διαδικασίας της δειγματοληψίας. Πράγματι, ότι κατανοήσαμε για την δειγματοληψία και την αναδίπλωση εξαρτώνται άμεσα από την οπτική γωνία του πεδίου της συχνότητας. Έτσι πριν κατανοήσουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το φάσμα ενός σήματος χρησιμοποιώντας τον DFT, πρέπει να κατανοήσουμε πώς συνδέονται μεταξύ τους οι μετασχηματισμοί DFT, DTFT και CTFT. Το συμπέρασμα "κλειδί" έχει ήδη προκύψει στην Ενότητα 12-3.5 όπου αποδείξαμε πως ο DTFT ενός δειγματοληπτημένου σήματος ισούται με το άθροισμα ενός άπειρου συνόλου μετατοπισμένων και σταθμισμένων αντιγράφων του CTFT του συνεχούς χρόνου σήματος (δες Σχέση (13.8)). Αυτό σημαίνει πως *εάν ένα σήμα συνεχούς χρόνου είναι περιορισμένου εύρους, τότε κάθε περίοδος του DTFT του αντίστοιχου δειγματοληπτημένου σήματος είναι ένα τέλειο (σταθμισμένο) αντίγραφο του CTFT*. Θα δούμε ότι το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε το φάσμα

ενός συνεχούς χρόνου σήματος εκτελώντας αριθμητικούς υπολογισμούς.

Στην ενότητα αυτή θα επαναλάβουμε τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των διαφορετικών μετασχηματισμών Fourier που έχουμε συναντήσει ως τώρα. Η ανάλυση αυτή θα αποτελέσει την βάση για βαθύτερη κατανόηση της φασματικής ανάλυσης των δειγματοληπτημένων σημάτων.

13-2.1 Σχέση του DTFT με τον CTFT

Ο μετασχηματισμός Fourier ενός διακριτού χρόνου σήματος $x[n]$ ονομάζεται *Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT)*

Ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\hat{\omega}n} \quad (13.7)$$

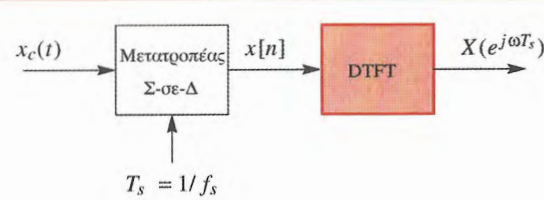
Ο DTFT είναι μια συνάρτηση της συνεχούς μεταβλητής συχνότητας $\hat{\omega}$ και η $X(e^{j\hat{\omega}})$ είναι πάντα περιοδική με περίοδο 2π . Αν η ακολουθία $x[n]$ έχει προκύψει από την δειγματοληψία ενός συνεχούς χρόνου σήματος $x_c(t)$ με περίοδο δειγματοληψίας T_s , τότε $x[n] = x_c(nT_s)$. Στην Ενότητα 12-3.5 δείξαμε, (δες Σχέση (12.61) στη Σελίδα 414), ότι ο DTFT της $x[n]$ και ο CTFT του $x_c(t)$ συνδέονται με την ακόλουθη σχέση:

$$X(e^{j\omega T_s}) = \frac{1}{T_s} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - \ell\omega_s)) \quad (13.8)$$

όπου $\omega_s = 2\pi/T_s$. Στην ειδική περίπτωση ενός σήματος περιορισμένου εύρους για το οποίο $X_c(j\omega) = 0$ για $|\omega| \geq \pi/T_s$, τα μετατοπισμένα αντίγραφα του $X_c(j(\omega - \ell\omega_s))$ δεν επικαλύπτονται (δηλαδή, δεν προκύπτει παραμόρφωση αναδίπλωσης). Επομένως, ισχύει ότι:

$$X(e^{j\omega T_s}) = \frac{1}{T_s} X_c(j\omega) \quad \text{για } |\omega| < \pi/T_s \quad (13.9)$$

Το σημαντικό αυτό αποτέλεσμα δηλώνει ότι ο CTFT ενός σήματος περιορισμένου εύρους ζώνης μπορεί να



Σχήμα 13-1: Υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier ενός δειγματοληπτούμενου σήματος μέσω του DTFT. Όταν η είσοδος $x_c(t)$ είναι περιορισμένου εύρους και ο ρυθμός δειγματοληψίας μεγαλύτερος του ρυθμού Nyquist, ο DTFT είναι ανάλογος του CTFT, δηλαδή, $X(e^{j\omega T_s}) = \frac{1}{T_s} X_c(j\omega)$.

προσδιοριστεί από τον υπολογισμό του DTFT των δειγμάτων $x[n] = x_c(nT_s)$. Το γεγονός αυτό αποτελεί την βάση για την χρήση αριθμητικών υπολογισμών στην διαδικασία της φασματικής ανάλυσης. Στο Σχήμα 13-1 φαίνεται πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο DTFT για τον υπολογισμό του φάσματος ενός σήματος συνεχούς χρόνου περιορισμένου εύρους ζώνης.

13-2.2 Σχέση του DFT με τον DTFT

Ο DFT προκύπτει από δειγματοληψία στη συχνότητα, πώς επομένως θα μπορούσε να σχετίζεται με τα παραπάνω; Αν περιοριστούμε στις ακολουθίες πεπερασμένης διάρκειας, δηλαδή $x[n]$ έτσι ώστε $x[n] \neq 0$ στο διάστημα $0 \leq n \leq L-1$, τότε ο DTFT δίνεται από τη παρακάτω σχέση:

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j\hat{\omega}n} \quad (13.10)$$

Ο DFT προκύπτει από τον DTFT από τον υπολογισμό της Σχέσης (13.10) σε ένα διακριτό σύνολο ισαπέχουσών συχνοτήτων $\hat{\omega}_k = (2\pi/N)k$, για $k = 0, 1, \dots, N-1$

$$X(e^{j(2\pi/N)k}) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn} = X[k] \quad (13.11)$$

13-2.3 Σχέση του DFT με τον CTFT

Για να δούμε πως συνδέονται ο DFT και ο CTFT, συνδυάζουμε τις Σχέσεις (13.8) και (13.11) για να βρούμε

$$\begin{aligned} X[k] &= X(e^{j(2\pi/N)k}) = X(e^{j\omega T_s}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{NT_s}} \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\omega - \ell \frac{2\pi}{T_s} \right) \right) \Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{NT_s}} \end{aligned} \quad (13.12)$$

Από τη Σχέση (13.12), που εκφράζει τον τρόπο που συνδέονται ο DFT μιας πεπερασμένης διάρκειας ακολουθίας και ο CTFT του αντίστοιχου συνεχούς χρόνου σήματος, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Ο DFT είναι μια ακολουθία του συχνотικού δείκτη k ο οποίος μπορεί να σχετιστεί με την συχνότητα ω_k του CTFT μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$k = \left(\frac{NT_s}{2\pi} \right) \omega_k \quad (13.13)$$

- Ο DFT χρησιμοποιεί μόνο ένα πεπερασμένου μήκους τμήμα του δειγματοληπτημένου σήματος.
- Ο DFT εκτιμά το φάσμα μόνο σε ένα διακριτό σύνολο συχνοτήτων.

Στην επόμενη ενότητα θα μελετήσουμε το θέμα του πεπερασμένου μήκους καθώς αυτό έχει την μεγαλύτερη επίδραση στην εμφάνιση του φάσματος.

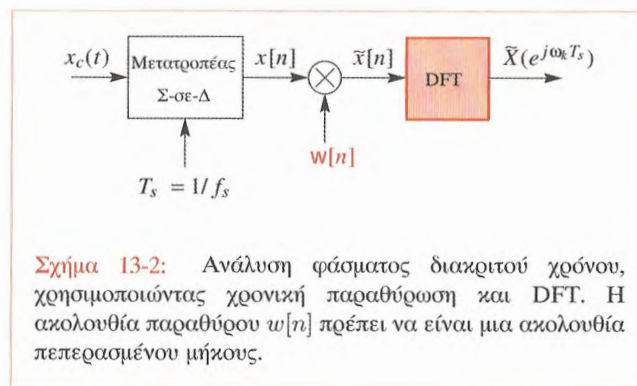
13-3 Χρονική Παραθύρωση

Για να χρησιμοποιήσουμε τον DFT στον προσδιορισμό του φάσματος ενός δειγματοληπτημένου σήματος, πρέπει όπως είδαμε το μήκος της ακολουθίας να είναι πεπερασμένο. Εάν το σήμα έχει άπειρο μήκος, πρέπει να επιλέξουμε ένα πεπερασμένο αριθμό δειγμάτων που θα χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυση Fourier και είμαστε ελεύθεροι να επιλέξουμε οποιοδήποτε πεπερασμένο τμήμα της συνολικής ακολουθίας. Είναι δυνατό να παρουσιάσουμε

αυτή τη διαδικασία επιλογής τμήματος σήματος, ως πολλαπλασιασμό ολόκληρης της ακολουθίας $x[n]$ με μια άλλη ακολουθία $w[n]$ η οποία ονομάζεται *παράθυρο δεδομένων*, ή απλά *παράθυρο*. Για παράδειγμα, το παράθυρο

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (13.14)$$

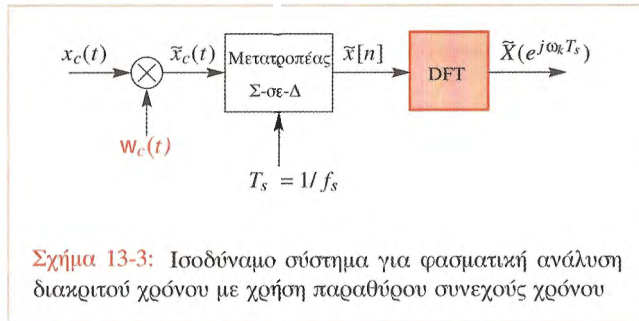
είναι μηδέν παντού εκτός από ένα πεπερασμένο διάστημα. Το σχηματικό διάγραμμα του Σχήματος 13-2 δείχνει το σήμα $x_c(t)$ να δειγματοληπτείται και να παράγεται η ακολουθία $x[n]$, η οποία στη συνέχεια περιορίζεται στον χρόνο από το παράθυρο δεδομένων. Αν το παράθυρο είναι το $w[n]$ της Σχέσης (13.14), τότε το $\tilde{x}[n]$ στο Σχήμα 13-2 αποτελείται από L δείγματα του $x[n]$. Το παράθυρο στην Σχέση (13.14) συχνά αποκαλείται



Σχήμα 13-2: Ανάλυση φάσματος διακριτού χρόνου, χρησιμοποιώντας χρονική παραθύρωση και DFT. Η ακολουθία παραθύρου $w[n]$ πρέπει να είναι μια ακολουθία πεπερασμένου μήκους.

τετραγωνικό παράθυρο εξαιτίας του σχήματός του. Όπως ορίστηκε στην Σχέση (13.14), το τετραγωνικό παράθυρο είναι περισσότερο χρήσιμο για αιτιατά σήματα τα οποία αρχίζουν την χρονική στιγμή $n = 0$, ωστόσο μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες ολισθημένες παραλλαγές του τετραγωνικού παραθύρου. Παρατηρήστε ότι έχουμε χρησιμοποιήσει το L για να συμβολίσουμε το μήκος του παραθύρου. Συχνά ισχύει $L = N$, όπου N το μήκος του DFT. Ωστόσο θα πρέπει να αναφέρουμε ότι

δεν υπάρχει λόγος να επιβάλουμε αυτόν τον περιορισμό εκτός αν απαιτείται ο υπολογισμός του αντίστροφου DFT οπότε και θα πρέπει να ισχύει ότι $L \leq N$. Το



Σχήμα 13-2 καθιστά σαφές το γεγονός ότι ο υπολογισμός του DFT είναι στην πραγματικότητα ο υπολογισμός του “DFT του παραθυρωμένου σήματος” $\tilde{x}[n] = w[n]x[n]$, και *όχι* του σήματος $x[n]$. Έτσι, η κατανόηση του φάσματος που υπολογίζουμε με τον DFT απαιτεί την κατανόηση του πώς η χρονική παραθύρωση των δεδομένων αλλάζει το μετασχηματισμό Fourier του σήματος. Για να διευκολυνθούμε στο σημείο αυτό, είναι χρήσιμο να αποδείξουμε ότι η διαδικασία της παραθύρωσης μπορεί να εφαρμοστεί είτε στο διακριτού χρόνου σήμα όπως φαίνεται στο Σχήμα 13-2, είτε στο αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου όπως φαίνεται στο Σχήμα 13-3. Το μόνο που απαιτείται για την ισοδυναμία των Σχημάτων 13-2 και 13-3 είναι τα παράθυρα να συνδέονται με την σχέση $w[n] = w_c(nT_s)$. Αν ισχύει αυτό, τότε προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n] &= \tilde{x}_c(nT_s) \\ &= w_c(nT_s)x(nT_s) = w[n]x[n]\end{aligned}\quad (13.15)$$

το οποίο καθιστά τα Σχήματα 13-2 και 13-3 ισοδύναμα.

Αν για παράδειγμα το παράθυρο του διακριτού χρόνου είναι το *τετραγωνικό παράθυρο* της Σχέσης (13.14), τότε

ένα ισοδύναμο συνεχούς χρόνου παράθυρο δεδομένων θα μπορούσε να είναι το ακόλουθο:

$$w_c(t) = w_R(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (13.16)$$

όπου $(L-1)T_s < T < LT_s$.

Είμαστε πλέον έτοιμοι να εξερευνήσουμε την επίδραση της χρονικής παραθύρωσης στον υπολογισμό του φάσματος. Για να το επιτύχουμε αυτό, εξετάζουμε τον DFT της ακολουθίας $\tilde{x}[n]$ ο οποίος ορίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}\tilde{X}(e^{j\omega_k T_s}) &= \sum_{n=0}^{L-1} w[n]x[n]e^{-j\omega_k T_s n} \\ & \quad 0 \leq k \leq N-1\end{aligned}\quad (13.17)$$

όπου οι συχνότητες ανάλυσης του φάσματος είναι οι $\omega_k = 2\pi k/(NT_s)$. Η ακολουθία παραθύρου $w[n]$ προσδίδει πεπερασμένα όρια στο άθροισμα και έτσι η (13.17) μπορεί να υπολογιστεί με την χρήση FFT.

Άσκηση 13.1: Αποδείξτε ότι η διαδικασία παραθύρωσης συνεχούς χρόνου $\tilde{x}_c(t) = w_c(t)x_c(t)$, όταν τη δούμε σαν ένα σύστημα με είσοδο $x_c(t)$ και έξοδο $\tilde{x}_c(t)$, είναι ένα *γραμμικό* σύστημα. Δείξτε επίσης ότι το σύστημα παραθύρωσης είναι *χρονικά-μεταβαλλόμενο*.

13-4 Ανάλυση Αθροίσματος Ημιτόνων

Για να διευκρινίσουμε και να αναλύσουμε τις επιδράσεις της χρονικής παραθύρωσης, θα θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα από το οποίο θα προκύψουν μερικά γενικά και χρήσιμα συμπεράσματα. Έστω ότι έχουμε το σήμα:

$$x_c(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (13.18)$$

για $-\infty < t < \infty$. Είναι προφανές ότι πρόκειται για ένα σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης το οποίο και είναι αντιπροσωπευτικό για όλα τα σήματα που μπορούν να γραφούν σαν ένα *πεπερασμένο* άθροισμα ημιτόνων.

Επομένως, επιλέγοντας το ρυθμό δειγματοληψίας έτσι ώστε $\omega_s = 2\pi/T_s > 2\omega_1$ μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι δεν θα προκύψει παραμόρφωση οφειλόμενη στο φαινόμενο αναδίπλωσης από την αρχική δειγματοληψία που φαίνεται στο Σχήμα 13-2. Ο μετασχηματισμός Fourier (CTFT) αυτού του σήματος είναι:

$$X_c(j\omega) = 2\pi A_0 \delta(\omega) + \pi X_1 \delta(\omega - \omega_1) + \pi X_1^* \delta(\omega + \omega_1) \quad (13.19)$$

όπου $X_1 = A_1 e^{j\phi_1}$ το μιγαδικό πλάτος του συνημιτόνου στη συχνότητα ω_1 . Παρατηρήστε ότι σ' αυτήν την περίπτωση, το φάσμα αποτελείται από τρία απομονωμένα φασματικά στοιχεία που συμβολίζονται με τις κρουστικές συναρτήσεις στη DC συχνότητα και στις συχνότητες $\pm\omega_1$, τη θετική και αρνητική συχνότητα του ημιτόνου αντίστοιχα.

Ας θεωρήσουμε τώρα το σήμα $\tilde{x}_c(t)$ που προκύπτει από τη χρονική παραθύρωση του σήματος $x_c(t)$, δηλαδή

$$\begin{aligned} \tilde{x}_c(t) &= w_c(t)x_c(t) \\ &= A_0 w_c(t) + \frac{1}{2} X_1 w_c(t)e^{j\omega_1 t} + \frac{1}{2} X_1^* w_c(t)e^{-j\omega_1 t} \end{aligned} \quad (13.20)$$

όπου $X_1 = A_1 e^{j\phi_1}$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα του CTFT, προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\tilde{x}_c(t)$ είναι:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_c(j\omega) &= A_0 W_c(j\omega) + \frac{1}{2} X_1 W_c(j(\omega - \omega_1)) \\ &\quad + \frac{1}{2} X_1^* W_c(j(\omega + \omega_1)) \end{aligned} \quad (13.21)$$

όπου $W_c(j\omega)$ είναι ο CTFT του παραθύρου. Από τη Σχέση (13.21) μπορούμε να δούμε ότι η επίδραση της χρονικής παραθύρωσης ενός αθροίσματος μιγαδικών εκθετικών σημάτων είναι η δημιουργία ενός συνόλου συχνοτικά μετατοπισμένων αντιγράφων του $W_c(j\omega)$, κάθε ένα εκ των οποίων είναι σταθμισμένο με το μιγαδικό πλάτος του αρχικού μιγαδικού εκθετικού σήματος. Αν η Σχέση (13.18) περιέχει περισσότερα ημίτονα σε διαφορετικές συχνότητες, τότε η (13.21) θα περιέχει περισσότερα μετατοπισμένα και κατάλληλα σταθμισμένα αντίγραφα του $W_c(j\omega)$.

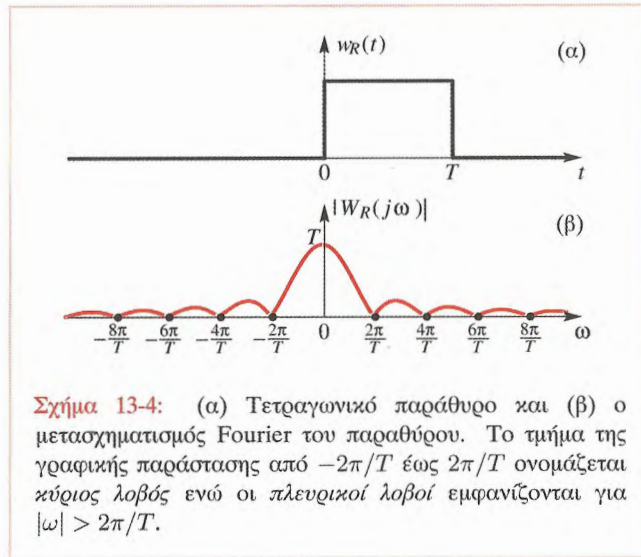
Άσκηση 13.2: Υποθέστε πως η είσοδος στο σύστημα φασματικής ανάλυσης του Σχήματος 13-2 είναι η ακόλουθη:

$$x_c(t) = A_0 + \sum_{r=1}^R A_r \cos(\omega_r t + \phi_r) \quad (13.22)$$

Προσδιορίστε τον μετασχηματισμό Fourier του παραθυρωμένου σήματος $\tilde{x}_c(t) = w_c(t)x_c(t)$.

Άσκηση 13.3: Δείξτε πως ο CTFT του $w_R(t)$ στην Εξίσωση (13.16) είναι:

$$W_R(j\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega/2)} e^{-j\omega T/2} \quad (13.23)$$



Σχήμα 13-4: (α) Τετραγωνικό παράθυρο και (β) ο μετασχηματισμός Fourier του παραθύρου. Το τμήμα της γραφικής παράστασης από $-2\pi/T$ έως $2\pi/T$ ονομάζεται κύριος λοβός ενώ οι πλευρικοί λοβοί εμφανίζονται για $|\omega| > 2\pi/T$.

Το τετραγωνικό παράθυρο που δίνεται από τη Σχέση

(13.16) παρουσιάζεται στο Σχήμα 13-4(α). Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier του παραθύρου

$$|W_R(j\omega)| = \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega/2)} \right| \quad (13.24)$$

φαίνεται στο Σχήμα 13-4(β). Παρατηρήστε ότι το συχνοτικό εύρος είναι αντιστρόφως ανάλογο της διάρκειας του $w_R(t)$.

Ένα μέτρο του συχνοτικού εύρους του $W_R(j\omega)$ γύρω από το $\omega = 0$ θεωρείται συχνά το εύρος του **κύριου λοβού** ανάμεσα από τα δύο σημεία που μηδενίζεται, το οποίο σ' αυτή την περίπτωση είναι $\Delta\omega = 4\pi/T$. Μπορούμε να δούμε ότι καθώς το T αυξάνει, η χρονική διάρκεια του παραθύρου αυξάνει ενώ το $\Delta\omega$ μειώνεται με αποτέλεσμα ο μετασχηματισμός Fourier να αποκτά μεγαλύτερη συγκέντρωση γύρω από την τιμή $\omega = 0$. Παρατηρήστε επίσης ότι οι **πλευρικοί λοβοί** έχουν σημαντικό πλάτος.

Στην περίπτωση των ημιτονοειδών σημάτων όπως αυτών των Σχέσεων (13.18) και (13.22), η χρονική παραθύρωση έχει σαν αποτέλεσμα την αντικατάσταση κάθε κρουστικής συνάρτησης στο φάσμα από ένα μετατοπισμένο και κατάλληλα σταθμισμένο αντίγραφο του $W_R(j\omega)$ του οποίου το μέτρο φαίνεται στο Σχήμα 13-4(β), με αποτέλεσμα το "θόλωμα" των φασματικών γραμμών του ιδανικού φάσματος περιορισμένου εύρους ζώνης. Το φαινόμενο αυτό διευκρινίζεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

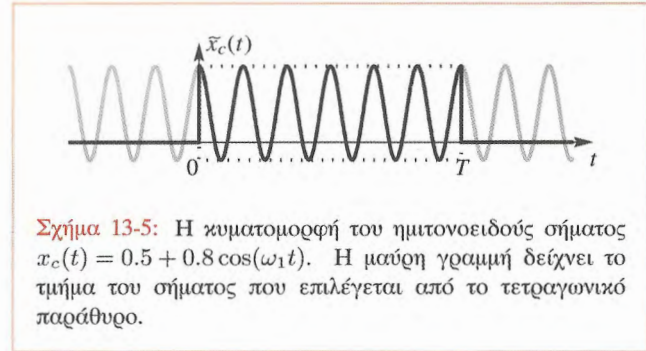


Παράδειγμα 13-1: Αριθμητικό Παράδειγμα

Υποθέστε την ειδική περίπτωση της Εξίσωσης (13.18)

$$x_c(t) = 0.5 + 0.8 \cos(\omega_1 t) \quad (13.25)$$

Δηλαδή, $A_0 = 0.5$, $A_1 = 0.8$, $\phi_1 = 0$, έτσι ώστε $X_1 = A_1 = 0.8$. Το τετραγωνικό παράθυρο που χρησιμοποιείται είναι χρονικής διάρκειας που επιλέχθηκε έτσι ώστε η συχνότητα του συνημιτονικού όρου να ικανοποιεί τη συνθήκη $\omega_1 = 3\Delta\omega = 12\pi/T$. Το αποτέλεσμα της

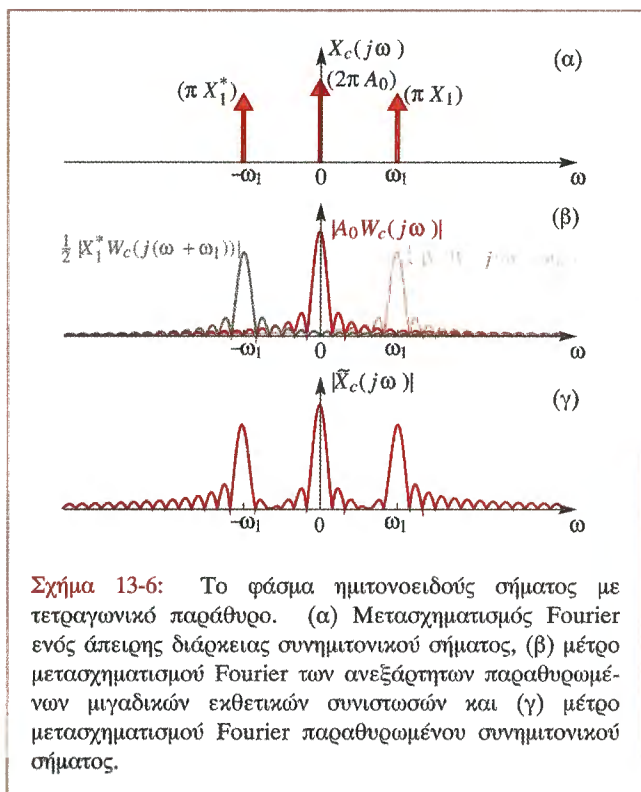


Σχήμα 13-5: Η κυματομορφή του ημιτονοειδούς σήματος $x_c(t) = 0.5 + 0.8 \cos(\omega_1 t)$. Η μαύρη γραμμή δείχνει το τμήμα του σήματος που επιλέγεται από το τετραγωνικό παράθυρο.

χρονικής παραθύρωσης φαίνεται στα Σχήματα 13-5 και 13-6. Το Σχήμα 13-5 δείχνει το σήμα $x_c(t)$ που ορίστηκε στη Σχέση (13.25). Το τμήμα μαύρου χρώματος του σήματος αντιστοιχεί στο τμήμα του σήματος που επιλέγεται από το τετραγωνικό παράθυρο του Σχήματος 13-4(α). Το γκρι τμήμα του σήματος αποτελεί το τμήμα του ιδανικού περιορισμένου εύρους συνημιτονικού σήματος που απορρίπτεται από το παράθυρο.

Στο Σχήμα 13-6(α) φαίνεται ο μετασχηματισμός Fourier του ιδανικού συνημιτονικού σήματος, Στο Σχήμα 13-6(β) φαίνονται τα μέτρα των τριών όρων της Σχέσης (13.21). Τέλος, στο Σχήμα 13-6(γ) φαίνονται το μέτρο του $\tilde{X}_c(j\omega)$ και το άθροισμα των τριών (μγαδικών) όρων της Σχέσης (13.21).

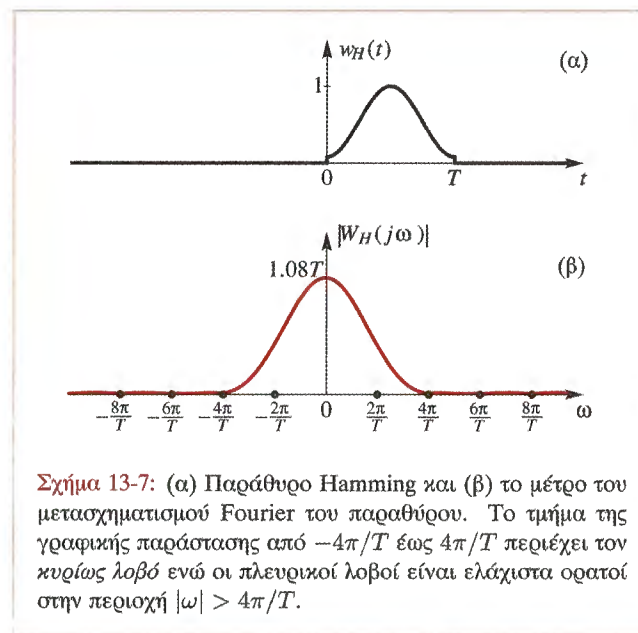
Αν συγκρίνουμε το Σχήμα 13-6(α) με το Σχήμα 13-6(γ), παρατηρούμε ότι οι ιδανικές φασματικές γραμμές που παριστάνονται με τις κρουστικές συναρτήσεις του ιδανικού φάσματος έχουν θολώσει από την παραθύρωση. Επιπλέον, αφού ο μετασχηματισμός Fourier του παραθύρου $W_c(j\omega)$ γίνεται περισσότερο συγκεντρωμένος όσο το μήκος του παραθύρου αυξάνεται, προκύπτει ότι ο τρόπος για να βελτιωθεί η **η συχνοτική διακριτότητα** (μείωση του θολώματος) είναι η χρήση ενός παραθύρου μεγαλύτερης χρονικής διάρκειας. Πράγματι, αφού το εύρος του κύριου λοβού του μετασχηματισμού Fourier του παραθύρου είναι περίπου $\Delta\omega = 4\pi/T$, προκύπτει ότι οι κρουστικές συναρτήσεις του ιδανικού φάσματος πρέπει να απέχουν με-



ταξύ τους τουλάχιστον κατά $\Delta\omega$ αλλιώς τα μετατοπισμένα αντίγραφα του μετασχηματισμού Fourier του παραθύρου θα επικαλύπτονται κατά το σχηματισμό του $\tilde{X}_c(j\omega)$.

Αφού σε αυτήν την περίπτωση, $\omega_1 = 3\Delta\omega$, η DC συνιστώσα και τα μιγαδικά εκθετικά στις συχνότητες $\pm\omega_1$ είναι αρκετά απομακρυσμένα ώστε να είναι ευδιάκριτες, στο φάσμα του παραθυρωμένου σήματος, τρεις ξεχωριστές κορυφές. Κάθε μια από τις κορυφές αυτές, βρίσκεται κοντά σε κάποια από τις συχνότητες του σήματος και το ύψος κάθε κορυφής είναι ανάλογο με το πλάτος του αντίστοιχου μιγαδικού εκθετικού τμήματος. ■

Ένα από τα βασικά μειονεκτήματα του τετραγωνικού παραθύρου είναι ότι οι πλευρικοί λοβοί του έχουν σχετικά



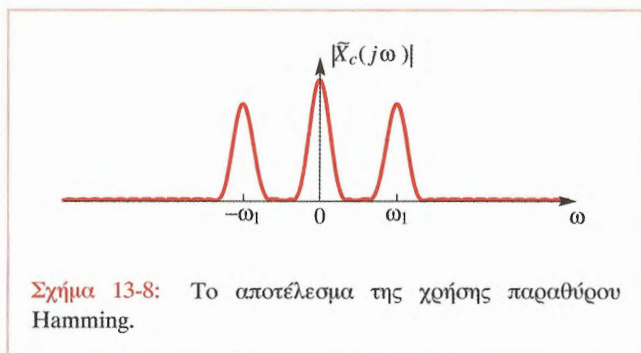
μεγάλο πλάτος και είναι πιθανό κατά τη φασματική ανάλυση να εκληφθούν, εσφαλμένα, ως χαμηλού πλάτους κορυφές άλλων σημάτων. Το *Παράθυρο Hamming*⁵ (καθώς και άλλα παράθυρα) βελτιώνουν το πρόβλημα των πλευρικών λοβών δημιουργώντας όμως κύριο λοβό μεγαλύτερου εύρους. Το παράθυρο Hamming που φαίνεται στο Σχήμα 13-7(α), ορίζεται από τη σχέση:

$$w_H(t) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (13.26)$$

Παρατηρήστε ότι οι τιμές του παραθύρου φθίνουν σταδιακά προς το μηδέν σε αντίθεση με το τετραγωνικό παράθυρο στο οποίο παρατηρείται απότομη πτώση στα άκρα του. Στο πεδίο της συχνότητας, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 13-7(β), το εύρος του κύριου λοβού του $W_H(j\omega)$ είναι διπλάσιο από το εύρος ($\Delta\omega = 8\pi/T$) του κύριου

⁵Οφείλει το όνομα του στον εφευρέτη του Richard W. Hamming.

λοβού του τετραγωνικού παραθύρου $W_R(j\omega)$. Αντίθετα, οι πλευρικοί λοβοί έχουν σημαντικά μικρότερο πλάτος (στο παράθυρο Hamming δεν είναι ορατοί) όπως μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 13-7(β). Όπως συμβαίνει και στο τετραγωνικό παράθυρο, η αύξηση της διάρκειας του παραθύρου μειώνει το συχνοτικό εύρος του κύριου λοβού του ενώ οι πλευρικοί λοβοί παραμένουν αμετάβλητοι.



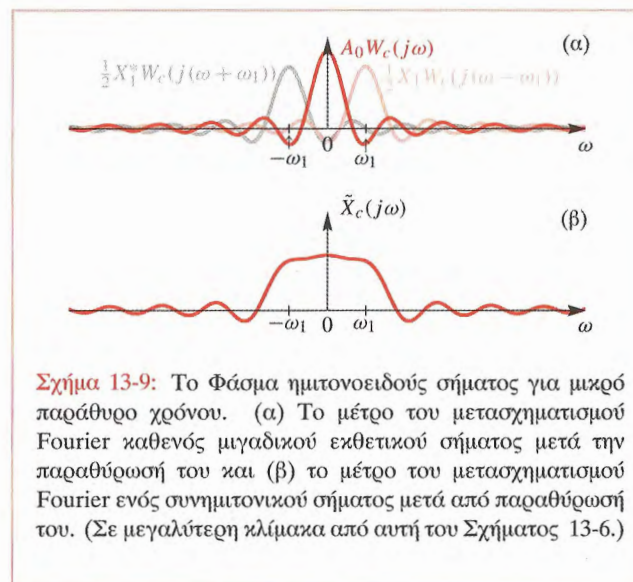
Σχήμα 13-8: Το αποτέλεσμα της χρήσης παραθύρου Hamming.

Η μορφή του φάσματος μεταβάλλεται ανάλογα με το ποιο χρονικό παράθυρο χρησιμοποιείται.

Για το παράθυρο Hamming, στο Σχήμα 13-8 απεικονίζεται ο μετασχηματισμός Fourier του παραθυρωμένου σήματος $\tilde{x}_c(t) = w_H(t)x(t)$ με $x(t)$ αυτό της Σχέσης (13.25) και με τα T και ω_1 ίδια με αυτά του Σχήματος 13-6. Αυτή η γραφική παράσταση δεν περιέχει την κυμάτωση που προκαλείται από τους πλευρικούς λοβούς, αλλά μια σύγκριση με το Σχήμα 13-6(γ) δείχνει ότι το εύρος των θλωμένων φασματικών γραμμών είναι περίπου διπλάσιο από αυτό του τετραγωνικού παραθύρου.

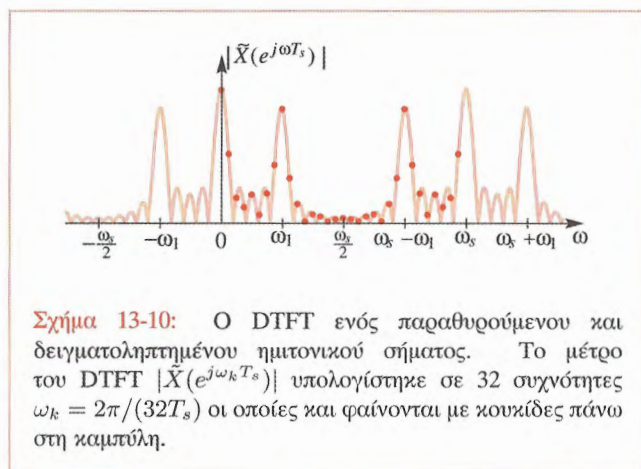
Γενικά, ανεξάρτητα από το αν χρησιμοποιούμε τετραγωνικό παράθυρο ή παράθυρο Hamming, αν υπάρχουν έντονα φαινόμενα επικάλυψης, δεν θα είμαστε σε θέση να διακρίνουμε ξεχωριστές κορυφές γύρω από τις αρχικές συχνότητες. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 13-9 όπου οι τρεις διαφορετικές κορυφές ενώνονται

στην πεπλατυσμένη φασματική κορυφή του Σχήματος 13-9(β). Στην περίπτωση αυτή, $\omega_1 = \frac{3}{4}\Delta\omega = 3\pi/T$ και τα επικαλυπτόμενα αντίγραφα του $W_R(j\omega)$ γεμίζουν την περιοχή γύρω από τη συχνότητα $\omega = 0$. Σαν



Σχήμα 13-9: Το Φάσμα ημιτονοειδούς σήματος για μικρό παράθυρο χρόνου. (α) Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier καθενός μιγαδικού εκθετικού σήματος μετά την παραθύρωσή του και (β) το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier ενός συνημιτονικού σήματος μετά από παραθύρωσή του. (Σε μεγαλύτερη κλίμακα από αυτή του Σχήματος 13-6.)

αποτέλεσμα, οι μιγαδικές εκθετικές συνιστώσες στις συχνότητες $\pm\omega_1$ δεν ξεχωρίζουν από τη DC συνιστώσα. Το φαινόμενο αυτό, που απεικονίζεται στα Σχήματα 13-6 και 13-9, αποτελεί την *αρχή της αβεβαιότητας* της ανάλυσης Fourier. Συγκεκριμένα, για να είμαστε σε θέση να ανακτήσουμε όλες τις συχνότητες σε ένα άθροισμα ημιτονικών στοιχείων, πρέπει να θεωρήσουμε παράθυρο μήκους τέτοιο ώστε το συχνοτικό εύρος $\Delta\omega$ του κύριου λοβού να είναι μικρότερο από την ελάχιστη απόσταση μεταξύ γειτονικών ημιτονοειδών συχνοτήτων. Για το τετραγωνικό παράθυρο, $\Delta\omega = 4\pi/T$, αλλά αν χρησιμοποιήσουμε παράθυρο Hamming, το μήκος του παραθύρου πρέπει να είναι περίπου το διπλάσιο του



Σχήμα 13-10: Ο DTFT ενός παραθυρούμενου και δειγματοληπτημένου ημιτονικού σήματος. Το μέτρο του DTFT $|\tilde{X}(e^{j\omega_k T_s})|$ υπολογίστηκε σε 32 συχνότητες $\omega_k = 2\pi/(32T_s)$ οι οποίες και φαίνονται με κουνιές πάνω στη καμπύλη.

μήκους του τετραγωνικού παραθύρου ώστε να έχουμε την ίδια *συχνотική διακριτική ικανότητα*⁶.

13-4.1 Ο DTFT ενός Παραθυρωμένου Ημιτονοειδούς Σήματος

Ο βασικός μας στόχος είναι να έχουμε στη διάθεση μας μια μέθοδο για τον υπολογισμό του φάσματος, έτσι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα σύστημα όμοιο με αυτό του Σχήματος 13-2 όπου η παραθύρωση εφαρμόζεται μετά το μετατροπέα Σ-σε-Δ. Ο πραγματικός υπολογισμός θα είναι δείγματα του DTFT της ακόλουθης παραθυρωμένης ακολουθίας διακριτού χρόνου:

$$\tilde{X}(e^{j\omega_k T_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_r[n]x[n]e^{-j\omega_k T_s n} \quad (13.27)$$

τα οποία υπολογίζονται στις N συχνότητες, $\omega_k = 2\pi k/NT_s$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Κανονικά, ο DTFT

⁶Το συχνотικό εύρος του κύριου λοβού μπορεί να μετρηθεί με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα αν το ορίζαμε σαν την απόσταση ανάμεσα στις συχνότητες που το πλάτος ισούται με το μισό της μέγιστης τιμής του, το αποτέλεσμα θα ήταν $2.41\pi/T$ για το $|W_R(j\omega)|$ και $3.63\pi/T$ για το $|W_H(j\omega)|$, το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για να πάρουμε συγκρίσιμα αποτελέσματα στη συχνотική ανάλυση, η διάρκεια του παραθύρου Hamming πρέπει να είναι 1.5 φορά μεγαλύτερη από αυτήν του τετραγωνικού παραθύρου.

είναι μια συνάρτηση της συχνότητας διακριτού χρόνου $\hat{\omega}$, ωστόσο έχουμε κάνει την αντικατάσταση $\hat{\omega} = \omega T_s$ ώστε το φάσμα $\tilde{X}(e^{j\omega T_s})$ να είναι μια συνάρτηση της συχνότητας συνεχούς χρόνου εκφρασμένης σε rad/s. Για την περίπτωση του σήματος $x_c(t)$ της Σχέσης (13.18), το φάσμα θα πρέπει να είναι όπως αυτό του Σχήματος 13-10. Ο αριθμός των συχνотικών δειγμάτων είναι $N = 32$ και οι τιμές των δειγμάτων παριστώνται με τελείες στην περιοχή $0 \leq \omega < \omega_s = 2\pi/T_s$. Η ομαλή καμπύλη αντιστοιχεί στο DTFT που θα είχαμε στην περίπτωση που το $N \rightarrow \infty$. Οι τελείες αντιστοιχούν στα δείγματα του DFT. Αφού το φάσμα του Σχήματος 13-10 διαφέρει σημαντικά από το πραγματικό φάσμα του περιορισμένου εύρους ζώνης σήματος εισόδου, αξίζει να τονίσουμε τις βασικές διαφορές και τους λόγους που οδηγούν σ' αυτές. Καταρχήν το φάσμα στο Σχήμα 13-10 είναι περιοδική συνάρτηση του ω . Η περιοδικότητα αυτή συναντάται πάντα στον DTFT δειγματοληπτημένων σημάτων αφού ο DTFT $X(e^{j\hat{\omega}})$ αποτελεί περιοδική επανάληψη του CTFT $X_c(j\omega)$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$X(e^{j\omega T_s}) = \frac{1}{T_s} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - \ell\omega_s))$$

Η γραφική παράσταση του DTFT $X(e^{j\omega T_s})$ θα πρέπει να περιέχει αντίγραφα του φάσματος με κέντρα τις συχνότητες $\pm\omega_s, \pm 2\omega_s, \dots$. Επίσης, στο φάσμα είναι εμφανείς οι συνέπειες της παραθύρωσης. Ο DTFT του χρονικά παραθυρωμένου σήματος, $\tilde{x}[n] = w_r[n]x[n]$, μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης στο πεδίο της συχνότητας, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(e^{j\omega T_s}) &= A_0 W_r(e^{j\omega T_s}) + \frac{1}{2} X_1 W_r(e^{j(\omega - \omega_1) T_s}) \\ &\quad + \frac{1}{2} X_1^* W_r(e^{j(\omega + \omega_1) T_s}) \end{aligned} \quad (13.28)$$

όπου $W_r(e^{j\hat{\omega}})$ είναι ο DTFT του δειγματοληπτημένου τετραγωνικού παραθύρου, $w_r[n]$ της Σχέσης (13.14). Η μορφή του μέτρου $|W_r(e^{j\hat{\omega}})|$ είναι αυτή μιας συνάρτησης Dirichlet, η οποία μοιάζει με τη μορφή του $|W_R(j\omega)|$, το

μέτρο του CTFT του συνεχούς χρόνου παραθύρου, $w_R(t)$. Για μεγάλα L η συνάρτηση sinc και η συνάρτηση Dirichlet είναι ουσιαστικά ίδιες στην περιοχή του κύριου λοβού.

13-5 Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Στη Σχέση (13.27) δείξαμε ότι οι τιμές του DTFT ενός πεπερασμένου τμήματος μιας δειγματοληπτημένης ακολουθίας μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$\tilde{X}(e^{j\omega_k T_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[n]e^{-j\omega_k T_s n} \quad (13.29)$$

$$0 \leq k \leq N-1$$

στην οποία οι συχνότητες ανάλυσης είναι οι $\omega_k = 2\pi k/(NT_s)$ και $\tilde{x}[n] = w[n]x[n]$ είναι η χρονική ακολουθία μετά την παραθύρωση. Η ακολουθία παραθύρου $w[n]$ είναι μια ακολουθία πεπερασμένου μήκους όπως αυτή του δειγματοληπτημένου τετραγωνικού παραθύρου, ή του παραθύρου Hamming. Η εξίσωση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί εάν υποθέσουμε πως το μήκος του παραθύρου είναι N και αντικαθιστώντας $\omega_k = 2\pi k/(NT_s)$ στη Σχέση (13.29) προκύπτει ότι:

$$\tilde{X}(e^{j(2\pi k/(NT_s))T_s}) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j(2\pi k/(NT_s))T_s n}$$

$$0 \leq k \leq N-1$$

Πολλαπλασιάζοντας τους όρους στους εκθέτες, παίρνουμε:

$$\tilde{X}(e^{j(2\pi k/N)}) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j(2\pi k/N)n} \quad (13.30)$$

$$0 \leq k \leq N-1$$

η οποία θα πρέπει να αναγνωρίζεται ως ο **Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**, ή **DFT**, της ακολουθίας $\tilde{x}[n]$,

δηλαδή,

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j(2\pi k/N)n} \quad (13.31)$$

$$0 \leq k \leq N-1$$

Ο DFT είναι διακριτός τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και σε αυτό της συχνότητας. Δέχεται N χρονικά δείγματα του σήματος και παράγει N δείγματα $X[k]$ στο πεδίο της συχνότητας.

13-5.1 Ο Αντίστροφος DFT

Ο DFT της Σχέσης (13.31), όπως δείξαμε, προκύπτει από τον υπολογισμό του DTFT μιας πεπερασμένου μήκους ακολουθίας σε πεπερασμένο σύνολο συχνοτήτων. Η εξίσωση (13.31) μπορεί πράγματι να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε πεπερασμένου μήκους ακολουθία, ανεξάρτητα από το αν αυτή προέκυψε από χρονική παραθύρωση ενός σήματος ή όχι. Πρόσθετο ενδιαφέρον στη μελέτη του DFT αποτελεί το γεγονός ότι υπάρχει ο **αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier** (ή IDFT), ένας δηλαδή μετασχηματισμός ο οποίος μετατρέπει τα $\tilde{X}[k]$ για $k = 0, 1, \dots, N-1$ ξανά στην ακολουθία $\tilde{x}[n]$ για $n = 0, 1, \dots, N-1$. Ο αντίστροφος DFT είναι ο ακόλουθος:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]e^{j(2\pi k/N)n} \quad (13.32)$$

$$0 \leq n \leq N-1$$

Οι Εξισώσεις (13.32) και (13.31) αποτελούν μια μοναδική σχέση μεταξύ μιας ακολουθίας $\tilde{x}[n]$ και του DFT της $\tilde{X}[k]$. Χρησιμοποιώντας την ορολογία που χρησιμοποιήσαμε και προηγουμένως, ο DFT που ορίζεται από τη Σχέση (13.31) αποτελεί την εξίσωση *ανάλυσης* και ο IDFT, που ορίζεται από τη Σχέση (13.32), αποτελεί την εξίσωση *σύνθεσης*. Για να αποδείξουμε ότι οι εξισώσεις αυτές αποτελούν συμβατή αναπαράσταση Fourier, παρατηρούμε πως η Σχέση (13.32), επειδή αντιστοιχεί σ' ένα πεπερασμένο και καλώς ορισμένο

υπολογισμό, θα παράγει σίγουρα κάποια ακολουθία όταν υπολογιστεί για $n = 0, 1, \dots, N-1$. Ας καλέσουμε λοιπόν αυτή την ακολουθία $v[n]$ έως ότου αποδείξουμε κάτι διαφορετικό. Τα βασικά βήματα της απόδειξης δίνονται στις επόμενες γραμμές:

$$\begin{aligned} v[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi k/N)n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] e^{-j(2\pi k/N)m} \right) e^{j(2\pi k/N)n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi k/N)(n-m)} \right) \\ &= \tilde{x}[n] \end{aligned} \quad (13.33)$$

Κάναμε βέβαια διάφορους μαθηματικούς χειρισμούς για να καταλήξουμε στην επιθυμητή Σχέση (13.33). Συγκεκριμένα, στη δεύτερη γραμμή, αντικαταστήσαμε το δεξίο μέλος της Σχέσης (13.31) με $\tilde{X}[k]$ αφού πρώτα αλλάξαμε το δείκτη του αθροίσματος από n σε m . Μπορούμε πάντα να κάνουμε αυτή την αλλαγή αφού πρόκειται για "εικονικό δείκτη" τον οποίο μπορούμε να συμβολίσουμε με οποιοδήποτε δείκτη και επειδή χρειαζόμαστε να κρατήσουμε το δείκτη n για την ακολουθία $v[n]$ η οποία προκύπτει από τον IDFT. Στην τρίτη γραμμή, εναλλάχθηκαν τα αθροίσματα. Αυτή η εναλλαγή είναι επιτρεπτή αφού τα αθροίσματα αυτά είναι πεπερασμένα και μπορούν να υπολογισθούν σε οποιαδήποτε σειρά. Τώρα πρέπει να μελετήσουμε τον όρο που βρίσκεται μέσα στην παρένθεση στην τρίτη γραμμή της απόδειξης. Η επόμενη άσκηση μας δίνει την τιμή του αθροίσματος αυτού, τιμή που μπορεί εύκολα να επαληθευτεί.



Άσκηση 13.4: Χρησιμοποιήστε τη σχέση

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha}$$

για να δείξετε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi k/N)(n-m)} &= \frac{1 - e^{j(2\pi)(n-m)}}{1 - e^{j(2\pi/N)(n-m)}} \\ &= \begin{cases} N & n - m = rN \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \end{aligned} \quad (13.34)$$

όπου r είναι οποιοσδήποτε ακέραιος συμπεριλαμβανομένου και του $r = 0$.

Αν αντικαταστήσουμε την Εξίσωση (13.34) στην τρίτη γραμμή της Σχέσης (13.33), βλέπουμε πως ο μόνος όρος του αθροίσματος που είναι μη μηδενικός είναι ο όρος που αντιστοιχεί στο $m = n$ όπου $0 \leq n \leq N-1$. Αυτό σημαίνει ότι $v[n] = \tilde{x}[n]$ για $0 \leq n \leq N-1$ το οποίο και επιθυμούσαμε να δείξουμε.

13-5.2 Σύνοψη της Παρουσίασης του DFT

Έως τώρα έχουμε ασχοληθεί με την προέλευση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier που ορίστηκε στη Σχέση (13.31) καθώς και του αντίστροφου μετασχηματισμού που ορίστηκε στη Σχέση (13.32). Ξαναγράφουμε τις δυο αυτές εξισώσεις παρακάτω ως εξής:

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \\ k &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (13.35)$$

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi/N)kn} \\ n &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (13.36)$$

Η Εξίσωση (13.35) αποτελεί τον (ευθύ) διακριτό μετασχηματισμό Fourier και η (13.36) τον αντίστροφο DFT ή IDFT⁷. Παρατηρήστε επίσης ότι αφαιρέσαμε το σύμβολο “ ” από τα x και X όταν ξαναγράψαμε τις εξισώσεις αυτές.

⁷ Παρατηρήστε ότι έχουμε χρησιμοποιήσει το δείκτη n τόσο σαν εικονική μεταβλητή στο άθροισμα της Σχέσης (13.35) όσο και σαν

Αυτό έγινε μόνο για την απλοποίηση του συμβολισμού. Χρησιμοποιήσαμε για πρώτη φορά αυτό το σύμβολο για να τονίσουμε την παραθύρωση που προέκυπτε όταν περιορίζαμε τον αριθμό των όρων στον υπολογισμό του DTFT. Από εδώ και στο εξής θα ασχοληθούμε με πεπερασμένου μήκους ακολουθίες και κατά συνέπεια το σύμβολο αυτό παραλείπεται.

Ένα τελικό σχόλιο όσον αφορά τα όρια του αθροίσματος της Σχέσης (13.35). Επιλέξαμε να αθροίσουμε δείγματα του $x[n]$ και να υπολογίσουμε τον DFT στις συχνότητες $\omega_k = 2\pi k/N$. Συχνά, η ακολουθία $x[n]$ έχει μήκος L με $L < N$. Σε τέτοιες περιπτώσεις απλά προσθέτουμε $N-L$ μηδενικά δείγματα στα μη μηδενικά δείγματα του $x[n]$. Αν το $x[n]$ παίρνει μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $0 \leq n \leq L-1$, τότε προσθέτοντας μηδενικά δείγματα βλέπουμε σωστά.

Παράδειγμα 13-2: DFT Μικρού Μήκους

Για να υπολογίσουμε τον DFT 4 σημείων της ακολουθίας $x[n] = \{1, 1, 0, 0\}$, εφαρμόζουμε τον ορισμό για κάθε τιμή του $k = 0, 1, 2, 3$. Για να απλοποιήσουμε τους εκθέτες στη Σχέση (13.35), χρησιμοποιούμε $N = 4$ ώστε να ισχύει $2\pi/N = \pi/2$.

$$\begin{aligned} X[0] &= x[0]e^{-j0} + x[1]e^{-j0} + x[2]e^{-j0} + x[3]e^{-j0} \\ &= 1 + 1 + 0 + 0 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X[1] &= x[0]e^{-j0} + x[1]e^{-j\pi/2} + 0e^{-j\pi} + 0e^{-j3\pi/2} \\ &= 1 + (-j) + 0 + 0 = 1 - j = \sqrt{2}e^{-j\pi/4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X[2] &= x[0]e^{-j0} + x[1]e^{-j\pi} + 0e^{-j2\pi} + 0e^{-j3\pi} \\ &= 1 + (-1) + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X[3] &= x[0]e^{-j0} + x[1]e^{-j3\pi/2} + 0e^{-j3\pi} + 0e^{-j9\pi/2} \\ &= 1 + (j) + 0 + 0 = 1 + j = \sqrt{2}e^{j\pi/4} \end{aligned}$$

ανεξάρτητη μεταβλητή στη Σχέση (13.36), ενώ έχουμε κάνει το αντίστροφο για το δείκτη k ο οποίος έχει χρησιμοποιηθεί ως εικονική μεταβλητή στη Σχέση (13.36). Συνήθως αυτό δεν μας δημιουργεί προβλήματα και όταν αυτό είναι απαραίτητο, μπορούμε να ονομάζουμε διαφορετικά τους εικονικούς δείκτες του αθροίσματος χωρίς κανένα πρόβλημα.

Έτσι προκύπτουν οι τέσσερις συντελεστές του DFT $X[k] = \{2, \sqrt{2}e^{-j\pi/4}, 0, \sqrt{2}e^{j\pi/4}\}$. ■

13-5.3 Ο Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier (FFT)

Τόσο ο DFT της Σχέσης (13.35) όσο και ο IDFT της Σχέσης (13.36) μπορούν να θεωρηθούν απλά ως υπολογιστικές μέθοδοι οι οποίες δέχονται αριθμούς σε ένα πεδίο και δημιουργούν (μγαδικούς) αριθμούς σε κάποιο άλλο πεδίο. Η Εξίσωση (13.35) είναι στην πραγματικότητα το άθροισμα N όρων, ένα για κάθε τιμή του k . Για να υπολογίσουμε μια από τις τιμές της ακολουθίας $X[k]$ ⁸, χρειαζόμαστε N μγαδικούς πολλαπλασιασμούς και $N-1$ μγαδικές προσθέσεις. Εάν μετρήσουμε τις αριθμητικές πράξεις που είναι απαραίτητες για να υπολογιστούν όλοι οι συντελεστές της $X[k]$ τότε απαιτούνται N^2 μγαδικοί πολλαπλασιασμοί και $N^2 - N$ μγαδικές προσθέσεις.

Μια από τις πιο σημαντικές ανακαλύψεις⁹ στο πεδίο της ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων είναι ο *ταχύς μετασχηματισμός Fourier* ή *FFT*, ένα σύνολο από αλγόριθμους το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το γρήγορο υπολογισμό των Σχέσεων (13.35) και (13.36) με μια πολυπλοκότητα της τάξης του $N \log_2 N$ αντί για N^2 . Στην περίπτωση που το N είναι δύναμη του δύο, ο αλγόριθμος FFT υπολογίζει ολόκληρο το σύνολο των συντελεστών $X[k]$ με περίπου $(N/2) \log_2 N$ μγαδικές πράξεις. Η χαμηλή πολυπλοκότητα $N \log_2 N$ είναι ιδιαίτερα σημαντική για μεγάλα N . Για παράδειγμα αν $N = 1024$, ο FFT θα υπολογίσει τους συντελεστές $X[k]$ με $(N/2) \log_2 N = 5120$ μγαδικούς πολλαπλασιασμούς αντί $N^2 = 1,048,576$ που θα απαιτούσε ο απευθείας υπολογισμός χρησιμοποιώντας τη Σχέση (13.35). Ο αλγόριθμος λειτουργεί βέλπιστα όταν το μήκος N του DFT είναι δύναμη του δύο, αλλά είναι αποδοτικός ακόμη

⁸ Αναφερόμαστε συχνά σε αυτές τις τιμές ως “συντελεστές” αφού αυτοί, πράγματι είναι συντελεστές στην Εξίσωση (13.36) που μοιάζει με σειρά Fourier.

⁹ J. W. Cooley and J. W. Tukey, “An algorithm for Complex Fourier Series”, *Mathematics of Computation*, vol. 19, pp. 297-301, April 1965. Η βασική ιδέα του FFT εντοπίζεται στην αρχή του 19ου αιώνα από τον Gauss.

και όταν το N μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε πολλούς μικρούς ακέραιους παράγοντες. Αντίθετα, όταν το N είναι πρώτος αριθμός, ο κλασικός αλγόριθμος FFT δεν οδηγεί σε εξοικονόμηση σε σχέση με τον απευθείας υπολογισμό του DFT. Διάφορες παραλλαγές του αλγορίθμου FFT υπάρχουν στις περισσότερες υπολογιστικές γλώσσες και σχεδόν για κάθε μηχανή. Στο Matlab, υπάρχει η συνάρτηση `fft` και οι περισσότερες συναρτήσεις φασματικής ανάλυσης του Matlab καλούν τη συνάρτηση `fft` για να εκτελέσουν τις υπολογιστικά βαριές, λειτουργίες τους.

Περισσότερες λεπτομέρειες για τον FFT και τις παραλλαγές του δίνονται στην Ενότητα 13-9 στο τέλος του κεφαλαίου.

13-5.4 Περιοδικά Σήματα και ο DFT

Ένα περιοδικό σήμα ορίζεται από την ακόλουθη ιδιότητα ολίσθησης:

$$x[n - N] = x[n] \quad \text{για κάθε } n$$

όπου η παράμετρος N είναι η περίοδος. Δηλαδή, όταν το σήμα $x[n]$ καθυστερείται κατά N δείγματα, είναι ακριβώς το ίδιο σήμα.

Κατά την απόδειξη των Σχέσεων (13.35) και (13.36) θεωρήσαμε ότι ο DFT αποτελεί αναπαρασταση μιας πεπερασμένου-μήκους ακολουθίας η οποία είναι μη μηδενική μόνο στο διάστημα $0 \leq n \leq N-1$. Ωστόσο, θα πρέπει να τονίσουμε ότι είμαστε απόλυτα ελεύθεροι να υπολογίσουμε τη Σχέση (13.36) και εκτός αυτού του διαστήματος, δημιουργώντας μια περιοδική ακολουθία. Η περίοδος αυτής της ακολουθίας είναι N . Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε αντικαθιστώντας στη Σχέση (13.36) το n με $n-N$, το οποίο δίνει:

$$\begin{aligned} x[n - N] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi k/N)(n-N)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi k/N)n} e^{-j2\pi k} = x[n] \end{aligned}$$

αφού $e^{-j2\pi k} = 1$ κάθε ακέραια τιμή του k .

13-5.5 Οι Αρνητικές Συχνότητες και ο DFT

Το σήμα που ορίστηκε στην Εξίσωση (13.36) έχει ισαπέχουσες κανονικοποιημένες συχνότητες $\hat{\omega}_k = (2\pi/N)k$ πάνω στην περιοχή των θετικών συχνοτήτων, δηλαδή,

$$0 < (2\pi/N)k \leq \pi \quad \text{για } 0 < k \leq N/2$$

$$\pi < (2\pi/N)k < 2\pi \quad \text{για } N/2 < k < N-1$$

Ο δείκτης $k = N-1$ αντιστοιχεί στη θετική συχνότητα $\hat{\omega}_{N-1} = 2\pi(N-1)/N$. Ωστόσο, αφού $\hat{\omega}_{N-1} = 2\pi(N-1)/N = 2\pi - 2\pi/N$, συμπεραίνουμε ότι η $\hat{\omega}_{N-1}$ είναι επίσης η θετική αναδίπλωση της αρνητικής συχνότητας $\hat{\omega} = -(2\pi/N)$ εξαιτίας της περιοδικότητας (2π) της $\hat{\omega}$. Ομοίως, το $k = N-2$ είναι η θετική αναδίπλωση της συχνότητας $\hat{\omega} = -(4\pi/N)$, κ.ο.κ..

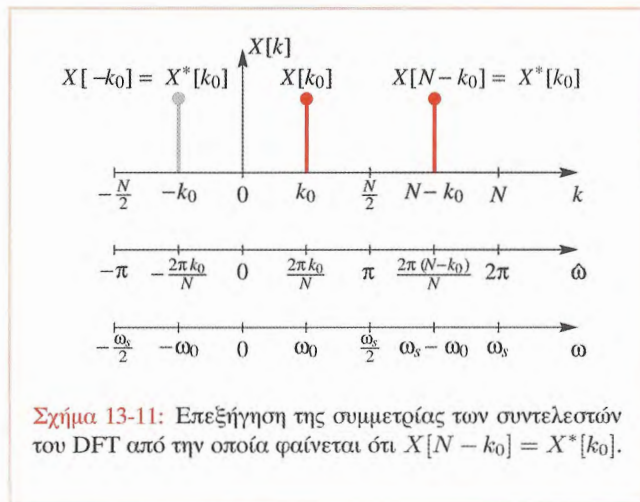
Στην περίπτωση ενός πραγματικού σήματος $x[n]$, υπάρχει στο φάσμα συζυγής συμμετρία και οι συντελεστές του DFT ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες: $X[N-1] = X^*[1]$, $X[N-2] = X^*[2]$. Γενικά, $X[N-k] = X^*[k]$ για $k = 0, 1, \dots, N-1$.



Παράδειγμα 13-3: Συμμετρία του DFT

Στο Παράδειγμα 13-2, οι δείκτες του DFT 4-σημείων αντιστοιχούν στις τέσσερις συχνότητες $\hat{\omega}_k = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$. Επομένως, οι συντελεστές του DFT στο Παράδειγμα 13-2 ικανοποιούν την ιδιότητα της συζυγούς συμμετρίας, για παράδειγμα, $X[1] = X^*[4-1] = X^*[3]$. ■

Στο Σχήμα 13-11 φαίνεται ένας συντελεστής $X[k_0]$ του DFT που αντιστοιχεί στην κανονικοποιημένη συχνότητα $\hat{\omega}_{k_0} = 2\pi k_0/N$ και στη θετική συχνότητα αναδίπλωσης της αντίστοιχης αρνητικής συχνότητας (η οποία φαίνεται με γκρι γραμμοσκίαση). Επίσης, στο γράφημα χρησιμοποιούνται τρεις διαφορετικές “κλίμακες συχνότητας”. Συγκεκριμένα, στην επάνω γραφική παράσταση χρησιμοποιείται ο δείκτης k του DFT, στη μεσαία η κανονικοποιημένη συχνότητα $\hat{\omega}$ και στην τελευταία η αναλογική συχνότητα f



ποία θα ταίριαζε εάν η ακολουθία $x[n]$ είχε προκύψει με δειγματοληψία, με συχνότητα δειγματοληψίας $\omega_s = 2\pi/T_s$. Ο δείκτης k_0 αντιστοιχεί στην αναλογική συχνότητα $\omega_0 = 2\pi k_0/(NT_s)$ rad/s.

Άσκηση 13.5: Δημιουργήστε ένα παράδειγμα στο Matlab στο οποίο θα φαίνεται η ιδιότητα της συζυγούς συμμετρίας $Xk = \text{fft}(1:8)$. Συγκεντρώστε τις τιμές του διανύσματος Xk και επιβεβαιώστε ότι $X[N - k] = X^*[k]$ για $k = 0, 1, \dots, 7$. Γράψτε επίσης την τιμή του $\hat{\omega}$ για κάθε τιμή του δείκτη k .

13-5.6 Παράδειγμα DFT

Ο DFT χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά ως μια αριθμητική διαδικασία η οποία μετατρέπει ένα σήμα από το πεδίο του χρόνου στην αναπαράστασή του στο πεδίο της συχνότητας. Ωστόσο, σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις, το πεπερασμένο άθροισμα μπορεί να “υπολογιστεί” και να προκύψει μια απλή σχέση για τον υπολογισμό των συντελεστών του DFT. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ο DFT ενός μιγαδικού εκθετικού σήματος. Θεωρήστε ένα

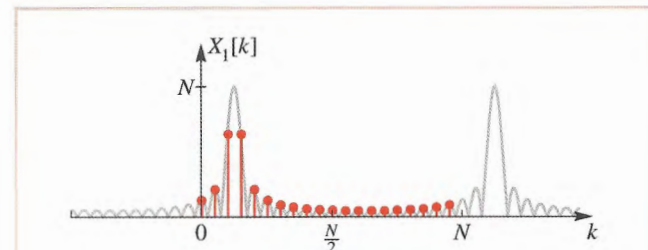
μιγαδικό εκθετικό σήμα συχνότητας $\hat{\omega}_0$ η οποία μπορεί να είναι ή να μην είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi/N$:

$$x_1[n] = e^{j(\hat{\omega}_0 n + \phi)} \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Ο DFT N -σημείων του σήματος $x_1[n]$ είναι:

$$\begin{aligned} X_1[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\hat{\omega}_0 n + \phi)} e^{-j(2\pi k/N)n} \\ &= e^{j\phi} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j((2\pi k/N) - \hat{\omega}_0)n} \\ &= e^{j\phi} \left(e^{-j(0)} + e^{-j((2\pi k/N) - \hat{\omega}_0)} \right. \\ &\quad \left. + \dots + e^{-j((2\pi k/N) - \hat{\omega}_0)(N-1)} \right) \\ &= e^{j\phi} \frac{1 - e^{-j((2\pi k/N) - \hat{\omega}_0)N}}{1 - e^{-j((2\pi k/N) - \hat{\omega}_0)}} \end{aligned} \quad (13.37)$$

Παρατηρήστε ότι για τον υπολογισμό αυτού του αποτελέσματος, δεν εκμεταλλευτήκαμε κάποια πληροφορία για τη συχνότητα $\hat{\omega}_0$. Αυτό θα είχε συμβεί εάν είχαμε προβεί στη χρονική παραθύρωση του σήματος με χρήση παραθύρου μήκους N δειγμάτων, αλλά το μήκος αυτό δεν περιείχε ακέραιο αριθμό των περιόδων του σήματος. Αν



Σχήμα 13-12: Ο DFT ενός μιγαδικού εκθετικού σήματος του οποίου η συχνότητα δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi/N$.

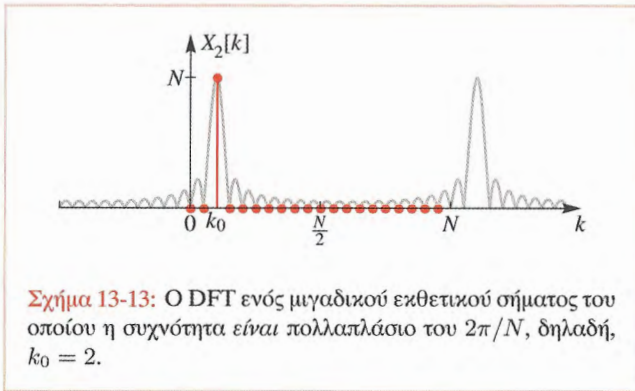
ορίσουμε $\theta = ((2\pi k/N) - \hat{\omega}_0)$ και το αντικαταστήσουμε στη Σχέση (13.37), τότε αυτή η τελευταία σχέση μπορεί να απλοποιηθεί μερικώς απαλείφοντας το $e^{-j\theta N/2}$ από τον αριθμητή και το $e^{-j\theta/2}$ από τον παρονομαστή. Το τελικό αποτέλεσμα, ύστερα από αρκετές απλοποιήσεις, είναι το ακόλουθο:

$$X_1[k] = D_N(e^{j((2\pi k/N) - \hat{\omega}_0)})e^{j\phi} e^{-j((2\pi k/N) - \hat{\omega}_0)(N-1)/2} \quad (13.38)$$

όπου $D_N(e^{j((2\pi k/N) - \hat{\omega}_0)})$ είναι μία ολισθημένη και δειγματοληπτημένη εκδοχή της συνάρτησης Dirichlet¹⁰

$$D_N(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin(\hat{\omega}N/2)}{\sin(\hat{\omega}/2)}$$

Εξαιτίας του ότι οι άλλοι όροι της Σχέσης (13.38) συνεισφέρουν μόνο στη φάση, αυτό σημαίνει ότι το $|X_1[k]| = |D_N(e^{j((2\pi k/N) - \hat{\omega}_0)})|$ συντίθεται από δείγματα της συνάρτησης Dirichlet, όπως φαίνεται στο Σχήμα 13-12 για την περίπτωση $N = 20$ και $\hat{\omega}_0 = 5\pi/20 = 2\pi(2.5)/N$. Το μέτρο της συνάρτησης του Dirichlet έχει σχεδιαστεί ώστε να είναι σαφές που βρίσκονται τα δείγματα. Παρατηρήστε επίσης ότι η κορυφή βρίσκεται σε μια μη ακέραια τιμή (2.5). Όταν η συχνότητα του



Σχήμα 13-13: Ο DFT ενός μιγαδικού εκθετικού σήματος του οποίου η συχνότητα είναι πολλαπλάσιο του $2\pi/N$, δηλαδή, $k_0 = 2$.

σήματος $x_1[n]$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi/N$, ο DFT που προκύπτει είναι πολύ απλός. Αν ορίσουμε $x_2[n] = e^{j(2\pi k_0/N)n}$ και στη συνέχεια χρησιμοποιήσουμε $\hat{\omega}_0 = 2\pi k_0/N$ και $\phi = 0$ στη Σχέση (13.37), παίρνουμε:

$$X_2[k] = N\delta[k - k_0] \quad (13.39)$$

(δηλαδή μια σταθμισμένη διακριτή κρουστική στο $k = k_0$ με τους υπόλοιπους συντελεστές του DFT να είναι μηδέν). Αυτό το αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται στο Σχήμα 13-13 όπου μπορούμε να δούμε ότι ο DFT προκύπτει από τη δειγματοληψία της περιβάλλουσας συνάρτησης Dirichlet ακριβώς στην κορυφή και στους μηδενισμούς της. Η μέγιστη τιμή είναι N η οποία και αποτελεί τη μοναδική μη μηδενική τιμή του DFT.

Άσκηση 13.6: Δείξτε ότι ο $X_2[k]$ στη Σχέση (13.39) μπορεί να προκύψει αντικαθιστώντας $\phi = 0$ και $\hat{\omega}_0 = 2\pi k_0/N$ στη Σχέση (13.38).

Άσκηση 13.7: Αντικαταστήστε τη Σχέση (13.39) στον αντίστροφο DFT της Σχέσης (13.36) για να δείξετε ότι η αντίστοιχη ακολουθία στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$x_2[n] = e^{j(2\pi/N)k_0 n} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Άσκηση 13.8: Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Ευίλερ για να αναπαραστήσετε το σήμα $x_3[n] = \cos(2\pi k_0 n/N)$ σαν άθροισμα δύο μιγαδικών εκθετικών σημάτων. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι ο DFT όπως και οι μετασχηματισμοί z και DTFT είναι γραμμικοί τελεστές, για να δείξετε ότι:

$$X_3[k] = \frac{1}{2}N\delta[k - k_0] + \frac{1}{2}N\delta[k + k_0]$$

ή ισοδύναμα

$$X_3[k] = \frac{1}{2}N\delta[k - k_0] + \frac{1}{2}N\delta[k - (N - k_0)]$$

¹⁰Η συνάρτηση Dirichlet έχει οριστεί στην Ενότητα 6-7 στη Σελίδα 161.

13-6 Φασματική Ανάλυση Σημάτων Πεπερασμένου Μήκους

Πολλά χρήσιμα δειγματοληπτημένα σήματα έχουν το πολύ μερικές εκατοντάδες μη μηδενικά δείγματα. Αυτά τα σήματα θα τα ονομάζουμε *πεπερασμένης διάρκειας* σήματα. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί ένα σήμα διακριτού χρόνου το οποίο προέκυψε από δειγματοληψία ενός βραχύβιου παλμού συνεχούς χρόνου. Σε άλλες περιπτώσεις, η δειγματοληψία μπορεί να μην εμπλέκεται καθόλου. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η κρουστική απόκριση ενός FIR συστήματος, όπου οι τιμές της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ υπολογίζονται συνήθως από κάποιο αλγόριθμο σχεδίασης φίλτρων.

Υποθέστε ότι το σήμα $x[n]$ είναι μη μηδενικό μόνο στο πεπερασμένο διάστημα $0 \leq n \leq L-1$. Το μήκος αυτού του σήματος είναι L δείγματα. Θυμηθείτε, από την Ενότητα 13-5, ότι ο DFT μιας πεπερασμένης ακολουθίας είναι πανομοιότυπος με τον DTFT της ακολουθίας υπολογισμένη στις συχνότητες $\hat{\omega}_k = 2\pi k/N$ με $k = 0, 1, \dots, N-1$. Δηλαδή ισχύει:

$$X(e^{j(2\pi k/N)}) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j(2\pi k/N)n} = X[k] \quad (13.40)$$

Είναι προφανές πως $X[k] = X(e^{j(2\pi k/N)})$ ακόμα και αν $L < N$ αφού $N-L$ μηδενικά δείγματα προστίθενται στο τέλος της ακολουθίας $x[n]$. Αυτό συνήθως ονομάζεται *συμπλήρωση του σήματος με μηδενικά*. Στο Matlab, ο DFT υπολογίζεται με τη συνάρτηση `fft`, η οποία αυτόματα συμπληρώνει την ακολουθία με μηδενικά αν το μήκος της ακολουθίας και το μήκος του DFT είναι διαφορετικά.

Παράδειγμα 13-4: Υπολογισμός στο MATLAB

Αν δημιουργήσουμε ένα διάνυσμα xx με $L = 301$ στοιχεία, μπορούμε να ορίσουμε το μήκος του FFT να είναι διαφορετικό (για παράδειγμα $N = 512$) γράφοντας την παρακάτω δήλωση:

```
XX = fft(xx, 512);
```

Εφόσον $L < 512$, το διάνυσμα xx θα συμπληρωθεί αυτόματα με 211 μηδενικά. ■

Μια εφαρμογή της φασματικής ανάλυσης με FFT είναι ο υπολογισμός της απόκρισης της συχνότητας ενός FIR φίλτρου. Αν η κρουστική απόκριση $h[n]$ έχει πεπερασμένο μήκος L , η απόκριση συχνότητας είναι απλά ο DTFT της $h[n]$, δηλαδή:

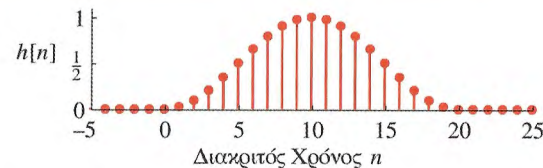
$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{L-1} h[n]e^{-j\hat{\omega}n} \quad (13.41)$$

Αν υπολογίσουμε τον DFT N σημείων της ακολουθίας $h[n]$ με συμπλήρωση μηδενικών, τότε αποτιμούμε τη Σχέση (13.41) σε N ισαπέχουσες συχνότητες στο διάστημα $0 \leq \hat{\omega} < 2\pi$ και έχουμε:

$$H[k] = \sum_{n=0}^{L-1} h[n]e^{-j(2\pi k/N)n} = H(e^{j2\pi k/N}) \quad (13.42)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Αν χρησιμοποιήσουμε αρκετά μεγάλη τιμή για το N , μπορούμε να σχεδιάσουμε μια ομαλή καμπύλη για την απόκριση συχνότητας του φίλτρου.



Σχήμα 13-14: Κρουστική απόκριση φίλτρου Hann με μήκος $L = 20$.

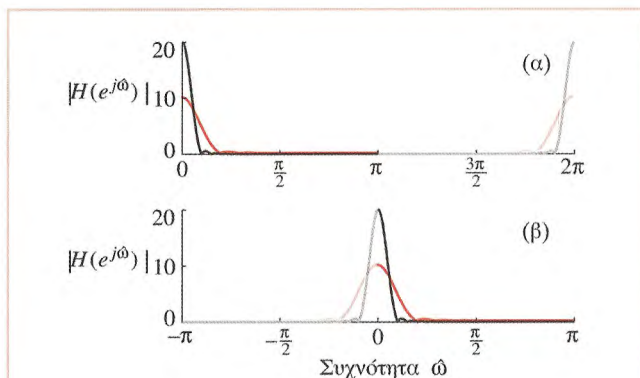
Παράδειγμα 13-5: Απόκριση Συχνότητας Φίλτρου Hann

Υποθέτουμε πως η ακολουθία

$$h[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{L}n\right) & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (13.43)$$

είναι η κρουστική απόκριση ενός FIR φίλτρου¹¹. Η κρουστική αυτή απόκριση φαίνεται στο Σχήμα 13-14.

Ένα φίλτρο με αυτού του είδους τη κρουστική απόκριση ονομάζεται συχνά και φίλτρο Hann¹². Το Σχήμα 13-15(α) δείχνει τη γραφική παράσταση του μέτρου της απόκρισης της συχνότητας δύο φίλτρων Hann με μήκη $L = 20$ και $L = 40$ αντίστοιχα. Οι αποκρίσεις συχνότητας προέκυψαν



Σχήμα 13-15: Απόκριση συχνότητας δύο φίλτρων Hann, μήκους $L = 20$ (έγχρωμες γραμμές) και $L = 40$ (μαύρες-γκρίζες γραμμές) (α) υπολογισμένη με FFT 1024 σημείων και (α) σχεδιασμένη μετά την αναδιάταξη των τιμών του DFT.

¹¹ Παρατηρήστε την ομοιότητα με το παράθυρο διακριτού χρόνου Hamming $w_h[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi}{L}n\right)$, που πήρε το όνομα του από τον Richard Hamming.

¹² Η ίδια ακολουθία (13.43) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσει ένα παράθυρο, σε αυτή την περίπτωση έχουμε το παράθυρο Hann το οποίο ονομάστηκε από τον Αυστριακό επιστήμονα Julius von Hann. Το παράθυρο αυτό καλείται συχνά και παράθυρο “Hanning” μια ονομασία που φαίνεται να πηγάζει από το παράθυρο Hamming.

χρησιμοποιώντας τον τύπο (13.42) με $N = 1024$. Η μεγάλη αυτή τιμή του N οδηγεί σε μια ομαλή καμπύλη όταν τα σημεία της γραφικής παράστασης ενωθούν με ευθείες γραμμές κατά τη χρήση των συναρτήσεων σχεδίασης της Matlab. Το σχήμα αυτό δείχνει πως το φίλτρο Hann είναι ένα κατωπερατό φίλτρο, αφού η ζώνη διέλευσής του είναι κοντά στο $\hat{\omega} = 0$, περιοχή στην οποία η απόκριση συχνότητας παίρνει μεγάλες τιμές ενώ η ζώνη αποκοπής του φίλτρου καλύπτει το διάστημα $4\pi/L < \hat{\omega} < \pi$, όπου οι τιμές της απόκρισης συχνότητας είναι μικρές. Δεν θα πρέπει να μπερδεύσαστε από την περιοχή $\pi < \hat{\omega} < 2\pi$, η οποία και έχει σχεδιαστεί με απαλά χρώματα. Αυτή είναι η κανονική συμμετρία που παρουσιάζει ο DFT όπου οι τιμές του k για $N/2 < k \leq N-1$ αντιστοιχούν στις κανονικοποιημένες συχνότητες $\pi < \hat{\omega} < 2\pi$, οι οποίες με τη σειρά τους αποτελούν αναδιπλώσεις των συχνοτήτων που βρίσκονται στην περιοχή $-\pi < \hat{\omega} < 0$ στις θετικές συχνότητες. Αν πάρουμε υπόψη μας το γεγονός αυτό, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πιο συμβατική γραφική παράσταση σαν αυτή του Σχήματος 13-15(β), όπου τα ελαφρά χρωματισμένα σημεία στις αρνητικές συχνότητες είναι ίδια με τα αντίστοιχά τους στο Σχήμα 13-15(α).

Ο κώδικας στη Matlab για την κατασκευή της γραφικής παράστασης του Σχήματος 13-15(β) είναι ο ακόλουθος:

```
L = 20; N = 1024;
hh = 0.5*(1-cos(2*pi*(0:L-1)/L));
HH = fft(hh, N);
HHP = [HH(N/2+1:N), HH(1:N/2)];
omega = 2*pi*(-N/2+1:N/2)/N;
plot(omega, abs(HHP))
```

Όταν συγκρίνουμε τις δύο διαφορετικές κρουστικές αποκρίσεις, βλέπουμε ότι η απόκριση της συχνότητας γίνεται περισσότερο συγκεντρωμένη γύρω από το $\hat{\omega} = 0$ καθώς αυξάνουμε το L . Μπορεί να αποδειχθεί πως ο πρώτος μηδενισμός της $H(e^{j\hat{\omega}})$ του φίλτρου Hann συμβαίνει στο σημείο $\hat{\omega} = 4\pi/L$. Επίσης, η αύξηση του L από 20 σε 40 μειώνει το εύρος της ζώνης διάβασης στο μισό (και ταυτόχρονα διπλασιάζει το πλάτος της). Η γραφική παράσταση της απόκρισης συχνότητας επιβεβαιώνει τα λεγόμενα μας. ■

Το Παράδειγμα 13-5 δείχνει πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο DFT για τον υπολογισμό της αναπαράστασης μιας ακολουθίας πεπερασμένου μήκους στο πεδίο της συχνότητας. Στο παράδειγμα αυτό, η ακολουθία είναι μια κρουστική απόκριση και οι τιμές του DFT που προκύπτουν, είναι δείγματα της απόκρισης συχνότητας του FIR φίλτρου. Στην ενότητα που ακολουθεί, θα δείξουμε πως παρόμοιοι υπολογισμοί μπορούν να εφαρμοστούν σε τμήματα ενός σήματος μεγάλου μήκους, ώστε να προκύψει μια χρήσιμη αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας.

13-7 Φασματική Ανάλυση Περιοδικών Σημάτων

Στην ενότητα αυτή, θα δείξουμε πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο DFT στην ανάλυση περιοδικών σημάτων όπως αυτά που μπορούν να αναπαρασταθούν από πεπερασμένο άθροισμα αρμονικών συνημιτονικών σημάτων. Για να έχουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, θεωρήστε το ακόλουθο περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου:

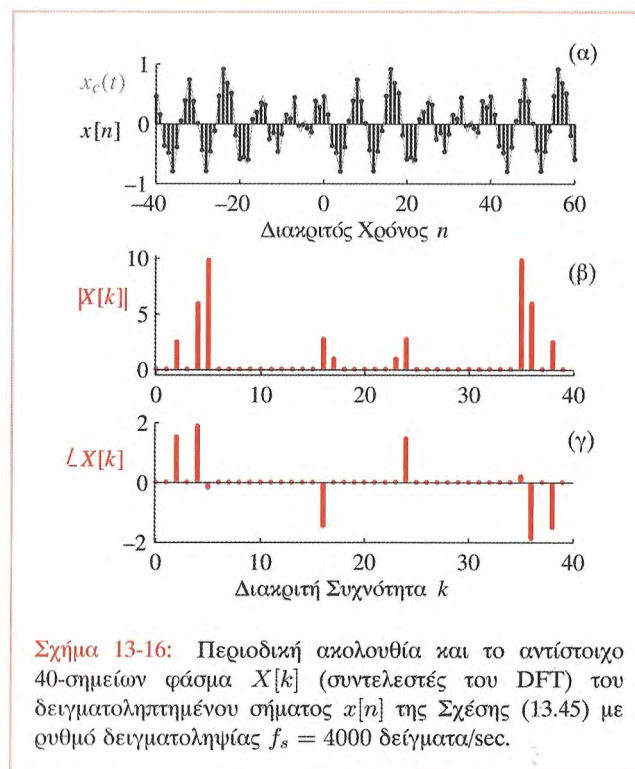
$$\begin{aligned} x_c(t) = & 0.0472 \cos(2\pi(200)t + 1.5077) \\ & + 0.1362 \cos(2\pi(400)t + 1.8769) \\ & + 0.4884 \cos(2\pi(500)t - 0.1852) \\ & + 0.2942 \cos(2\pi(1600)t - 1.4488) \\ & + 0.1223 \cos(2\pi(1700)t) \end{aligned} \quad (13.44)$$

Η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος αυτού είναι $\omega_0 = 2\pi(100)$ rad/sec και το σήμα αποτελείται από αρμονικές στα πολλαπλάσια 2,4,5,16 και 17 της θεμελιώδους συχνότητας. Το σήμα αυτό είναι παρόμοιο με το συνθετικό φωνήεν που μελετήθηκε στην Ενότητα 3-3.1. Εάν δειγματοληπτήσουμε το σήμα αυτό με ρυθμό δειγματοληψίας $f_s = 4000$, το σήμα διακριτού χρόνου που θα προκύψει είναι και αυτό περιοδικό αφού το 100 διαιρεί ακριβώς το 4000. Αναλυτικά, το διακριτού χρόνου σήμα


$x[n] = x_c(n/4000)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} x[n] = & 0.0472 \cos(0.1\pi n + 1.5077) \\ & + 0.1362 \cos(0.2\pi n + 1.8769) \\ & + 0.4884 \cos(0.25\pi n - 0.1852) \\ & + 0.2942 \cos(0.8\pi n - 1.4488) \\ & + 0.1223 \cos(0.85\pi n) \end{aligned} \quad (13.45)$$

και έχει συχνότητες οι οποίες είναι πολλαπλάσια του $\omega_0 = 0.05\pi = 2\pi/40$. Όπως και στην περίπτωση του σήματος συνεχούς χρόνου, το $x[n]$ της Σχέσης (13.45) έχει αρμονικές της κανονικοποιημένης θεμελιώδους συχνότητας που αριθμούνται 2,4,5,16, και 17 αντίστοιχα.




Σχήμα 13-16: Περιοδική ακολουθία και το αντίστοιχο 40-σημείων φάσμα $X[k]$ (συντελεστές του DFT) του δειγματοληπτημένου σήματος $x[n]$ της Σχέσης (13.45) με ρυθμό δειγματοληψίας $f_s = 4000$ δείγματα/sec.

 **Άσκηση 13.9:** Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα της Ενότητας 13-5.6 για να προσδιορίσετε μια εξίσωση για τον DFT 40 σημείων του σήματος $x[n]$ του Παραδείγματος (13.45). Επιβεβαιώστε ότι μερικές από τις μη μηδενικές τιμές του DFT είναι οι ακόλουθες:

$$X[k] = \begin{cases} 0.0236(40)e^{j1.5077} & k = 2 \\ 0.0681(40)e^{j1.8769} & k = 4 \\ 0.2442(40)e^{-j0.1852} & k = 5 \\ 0.1471(40)e^{-j1.4488} & k = 16 \\ 0.06115(40) & k = 17 \end{cases} \quad (13.46)$$

Ποιες είναι οι υπόλοιπες μη μηδενικές τιμές της $X[k]$; Για ποιους δείκτες k είναι οι συντελεστές $X[k]$ του DFT ίσοι με μηδέν;

Το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ που ορίζεται στη Σχέση (13.45) φαίνεται στο Σχήμα 13-16(α) από το οποίο μπορούμε να δούμε την περιοδικότητά του $x[n] = x[n+40]$. Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα μια περίοδο του σήματος $x[n]$ του Σχήματος 13-16 (α) και υπολογίσουμε των 40 σημείων DFT της Σχέσης (13.35), προκύπτουν οι 40 συντελεστές $X[k]$ οι οποίοι φαίνονται σε παράσταση μέτρου και φάσης στα Σχήματα 13-16(β) και (γ) αντίστοιχα. Αυτοί οι 40 συντελεστές του DFT αντιπροσωπεύουν την ακολουθία $x[n]$ επακριβώς μέσω της εξίσωσης σύνθεσης του IDFT της Σχέσης (13.36).

 **Άσκηση 13.10:** Δείξτε ότι ο IDFT των συντελεστών $X[k]$ όπως ορίστηκε στην Άσκηση 13.9 δίνει την $x[n]$ της Σχέσης (13.45). Επιπλέον δείξτε ότι το σήμα $x[n]$ που προέκυψε από τον IDFT είναι περιοδικό με περίοδο N .

13-8 Το Φασματογράφημα

Είδαμε ότι ο DFT μπορεί να υπολογίσει στο πεδίο της συχνότητας ακριβείς αναπαραστάσεις τόσο των περιοδικών

όσο και των πεπερασμένου μήκους σημάτων διακριτού χρόνου. Μια εξίσου σημαντική περίπτωση είναι το δειγματοληπτημένο σήμα να έχει άπειρο μήκος και χωρίς να είναι περιοδικό. Κατά την επεξεργασία σε πραγματικό χρόνο τέτοιων σημάτων, μπορεί να χρειαστεί να περιμένουμε υπερβολικά πολύ χρόνο προκειμένου να συλλέξουμε όλα τα δείγματα, και ακόμα και τότε, ερχόμαστε αντιμέτωποι με τον υπολογισμό ενός τεράστιου DFT. Επιπλέον, τα αποτελέσματα ενός τέτοιου υπολογισμού συχνά είναι περιορισμένης αξίας καθώς πολλές από τις χρονικές μεταβολές του σήματος δε θα απεικονίζονται στο υπολογισμένο φάσμα. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν τα ηχητικά σήματα όπως είναι η ομιλία και η μουσική. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις ενδιαφερόμαστε για τις χρονικές μεταβολές του συχνοτικού περιεχομένου του σήματος. Συνήθως κάνουμε ψηφιακές ηχογραφήσεις που παρέχουν μια πολύ μεγάλη ακολουθία με δειγματοληψία πολλών λεπτών, ακόμη και ωρών. Για παράδειγμα, όταν δειγματοληπτούμε ένα ηχητικό σήμα με ρυθμό δειγματοληψίας 44,1 kHz, μια ώρα στερεοφωνικής μουσικής θα αποτελείται από $44100 \times 2 \times 60 \times 60 = 317,520,000$ δείγματα. Αν θέλαμε να υπολογίσουμε τον DFT περίπου μιας ώρας ήχου στα 44,1 kHz, ο πλησιέστερος σε δύναμη του δύο FFT που θα χρειαζόμασταν θα ήταν ο $2^{28} = 268,435,456$ ανά κανάλι. Μια καλύτερη προσέγγιση είναι η διάσπαση του σήματος σε μικρά τμήματα και η ανάλυση καθενός από αυτά με έναν FFT. Αυτό είναι λογικό αφού μια ηχογράφιση μεγάλης διάρκειας είναι πολύ πιθανό να περιέχει μια ακολουθία σύντομων περασμάτων στα οποία το περιεχόμενο του φάσματος δεν μεταβάλλεται, έτσι μπορεί να υπάρξει φυσικό μέγεθος τμήματος. Πράγματι, ήδη έχουμε δει ότι μπορούμε να σκεφτούμε τη μουσική ακριβώς με αυτό τον τρόπο.

Για να τυποποιήσουμε αυτήν την έννοια, υποθέστε ότι $x[m]$ είναι μια ακολουθία άπειρου μήκους. Ορίζουμε το *χρονικά-εξαρτημένο DFT* αυτού του σήματος ως ακολούθως:

$$X[k, n] = \sum_{m=0}^{L-1} w[m]x[n+m]e^{-j(2\pi k/N)m} \quad (13.47)$$

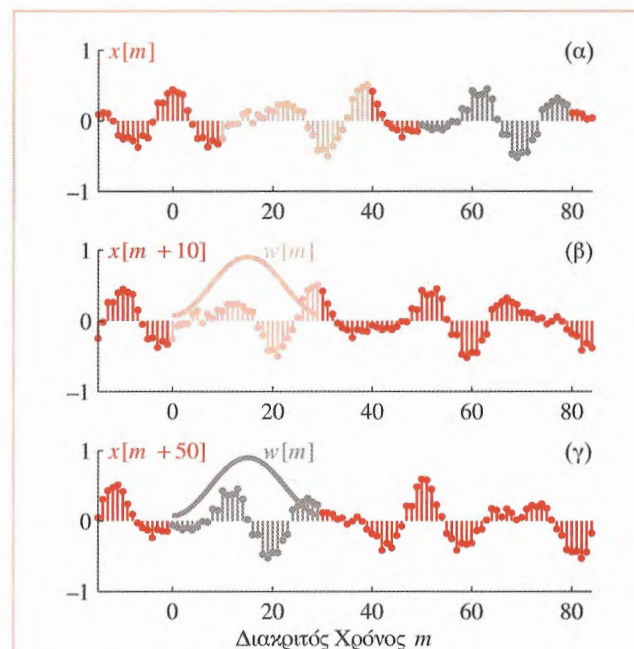
για $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Η ερμηνεία της εξίσωσης είναι προφανής. Καταρχήν, το παράθυρο $w[m]$ είναι μια ακολουθία που είναι μη μηδενική μόνο στο διάστημα $m = 0, 1, \dots, L-1$, όπου L υποθέτουμε ότι είναι πολύ μικρότερο από το συνολικό μήκος της ακολουθίας $x[m]$. Το γινόμενο $w[m]x[n+m]$ είναι και αυτό μη μηδενικό μόνο στο διάστημα $m = 0, 1, \dots, L-1$. Κατά αυτόν τον τρόπο, το παράθυρο επιλέγει ένα τμήμα πεπερασμένου μήκους από την ακολουθία $x[m]$. Μεταβάλλοντας τον δείκτη ολίσθησης n , μπορούμε να μεταφέρουμε οποιοδήποτε τμήμα της $x[m]$ επιθυμούμε μέσα στο παράθυρο. Τώρα, το δεξιό μέλος της Σχέσης (13.47) εύκολα αναγνωρίζεται ότι αποτελεί τον DFT N σημείων της ακολουθίας πεπερασμένου μήκους $w[m]x[n+m]$, επομένως η (13.47) μπορεί να υπολογιστεί με τη χρήση FFT για κάθε επιλογή του n . Αυτό διευκρινίζεται στο Σχήμα 13-17. Το Σχήμα 13-17 (α) δείχνει ένα σήμα $x[m]$ συναρτήσει του m . Επίσης φαίνονται δύο περιοχές μήκους 20 δειγμάτων, η μια να αρχίζει στο $n = 10$ και η άλλη στο $n = 50$. Το Σχήμα 13-17 (β) δείχνει την ολισθημένη προς τα αριστερά ακολουθία $x[m+10]$ με την ακολουθία παραθύρου $w[m]$ ¹³. Τα ανοιχτόχρωμα δείγματα στα Σχήματα 13-17 (α) και (β) είναι τα δείγματα που πολλαπλασιάζονται με το παράθυρο $w[m]$ τη χρονική στιγμή $n = 10$ και επομένως επιλέγονται για ανάλυση. Συμβολίζουμε τον DFT της ακολουθίας $w[m]x[m+10]$ με $X[k, 10]$. Στο Σχήμα 13-17 (γ) παρουσιάζονται το σταθερό παράθυρο μαζί με την ακολουθία $x[m+50]$, δηλαδή, την ακολουθία $x[m]$ μετατοπισμένη προς τα αριστερά κατά 50 δείγματα. Τα δείγματα χρώματος γκρι στα Σχήματα 13-17 (α) και (γ) είναι τα δείγματα που πολλαπλασιάζονται με το παράθυρο και επομένως επιλέγονται για τον υπολογισμό της ακολουθίας $X[k, 50]$.

13-8.1 Απεικόνιση Φασματογραφήματος

Από τον υπολογισμό του φασματογραφήματος προκύπτει μια διδιάστατη ακολουθία $X[k, n]$, όπου ο δείκτης k

¹³Οι ακολουθίες παραθύρου διακριτού χρόνου απεικονίζονται ως συνεχείς συναρτήσεις για να διαχωρίζονται από τα δείγματα της ακολουθίας $x[m]$.



Σχήμα 13-17: Χρονικά-εξαρτημένη παραθύρωση σήματος. (α) Το σήμα $x[m]$, (β) σταθερό παράθυρο με ολισθημένο το σήμα προς τα αριστερά κατά 10 δείγματα και (γ) σταθερό παράθυρο με ολισθημένο το σήμα προς τα αριστερά κατά 50 δείγματα.

αναπαριστά συχνότητα, αφού η $\omega_k = (2\pi k/N)$ είναι η k -οστή συχνότητα ανάλυσης και ο δείκτης n αναπαριστά χρόνο. Εφόσον το φασματογράφημα είναι συνάρτηση τόσο της συχνότητας όσο και του χρόνου, δε μπορούμε να αναπαραστήσουμε το φάσμα, επειδή για κάθε χρονική στιγμή υπάρχει διαφορετικό τοπικό φάσμα. Για να ανταπεξέλθουμε σε αυτήν την επιπλέον πολυπλοκότητα χρειαζόμαστε μια τρισδιάστατη αναπαράσταση. Αυτό επιτυγχάνεται σχεδιάζοντας τη $|X[k, n]|$ (ή το $\log |X[k, n]|$) συναρτήσει του k και του n χρησιμοποιώντας προοπτικές αναπαραστάσεις, αναπαραστάσεις ισουψών ή εικόνες με διαβαθμίσεις του γκρι. Προτεινόμενη μορφή είναι το

φασματογράφημα, μια εικόνα με διαβαθμίσεις του γκρι (ή ψευδοχρωματισμένη) όπου το επίπεδο του γκρι στο σημείο (k, n) είναι ανάλογο με το $|X[k, n]|$ ή το $\log |X[k, n]|$. Οι μεγάλες τιμές αντιστοιχούν στο μαύρο και οι μικρές στο άσπρο. Παραδείγματα φασματογραφήματος φαίνονται στα Σχήματα 13-18, 13-20, 13-23, 13-22, 13-25 και 13-27. Ο οριζόντιος άξονας είναι ο άξονας του χρόνου και ο κάθετος της συχνότητας. Στο φασματογράφημα ενός πραγματικού σήματος αρκεί να παρουσιάζεται το διάστημα για $0 \leq k \leq N/2$, ή $0 \leq \hat{\omega} \leq \pi$. Στην περίπτωση μιγαδικού σήματος, το πεδίο συχνότητας είναι είτε $0 \leq \hat{\omega} < 2\pi$, είτε $-\pi < \hat{\omega} \leq \pi$, ανάλογα με το αν οι τιμές του FFT αναδιατάσσονται προτού αναπαρασταθούν¹⁴.

13-8.2 Φασματογραφήματα στο Matlab

Εφόσον το φασματογράφημα μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας πολλούς FFT παραθυρωμένων τμημάτων του αρχικού σήματος, το Matlab είναι ιδανικό περιβάλλον για τον υπολογισμό και την αναπαράστασή του. Συγκεκριμένα, αυτό που το Matlab αναπαριστά είναι το ακόλουθο:

$$X[(2\pi k/N)f_s, rRT_s] = \sum_{m=0}^{L-1} w[m]x[rR + m]e^{-j(2\pi k/N)m} \quad (13.48)$$

$$k = 0, 1, \dots, N/2$$

όπου $f_s = 1/T_s$ είναι ο ρυθμός δειγματοληψίας που σχετίζεται με το σήμα $x[n]$ και το R καθορίζει τη χρονική απόσταση υπολογισμού του DFT¹⁵. Η συνάρτηση του Matlab που υλοποιεί τον υπολογισμό της Σχέσης (13.48) είναι η ακόλουθη:

```
[X, F, T] = specgram(xx, NFFT, ...
    Fs, window, Noverlap)
```

¹⁴Η συνάρτηση `spectgr` του εργαλείου *SP-First*, που είναι αντίστοιχη της συνάρτησης `specgram` του Matlab, για μιγαδικά σήματα χρησιμοποιεί το διάστημα $-\pi < \hat{\omega} \leq \pi$. Η `specgram` χρησιμοποιεί το διάστημα $0 \leq \hat{\omega} < 2\pi$.

¹⁵Δηλαδή, το Matlab βαθμονομεί τους άξονες της συχνότητας και του χρόνου σε μονάδες συνεχούς χρόνου.

όπου X είναι ένας διδιάστατος πίνακας που περιέχει τις μιγαδικές τιμές του φασματογραφήματος, F είναι το διάνυσμα των συχνοτήτων ανάλυσης και T είναι το διάνυσμα που περιέχει τις χρονικές θέσεις του συρόμενου παραθύρου. Είσοδοι είναι το σήμα `xx`, το μήκος του FFT μήκους `NFFT`, η συχνότητα δειγματοληψίας `Fs`, οι συντελεστές παραθύρου `window` και ο αριθμός των επικαλυπτόμενων δειγμάτων κατά τη μετατόπιση του παραθύρου `Noverlap`. Παρατηρήστε ότι η παράμετρος μετακίνησης του παραθύρου R είναι `NFFT - Noverlap`. Η επικάλυψη θα πρέπει να είναι μικρότερη του μήκους παραθύρου, αλλά επιλέγοντας `Noverlap` ίσο με το μήκος (παραθύρου) - 1 θα οδηγούσε σε πολλούς άσκοπους υπολογισμούς, καθώς η μετακίνηση παραθύρου θα ήταν ένα. Συνήθίζεται να επιλέγεται μετακίνηση μεταξύ 50 και 80 τοις εκατό του μήκους παραθύρου, ανάλογα με το πόσο ομαλό επιθυμούμε να είναι το φασματογράφημα. Για περισσότερες λεπτομέρειες, πληκτρολογήστε στο Matlab `help specgram`.

Μπορείτε να δείτε το φασματογράφημα χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εντολές:

```
imagesc( T, F, abs(X) )
axis xy, colormap(1-gray)
```

Ο χρωματικός χάρτης (`1-gray`) παράγει μια αρνητική κλίμακα του γκρι χρήσιμη για εκτύπωση, ωστόσο για την οθόνη είναι προτιμότερη η χρήση χρώματος, για παράδειγμα `colormap(jet)`. Τέλος, μπορεί να είναι προτιμότερο η χρήση λογαριθμικής κλίμακας στην `imagesc` για να φαίνονται οι μικρές φασματικές συνημιτόνες.

13-8.3 Φασματογράφημα Περιοδικού Δειγματοληπτημένου Σήματος

Μια περιοδική ακολουθία όπως αυτή του Παραδείγματος (13.45) είναι ένα παράδειγμα σήματος που μπορεί να παρασταθεί επακριβώς από ένα μόνο DFT. Είναι επίσης ένα παράδειγμα σήματος άπειρου μήκους. Εφόσον γνωρίζουμε τον DFT της, παρέχει ένα χρήσιμο παράδειγμα που έχει απλό Φασματογράφημα. Αν στη Σχέση (13.47)

χρησιμοποιήσουμε τετραγωνικό παράθυρο μήκους $L = 40$ και μήκος DFT $N = 40$, έχουμε:

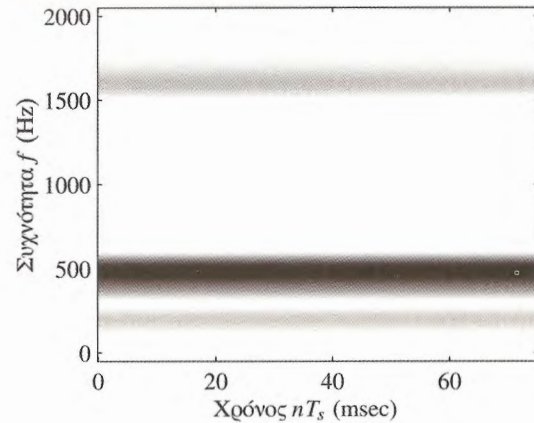
$$X[k, n] = \sum_{m=0}^{39} x[m+n]e^{-j(2\pi k/40)m} \quad (13.49)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, 39$$

Το Φασματογράφημα που προκύπτει για το σήμα του παραδείγματος (13.45) φαίνεται στο Σχήμα 13-18. Αυτή η εικόνα δείχνει πέντε συνεχείς οριζόντιες γραμμές διαφορετικής έντασης γκρι. Δεν υπάρχουν άλλα φασματικά στοιχεία. Γιατί είναι έτσι η εικόνα; Καταρχήν εφόσον $N = L = 40$, κάθε τμήμα του σήματος θα είναι ακριβώς μια περίοδος της $x[n]$. Επομένως, η $|X[k, n]|$ θα ισούται με την $|X[k]|$ του Σχήματος 13-16(β) για κάθε n . Με άλλα λόγια, το μέτρο του χρονο-εξααρτώμενου μετασχηματισμού Fourier θα διαφοροποιείται μόνο στη διάσταση της συχνότητας, όχι στη διάσταση του χρόνου. Επιπλέον, από όσα αναφέραμε προηγουμένως εύκολα συμπεραίνουμε ότι τα μόνα μη μηδενικά φασματικά στοιχεία θα αντιστοιχούν στις τιμές του δείκτη $k = 2, 4, 5, 16, 17$. Ο άξονας της συχνότητας στο Σχήμα 13-18 βαθμονομείται σε σχέση με τη κυκλική συχνότητα συνεχούς χρόνου, f σε Hz. Για να βρείτε τη σχέση μεταξύ της f και του συχνωτικού δείκτη k , θυμηθείτε ότι οι συχνότητες του DFT είναι οι $\hat{\omega}_k = 2\pi k/N$ και (από το θεώρημα δειγματοληψίας) $\hat{\omega}_k = 2\pi(f_k/f_s)$. Εξισώνοντας παίρνουμε:

$$f_k = (k/N)f_s \quad (13.50)$$

που μας επιτρέπει να βαθμονομήσουμε τον άξονα της συχνότητας σε Hz. Εφαρμόζοντας την (13.50) στους δείκτες συχνότητας $0 \leq k \leq N/2$, παίρνουμε τις συχνότητες συνεχούς χρόνου $0 \leq f_k \leq f_s/2$, που βρίσκονται στο τυπικό διάστημα συχνότητων που χρησιμοποιείται για ένα πραγματικό σήμα. Τα φασματικά στοιχεία των αρνητικών συχνότητων μπορούν να εξαχθούν από την άρτια συμμετρία που ικανοποιεί το μέτρο $|X[k, n]|$ του φάσματος του πραγματικού σήματος. Συνεπώς, στο Σχήμα 13-18 υπάρχουν μόνο 21 διακριτά σημεία στον κάθετο άξονα. Τα πέντε φασματικά στοιχεία είναι στα $(k/40)4000 = 100k$



Σχήμα 13-18: Φασματογράφημα του δειγματοληπτημένου περιοδικού σήματος του παραδείγματος (13.45). Οι μόνες παρούσες αρμονικές είναι η δεύτερη, η τέταρτη, η πέμπτη, η δέκατη έκτη και η δέκατη έβδομη.

για $k = 2, 4, 5, 16, 17$. Το εύρος των φασματικών γραμμών που αποτυπώνονται σε αυτές τις τιμές του k επιλέγονται από τη συνάρτηση αποτύπωσης εικόνων του Matlab, που μεγενθύνει για να δείξει μια μεγαλύτερη εικόνα με πολύ περισσότερα από 21 pixel οριζοντίως¹⁶. Εφόσον επιλέξαμε $N = 40$, τα φασματικά στοιχεία για $k = 4$ και $k = 5$ είναι δίπλα το ένα στο άλλο, όπως είναι και τα στοιχεία για $k = 16$ και $k = 17$. Εφόσον το Matlab επεκτείνει κάθε σημείο ώστε οι 21 τιμές του DFT να γεμίσουν το κάθετο διάστημα αποτύπωσης, δε βλέπουμε λευκό χώρο ανάμεσα σε αυτά τα στοιχεία.

13-8.4 Διακριτική Ικανότητα

Δείξαμε ότι ο υπολογισμός του φάσματος απαιτεί πεπερασμένο μήκος παραθύρου (L) και πεπερασμένο αριθμό συχνότητων ανάλυσης (N). Η απόδοση της ανάλυσης του φασματογραφήματος συνήθως συνίσταται

¹⁶Η κλίμακα του γκρι χρησιμοποιεί άσπρο για μέτρο μηδέν και μαύρο για την αναπαράσταση της μέγιστης τιμής του μέτρου.

σε μια αναφορά σχετικά με τη διακριτική ικανότητα είτε της συχνότητας είτε του χρόνου. Οι παράμετροι κλειδιά που ελέγχουν τη διακριτική ικανότητα είναι η μορφή της ακολουθίας παραθύρου $w[n]$ και το μήκος L . Η διακριτική ικανότητα φασματικών στοιχείων μέσα στο φασματογράφημα διέπεται από τις αρχές που αναφέρθηκαν και διευκρινίστηκαν στην Ενότητα 13-4. Σ' εκείνη την ενότητα δείξαμε ότι υπάρχει μια αντιστρόφως ανάλογη σχέση μεταξύ του μήκους παραθύρου και της ικανότητας διάκρισης δύο γειτονικών συχνοτήτων. Συγκεκριμένα, δείξαμε ότι το τετραγωνικό παράθυρο συνεχούς χρόνου διάρκειας T sec έχει εύρος κύριου λοβού του μετασχηματισμού Fourier $\Delta\omega = 4\pi/T$. Με μήκος παραθύρου $L = T/T_s$ δείγματα, το εύρος του κύριου λοβού εκφρασμένο σε rad/sec θα είναι:

$$\Delta\omega = \frac{4\pi}{L} f_s \text{ rad/sec} \quad (13.51)$$

Το παράθυρο Hamming που ορίζεται στη Σχέση (13.26) έχει κύριο λοβό μετασχηματισμού Fourier με διπλάσιο εύρος αυτού του τετραγωνικού παραθύρου. Επομένως, απαιτείται διπλάσιο μήκος παραθύρου για την επίτευξη ίδιας ανάλυσης με αυτή του τετραγωνικού παραθύρου.

Επίδειξη: Φασματογράφημα-Διακριτική Ικανότητα

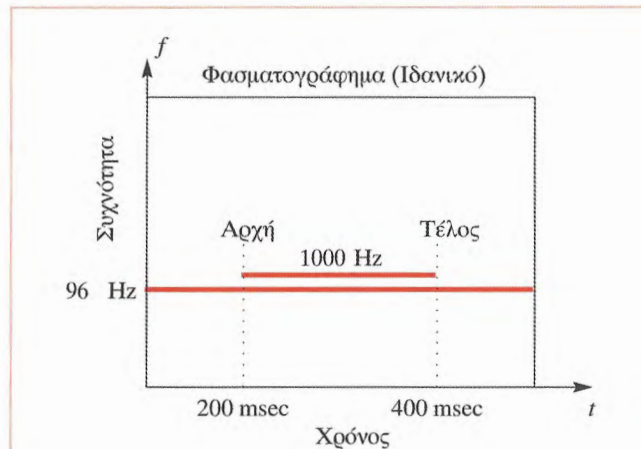
Υπάρχει βέβαια και ένα πρόβλημα στην αύξηση του L , αφού ουσιαστικά μειώνουμε τη χρονική διακριτική ικανότητα. Όταν το L είναι μεγάλο, χρονικά συμβάντα μικρής διάρκειας ή γρήγορες μεταβάσεις θα συμπεριληφθούν, με άλλα τμήματα του σήματος, από ένα μεγάλο παράθυρο. Επομένως, συναντάμε πάλι την αρχή της αβεβαιότητας της ανάλυσης φάσματος Fourier:

Αρχή της Αβεβαιότητας:

Η διακριτική ικανότητα χρόνου και συχνότητας, δε μπορούν να βελτιωθούν ταυτόχρονα στο φασματογράφημα.

13-8.4.1 Πείραμα Διακριτικής Ικανότητας

Προκειμένου να ελέγξουμε την διακριτική ικανότητα του φασματογραφήματος θα εκτελέσουμε ένα απλό πείραμα. Το πείραμά μας θα βασιστεί στην ανάλυση ενός σήματος που είναι δύσκολο να το “δούμε” ταυτόχρονα και στο χρόνο και στη συχνότητα. Το σήμα αποτελείται από δύο συνιστώσες. Η πρώτη είναι ένας σταθερός τόνος 960 Hz που παραμένει σταθερός για όλο το πακέτο δεδομένων, η δεύτερη είναι ένα βραχύβιο σήμα συχνότητας 1000-Hz, του οποίου οι χρόνοι εκκίνησης και τερματισμού είναι τα 200 και τα 400 msec αντίστοιχα. Η ιδανική μορφή ενός τέτοιου φασματογραφήματος φαίνεται στο Σχήμα 13-19. Ο σκοπός



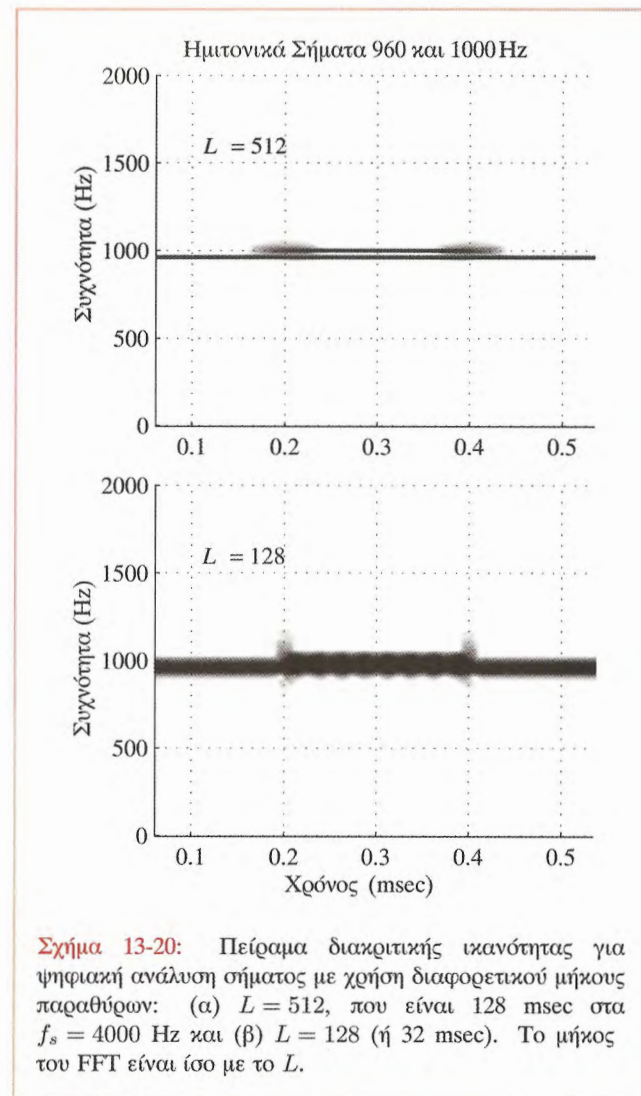
Σχήμα 13-19: Πείραμα διακριτικής ικανότητας ψηφιακής ανάλυσης φάσματος. Ιδανικό φάσμα αποτελούμενο από δύο ημιτονικά σήματα διαφορετικής διάρκειας και διαφορετικών συχνοτήτων.

του πειράματος είναι ο ταυτόχρονος προσδιορισμός των χρόνων εκκίνησης και τερματισμού του δεύτερου σήματος, καθώς και τα χαρακτηριστικά στοιχεία συχνότητάς του. Όπως προαναφέραμε, η διακριτική ικανότητα συχνότητας είναι αντιστρόφως ανάλογη του μήκους παραθύρου. Όταν χρησιμοποιείται παράθυρο Hamming μήκους L , το εύρος

φάσματος είναι περίπου $(8\pi/L)f_s$, επομένως η διακριτική ικανότητα συχνότητας σε Hz είναι:

$$\text{Συχνοτική Διακριτική Ικανότητα} \approx \frac{4}{L} f_s \text{ Hz} \quad (13.52)$$

Η χρονική διακριτική ικανότητα, από την άλλη, είναι ανάλογη του μεγέθους παραθύρου. Για να δούμε την επίδραση του παραθύρου στην ικανότητα ταυτόχρονης μέτρησης χρόνου και συχνότητας στο φασματογράφημα, ας αρχίσουμε τοποθετώντας το παράθυρο πριν τη χρονική στιγμή των 200 msec στο Σχήμα 13-19. Για τιμές του n τέτοιες ώστε το παράθυρο να καλύπτει το σήμα πριν τη χρονική στιγμή 200msec, θα δούμε μόνο μια οριζόντια γραμμή στο φασματογράφημα στα 960 Hz με εύρος αντιστρόφως ανάλογο του μήκους παραθύρου L . Για μεγαλύτερες τιμές του n , το παράθυρο θα δρασκειώσει τη χρονική στιγμή εκκίνησης της συνιστώσας των 1000 Hz, οπότε ένα τμήμα του σήματος που επιλέγει το παράθυρο θα περιέχει συχνότητες τόσο στα 960 Hz όσο και στα 1000 Hz και ένα τμήμα του θα περιέχει μόνο τη συνιστώσα των 960 Hz. Σε αυτήν την περίπτωση οι δύο συχνότητες δεν θα περιέχονται σε ολόκληρο το παράθυρο. Για αυτές τις τιμές του n , τα πράγματα θα είναι συγκεχυμένα και θα είναι δύσκολο να διακρίνουμε πότε ακριβώς αρχίζει η συνιστώσα των 1000 Hz. Τέλος, όταν η τιμή του n είναι τέτοια ώστε το παράθυρο να περιέχει και τα δύο στοιχεία συχνότητας, το ζήτημα επανέρχεται στη διακριτική ικανότητα συχνότητας. Αν το παράθυρο είναι αρκετά μεγάλο ώστε $4f_s/L < 40$ Hz, τότε οι δύο συχνότητες θα είναι διακριτές και θα δούμε δύο οριζόντιες γραμμές στο φασματογράφημα. Διαφορετικά, οι δύο γραμμές θα συγχέονται δίνοντας μια πλατιά γραμμή. Παρατηρώντας το Σχήμα 13-19, είναι προφανές ότι το ίδιο πράγμα θα συμβεί καθώς το παράθυρο πλησιάζει, δρασκειώνει και τελικά ξεπερνάει το τέλος του στοιχείου των 1000 Hz. Το Σχήμα 13-20 δείχνει τα φασματογραφήματα ενός σήματος συνεχούς χρόνου υπολογισμένα σύμφωνα με το εξιδανικευμένο διάγραμμα του Σχήματος 13-19. Ο ρυθμός δειγματοληψίας ήταν 4000 Hz. Η διακριτική ικανότητα συχνότητας του μεγαλύτερου παραθύρου ($L = 512$) είναι



επαρκής για να διακρίνει κάποιος τα δύο σήματα, αλλά θολώνει τα άκρα του σήματος εμποδίζοντας τον ακριβή υπολογισμό των χρόνων εκκίνησης και λήξης, όπως είναι προφανές στο Σχήμα 13-20(α). Παρατηρήστε ότι η

χρονική διάρκεια του παραθύρου των 512 σημείων είναι $LT_s = 512/4000 = 0.128$ sec. Το εύρος των θολών περιοχών γύρω από τα άκρα του στοιχείου των 1000 Hz είναι περίπου το μισό αυτής της διάρκειας παραθύρου. Αυτό οφείλεται στο σχήμα του παραθύρου Hamming που μειώνεται γρήγορα στο μηδέν στα άκρα του. Από την άλλη μεριά, το μικρότερο παράθυρο ($L = 128$) στο Σχήμα Fig. 13-20 (β) εντοπίζει τα άκρα του σήματος των 1000 Hz, αλλά δεν καταφέρνει να διαχωρίσει τις δύο συχνότητες. Αυτή η ανταλλαγή χρόνου - συχνότητας είναι πάντα παρούσα σε φασματογραφήματα που εξαρτώνται από τον DFT, του οποίου οι ισαπέχουσες συχνότητες ανάλυσης έχουν την ίδια διακριτική ικανότητα¹⁷.



Επίδειξη: Φασματογράφημα-Διακριτική Ικανότητα

13-8.5 Φασματογράφημα Μουσικής Κλίμακας

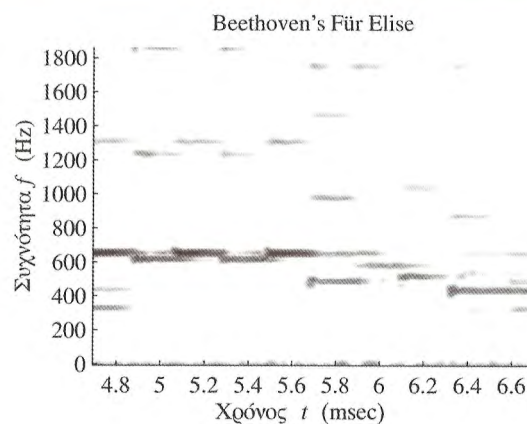
Μια περίπτωση που το φασματογράφημα ταιριάζει με τη διαίσθησή μας έρχεται από την ανάλυση ήχων μουσικών οργάνων, όπως συζητήσαμε στο Κεφάλαιο 3. Μια μουσική παρτιτούρα (Σχήμα 13-21) χρησιμοποιεί σημειογραφία που ανταποκρίνεται στην “χρονο-συχνοτική” εικόνα που συναντάμε στο φασματογράφημα. Κάθε νότα προσδιορίζει τη συχνότητα του τόνου που θα παιχτεί, τη διάρκειά του και το χρόνο που θα παιχτεί (σε σχέση με άλλες νότες). Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι η μουσική σημειογραφία είναι ένα εξιδανικευμένο φασματογράφημα, παρόλο που δε χρησιμοποιεί κωδικοποίηση σε επίπεδα του γκρι για να δείξει το πλάτος. Ως ένα απλό παράδειγμα μουσικού κομματιού, μπορούμε να συνθέσουμε μια κλίμακα χρησιμοποιώντας καθαρούς τόνους (δηλαδή ημιτονοειδή σήματα). Οκτώ διαδοχικές νότες κάνουν μια κλίμακα. Αν η κλίμακα είναι η C μείζονος, οι νότες είναι C, D, E, F, G, A, B, C, των οποίων οι συχνότητες δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Μεσαία C	D	E	F	G	A	B	C
262 Hz	294	330	349	392	440	494	523

¹⁷Μια προσέγγιση στο πρόβλημα που θέτει αυτό το παράδειγμα διακριτικής ικανότητας ονομάζεται *ανάλυση κνυματιδίου*, η οποία κάνει ανάλυση σε συχνοτικές ζώνες ανομοιόμορφου εύρους.



Σχήμα 13-21: Μουσική παρτιτούρα της *Für Elise* του Beethoven.



Σχήμα 13-22: Φασματογράφημα του μουσικού κομματιού *Für Elise* εκτελεσμένου σε πιάνο. Παρατηρήστε τις αρμονικές σε διπλάσια συχνότητα από αυτή της νότας εξαιτίας των πολύπλοκων ήχων που παράγει το πιάνο. Το παράθυρο που χρησιμοποιήθηκε ήταν Hann μήκους $L = 256$, η επικάλυψη 200 και το μήκος του FFT $N = 256$.

Το φασματογράφημα της τεχνητής κλίμακας φαίνεται στο Σχήμα 13-23. Μπορούμε εύκολα να αναγνωρίσουμε κάθε νότα καθώς παίζεται, παρόλο που μερικές μεταβάσεις μεταξύ τους είναι θολές. Το θόλωμα οφείλεται στο γεγονός ότι το μήκος παραθύρου

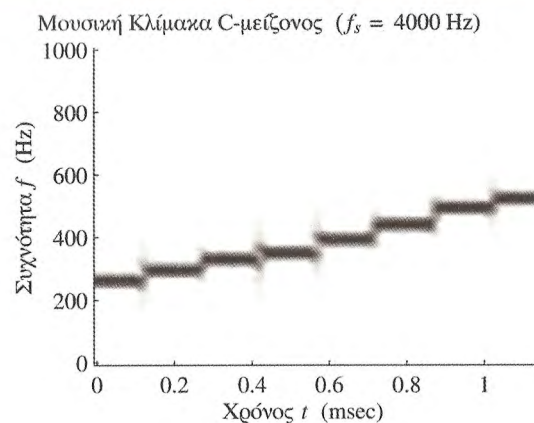
του αναλυτή φάσματος είναι αρκετά μεγάλο ώστε να δρασκελιζει δύο νότες ταυτόχρονα. Μείωση του μήκους παραθύρου θα έδινε αιχμηρές ακμές στα άκρα κάθε νότας, επιβαρύνοντάς μας με παχιές γραμμές φάσματος για τους τόνους. Οι νότες ενός πραγματικού πιάνου έχουν πολύπλοκη δομή από αυτή των ημιτονοειδών κυμάτων που χρησιμοποιούνται για την κλίμακα C-μείζονος στο Σχήμα 13-23. Τα περισσότερα πλήκτρα σε ένα πιάνο χτυπούν τρεις χορδές όταν παίζονται και οι πολύπλοκες ταλαντώσεις παράγουν τον ευχάριστο ήχο του οργάνου. Ένα φασματογράφημα αποκαλύπτει την πολύπλοκη δομή των νοτών αν το φάσμα συχνότητας έχει επαρκή ανάλυση. Το Σχήμα 13-22 δείχνει το φασματογράφημα του ανοίγματος του μουσικού κομματιού *Für Elise* του Beethoven. Η ανάλυση συχνότητας του παραθύρου Hann στο επίπεδο μέσου πλάτους είναι προσεγγιστικά

$$\frac{2}{L}f_s = 57.95 \text{ Hz}$$

η οποία είναι επαρκής για να διαχωρίσει τις νότες στο Σχήμα 13-22. Στην αρχή του κομματιού *Für Elise* παίζεται μόνο ένα κλειδί σε κάθε χρονική στιγμή, αλλά το φασματογράφημα είναι σίγουρα πιο πολύπλοκο. Μάλιστα, μπορούμε να διακρίνουμε τη βασική νότα που παίζεται, και παράλληλα μπορούμε να δούμε τη δεύτερη και τη τρίτη αρμονική της νότας, και καμιά φορά ακόμη και “χαμηλότερες” σε μικρότερη συχνότητα.

Επίδειξη: Διεπαφή Χρήστη για Μουσική

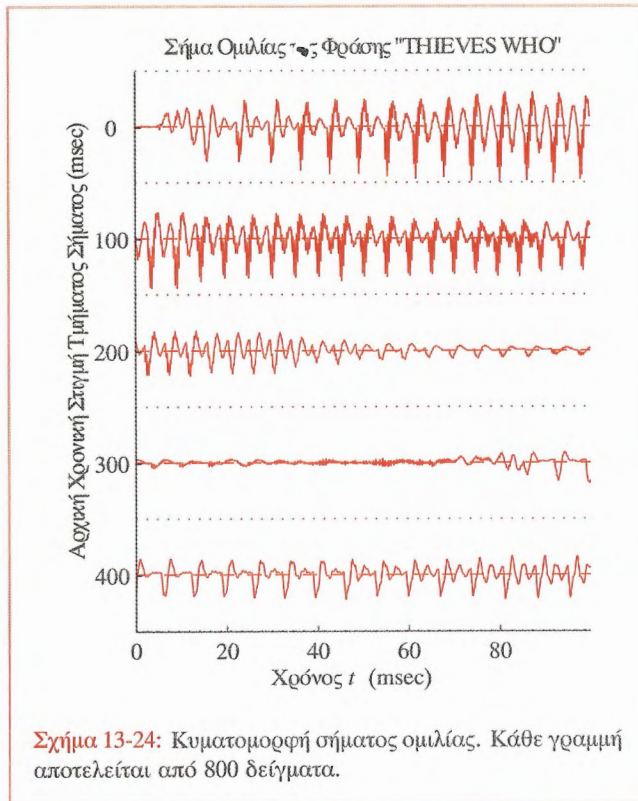
Τα δύο αυτά παραδείγματα υποδεικνύουν ότι το φασματογράφημα μπορεί να είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τη δημιουργία ενός προγράμματος για σύνθεση μουσικής. Αν μπορούσαμε να αναλύσουμε το φασματογράφημα για να βρούμε τις μεγάλες αιχμές του, τότε το πρόγραμμα θα μπορούσε να “διαβάσει” το φασματογράφημα και να διαπιστώσει τη συχνότητα και τη διάρκεια των νοτών που παίζονται.



Σχήμα 13-23: Φασματογράφημα τεχνητής κλίμακας πιάνου που συντίθεται από ημιτονοειδή σήματα. Το παράθυρο που χρησιμοποιήθηκε ήταν ένα Hann μήκους $L = 256$, η επικάλυψη 200 δείγματα και ο ρυθμός δειγματοληψίας $f_s = 4000$ Hz.

13-8.6 Φασματογράφημα Σήματος Ομιλίας

Ως ένα άλλο παράδειγμα στο Σχήμα 13-24 φαίνεται ένα σήμα ομιλίας, στο οποίο έχει γίνει δειγματοληψία με ρυθμό $f_s = 8000$ δείγματα/ δευτερόλεπτο. Η γραφική παράσταση του σήματος στο πεδίο του χρόνου δίνεται σε διάταξη πέντε (5) λωρίδων, κάθε μια από τις οποίες αναπαριστά 800 δείγματα, ή ισοδύναμα έχει χρονική διάρκεια 100 msec. Η αρχή της δεύτερης γραμμής είναι το δείγμα μετά το τελευταίο δείγμα στην πρώτη γραμμή, κ.ο.κ.. Το διάγραμμα έχει σχεδιαστεί σε συνεχής κυματομορφή, επειδή 800 ξεχωριστά δείγματα ανά γραμμή θα ήταν πολύ κοντά σε αυτήν την κλίμακα. Γνωρίζουμε ότι η ομιλία αποτελείται από μια ακολουθία διαφορετικών ήχων που εναλλάσσονται ανάμεσα σε ηχηρούς ήχους (σχηματισμένους από τις παλλόμενες φωνητικές χορδές) όπως τα φωνήεντα, κι άηχους ήχους, όπως το “s”, το “sh”, και το “f”. Η κυματομορφή του Σχήματος 13-24 αντιστοιχεί στην φράση “thieves who,” οπότε μπορούμε να



ξεχωρίσουμε τα ηχηρά και τα άηχα διαστήματα. Το φωνήεν "ie" καταλαμβάνει την χρονική περιοχή $0 \leq t \leq 200$ msec, ενώ το άηχο "s" βρίσκεται στο διάστημα $300 \leq t \leq 360$ msec. Το φωνήεν στο "who" βρίσκεται προς το τέλος, $450 \leq t \leq 500$ msec. Το μέτρο του σήματος που αντιστοιχεί στο φωνήεν παίρνει μεγάλες τιμές και είναι μια σχεδόν περιοδική κυματομορφή, ενώ το αντίστοιχο του άηχου από την άλλη, παίρνει μικρές τιμές και φαίνεται να έχει τυχαία δομή. Αυτοί οι ήχοι είναι τα κύρια γεγονότα στο σήμα, αλλά συνολικά η κυματομορφή αλλάζει σταδιακά με το χρόνο, μένοντας σχετικά σταθερή για διαστήματα από 20 ως 80 msec. Γι' αυτόν το λόγο οι ιδιότητες φάσματος του σήματος θα αλλάζουν επίσης σταδιακά και το φασματογράφημα

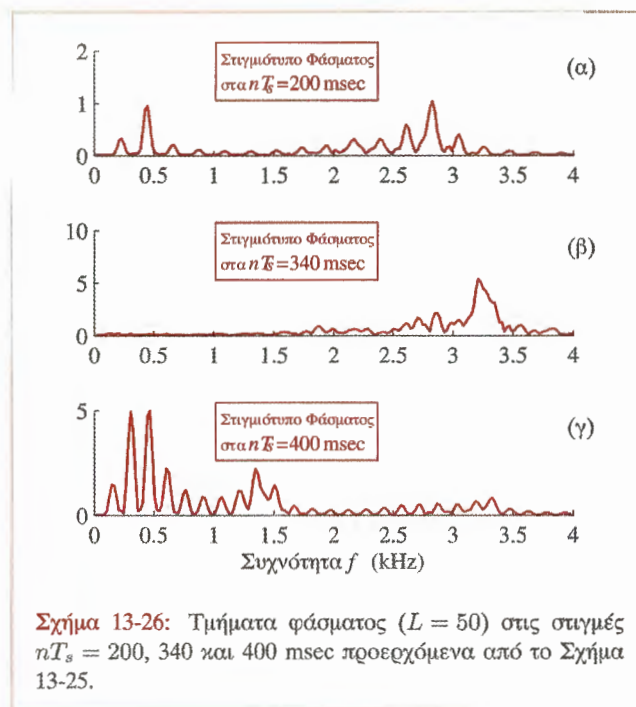
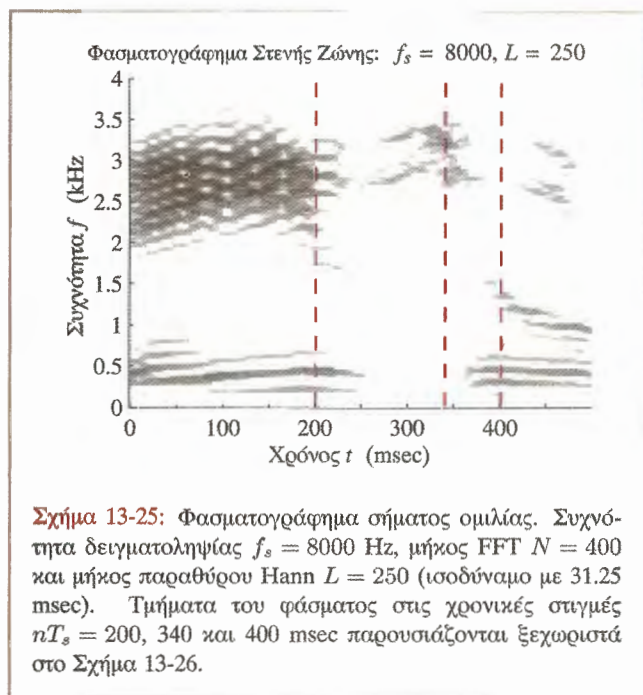
αποτελεί ένα ανεκτίμητο εργαλείο για την απεικόνιση του μεταβαλλόμενου χαρακτήρα του σήματος ομιλίας.

Το φασματογράφημα του σήματος ομιλίας του Σχήματος 13-24 φαίνεται στο Σχήμα 13-25 για την περίπτωση που $L = 250$. Η εικόνα αυτή είναι το διάγραμμα της $|X[(2\pi k/N)f_s, rRT_s]|$ όπως αυτό ορίστηκε στη Σχέση (13.48) της Σελίδας 450. Για να είναι χρήσιμο το διάγραμμα, θα πρέπει να καταλάβουμε γιατί έχει τη μορφή που έχει και να είμαστε ικανοί να ερμηνεύσουμε τα χαρακτηριστικά της εικόνας σε σχέση με την χρονική κυματομορφή και την αρχή του χρόνο-μεταβαλλόμενου φάσματος συχνοτήτων. Παρατηρήστε ότι στις τρεις πρώτες γραμμές του διαγράμματος της κυματομορφής του Σχήματος 13-24, η κυματομορφή φωνηέντος αποτελείται από παλμούς που λαμβάνουν χώρα σε σχετικά ισαπέχοντα διαστήματα χρόνου. Πράγματι, αν περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας σε ένα διάστημα μήκους 20 έως 30 msec, βλέπουμε ότι η κυματομορφή γενικά εμφανίζεται να είναι σχεδόν περιοδική σε αυτό το διάστημα. Στον υπολογισμό του χρόνο-μεταβαλλόμενου φάσματος $|X[k, n]|$, το μήκος παραθύρου είναι $L = 250$, που ανταποκρίνεται σε χρονικό διάστημα $250/8000 = 31.25$ msec.

Καθώς μετακινείται το παράθυρο κατά μήκος της κυματομορφής, αναλύονται διαφορετικά τμήματα μήκους 31,25 msec. Καθώς οι παλμοί αλλάζουν σχήμα και η απόστασή τους μεγαλώνει με το χρόνο, αλλάζουν και τα φασματικά χαρακτηριστικά των τμημάτων μέσα στο συρόμενο παράθυρο. Αυτό φαίνεται καθαρά στο Σχήμα 13-25. Οι σκούρες ράβδοι αναπαριστούν ισαπέχουσες συχνοτικές συνιστώσες των οποίων η απόσταση στην κάθετη (συχνότητα) διεύθυνση εξαρτάται από τη "θεμελιώδη συχνότητα" την αντίστοιχη χρονική στιγμή. Οι ράβδοι διαφοροποιούνται μαζί, η μεταξύ τους απόσταση αυξάνει όταν η "θεμελιώδης συχνότητα" αυξάνεται (μεγαλύτερη περίοδος) και αντίστροφα. Και οι δύο περιοχές φωνηέντων, $0 \leq t \leq 200$ msec και $390 \leq t \leq 500$ msec, επιδεικνύουν αυτήν την κανονική δομή, παρόλο που η απόσταση των ράβδων είναι μικρότερη στο τελευταίο 110 msec διάστημα.



Επίδειξη: Κεφάλαιο 3 Φασματογραφήματα

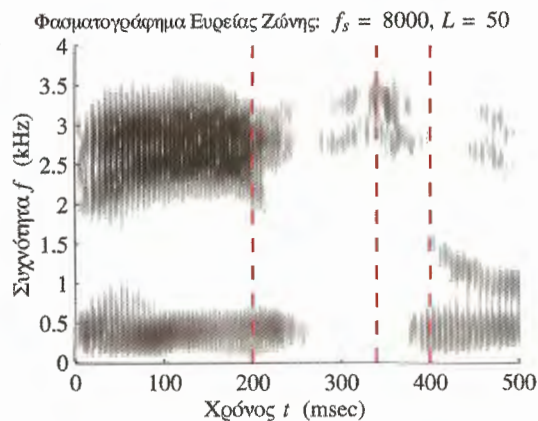


Επιστρέφοντας στο Σχήμα 13-24, παρατηρήστε ότι στο χρονικό διάστημα από 300 ως 360 msec (τέταρτη γραμμή) η κυματομορφή του ήχου μειώνεται σε πλάτος και δεν είναι πλέον περιοδική. Στο φασματογράφημα του Σχήματος 13-25 παρατηρούμε ότι κατά το ίδιο χρονικό διάστημα, η εικόνα ξεθωριάζει, η κανονική μορφή χάνεται και τα περισσότερα στοιχεία βρίσκονται σε υψηλές συχνότητες κοντά στα 3000 Hz. Η εικόνα φασματογραφήματος του Σχήματος 13-25 είναι μια ακολουθία στοιβαγμένων τμημάτων του φάσματος με την απόχρωση του γκρι να αναπαριστά το πλάτος. Στο Σχήμα 13-25 οι διακεκομμένες κάθετες γραμμές δείχνουν τη θέση των τριών “τμημάτων φάσματος” που αποσπαστήκαν και σχεδιάστηκαν στο Σχήμα 13-26. Τα δύο φάσματα για $t = 200$ και 400 msec έχουν τη γενική μορφή που θα περιμέναμε για περιοδικές συχνότητες. Παρατηρήστε ότι οι κορυφές στο πάνω πλαίσιο ($t = 200$) έχουν μεγαλύτερη απόσταση από αυτές

του κάτω πλαισίου ($t = 400$). Η εξέταση των χρονικών κυματομορφών στα 200 και 400 msec αντίστοιχα, δείχνει ότι η θεμελιώδης περίοδος είναι σημαντικά μικρότερη στα 200 msec από ότι στα 400 msec. Κατά συνέπεια, οι φασματικές κορυφές πρέπει να είναι πιο απομακρυσμένες στα 200 msec από ότι στα 400 msec. Το φάσμα στο μεσαίο πλαίσιο ($t = 340$) είναι τυπικό ήχων ήχων των οποίων η ενέργεια συγκεντρώνεται σε σχετικά υψηλές συχνότητες.

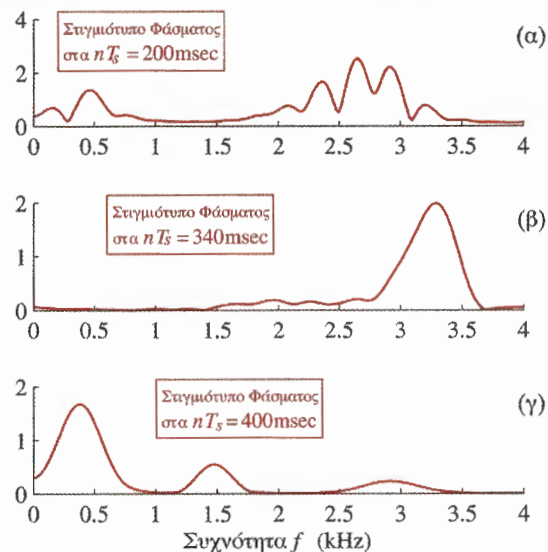
Ένα σημαντικό σημείο της ερμηνείας του φασματογραφήματος του σήματος ομιλίας είναι ότι, κατά τη χρονική διάρκεια παραθύρου, η κυματομορφή καμιά φορά “φαίνεται περιοδική”. Με άλλα λόγια, με δεδομένη μόνο την κυματομορφή εντός του παραθύρου, δε μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την κυματομορφή εκτός αυτού. Θα μπορούσε να συνεχίζεται περιοδικά, να είναι μηδέν έξω από το παράθυρο, ή θα μπορούσε

να αλλάζει μορφή καθώς αλλάζει το σήμα ομιλίας. Επομένως, το μήκος και η μορφή παραθύρου είναι σημαντικοί παράγοντες στη φασματική ανάλυση σημάτων που συνεχίζονται στο χρόνο όπως τα σήματα ομιλίας.



Σχήμα 13-27: Φασματογράφημα σήματος ομιλίας. Συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 8000$ Hz, μήκος παραθύρου $L = 50$ (6.25 msec). Τα τμήματα φάσματος στις χρονικές στιγμές $nT_s = 200, 340,$ και 400 msec φαίνονται στο Σχήμα 13-28.

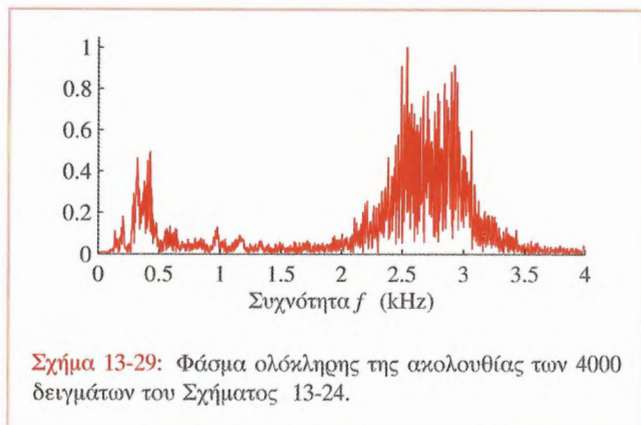
Υποθέστε ότι το παράθυρο είναι μικρότερο της τοπικής περιόδου του σήματος. Σε αυτήν την περίπτωση, δεν υπάρχει αρκετό σήμα εντός του παραθύρου προκειμένου να υπολογιστεί η τοπική περίοδος. Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση, είναι προτιμότερο να σκεφτόμαστε το σήμα εντός του διαστήματος του παραθύρου σαν ένα πεπερασμένου μήκους σήμα. Επομένως πρέπει να περιμένουμε σημαντικά διαφοροποιημένο φασματογράφημα αν το παράθυρο είναι μικρό. Αυτό καταγράφεται στο Σχήμα 13-27, που δείχνει το φασματογράφημα της κυματομορφής ομιλίας του Σχήματος 13-24 για την περίπτωση όπου το $w[n]$ είναι παράθυρο Hann μήκους $L = 50$ και η συχνότητα φάσματος εκτιμάται πάλι με FFT μήκους $N = 400$.



Σχήμα 13-28: Τμήματα φάσματος ($L = 50$) στις χρονικές στιγμές $nT_s = 200, 340$ και 400 msec προερχόμενα από το Σχήμα 13-27.

Παρατηρήστε ότι η λεπτομέρεια στην κάθετη διεύθυνση του Σχήματος 13-25 δεν υπάρχει στο Σχήμα 13-27. Οι λεπτές κυματοειδείς ράβδοι έχουν αντικατασταθεί από παχύτερες ράβδους. Δηλαδή, η λεπτομέρεια του φασματογραφήματος δεν είναι πλέον διακριτή. Αυτό το σημείο διευκρινίζεται από τα τμήματα φάσματος στα 200, 340 και 400 msec, όπως αυτά φαίνονται στο Σχήμα 13-28. Οι κορυφές της συχνότητας στο Σχήμα 13-28 είναι πολύ πλατύτερες από τις αντίστοιχες στο Σχήμα 13-26. Επίσης παρατηρήστε ότι η εικόνα του Σχήματος 13-27 φαίνεται να αποτελείται από τμήματα που εναλλάσσονται από σκούρο σε ανοιχτό. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το μήκος παραθύρου είναι τόσο μικρό ώστε μερικές φορές καλύπτει το τμήμα ενός παλμού με μεγάλο πλάτος και αργότερα καλύπτει το αντίστοιχο τμήμα του παλμού με μικρό πλάτος. Έτσι το φάσμα φαίνεται να πυκνώνει και να αραιώνει

στη διάσταση του χρόνου. Για να ολοκληρώσουμε τη

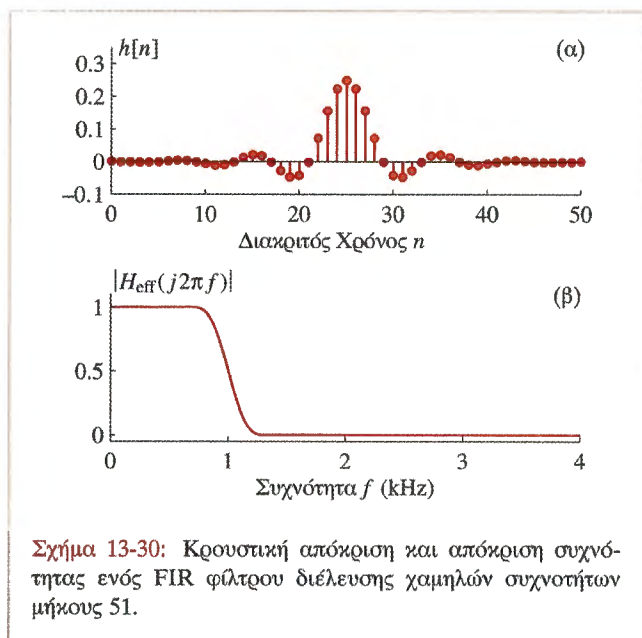


συζήτηση, απαντάμε στο ερώτημα, “Πώς θα ήταν το φάσμα και των 4000 δειγμάτων του σήματος ομιλίας;”. Εφόσον ένας FFT μήκους $N = 4000$ δεν είναι πραγματικά πρόβλημα για τους σύγχρονους υπολογιστές, μπορούμε απλά να χρησιμοποιήσουμε ολόκληρη την ακολουθία ως είσοδο και να αποτιμήσουμε τη Σχέση (13.35) με $N = 4000$. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 13-29. Παρατηρήστε ότι το Σχήμα 13-29 δείχνει 2001 συχνότητες διακριτού χρόνου $f_k = 2k$ Hz, για $k = 0, 1, \dots, 2000$ οι οποίες αντιστοιχούν στις συχνότητες συνεχούς χρόνου στην περιοχή $0 \leq f \leq 4000$ Hz. Παρατηρήστε επίσης ότι το Σχήμα 13-29 είναι παρόμοιο με τα τμήματα φάσματος των Σχημάτων 13-26 και 13-28, αλλά έχει πολύ περισσότερες λεπτομέρειες και δεν έχει ισαπέχουσες κορυφές που χαρακτηρίζουν ένα περιοδικό σήμα. Αυτό συμβαίνει επειδή το σήμα δεν είναι περιοδικό για όλο το τμήμα των 4000 δειγμάτων. Οι μεγάλες ευρείες κορυφές είναι ένδειξη συγκέντρωσης συχνοτήτων στο σήμα, αλλά αυτή είναι όλη η πληροφορία που μπορεί να εξαχθεί από αυτό το διάγραμμα. Επομένως, δείξαμε ότι μπορούμε να έχουμε είτε μακροπρόθεσμο είτε βραχυπρόθεσμο φάσμα για το σήμα ομιλίας. Η επιλογή εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, αλλά είναι

φανερό ότι, το βραχυπρόθεσμο, χρόνο-εξαρτώμενο φάσμα απεικονίζει πολλές πτυχές του σήματος ομιλίας, οι οποίες αποκρύπτονται στο μακροπρόθεσμο.

13-8.7 Φιλτραρισμένο Σήμα Ομιλίας

Ως τελευταίο παράδειγμα, δείχνουμε ότι η εφαρμογή ενός φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων, σ' ένα σήμα ομιλίας μεταβάλλει το φασματογράφημα αφαιρώντας όλα τα υψηλά στοιχεία του σήματος. Ως φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων χρησιμοποιούμε το ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου του οποίου η κρουστική απόκριση και η απόκριση συχνότητας φαίνονται στο Σχήμα 13-30. Αν οδηγήσουμε στην είσοδο του συστήματος το σήμα ομιλίας του Σχήματος 13-24, θα περιμέναμε ότι “οι υψηλές συχνότητες θα αφαιρούνταν από το φίλτρο”. Το Σχήμα 13-31 δείχνει το σήμα εξόδου όταν το σήμα εισόδου είναι αυτό του Σχήματος 13-24. Μια προσεκτική σύγκριση των δύο κυματομορφών δείχνει ότι (1) η έξοδος καθυστερεί σε σχέση με την είσοδο και (2) η έξοδος είναι “ομαλότερη” της εισόδου. Αναμέναμε και τα δύο αυτά αποτελέσματα, αφού το φίλτρο έχει καθυστέρηση κατά 25 δείγματα και οι υψηλές συχνότητες είναι απαραίτητες για να υπάρχουν απότομες αλλαγές στην κυματομορφή. Προφανώς το φίλτρο αφαιρεί τις υψηλές συχνότητες. Αυτό φαίνεται περισσότερο στο φασματογράφημα του Σχήματος 13-32, όπου όλα τα φασματικά στοιχεία πάνω των 1000 Hz έχουν αφαιρεθεί, ενώ τα φασματικά στοιχεία κάτω των 1000 Hz, όπως μπορούμε να δούμε από τα φασματογραφήματα των Σχημάτων 13-25 και 13-32, παραμένουν αμετάβλητα. Τα παραπάνω είναι σε πλήρη συμφωνία με την επίδραση που περιμέναμε να έχει η επίδραση του φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων, εφόσον η “συχνότητα αποκοπής” του φίλτρου διακριτού χρόνου είναι περίπου $\omega_c = \pi/4$, η οποία αντιστοιχεί στη συχνότητα συνεχούς χρόνου $\omega_c = \omega_c f_s = (\pi/4)8000 = 2\pi(1000)$. Τα λεπτομερή τμήματα του φάσματος τις χρονικές στιγμές $t = 200$ και 400 msec που φαίνονται στο Σχήμα 13-33 επιβεβαιώνουν επίσης τα συμπεράσματά μας. Παρατηρήστε ότι οι συνεχείς γραμμές δείχνουν το τοπικό φάσμα σε αυτές τις χρονικές στιγμές, ενώ οι διακεκομμένες γραμμές είναι το διάγραμμα



Σχήμα 13-30: Κρουστική απόκριση και απόκριση συχνότητας ενός FIR φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων μήκους 51.

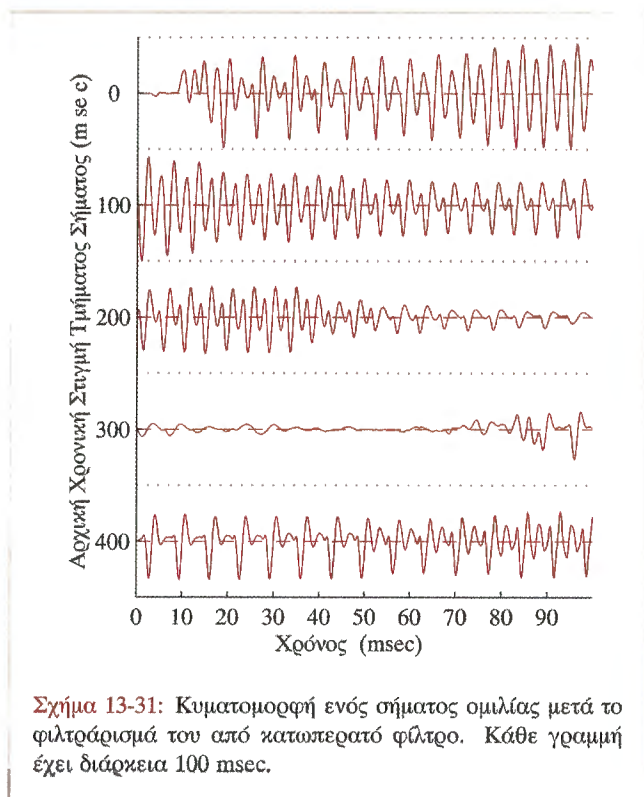
του μέτρου της απόκρισης συχνότητας που υπερτίθεται για να δείξει τη θέση της ζώνης διάβασης (σχεδιασμένη συναρτήση της κυκλικής συχνότητας συνεχούς χρόνου). Το τμήμα του φάσματος για $t = 340$ msec που αντιστοιχεί στο μεσαίο πλαίσιο του Σχήματος 13-26 δε παρουσιάζεται αφού είναι πρακτικά μηδέν διότι το σήμα ομιλίας δεν έχει ενέργεια κάτω των 1000 Hz για τα άηχα.

13-9 Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier

Η ανάγνωση αυτής της ενότητας είναι προαιρετική. Παρατίθεται για πληρότητα, αφού ο FFT είναι ο πιο σημαντικός αλγόριθμος και υπολογιστικό πρόγραμμα που χρησιμοποιείται στην ανάλυση φάσματος.

13-9.1 Παραγωγή του FFT

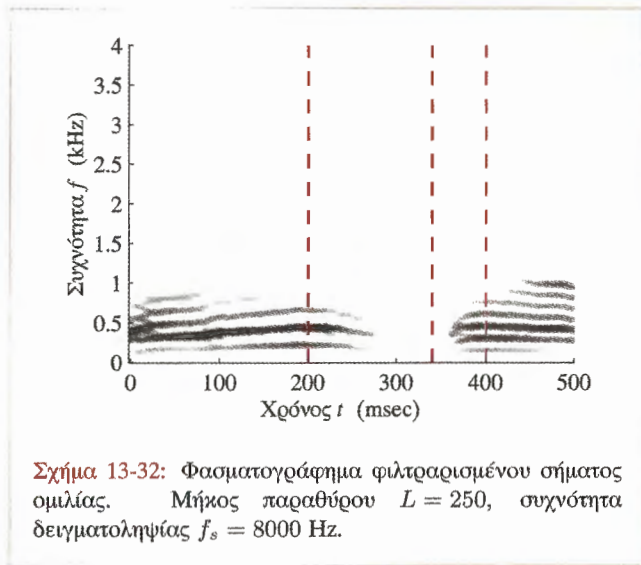
Στην Ενότητα 13-5.3 συζητήσαμε για τον FFT και αναφέραμε ότι αποτελεί ένα αποτελεσματικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό του DFT. Σε αυτή την ενότητα



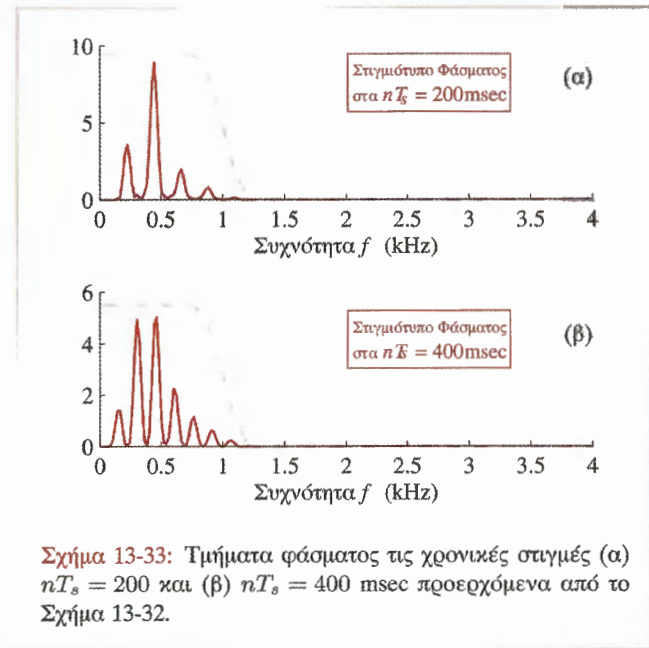
Σχήμα 13-31: Κυματομορφή ενός σήματος ομιλίας μετά το φιλτράρισμά του από κατωπερατό φίλτρο. Κάθε γραμμή έχει διάρκεια 100 msec.

θα παρουσιάσουμε τη βασική στρατηγική διαίρει-και-βασίλευε που οδηγεί στον FFT. Από αυτή την διαδικασία, θα είναι δυνατό να γράψουμε πρόγραμμα FFT που θα τρέχει σε χρόνο ανάλογο του $(N/2) \log_2 N$. Το μόνο που χρειάζεται να υποθέσουμε είναι ότι το N είναι δύναμη του δύο, ώστε η διάσπαση να γίνεται αναδρομικά. Τέτοιοι αλγόριθμοι καλούνται αλγόριθμοι βάσης-2.

Το άθροισμα του DFT της Σχέσης (13.35) και το άθροισμα του IDFT της Σχέσης (13.36) είναι ουσιαστικά ίδια, εκτός από το αρνητικό πρόσημο στον εκθέτη του DFT και την πολλαπλασιαστική σταθερά $1/N$ που υπάρχει στον αντίστροφο DFT. Επομένως θα εστιάσουμε την προσοχή μας στον υπολογισμό του DFT, γνωρίζοντας ότι ένα πρόγραμμα υπολογισμού του DFT μπορεί να



Σχήμα 13-32: Φασματογράφημα φιλτραρισμένου σήματος ομιλίας. Μήκος παραθύρου $L = 250$, συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 8000$ Hz.



Σχήμα 13-33: Τμήματα φάσματος τις χρονικές στιγμές (α) $nT_s = 200$ και (β) $nT_s = 400$ msec προερχόμενα από το Σχήμα 13-32.

μετατραπεί και να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό του IDFT αλλάζοντας το πρόσημο των μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών και πολλαπλασιάζοντας τις τελικές τιμές με $1/N$. Το άθροισμα του DFT μπορεί να διασπαστεί σε δύο επιμέρους αθροίσματα, ένα άθροισμα που θα αναφέρεται στα δείγματα της $x[n]$ με άρτιο δείκτη και ένα άλλο για τα δείγματα που αντιστοιχούν σε περιττό δείκτη.

$$X[k] = \text{DFT}_N \{x[n]\} \quad (13.53)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \quad (13.54)$$

$$= \left(x[0]e^{-j0} + x[2]e^{-j(2\pi/N)2k} + \dots + x[N-2]e^{-j(2\pi/N)k(N-2)} \right) + \left(x[1]e^{-j(2\pi/N)k} + x[3]e^{-j(2\pi/N)3k} + \dots + x[N-1]e^{-j(2\pi/N)k(N-1)} \right) \quad (13.55)$$

$$X[k] = \sum_{\ell=0}^{N/2-1} x[2\ell] e^{-j(2\pi/N)k(2\ell)} + \sum_{\ell=0}^{N/2-1} x[2\ell+1] e^{-j(2\pi/N)k(2\ell+1)} \quad (13.56)$$

Στο σημείο αυτό απαιτούνται δύο έξυπνα βήματα: Πρώτον, πρέπει να διασπάσουμε τον εκθέτη του δεύτερου αθροίσματος, για να βγάλουμε από το άθροισμα το κομμάτι που δεν εξαρτάται από το ℓ . Δεύτερον, ο συντελεστής δύο (2) στους εκθέτες (2ℓ) μπορεί να συνδυαστεί με το N στον παρονομαστή του $2\pi/N$.

$$X[k] = \sum_{\ell=0}^{N/2-1} x[2\ell] e^{-j(2\pi k/N)(2\ell)} + e^{-j(2\pi k/N)} \sum_{\ell=0}^{N/2-1} x[2\ell+1] e^{-j(2\pi k/N)(2\ell)}$$

$$X[k] = \sum_{\ell=0}^{N/2-1} x[2\ell]e^{-j(2\pi k/(N/2))\ell} + e^{-j(2\pi k/N)} \sum_{\ell=0}^{N/2-1} x[2\ell+1]e^{-j(2\pi k/(N/2))\ell}$$

Τώρα έχουμε τη σωστή μορφή. Κάθε άθροισμα είναι ένας DFT μήκους $N/2$, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$X[k] = \text{DFT}_{N/2}\{x[2\ell]\} + e^{-j(2\pi/N)k} \text{DFT}_{N/2}\{x[2\ell+1]\} \quad (13.57)$$

Ο τύπος (13.57) για την ανακατασκευή του $X[k]$ από τους μικρότερους DFT έχει ένα κρυφό χαρακτηριστικό: Πρέπει να υπολογιστεί για $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Οι διακριτοί μετασχηματισμοί των $N/2$ σημείων δίνουν διανύσματα εξόδου με $N/2$ στοιχεία ο καθένας, για παράδειγμα, ο DFT των δειγμάτων με περιττό δείκτη θα είναι:

$$X_{N/2}^o[k] = \text{DFT}_{N/2}\{x[2\ell+1]\}$$

για $k = 0, 1, 2, \dots, N/2-1$. Επομένως χρειαζόμαστε μια επιπλέον πληροφορία για να υπολογίσουμε τα $X[k]$ για $k \geq N/2$. Είναι πολύ εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι ισχύει:

$$X_{N/2}^o[k + N/2] = X_{N/2}^o[k]$$

και ομοίως για τον DFT των δειγμάτων με άρτιο δείκτη, οπότε χρειάζεται να επεκτείνουμε περιοδικά τα αποτελέσματα των DFT των $N/2$ στοιχείων πριν κάνουμε την άθροιση στην (13.57). Αυτό δε απαιτεί επιπλέον υπολογισμούς.

Η διάσπαση της Σχέσης (13.57) είναι αρκετή για να προσδιοριστεί ο αλγόριθμος FFT: Υπολόγισε δύο μικρότερους DFT και στη συνέχεια πολλαπλασίασε τις εξόδους του DFT που αντιστοιχεί στα δείγματα περιττών δεικτών με τον εκθετικό παράγοντα $e^{-j(2\pi/N)k}$. Σας παραπέμπουμε στο Σχήμα 13-34, όπου φαίνονται τρία επίπεδα της αναδρομικής διάσπασης. Αν υιοθετηθεί μια αναδρομική δομή, οι δύο $N/2$ DFT μπορούν να διασπαστούν σε τέσσερις $N/4$ σημείων DFT, και αυτοί

σε οκτώ DFT $N/8$ σημείων, κ.ο.κ.. Αν το N είναι δύναμη του δύο η διάσπαση θα συνεχιστεί $(\log_2 N - 1)$ φορές και τελικά θα φτάσουμε στο σημείο που τα μήκη των DFT θα είναι δύο. Ο υπολογισμός DFT δύο σημείων είναι πολύ απλός:

$$X_2[0] = x_2[0] + x_2[1]$$

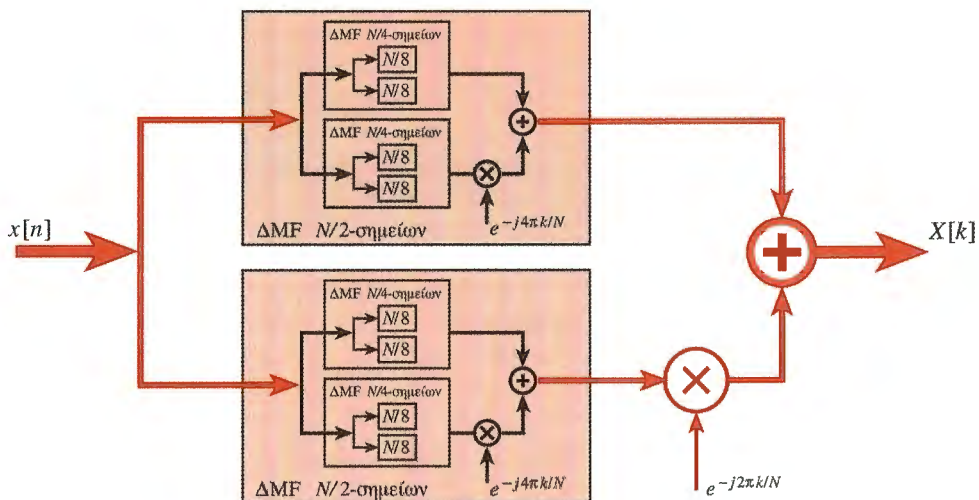
$$X_2[1] = x_2[0] + e^{-j2\pi/2} x_2[1] = x_2[0] - x_2[1]$$

Οι δύο έξοδοι του DFT δύο σημείων είναι το άθροισμα και η διαφορά των εισόδων αντίστοιχα. Το τελευταίο στάδιο υπολογισμών θα απαιτούσε τον υπολογισμό $N/2$ διακριτών μετασχηματισμών Fourier των δύο σημείων.

13-9.1.1 Υπολογιστικό Κόστος FFT

Αν και όσα αναφέραμε παραπάνω είναι στοιχειώδη και κατά κάποιο τρόπο περιγραφικά, η βασική ιδέα για το γράψιμο προγράμματος FFT κάνοντας χρήση διακριτών μετασχηματισμών δύο σημείων και του μιγαδικού εκθετικού παράγοντα, έχει καλυφθεί. Ωστόσο, το κρίσιμο σημείο για τον FFT δεν είναι το πως θα γράψουμε το πρόγραμμα, αλλά μάλλον ο αριθμός πράξεων που χρειάζονται για να ολοκληρωθεί ο υπολογισμός του. Όταν πρωτοδημοσιεύτηκε, ο FFT είχε τεράστιο αντίκτυπο στον τρόπο αντιμετώπισης των προβλημάτων, γιατί προσέγγισε με αριθμητικό τρόπο το πεδίο συχνοτήτων. Η ανάλυση φάσματος έγινε, από υπολογιστική απόψη, υπόθεση ρουτίνας ακόμη και για σήματα πολύ μεγάλου μήκους. Διαδικασίες όπως το φιλτράρισμα, που φαίνονται να είναι πιο φυσικό να υλοποιούνται στο πεδίο του χρόνου, θα μπορούσαν να υλοποιηθούν αποδοτικά στο πεδίο της συχνότητας ακόμα και για πολύ μεγάλα FIR φίλτρα.

Ο αριθμός των πράξεων που απαιτούνται για να υπολογιστεί ο FFT μπορεί να εκφραστεί από έναν πολύ απλό τύπο. Έχουμε αναφέρει αρκετά για τη δομή του αλγόριθμου ώστε να είμαστε σε θέση να μετρήσουμε τις πράξεις που απαιτούνται. Όπως μπορούμε να δούμε από τη Σχέση (13.57), ο DFT N σημείων μπορεί να υπολογιστεί με 2 DFT $N/2$ σημείων ακολουθούμενους από N μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς και N μιγαδικές



Σχήμα 13-34: Σχηματικό διάγραμμα ενός βάσης-2 FFT αλγόριθμου για $N = 2^v$. Το πάχος των γραμμών είναι ανάλογο της ποσότητας δεδομένων που πρόκειται να επεξεργαστεί. Για παράδειγμα, κάθε DFT $N/4$ στοιχείων πρέπει να μετασχηματίσει ένα διάνυσμα δεδομένων που περιέχει $N/4$ στοιχεία.

προσθέσεις¹⁸. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned}\mu_c(N) &= 2\mu_c(N/2) + N \\ \alpha_c(N) &= 2\alpha_c(N/2) + N\end{aligned}$$

όπου $\mu_c(N)$ ο αριθμός των μιγαδικών πολλαπλασιασμών που απαιτούνται για τον υπολογισμό ενός DFT μήκους N και $\alpha_c(N)$ είναι ο αριθμός των μιγαδικών προσθέσεων. Η εξίσωση αυτή μπορεί να εφαρμοστεί διαδοχικά για $N = 2, 4, 8, \dots$, αφού ξέρουμε ότι $\mu_c(2) = 0$ και $\alpha_c(2) = 2$. Ο Πίνακας 13-2 περιέχει τον αριθμό των πράξεων που απαιτούνται για μερικές τιμές του μήκους πάντα για την περίπτωση που είναι δύναμη του 2. Οι τιμές αυτές προκύπτουν από τις σχέ-

σεις:

$$\begin{aligned}\mu_c(N) &= N(\log_2 N - 1) \\ \alpha_c(N) &= N \log_2 N\end{aligned}$$

Εφόσον οι πράξεις μιγαδικών αριθμών τελικά θα υλοποιηθούν με πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις μεταξύ πραγματικών αριθμών, είναι χρήσιμο να μετατρέψουμε τον αριθμό πράξεων σε πραγματικές προσθέσεις και πολλαπλασιασμούς. Κάθε μιγαδική πρόσθεση απαιτεί δύο πραγματικές προσθέσεις, αλλά κάθε μιγαδικός πολλαπλασιασμός απαιτεί τέσσερις πραγματικούς πολλαπλασιασμούς και δύο πραγματικές προσθέσεις. Επομένως μπορούμε να προσθέσουμε άλλες δύο στήλες στον Πίνακα 13-2 με τις μετρήσεις αυτές. Το συμπέρασμα για το υπολογιστικό κόστος του FFT είναι ότι αυτό είναι ανάλογο του $N \log_2 N$. Οι ακριβείς τύποι του Πίνακα 13-2 είναι οι ακόλου-

¹⁸Μάλιστα ο αριθμός των μιγαδικών πολλαπλασιασμών μπορεί να μειωθεί σε $N/2$ αφού $e^{-j2\pi(N/2)/N} = -1$.

Πίνακας 13-2: Αριθμός Πράξεων για FFT βάσης-2 όταν το N είναι δύναμη του 2. Παρατηρήστε πόσο μικρότερο του $4N^2$ είναι το $\mu_c(N)$.

N	$\mu_c(N)$	$\alpha_c(N)$	$\mu_r(N)$	$\alpha_r(N)$	$4N^2$
2	0	2	0	4	16
4	4	8	16	16	64
8	16	24	64	48	256
16	48	64	192	128	1024
32	128	160	512	320	4096
64	320	384	1280	768	16384
128	768	896	3072	1792	65536
256	1792	2048	7168	4096	262144
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

θοι:

$$\mu_r(N) = 4N(\log_2 N - 1)$$

$$\alpha_r(N) = 2N(\log_2 N - 1) + 2N = 2N \log_2 N$$

για τον αριθμό των πραγματικών πολλαπλασιασμών και προσθέσεων αντίστοιχα. Ακόμα και αυτές οι μετρήσεις είναι σχετικά μεγάλες αφού μπορούμε να εκμεταλλευτούμε ειδικές συμμετρίες που υπάρχουν στα μιγαδικά εκθετικά, προκειμένου να μειωθεί ακόμα περισσότερο το υπολογιστικό κόστος.

13-10 Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι

Σε αυτό το κεφάλαιο προσπαθήσαμε να κατανοήσουμε την ανάλυση φάσματος. Κάναμε επίσης μια εισαγωγή στην έννοια των χρονο-συχνοτικών αναπαραστάσεων των σημάτων διακριτού χρόνου. Εξάγαμε τον DFT που παίζει βασικό ρόλο γιατί είναι αποτελεσματικά υπολογισμός με χρήση ειδικών αλγόριθμων (FFT). Εξετάσαμε τον DFT για σήματα πεπερασμένου μήκους, καθώς και για περιοδικά σήματα. Επίσης ορίσαμε το φασματογράφημα

και διερευνήσαμε την ανάλυσή του η οποία όπως είδαμε ελέγχεται από το παράθυρο που χρησιμοποιείται. Η ιδιότητα παραθύρωσης του μετασχηματισμού Fourier παίζει κεντρικό ρόλο στην εξήγηση σχημάτων που συναντούνται συχνά σε διαγράμματα ανάλυσης φάσματος. Δείξαμε αρκετά παραδείγματα φασματογραφημάτων σημάτων ομιλίας και μουσικής για να επεξηγήσουμε την έμφυτη ανταλλαγή διακριτότητας στην ανάλυση φάσματος.

Το παράδειγμα φιλτραρισμένης ομιλίας στην Ενότητα 13-8.7 είναι επαρκής απόδειξη ότι το φάσμα συχνοτήτων είναι αξιόπιστο. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να σκεφτόμαστε την επίδραση ενός ΓΧΑ συστήματος σε κάθε σήμα ως αντιπροσωπευτική της απόκρισης συχνότητας. Μπορούμε να λέμε εκφράσεις όπως “Το σήμα έχει εύρος ζώνης 4 Hz” ή “Το φίλτρο έδωσε έμφαση στις υψηλές συχνότητες”. Αυτό το συμπέρασμα δεν πρέπει να προκαλεί έκπληξη, εφόσον ακόμη και χωρίς την συζήτηση που κάναμε, οι περισσότεροι από εμάς, μηχανικοί και μη, είμαστε εξοικειωμένοι με τη σκέψη της απόκρισης συχνότητας των στερεοφωνικών, μεγαφώνων, ακουστικών, ακόμη και των αυτιών μας. Αυτό που κάνει την απόκριση συχνότητας τόσο χρήσιμη έννοια είναι το γεγονός ότι κάθε σήμα μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα (ίσως άπειρο) μιγαδικών εκθετικών σημάτων. Αυτό το κεφάλαιο προσπάθησε να το επιδείξει αυτό με πολλά παραδείγματα και αρκετές εξισώσεις. Υπάρχουν πολλά ακόμη να μάθουμε για το θέμα της ανάλυσης Fourier και την έννοια του φάσματος συχνοτήτων, αλλά η ουσία αυτού του πολύ ενδιαφέροντος αντικειμένου περιέχεται εδώ.

Οι επιδείξεις και οι εργαστηριακές ασκήσεις αυτού του κεφαλαίου έχουν πολλά κοινά με αυτές του Κεφαλαίου 3, γι’ αυτό ο αναγνώστης θα πρέπει να συμβουλευθεί τις προηγούμενες ασκήσεις και επιδείξεις. Δύο επιπλέον εργαστηριακές ασκήσεις που περιέχονται στο CD είναι η Εργαστηριακή άσκηση #19 που διερευνά τον FFT και η Εργαστηριακή άσκηση #20 που ζητά από τους φοιτητές να αναπτύξουν ένα πρόγραμμα ανάλυσης μουσικής που θα γράφει τη μουσική ηχογραφημένων τραγουδιών. Στην Εργαστηριακή άσκηση #20, το φασματογράφημα χρησιμοποιείται για τη χρονο-συχνοτική αναπαράσταση

της μουσικής και στη συνέχεια πρέπει να βρεθεί αλγόριθμος επιλογής και να γραφτεί ένα πρόγραμμα σύνταξης που θα βρίσκει τις φασματικές κορυφές που ανταποκρίνονται σε πραγματικές νότες. Αυτή η άσκηση μπορεί να θεωρηθεί το αντίστροφο της Εργαστηριακής άσκησης #4, της άσκησης σύνθεσης μουσικής. Μια άλλη παρόμοια Εργαστηριακή άσκηση είναι η #9 η οποία επίσης εμφανίζεται στο Παράρτημα Β. Η Εργαστηριακή άσκηση #9 περιλαμβάνει ημιτονοειδή σήματα παραγόμενα από τηλέφωνο αφής. Η φασματική ανάλυση αυτών των σημάτων αποκαλύπτει την απλή δομή τους.

Το CD επίσης περιέχει τρεις επιδείξεις σχετικές με το φασματογράφημα:

- (i) ο υπολογισμός του φασματογραφήματος επιδεικνύεται με ταινία που δείχνει έναν παραθυρωμένο FFT να κινείται μέσα στο σήμα.

Επίδειξη: Φασματογράφημα-Διακριτική Ικανότητα

- (ii) Φασματογραφήματα τερετισμάτων δείχνουν πώς επηρεάζει τη μορφή του φάσματος που βλέπεται το μήκος παραθύρου του FFT. Για την περίπτωση των τερετισμάτων, ο ρυθμός μεταβολής της συχνότητας επηρεάζει τη μορφή του φάσματος σε σχέση με το πόσο γρήγορα αλλάζει η συχνότητα κατά τη διάρκεια που το παράθυρο είναι ενεργό. Επηρεάζει επίσης τον ήχο που ακούτε, γιατί το ανθρώπινο ακουστικό σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν αναλυτής φάσματος με μεταβλητή (αλλά γνωστή) διακριτική ικανότητα συχνότητας.

Επίδειξη: FM Σήματα Ευρείας Ζώνης

- (iii) Μια γραφική διεπαφή χρήστη του Matlab που παρουσιάζει τη σχέση μεταξύ μουσικής στίξης και φασματογραφήματος.

Επίδειξη: Γραφική Διεπαφή Χρήστη Μουσικής

Τέλος υπενθυμίζουμε ότι υπάρχουν πολλά λυμένα προβλήματα διαθέσιμα για ανασκόπηση και εξάσκηση.



Υπόδειξη: Εκατοντάδες Λυμένων Προβλημάτων

13-11 Προβλήματα

Πρόβλημα.-13.1 Υποθέστε ότι ένα σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ είναι ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων

$$x[n] = 3 + 2e^{j0.2\pi n} + 2e^{-j0.2\pi n} - 7je^{j0.7\pi n} + 7je^{-j0.7\pi n}$$

- (i) Σχεδιάστε τον DTFT του σήματος διακριτού χρόνου $x[n]$ χρησιμοποιώντας μόνο θετικές συχνότητες, δηλαδή, $0 \leq \omega < 2\pi$.
- (ii) Ας υποθέσουμε ότι $x_1[n] = x[n]e^{j0.4\pi n}$. Σχεδιάστε τον DTFT του $x_1[n]$ χρησιμοποιώντας μόνο θετικές συχνότητες.
- (iii) Ας υποθέσουμε ότι $x_2[n] = (-1)^n x[n]$. Σχεδιάστε τον DTFT του $x_2[n]$ χρησιμοποιώντας μόνο θετικές συχνότητες.

Πρόβλημα.-13.2 Θεωρήστε το συνεχούς χρόνου τετραγωνικό παράθυρο $w_R(t)$, που ορίστηκε στη Σχέση (13.16) και το παράθυρο Hamming $w_H(t)$, που ορίστηκε στη Σχέση (13.26).

- (i) Δείξτε ότι ο συνεχούς χρόνου μετασχηματισμός Fourier του τετραγωνικού παραθύρου $w_R(t)$ δίνεται από τη Σχέση (13.23).
- (ii) Χρησιμοποιήστε σα δεδομένο ότι

$$w_H(t) = \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right] w_R(t)$$

για να δείξετε ότι:

$$W_H(j\omega) = 0.54W_R(j\omega) - 0.23W_R(j(\omega - 2\pi/T)) - 0.23W_R(j(\omega + 2\pi/T))$$

(iii) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος για να κάνετε ένα σχεδιάγραμμα του $|W_H(j\omega)|$ και από αυτό επιχειρηματολογήστε ότι το πλάτος του κύριου λοβού της $|W_H(j\omega)|$ είναι $\Delta\omega_H = 8\pi/T$.

Πρόβλημα.-13.3 Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x_c(t)$ είναι περιορισμένου εύρους ζώνης έτσι ώστε $X_c(j\omega) = 0$ για $|\omega| \geq 2\pi(1000)$. Το σήμα αυτό δειγματοληπτείται με ρυθμό δειγματοληψίας $f_s = 1/T_s$ παράγοντας την ακολουθία $x[n] = x_c(nT_s)$ του Σχήματος 13-2. Υποθέστε ότι το παράθυρο είναι τετραγωνικό, μήκους L ίσου με το μήκος N του DFT. Επιπλέον για μεγαλύτερη ευκολία στους υπολογισμούς, υποθέστε ότι το N είναι δύναμη του δύο. Θεωρήστε επίσης ότι τα f_s και N μπορούν να επιλεγθούν έτσι ώστε να αποφευχθεί η αναδίπλωση και $N = 2^p$. Προσδιορίστε την ελάχιστη τιμή του N και το εύρος του ρυθμού δειγματοληψίας $f_s^{\min} < f_s < f_s^{\max}$ έτσι ώστε η ενεργός απόσταση μεταξύ των DFT συχνοτήτων να είναι μικρότερη ή ίση των 5 Hz. Δώστε αριθμητικές τιμές για τα N , f_s^{\min} και f_s^{\max} .

Πρόβλημα.-13.4 Προσδιορίστε τον DFT 10 σημείων των παρακάτω σημάτων:

$$(i) x_0[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = 1, 2, \dots, 9 \end{cases}$$

$$(ii) x_1[n] = 1 \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, 9$$

$$(iii) x_2[n] = \begin{cases} 1 & n = 4 \\ 0 & n \neq 4 \end{cases}$$

$$(iv) x_3[n] = e^{j2\pi n/5} \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, 9$$

Πρόβλημα.-13.5 Προσδιορίστε τον αντίστροφο DFT (IDFT) 10 σημείων των παρακάτω σημάτων:

$$(i) X_a[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, \dots, 9 \end{cases}$$

$$(ii) X_b[k] = 1 \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots, 9$$

$$(iii) X_c[k] = \begin{cases} 1 & k = 3, 7 \\ 0 & k = 0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 \end{cases}$$

$$(iv) X_d[k] = \cos(2\pi k/5) \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots, 9$$

Πρόβλημα.-13.6 Προσδιορίστε τον αντίστροφο DFT (IDFT) 10 σημείων των παρακάτω ακολουθιών:

$$(i) y_0[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & n = 4, 5, \dots, 11 \end{cases}$$

$$(ii) y_1[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, 2, 4, 6, 8, 10 \\ 0 & n = 1, 3, 5, 7, 9, 11 \end{cases}$$

Πρόβλημα.-13.7 Το φίλτρο κινούμενου αθροιστή 8 σημείων, είναι ένα FIR φίλτρο με συντελεστές $\{b_k\} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$.

(i) Χρησιμοποιήστε FFT ανάλυση φάσματος για να σχεδιάσετε την απόκριση συχνότητας του φίλτρου.

(ii) Υποθέστε ότι η είσοδος στο φίλτρο είναι η $x[n]$ της οποίας ο DTFT έχει μη μηδενικά στοιχεία μόνο για $\omega_1 = 0.25\pi$, $\omega_2 = 0.5\pi$ και $\omega_3 = 0.75\pi$, όπως και DC τιμή $X_0 = 3$. Εξηγήστε γιατί η έξοδος του φίλτρου είναι $y[n] = 24$ για κάθε n . Χρησιμοποιήστε τιμές από τη γραφική παράσταση του μέτρου $|H(e^{j\omega})|$ συναρτήσει της συχνότητας ω για να υποστηρίξετε την απάντησή σας.

Πρόβλημα.-13.8 Υποθέστε ότι το σήμα συνεχούς χρόνου $x[t]$ συντίθεται από τις ακόλουθες ημιτονοειδείς συνιστώσες:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi(600)t) & 0 \leq t < 0.5 \\ \sin(2\pi(1100)t) & 0.3 \leq t < 0.7 \\ \cos(2\pi(500)t) & 0.4 \leq t < 1.2 \\ \cos(2\pi(700)t - \pi/4) & 0.4 \leq t < 0.45 \\ \sin(2\pi(800)t) & 0.35 \leq t < 1.0 \end{cases}$$

- (i) Αν το σήμα δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 8000$ Hz, σχεδιάστε το ιδανικό φασματογράφημα που ανταποκρίνεται στον ορισμό του σήματος.
- (ii) Σχεδιάστε το πραγματικό φασματογράφημα που θα αποκτούσαμε με FFT μήκους $N = 256$ και παράθυρο Hann μήκους $L = 256$. Κάντε προσεγγίσεις ώστε να σχεδιάσετε χωρίς να υπολογίσετε το φασματογράφημα στο Matlab.

Πρόβλημα.-13.9 Η κλίμακα μείζονος-C αναλύθηκε στο φασματογράφημα του Σχήματος 13-23 με μήκος παραθύρου $L = 256$. Σχεδιάστε το φασματογράφημα αν χρησιμοποιούσαμε παράθυρο μήκους $L = 100$. Εξηγήστε σε τι διαφέρει το σχήμα σας από το Σχήμα 13-23.

Πρόβλημα.-13.10 Στο φασματογράφημα της κλίμακας C-μείζονος του Σχήματος 13-23 εκτιμήστε τη χρονική διάρκεια κάθε νότας.

Πρόβλημα.-13.11 Το φασματογράφημα του Σχήματος 13-22 δείχνει τη χρονική περίοδο που ανταποκρίνεται στις πρώτες εννιά νότες του κλειδιού φα του Σχήματος 13-21. Υπολογίστε τις θεωρητικές συχνότητες (βασισμένοι στο A-440) αυτών των εννιά νοτών και συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με τις μετρήσεις από το φασματογράφημα του Σχήματος 13-22.

Πρόβλημα.-13.12 Υποθέστε ότι ένα σήμα ομιλίας έχει δειγματοληπτηθεί στα 8000Hz και στη συνέχεια αναλύθηκε με τη συνάρτηση `specgram` του Matlab χρησιμοποιώντας τις παρακάτω παραμέτρους: παράθυρο Hamming μήκους $L = 100$, FFT μήκους $N = 256$ και επικάλυψη 80 σημείων. Προσδιορίστε τη διακριτική ικανότητα του προκύπτοντος φασματογραφήματος.

- (i) Καθορίστε τη διακριτική ικανότητα συχνότητας (σε Hz)
- (ii) Καθορίστε τη διακριτική ικανότητα χρόνου (σε sec)

Πρόβλημα.-13.13 Η διακριτική ικανότητα ενός συστήματος ανάλυσης φάσματος καθορίζεται από την απόκριση συχνότητας του χρονικού παραθύρου. Υποθέστε ότι δειγματοληπτούμε ένα σήμα συνεχούς χρόνου με $f_s = 10,000$ Hz και θέλουμε διακριτική ικανότητα συχνότητας 250 Hz.

- (i) Αν για $w[n]$ χρησιμοποιήσουμε παράθυρο Hamming, τι μήκος παραθύρου L χρειαζόμαστε; Καθορίστε την ελάχιστη τιμή του L .
- (ii) Χρησιμοποιήστε τη συγκεκριμένη τιμή του L που καθορίσατε στο προηγούμενο ερώτημα και δείξτε ότι το προκύπτον παράθυρο Hamming έχει επαρκή διακριτική ικανότητα συχνότητας, σχεδιάζοντας την απόκριση συχνότητας (μέτρο).

Μιγαδικοί Αριθμοί

Στο Παράρτημα αυτό, γίνεται μια ανασκόπηση των βασικών ιδιοτήτων των μιγαδικών αριθμών. Γίνεται επίσης μια ανασκόπηση όλων των αλγεβρικών κανόνων που χρησιμοποιούνται στις πράξεις μεταξύ των μιγαδικών αριθμών και στη συνέχεια τους απεικονίζουμε και τους αναπαριστάνουμε γεωμετρικά, με την βοήθεια διανυσμάτων. Η γεωμετρική αναπαράσταση είναι το κλειδί για να κατανοήσουμε πώς μπορούμε να αναπαραστήσουμε σήματα με μιγαδικούς αριθμούς. Ειδικότερα, το παράρτημα αυτό εστιάζει στο σχολιασμό των ακόλουθων βασικών θεμάτων:

- *Απλοί Αλγεβρικοί Κανόνες:* Οι χειρισμοί σε μιγαδικούς αριθμούς ($z = x + jy$) ακολουθούν ακριβώς τους ίδιους κανόνες μ' αυτούς των πραγματικών αριθμών, με το j^2 αντικαθιστώμενο παντού από το -1 ¹.

¹Οι Μαθηματικοί και οι Φυσικοί χρησιμοποιούν το σύμβολο i για

- *Η εξάλειψη της Τριγωνομετρίας:* Ο τύπος του Euler για την παράσταση του μιγαδικού εκθετικού $z = re^{j\theta} = r \cos \theta + jr \sin \theta$, παρέχει τη δυνατότητα σύνδεσης των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων με απλούς αλγεβρικούς χειρισμούς σε μιγαδικούς αριθμούς.
- *Διανυσματική Αναπαράσταση:* Ένα διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή των αξόνων και πέρας το σημείο (x, y) πάνω σε ένα δισδιάστατο επίπεδο είναι ισοδύναμο με το μιγαδικό αριθμό $z = x + jy$. Στην πραγματικότητα οι αλγεβρικές πράξεις για το z μπορούν να αντικατασταθούν από αντίστοιχες διανυσματικές πράξεις. Ωστόσο, το πιο σημαντικό είναι η *οπτικοποίηση* που κερδίζουμε από τα διανυσματική αναπαράσταση.

το $\sqrt{-1}$. Οι Ηλεκτρολόγοι Μηχανικοί προτιμούν να χρησιμοποιούν το σύμβολο i για το συμβολισμό του ρεύματος στα ηλεκτρικά κυκλώματα.

Τα πρώτα δύο θέματα αφορούν την αλγεβρική φύση του $z = x + jy$, το τρίτο το ρόλο του σαν ένας εκ-
 πρόσωπος των σημάτων. Η απόκτηση ευχέρειας στην
 εκτέλεση πράξεων είναι πολύ σημαντική, αλλά σε βάθος
 χρόνου, η χρησιμοποίηση των μιγαδικών αριθμών στην
 διανυσματική αναπαράσταση είναι πολύ πιο σημαντική.
 Οι μιγαδικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται ευρέως από τους
 ηλεκτρολόγους μηχανικούς διότι χρησιμοποιούμενοι για
 την αναπαράσταση ημιτονοειδών σημάτων, απλοποιούν σε
 μεγάλο βαθμό τη λύση προβλημάτων που απαιτούν πράξεις
 μεταξύ σημάτων αυτού του τύπου. Έτσι, ένα πρόβλημα
 που αναφέρεται σε ημιτονοειδή σήματα (όπως η λύση
 μιας διαφορικής εξίσωσης) μετατρέπεται σε ένα πρόβλημα
 μιγαδικών αριθμών που μπορεί (1) να λυθεί με απλούς
 αλγεβρικούς χειρισμούς και (2) να οπτικοποιηθεί με τη
 βοήθεια της διανυσματικής γεωμετρίας. Το κλειδί της
 επιτυχίας για τα παραπάνω, είναι η απόκτηση υψηλού
 επιπέδου σκέψης που επιτρέπει την ελαναδιατύπωση
 ενός προβλήματος στο “κόσμο” των μιγαδικών αριθμών.
 Άλλωστε και ο λόγος που οδηγούμαστε στην έννοια
 ενός “μετασχηματισμού” όπως του Fourier ή του Laplace
 είναι για να μετατρέψουμε εξειδικευμένα προβλήματα
 σε αλγεβρικά. Εξαιτίας του ότι οι μιγαδικοί αριθμοί
 παίζουν καθοριστικό ρόλο σε ότι έχει σχέση με σήματα
 και συστήματα, προτείνεται η προσεκτική μελέτη αυτού του
 παραρτήματος.

A-1 Εισαγωγή

Το μιγαδικό αριθμητικό σύστημα αποτελεί επέκταση του
 αριθμητικού συστήματος των πραγματικών αριθμών. Οι
 μιγαδικοί αριθμοί είναι αναγκαίοι στην επίλυση εξισώσεων
 όπως της εξίσωσης

$$z^2 = -1 \quad (\text{A.1})$$

Με το σύμβολο j συμβολίζουμε την $\sqrt{-1}$ και επομένως η
 Εξίσωση (A.1) έχει τις δύο λύσεις $z = \pm j$. Γενικότερα, οι
 μιγαδικοί αριθμοί απαιτούνται στον υπολογισμό των ριζών
 του τριωνύμου

$$az^2 + bz + c = 0$$

το οποίο έχει τις ακόλουθες ρίζες

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Όταν η διακρίνουσα ($b^2 - 4ac$) είναι αρνητική, η λύση
 πρέπει να εκφραστεί με τη βοήθεια μιγαδικών αριθμών.
 Για παράδειγμα, οι ρίζες της εξίσωσης

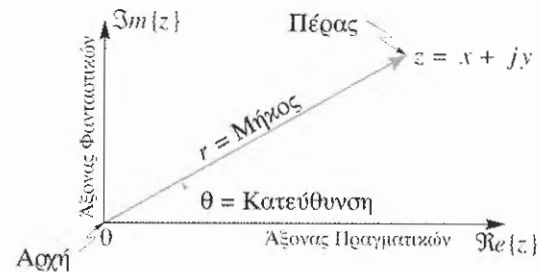
$$z^2 + 6z + 25 = 0$$

είναι $z = -3 \pm j4$, αφού

$$\begin{aligned} (1/2a)\sqrt{b^2 - 4ac} &= \frac{1}{2}\sqrt{36 - 4(25)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-64} = \pm j4. \end{aligned}$$

A-2 Συμβολισμός Μιγαδικών Αριθμών

Οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να παρασταθούν με
 διάφορους τρόπους. Ωστόσο, οι δύο πιο βασικές μορφές
 αναπαράστασής των είναι η πολική και η τετραγωνική
 μορφή. Η απόκτηση ευχέρειας σε μετατροπές μεταξύ των
 δύο αυτών μορφών αποτελεί ένα πολύ σημαντικό ζήτημα.



Σχήμα Α-1: Παράσταση μιγαδικού αριθμού σαν ένα
 διάνυσμα από την αρχή των αξόνων στο σημείο (x, y) .

A-2.1 Τετραγωνική Μορφή

Στην *τετραγωνική μορφή*, όλοι οι ακόλουθοι συμβολισμοί ορίζουν τον ίδιο μιγαδικό αριθμό:

$$\begin{aligned} z &= (x, y) \\ &= x + jy \\ &= \Re\{z\} + j\Im\{z\} \end{aligned}$$

Το διατεταγμένο ζεύγος (x, y) μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σημείο του επιπέδου². Ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί επίσης, να σχεδιαστεί σαν ένα διάνυσμα του οποίου η αρχή (ουρά) ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων και το πέρας (κεφαλή) του βρίσκεται στο σημείο (x, y) . Στην περίπτωση αυτή x και y είναι η τετμημένη και η τεταγμένη του διανύσματος αντίστοιχα (δες Σχήμα A-1).

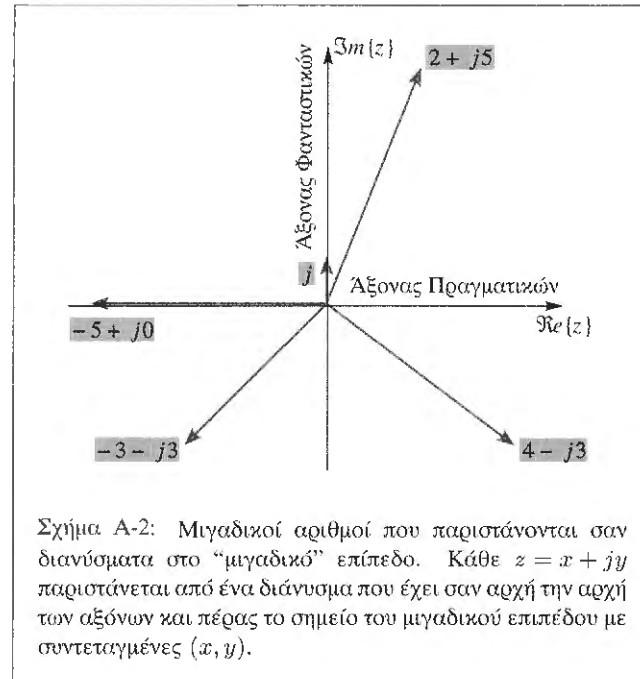
Το Σχήμα A-2 δείχνει μερικά αριθμητικά παραδείγματα. Ο μιγαδικός αριθμός $z = 2 + j5$ παριστάνεται από το σημείο $(2, 5)$, που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου. Ομοίως, ο $z = 4 - j3$ παριστάνεται από το σημείο $(4, -3)$ του τέταρτου τεταρτημορίου. Αφού ο συμβολισμός $z = x + jy$ παριστάνεται από το σημείο (x, y) του μιγαδικού επιπέδου, ο αριθμός j παριστάνει το σημείο $(0, 1)$, το οποίο φαίνεται στο Σχήμα A-2 ως ένα κατακόρυφο διάνυσμα από την αρχή των αξόνων μέχρι το σημείο $(0, 1)$. Επομένως αν πολλαπλασιάσουμε έναν πραγματικό αριθμό, για παράδειγμα το 5, με το j έχει σαν αποτέλεσμα αντί να “δείχνει” κατά μήκος του οριζόντιου άξονα να “δείχνει κατακόρυφα.” Δηλαδή, $j(5 + j0) = 0 + j5$.

Η τετραγωνική μορφή αναφέρεται επίσης ως *Καρτεσιανή μορφή*. Η τετμημένη x αποτελεί το *πραγματικό μέρος* και η τεταγμένη y *φανταστικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού. Οι τελεστές $\Re\{z\}$ και $\Im\{z\}$ χρησιμοποιούνται για την απόσπαση του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του $z = x + jy$, ως ακολούθως:

$$x = \Re\{z\} \quad (\text{A.2a})$$

$$y = \Im\{z\} \quad (\text{A.2b})$$

²Αυτός ο συμβολισμός χρησιμοποιείται και σε μερικούς υπολογιστές τσέπης.



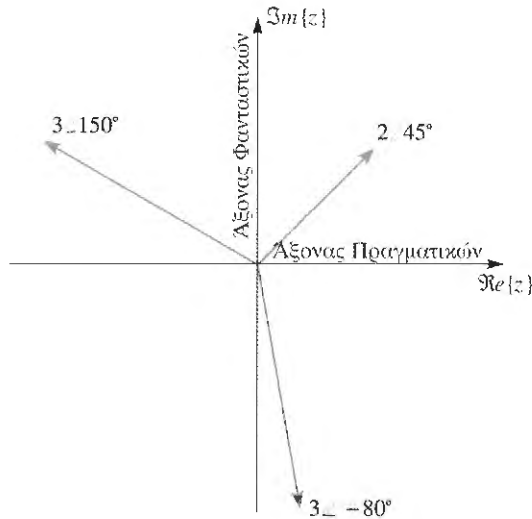
Σχήμα A-2: Μιγαδικοί αριθμοί που παριστάνονται σαν διανύσματα στο “μιγαδικό” επίπεδο. Κάθε $z = x + jy$ παριστάνεται από ένα διάνυσμα που έχει σαν αρχή την αρχή των αξόνων και πέρας το σημείο του μιγαδικού επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) .

A-2.2 Πολική Μορφή

Στην *πολική μορφή*, το διάνυσμα ορίζεται από το μήκος του (r) και τη κατεύθυνσή του (θ), όπως φαίνεται στο Σχήμα A-1. Επομένως, μερικές φορές χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο περιγραφικό συμβολισμό:

$$z \longleftrightarrow r\angle\theta$$

Μερικά παραδείγματα παρουσιάζονται στο Σχήμα A-3, όπου η διεύθυνση θ δίνεται σε μοίρες. Η γωνία μετράται πάντα από το θετικό ημιάξονα του άξονα των πραγματικών αριθμών και μπορεί να είναι είτε θετική (φορά αντίθετη απ’ αυτή της φοράς των δεικτών του ρολογιού), είτε αρνητική (φορά σύμφωνη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού). Ωστόσο, γενικά ορίζουμε την *κύρια τιμή* της γωνίας έτσι ώστε $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$. Αυτό απαιτεί την πρόσθεση ή την αφαίρεση ακεραίου αριθμού πολλαπλασίων των 360° ώστε το αποτέλεσμα να είναι μεταξύ των -180° και



Σχήμα Α-3: Μιγαδικοί αριθμοί σχεδιασμένοι συναρτήσει του μήκους τους (r) και της διεύθυνσής τους (θ). Η γωνία μετράται πάντα σε σχέση με το θετικό ημίáξονα του άξονα των πραγματικών αριθμών.

+180°. Έτσι, το διάνυσμα $3\angle -80^\circ$ είναι η κύρια τιμή του διανύσματος $3\angle 280^\circ$.

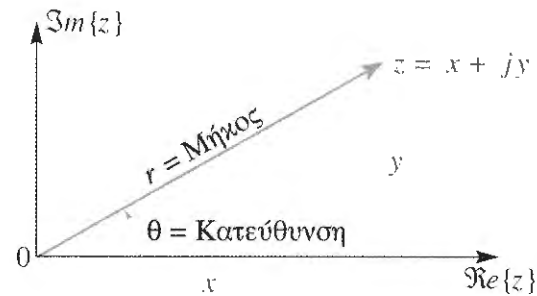
A-2.3 Μετατροπές: Τετραγωνική και Πολική

Και οι δύο μορφές παράστασης των μιγαδικών αριθμών, Καρτεσιανή και πολική, χρησιμοποιούνται ευρέως. Η επικράτηση βέβαια της πολικής μορφής για την αναπαράσταση των ημιτονοειδών σημάτων, μας αναγκάζει να αποκτήσουμε μεγάλη ευχέρεια στις πράξεις που απαιτούνται για τη μετατροπή μεταξύ αυτών των δύο παραστάσεων.



Επίδειξη: Διεπαφή Zdrill

Από το Σχήμα Α-4 μπορούμε να δούμε ότι οι συντεταγμένες x και y του διανύσματος δίνονται από τις



Σχήμα Α-4: Σχηματικό διάγραμμα αντιστοίχισης των Καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y) σε πολικές συντεταγμένες r και θ .

ακόλουθες σχέσεις

$$x = r \cos \theta \quad (\text{A.3a})$$

$$y = r \sin \theta \quad (\text{A.3b})$$

Επομένως, ένας ορθός τρόπος γραφής για το z είναι ο ακόλουθος

$$z = r \cos \theta + j r \sin \theta \quad (\text{A.4})$$



Παράδειγμα Α-1: Από την Πολική στην Τετραγωνική Μορφή

Οι τρεις μιγαδικοί αριθμοί που φαίνονται στο Σχήμα Α-3, είναι οι ακόλουθοι:

$$2\angle 45^\circ \longleftrightarrow z = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$$

$$3\angle 150^\circ \longleftrightarrow z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + j\frac{3}{2}$$

$$3\angle -80^\circ \longleftrightarrow z = 0.521 - j2.954$$

Η μετατροπή από την πολική στην τετραγωνική μορφή έγινε με τη βοήθεια της Σχέσης (Α.3). ■

Η μετατροπή από την τετραγωνική μορφή (x, y) στην πολική μορφή $r\angle\theta$ είναι λίγο πιο ευρηματική. Από το Σχήμα A-4, έχουμε ότι

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{Μήκος}) \quad (\text{A.5a})$$

$$\theta = \arctan(y/x) \quad (\text{Κατεύθυνση}) \quad (\text{A.5b})$$

Το τόξο εφαπτομένης πρέπει να δίνει μια απάντηση που θα αντιστοιχεί στο τέταρτο τεταρτημόριο και η διεύθυνση θ συνήθως δίνεται σε ακτίνια και όχι σε μοίρες.



Άσκηση A.1: Στο σημείο αυτό, ο αναγνώστης θα πρέπει να μετατρέψει σε πολική μορφή τους πέντε (5) μιγαδικούς αριθμούς που φαίνονται στο Σχήμα A-2. Οι απαντήσεις, με τυχαία σειρά, είναι οι ακόλουθες: $1\angle 90^\circ$, $5\angle -36.87^\circ$, $4.243\angle -135^\circ$, $5.385\angle 68.2^\circ$ και $5\angle 180^\circ$.

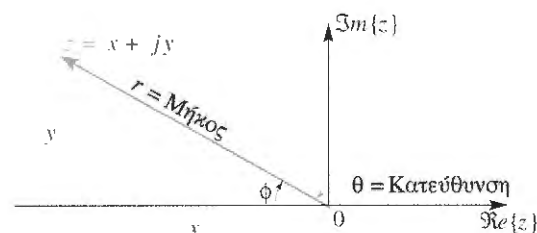
Στην Ενότητα A-3, θα αναφερθούμε σε δύο άλλες ποσότητες που σχετίζονται με την πολική μορφή:

$$\begin{aligned} z &= re^{j\theta} \\ &= |z|e^{j \arg z} \end{aligned}$$

όπου το $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ονομάζεται *μέτρο* του διανύσματος και $\arg z = \theta = \arctan(y/x)$ είναι η *γάση* σε ακτίνια (όχι μοίρες). Ο εκθετικός αυτός συμβολισμός, ο οποίος βασίζεται στον τύπο του Euler, έχει το πλεονέκτημα ότι όταν χρησιμοποιείται σε αλγεβρικές εκφράσεις, μπορούν να εφαρμοστούν οι τυπικές ιδιότητες των εκθετών.

A-2.4 Ιδιαιτερότητες Δεύτερου και Τρίτου Τεταρτημορίου

Η Σχέση (A.5b) που ορίζει τη γωνία θ ως το τόξο εφαπτομένης του λόγου της τεταγμένης προς την τεταγμένη του σημείου ($\arctan(y/x)$), πρέπει να χρησιμοποιείται με προσοχή, ειδικά όταν το πραγματικό μέρος (τεταγμένη) είναι αρνητικό (δες Σχήμα A-5). Για παράδειγμα, ο



Σχήμα A-5: Στο δεύτερο τεταρτημόριο, η εσωτερική γωνία ϕ υπολογίζεται εύκολα από το x και το y , όμως δεν είναι η σωστή γωνία για την πολική μορφή, η οποία απαιτεί την εξωτερική γωνία θ σε σχέση με τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

μιγαδικός αριθμός $z = -3 + j2$ απαιτεί, για την εύρεση της γωνίας, να υπολογίσουμε το $\arctan(-2/3)$. Ο ίδιος υπολογισμός απαιτείται και για το μιγαδικό αριθμό $z = 3 - j2$. Το τόξο εφαπτομένης του $-2/3$ είναι -0.588 rad, ή περίπου -33.7° , που αντιστοιχεί στη σωστή τιμή της γωνίας του $z = 3 - j2$. Ωστόσο, για τον $z = -3 + j2$, το διάνυσμα βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο και επομένως η γωνία πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. Για να βρούμε τη σωστή τιμή της γωνίας θα πρέπει να προσθέσουμε 180° . Στην περίπτωση αυτή, η σωστή τιμή είναι $\pi - 0.588 = 2.55$ ακτίνια, ή περίπου $180^\circ - 33.7^\circ = 146.3^\circ$. Ο γενικός κανόνας που θα πρέπει να ακολουθούμε για να υπολογίσουμε την γωνία ενός z , που δίδεται σε πολική μορφή, είναι ο ακόλουθος:

$$\theta = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{αν } x \geq 0 \\ \pm 180^\circ + \arctan(y/x) & \text{αν } x < 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Αφού οι γωνίες των 180° και -180° αντιστοιχούν στο μιγαδικό αριθμό $z = -1$, όταν $x < 0$ θα πρέπει να επιλέξουμε εκείνη τη γωνία που θα εξασφαλίσει ότι η τελική γωνία θα ανήκει στο διάστημα $|\theta| \leq 180^\circ$.

A-3 Ο Τύπος του Euler

Για την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή για τη μετατροπή από την αναπαράσταση σε πολικές συντεταγμένες σε τετραγωνικές η Εξίσωση (A.3) προτείνει τον ακόλουθο τύπο:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (\text{A.7})$$

Η Εξίσωση (A.7) ορίζει τον εκθετικό μιγαδικό $e^{j\theta}$, ο οποίος είναι ισodύναμος με το $1\angle\theta$ (δηλαδή, ένα διάνυσμα μήκους 1 με όρισμα θ). Μια απόδειξη του τύπου του Euler που βασίζεται στις δυναμοσειρές, παρουσιάζεται στο Πρόβλημα 2.4 του Κεφαλαίου 2. Το σημαντικό είναι ότι ο $e^{j\theta}$ υπακούει στους κανόνες των εκθετών. Ο τύπος του Euler (Σχέση (A.7)) όπως και οι αντίστροφοι τύποι του (Σχέσεις (A.8) και (A.9)) είναι τόσο σημαντικοί που θα πρέπει να τους απομνημονεύσουμε.



Παράδειγμα A-2: Ο Τύπος του Euler

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα:

$$\begin{aligned} (90^\circ): \quad e^{j\pi/2} &= \cos(\pi/2) + j \sin(\pi/2) \\ &= 0 + j1 = j \quad \longleftrightarrow 1\angle\pi/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (180^\circ): \quad e^{j\pi} &= \cos(\pi) + j \sin(\pi) \\ &= -1 + j0 = -1 \quad \longleftrightarrow 1\angle\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (45^\circ): \quad e^{j\pi/4} &= \cos(\pi/4) + j \sin(\pi/4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \longleftrightarrow 1\angle\pi/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (60^\circ): \quad e^{j\pi/3} &= \cos(\pi/3) + j \sin(\pi/3) \\ &= \frac{1}{2} + j \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \longleftrightarrow 1\angle\pi/3 \end{aligned}$$



Παράδειγμα A-3: Μετατροπή Ακτινίων σε Μοίρες

Αναφερόμενοι και πάλι στο Σχήμα A-3, οι τρεις μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να ξαναγραφούν ως εξής:

$$2\angle 45^\circ \quad \longleftrightarrow \quad z = 2e^{j\pi/4}$$

$$3\angle 150^\circ \quad \longleftrightarrow \quad z = 3e^{j5\pi/6}$$

$$3\angle -80^\circ \quad \longleftrightarrow \quad z = 3e^{-j4\pi/9} = 3e^{-j1.396}$$

Επειδή σαν μονάδα μέτρησης των γωνιών χρησιμοποιούμε συνήθως τις μοίρες, είναι δύσκολο να οπτικοποιούμε αριθμούς όπως ο -1.396 ακτίνια. Θα μας βοηθούσε επομένως πολύ να εκφράσουμε τις γωνίες που χρησιμοποιούνται στους εκθέτες σε ακτίνια στη μορφή ενός κλάσματος του π . Δηλαδή, $-1.396 = -(1.396/\pi)\pi = -0.444\pi$ ακτίνια. Αυτή είναι μια συνηθισμένη τακτική που θα πρέπει να υιοθετήσουμε μια και απλοποιεί τη μετατροπή ανάμεσα σε μοίρες και ακτίνια. Αν μας δίνεται μια γωνία θ σε ακτίνια, η μετατροπή σε μοίρες γίνεται ως εξής:

$$\theta \times \left(\frac{180}{\pi} \right) = \text{το αποτέλεσμα σε μοίρες}$$

A-3.1 Οι Αντίστροφες Σχέσεις του Euler

Λύνοντας τον τύπο του Euler (Σχέση (A.7)) χωριστά για το συνημίτονο και το ημίτονο, προκύπτουν οι σχέσεις που θα ονομάζουμε *αντίστροφες σχέσεις του Euler*:

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad (\text{A.8})$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad (\text{A.9})$$

Παίρνοντας υπόψη μας ότι $\cos(-\theta) = \cos \theta$ και $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, η απόδειξη για το $\sin \theta$ είναι η ακόλουθη:

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j \sin(-\theta)$$

$$= \cos \theta - j \sin \theta$$

$$e^{+j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{j\theta} - e^{-j\theta} &= 2j \sin \theta \\ \Rightarrow \sin \theta &= \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \end{aligned}$$

A-4 Αλγεβρικοί Κανόνες Μιγαδικών Αριθμών

Οι βασικοί αλγεβρικοί τελεστές των μιγαδικών αριθμών ακολουθούν τους συνηθισμένους κανόνες της άλγεβρας αν θεωρήσουμε το j σαν ένα ειδικό σύμβολο που ικανοποιεί τη σχέση $j^2 = -1$. Χρησιμοποιώντας τη τετραγωνική αναπαράσταση, όλοι οι κανόνες είναι σχετικά απλοί. Οι πέντε θεμελιώδεις απ' αυτούς ορίζονται ως εξής:

Πρόσθεση:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

Αφαίρεση:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) \\ &= (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιασμός:

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (x_1 + jy_1) \times (x_2 + jy_2) \\ z_1 z_2 &= x_1 x_2 + j^2 y_1 y_2 + j x_1 y_2 + j x_2 y_1 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

Διαίρεση:

$$\begin{aligned} z_1 \div z_2 &= (x_1 + jy_1) / (x_2 + jy_2) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} \\ &= \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

Συζυγής:


$$\begin{aligned} z_1^* &= (x_1 + jy_1)^* \\ &= x_1 - jy_1 \end{aligned}$$

Η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι πολύ απλές, αφού το μόνο που απαιτούν είναι η πρόσθεση και η αφαίρεση των πραγματικών και φανταστικών τμημάτων αντίστοιχα. Από την άλλη μεριά, η πρόσθεση (ή η αφαίρεση) όταν οι μιγαδικοί αριθμοί έχουν παρασταθεί σε πολική μορφή δεν είναι τόσο απλή. Στην πραγματικότητα, θα πρέπει να μετατραπούν στην τετραγωνική μορφή τους. Αντίθετα, οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, οι οποίες είναι αρκετά πολύπλοκες στην τετραγωνική αναπαράσταση, απλοποιούνται όταν οι αριθμοί παριστάνονται σε πολική μορφή. Συγκεκριμένα, για τον πολλαπλασιασμό αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τα μέτρα και να προσθέσουμε τα ορίσματα των αριθμών. Για τη διαίρεση αρκεί να διαιρέσουμε τα μέτρα και να αφαιρέσουμε τα ορίσματα των αριθμών. Τέλος, ο συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού που είναι σε πολική μορφή, απαιτεί την αλλαγή του προσήμου του ορίσματος του.

$$\begin{aligned} \text{Πολλαπλασιασμός: } z_1 \times z_2 &= r_1 e^{j\theta_1} \times r_2 e^{j\theta_2} \\ &= (r_1 r_2) e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Διαίρεση: } z_1 \div z_2 &= \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} \\ &= \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Συζυγής: } z_1^* &= (r_1 e^{j\theta_1})^* \\ &= r_1 e^{-j\theta_1} \end{aligned}$$

 **Άσκηση A.2:** Ο αντίστροφος ενός μιγαδικού αριθμού z είναι ο αριθμός z^{-1} ο οποίος ικανοποιεί τη

σχέση

$$z^{-1}z = 1.$$

Ένα λάθος που γίνεται συχνά στον υπολογισμό του αντίστροφου είναι να υπολογίζουμε τον αντίστροφο του $z = x + jy$ αντιστρέφοντας ξεχωριστά το x και το y . Για να δείξουμε ότι η διαδικασία αυτή οδηγεί σε λάθος υπολογισμό, θεωρήστε την περίπτωση $z = 4 + j3$ και $w = \frac{1}{4} + j\frac{1}{3}$. Δείξτε ότι ο w δεν είναι ο αντίστροφος του z (Δείξτε ότι $wz \neq 1$). Βρείτε τον σωστό αντίστροφο του z .

Στην αναπαράσταση με πολικές συντεταγμένες παρουσιάζονται δυσκολίες, όταν προσθέτουμε ή αφαιρούμε δύο μιγαδικούς αριθμούς και εκφράζουμε το τελικό αποτέλεσμα σε πολικές συντεταγμένες. Όπως θα δούμε, είναι αναγκαία μια ενδιάμεση μετατροπή και αναπαράσταση στην τετραγωνική μορφή. Στην παράγραφο που ακολουθεί παρουσιάζεται ο αλγόριθμος πρόσθεσης και η αναπαράσταση του αποτελέσματος σε πολικές συντεταγμένες.

1. Θεωρώντας πολικές αναπαράστασεις, έχουμε ότι

$$z_3 = z_1 \pm z_2 = r_1 e^{j\theta_1} \pm r_2 e^{j\theta_2}$$

2. Μετέτρεψε τα z_1 και z_2 σε Καρτεσιανή μορφή:

$$z_3 = (r_1 \cos \theta_1 + j r_1 \sin \theta_1) \pm (r_2 \cos \theta_2 + j r_2 \sin \theta_2)$$

3. Εκτέλεσε την πρόσθεση:

$$z_3 = (r_1 \cos \theta_1 \pm r_2 \cos \theta_2) + j (r_1 \sin \theta_1 \pm r_2 \sin \theta_2)$$

4. Ταυτοποίησε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του z_3 :

$$x_3 = \Re\{z_3\} = r_1 \cos \theta_1 \pm r_2 \cos \theta_2$$

$$y_3 = \Im\{z_3\} = r_1 \sin \theta_1 \pm r_2 \sin \theta_2$$

5. Χρησιμοποιώντας τις Σχέσεις (A.5a) και (A.5b), ξαναμετέτρεψε τον z_3 σε πολική μορφή:

$$z_3 = x_3 + jy_3 \longleftrightarrow z_3 = r_3 e^{j\theta_3}$$

Αν κάποιος διαθέτει έναν υπολογιστή τσέπης που κάνει μετατροπές μεταξύ των αναπαράστασεων, είναι χρήσιμο να ξέρει να τον χρησιμοποιεί. Κατ' αυτόν τον τρόπο γλιτώνει κανείς πολλές ώρες υπολογισμών με το χέρι και, επιπλέον, μειώνεται η πιθανότητα λάθους. Οι περισσότεροι “επιστημονικοί” υπολογιστές τσέπης παρέχουν τη δυνατότητα αναπαράστασης και στις δύο μορφές και έτσι η διαδικασία μετατροπής από τη μια αναπαράσταση στην άλλη είναι πολύ απλή.



Παράδειγμα A-4: Προσθέτοντας Πολικές Αναπαράστασεις

Ακολουθεί ένα αριθμητικό παράδειγμα πρόσθεσης δύο μιγαδικών αριθμών σε πολική μορφή:

$$z_3 = 7e^{j4\pi/7} + 5e^{-j5\pi/11}$$

$$z_3 = (-1.558 + j6.824) + (0.712 - j4.949)$$

$$z_3 = -0.846 + j1.875$$

$$z_3 = 2.057e^{j1.995} = 2.057e^{j0.635\pi} = 2.057 \angle 114.3^\circ$$

Προσοχή: Όταν μια γωνία εμφανίζεται στον εκθέτη πρέπει η μονάδα της να είναι τα ακτίνια. ■

A-4.1 Ασκήσεις με Μιγαδικούς Αριθμούς

Για να εξασκηθείτε στις μιγαδικές πράξεις, προσπαθήστε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις.




Άσκηση A.3: Προσθέστε και πολλαπλασιάστε τους παρακάτω αριθμούς και στη συνέχεια σχεδιάστε τα αποτελέσματά σας:

$$z_4 = 5e^{j4\pi/5} + 7e^{-j5\pi/7}$$

$$z_5 = 5e^{j4\pi/5} \times 7e^{-j5\pi/7}$$


Οι απαντήσεις είναι $z_4 = -8.41 - j2.534 = 8.783e^{-j0.907\pi}$ και $z_5 = 35e^{j3\pi/35}$.

 **Άσκηση A.4:** Για την εύρεση της συζυγούς μιας μιγαδικής παράστασης, ο απλός κανόνας απαιτεί την αλλαγή του προσήμου όλων των όρων που περιέχουν το j . Υπολογίστε τα ακόλουθα:

$$(3 - j4)^* = ?$$

$$(j(1 - j))^* = ?$$

$$(e^{j\pi/2})^* = ?$$

 **Άσκηση A.5:** Αποδείξτε την ορθότητα των ακόλουθων ταυτοτήτων:

$$\Re\{z\} = (z + z^*)/2$$

$$\Im\{z\} = (z - z^*)/2j$$

$$|z|^2 = zz^*$$

Για περισσότερα προβλήματα και εξάσκηση μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το `zdrill.m` του Matlab που είναι μια γραφική διεπαφή χρήστη που κάνει ερωτήσεις για κάθε μια από τις μιγαδικές πράξεις και σχεδιάζει διανυσματικά τις λύσεις. Η διεπαφή `zdrill` διαθέτει δύο επίπεδα δυσκολίας, ένα για αρχάριους και ένα για προχωρημένους. Ένα στιγμιότυπο της διεπαφής φαίνεται στο Σχήμα A-6.



Επίδειξη: Διεπαφή Zdrill

A-5 Γεωμετρική Ερμηνεία των Μιγαδικών Πράξεων

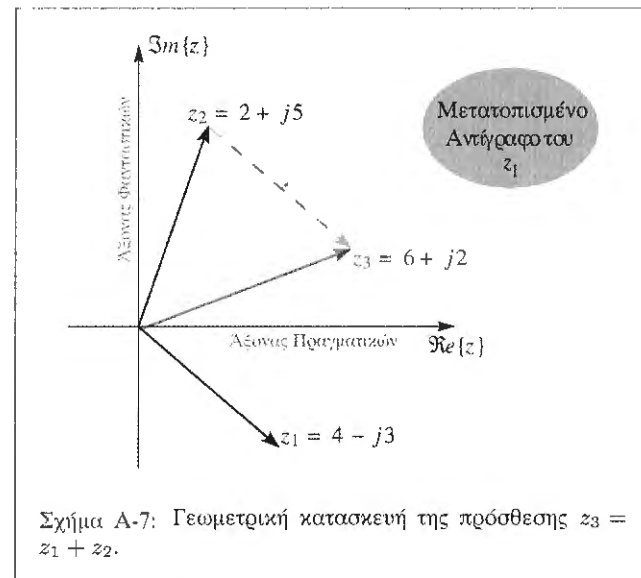
Είναι πολύ σημαντικό να αναπτύξουμε την ικανότητα γεωμετρικής απεικόνισης των μιγαδικών πράξεων. Αυτό επιτυγχάνεται σχεδιάζοντας τα διανύσματα που παριστούν στο επίπεδο (x, y) , με $x = \Re\{z\}$ και $y = \Im\{z\}$, τους μιγαδικούς αριθμούς. Το κλειδί για το σκοπό αυτό, όπως φαίνεται και στο Σχήμα A-1, είναι να συνειδητοποιήσουμε

ότι ο μιγαδικός αριθμός $z = x + jy$ είναι ένα διάνυσμα που ξεκινά από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στο σημείο (x, y) .

A-5.1 Γεωμετρική Ερμηνεία της Πρόσθεσης

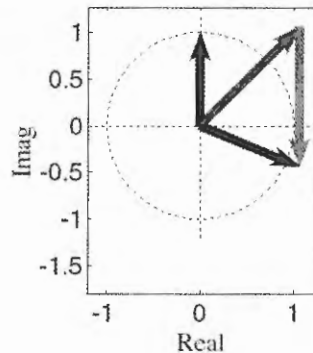
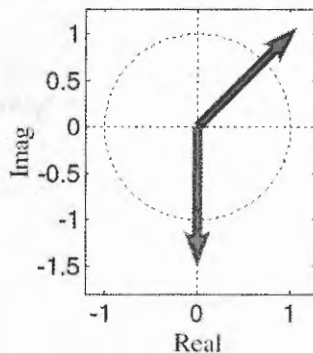
Για την πρόσθεση, $z_3 = z_1 + z_2$, των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 και οι δύο απεικονίζονται σαν διανύσματα που ξεκινούν από την αρχή των αξόνων. Το άθροισμά τους z_3 είναι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των διανυσμάτων που προκύπτει ως εξής (δες Σχήμα A-7):

1. Σχεδιάσε ένα παράλληλα μετατοπισμένο αντίγραφο του διανύσματος z_1 , του οποίου η αρχή βρίσκεται στο πέρας του z_2 . Ονόμασε αυτό το μετατοπισμένο διάνυσμα \hat{z}_1 .
2. Σχεδιάσε το διάνυσμα που ενώνει την αρχή των αξόνων με το πέρας του διανύσματος \hat{z}_1 . Το διάνυσμα αυτό είναι το άθροισμα z_3 .



Σχήμα A-7: Γεωμετρική κατασκευή της πρόσθεσης $z_3 = z_1 + z_2$.

<p>INPUT #1</p> <p>r = 1.5</p> <p>theta = 0.25*pi</p> <p>INPUT #2</p> <p>r = 1.5</p> <p>theta = -0.5*pi</p>	<p>OPERATION</p> <p>z1 + z2 (Add)</p> <p>YOUR GUESS</p> <p>r = 1</p> <p>theta = pi/2</p>	<p>New Quiz</p> <p><input type="checkbox"/> Show Rect Form</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Show Vector Sum</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Show Answer</p> <p> <input checked="" type="checkbox"/> Guess <input type="checkbox"/> z1 <input checked="" type="checkbox"/> Answer <input type="checkbox"/> z2 </p>
---	--	---



Σχήμα Α-6: Η διεπερή `z1rill` χρήσιμη για εξάσκηση στις πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών.

Η παραπάνω διαδικασία πρόσθεσης μπορεί να γενικευθεί για την πρόσθεση περισσότερων των δύο μιγαδικών αριθμών. Στο Σχήμα Α-8 φαίνεται το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των τεσσάρων μιγαδικών αριθμών

$$(1 + j) + (-1 + j) + (-1 - j) + (1 - j)$$

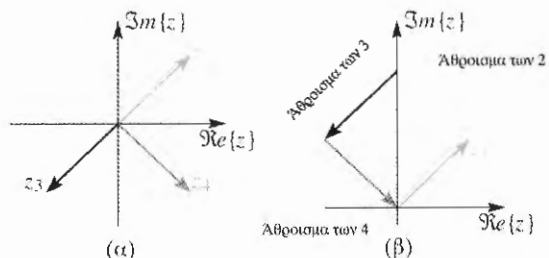
το οποίο είναι μηδέν.

A-5.2 Γεωμετρική Ερμηνεία της Αφαίρεσης

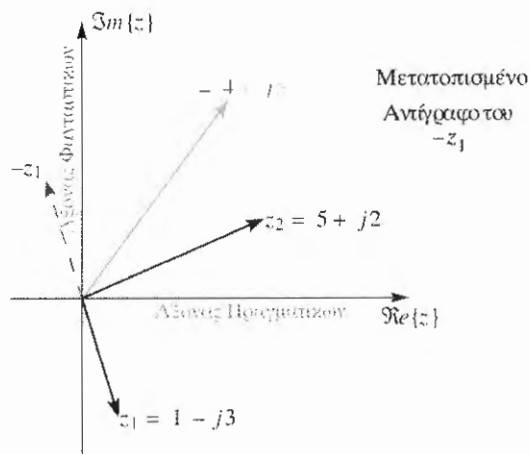
Η απεικόνιση της αφαίρεσης προκύπτει πολύ εύκολα από αυτήν της πρόσθεσης. Πράγματι:

$$z_3 = z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1)$$

Έτσι, αρκεί να κατασκευάσουμε, από το z_1 , το διάνυσμα $-z_1$ και στη συνέχεια να το προσθέσουμε στο z_2 . Η παραπάνω διαδικασία φαίνεται στο Σχήμα Α-9 και, όπως μπορούμε να δούμε από το Σχήμα Α-7, είναι παρόμοια μ' αυτή της πρόσθεσης. Ακολουθούν, δύο επιπλέον σχόλια



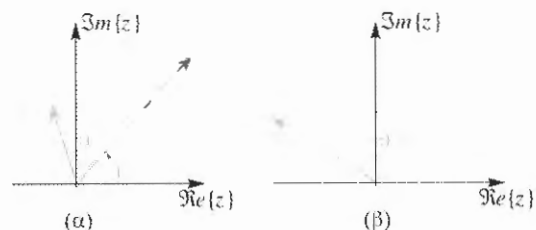
Σχήμα A-8: Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των τεσσάρων διανυσμάτων $\{1+j, -1+j, -1-j, 1-j\}$ που φαίνονται στο (α) είναι μηδέν. Η γεωμετρική διαδικασία πρόσθεσης διασαφηνίζεται στο (β).



Σχήμα A-9: Γεωμετρική ερμηνεία της αφαίρεσης. Για να βρούμε το διάνυσμα $z_3 = z_2 + (-z_1)$ της διαφοράς, κατασκευάζουμε το διάνυσμα $(-z_1)$ και στη συνέχεια προσθέτουμε το παράλληλα μετατοπισμένο αντίγραφο του στο z_2 .

που πρέπει να κάνουμε για την πράξη της αφαίρεσης μιγαδικών αριθμών:

1. Αφού $z_2 = z_1 + z_3$, θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ένα παράλληλα μετατοπισμένο αντίγραφο του διανύσματος της διαφοράς με αρχή το πέρας του διανύσματος z_1 και πέρας το πέρας του z_2 .
2. Το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία 0, z_1 και z_2 έχει πλευρές ίσες με z_1 , z_2 , και $z_2 - z_1$.



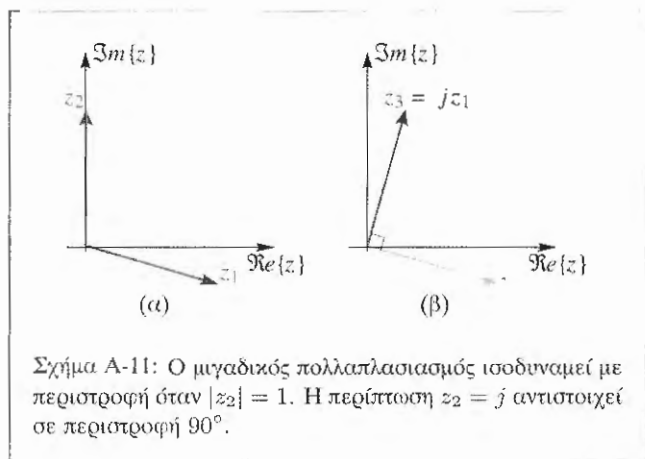
Σχήμα A-10: Γεωμετρική ερμηνεία του μιγαδικού πολλαπλασιασμού $z_3 = z_1 z_2$.

Άσκηση A.6: Ορίστε ένα διάνυσμα w με αρχή το z_1 και πέρας το z_2 . Αποδείξτε ότι το w έχει το ίδιο μήκος και την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα $z_2 - z_1$.

Άσκηση A.7: Αποδείξτε την τριγωνική ανισότητα:

$$|z_2 - z_1| \leq |z_1| + |z_2|$$

Χρησιμοποιήστε είτε μια αλγεβρική μέθοδο, υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη, ή μια γεωμετρική προσέγγιση βασισμένοι στην ιδέα ότι "ο πιο σύντομος δρόμος μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία που τα ενώνει."



A-5.3 Γεωμετρική Ερμηνεία του Πολλαπλασιασμού

Για την πράξη του πολλαπλασιασμού θα χρησιμοποιήσουμε την πολική μορφή αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών. Για να σχεδιάσουμε το διάνυσμα z_3 που αντιστοιχεί στο γινόμενο των z_1, z_2 , θα πρέπει να αποφασίσουμε πρώτα αν το $|z_1|$ και/ή το $|z_2|$ είναι μεγαλύτερα από το 1. Στο Σχήμα A-10, έχουμε υποθέσει ότι μόνο το μέτρο του z_1 είναι μεγαλύτερο του 1.

Μια ειδική περίπτωση συμβαίνει όταν $|z_2| = 1$. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει στάθμιση και ο πολλαπλασιασμός με το $z_2 = e^{j\theta_2}$ ισοδυναμεί με περιστροφή του z_1 κατά γωνία θ_2 . Στο Σχήμα A-11 φαίνεται η περίπτωση $z_2 = j$, που αντιστοιχεί σε περιστροφή κατά $\pi/2$ ή 90° , αφού $j = e^{j\pi/2}$.

A-5.4 Γεωμετρική Ερμηνεία της Διάρθρωσης

Η διαίρεση είναι πράξη παρόμοια με αυτή του πολλαπλασιασμού, εκτός του ότι θα πρέπει τώρα να αφαιρέσουμε τα ορίσματα και να διαιρέσουμε τα μέτρα (Σχήμα. A-12).

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

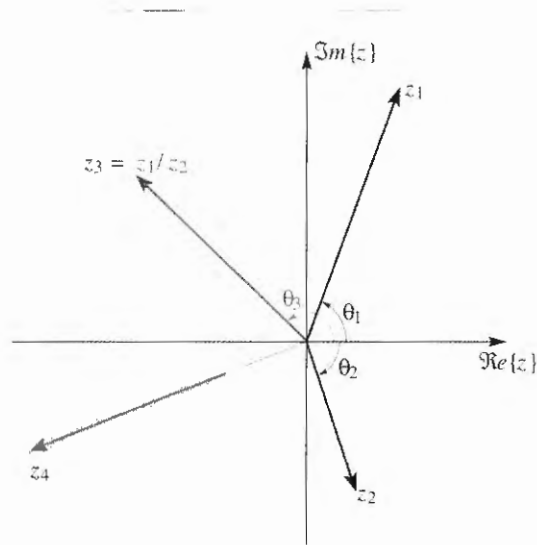
Άσκηση A.8: Δίνονται δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 , όπως φαίνεται στο Σχήμα A-12, με τη μεταξύ τους γωνία να είναι ίση με 90° και το μέτρο του z_1 διπλάσιο απ' αυτό του z_2 . Υπολογίστε το z_1/z_2 .

A-5.5 Γεωμετρική Ερμηνεία του Αντίστροφου

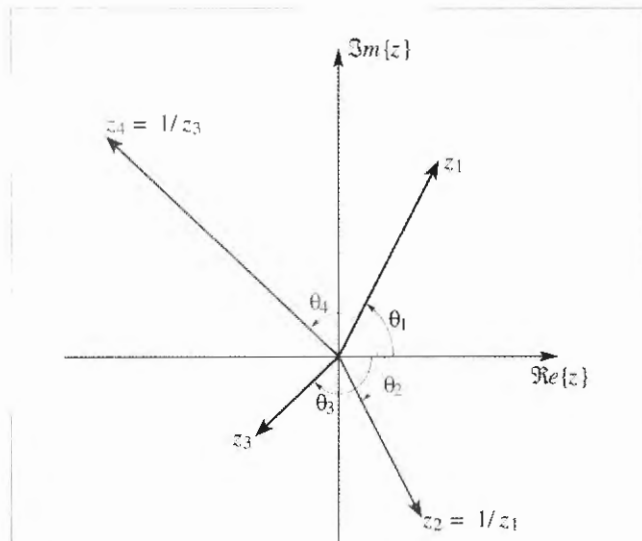
Ο αντίστροφος αποτελεί ειδική περίπτωση της διαίρεσης με $z_1 = 1$. Επομένως θα πρέπει, να αλλάξουμε το πρόσημο της γωνίας και να υπολογίσουμε το αντίστροφο του μέτρου.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-j\theta}$$

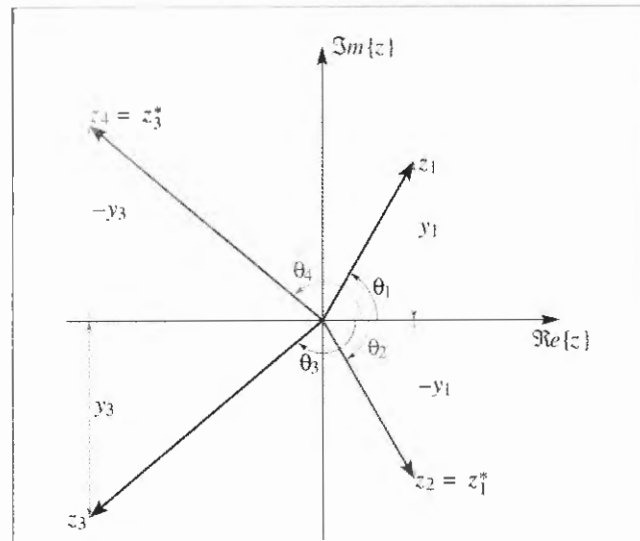
Δείτε στο Σχήμα A-13 παραδείγματα αντιστροφών.



Σχήμα A-12: Απεικόνιση της διαίρεσης $z_3 = z_1/z_2$ μιγαδικών αριθμών. Παρατηρήστε ότι αφαιρούνται τα ορίσματα, δηλαδή, $\theta_3 = \theta_1 - \theta_2$. Επειδή $|z_2| > 1$, το διάνυσμα z_3 είναι πιο βραχύ από το z_1 .



Σχήμα A-13: Γεωμετρική κατασκευή του αντίστροφου $1/z$ του μιγαδικού αριθμού z . Για τα διανύσματα που φαίνονται στο σχήμα, $|z_1| < 1$ και $|z_3| > 1$.



Σχήμα A-14: Γεωμετρική κατασκευή του μιγαδικού συζυγή z^* . Παρατηρήστε ότι αλλάζει το πρόσημο μόνο του φανταστικού μέρους.

A-5.6 Γεωμετρική Ερμηνεία του Συζυγή, z^*

Στην περίπτωση αυτή, αλλάζουμε το πρόσημο του ορίσματος, το οποίο ισοδυναμεί με τον αντικατοπτρισμό του διανύσματος ως προς τον οριζόντιο άξονα, και διατηρούμε το μήκος του διανύσματος.

$$z^* = x - jy = re^{-j\theta}$$

Στο Σχήμα A-14 παρουσιάζονται δύο παραδείγματα με τη γεωμετρική ερμηνεία της συζυγίας.

Άσκηση A.9: Αποδείξτε ότι:

$$\frac{1}{z^*} = \frac{1}{r} e^{j\theta}$$

Σχεδιάστε για παράδειγμα το $z = 1 + j$, καθώς και τα $1/z$, z^* .

A-6 Δυνάμεις και Ρίζες

Μπορούμε να ορίσουμε τις ακέραιες δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών με τον ακόλουθο τρόπο:

$$z^N = (re^{j\theta})^N = r^N e^{jN\theta}$$

Δηλαδή, επειδή ισχύουν οι κανόνες των εκθετών, η γωνία θ πολλαπλασιάζεται με N και το μέτρο υψώνεται στη N -οστή δύναμη. Στο Σχήμα A-15 παρουσιάζεται η ακολουθία

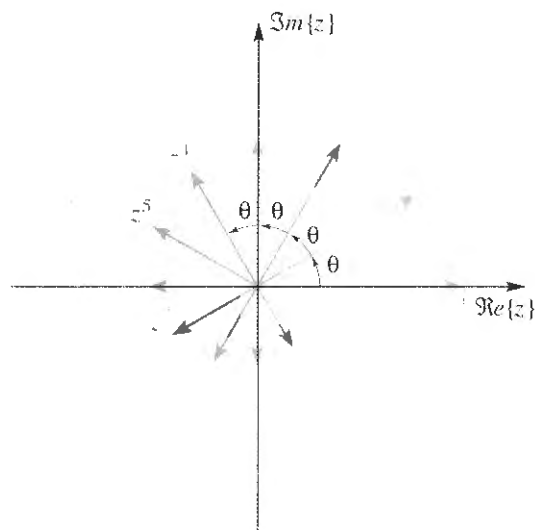
$$\{z^l\} = \{z^0, z^1, z^2, z^3, \dots\}$$

στην οποία το όρισμα αυξάνεται με σταθερό βήμα $\pi/6$ ακτίνια. Το μέτρο του z θεωρούμε ότι είναι μικρότερο της μονάδας και επομένως όσο αυξάνεται η δύναμη στην οποία υψώνουμε το z τόσο αυτό θα τεντώνει στο μηδέν. Αν το $|z| > 1$, οι τιμές των δυνάμεών του θα αυξάνονται. Τέλος, αν $|z| = 1$, όλες οι δυνάμεις z^N θα βρίσκονται πάνω στον

μοναδιαίο κύκλο. Μια πολύ γνωστή ταυτότητα είναι η ακόλουθη ταυτότητα του DeMoivre:

$$(\cos \theta + j \sin \theta)^N = \cos N\theta + j \sin N\theta$$

Η απόδειξη της παραπάνω ταυτότητας αν και είναι πολύ δύσκολη αν προσπαθήσουμε να την κάνουμε μέσω τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, είναι προφανής αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Euler της Σχέσης (A.7) για το $e^{jN\theta}$.



Σχήμα A-15: Μια ακολουθία δυνάμεων z^ℓ για $\ell = 0, 1, 2, \dots, 10$. Επειδή $|z| = 0.9 < 1$, το μέτρο των διανυσμάτων μειώνεται όσο αυξάνεται το ℓ . Η αύξηση του ορίσματος μεταξύ διαδοχικών δυνάμεων είναι σταθερή και ίση με $\theta = \arg z = \pi/6$.

Άσκηση A.10: Υποθέστε ότι z^{N-1} , z^N και z^{N+1} είναι τρία διαδοχικά μέλη της ακολουθίας του Σχήματος A-15. Σχεδιάστε αυτά τα τρία μέλη αν $z = 0.98e^{-j\pi/6}$ και $N = 11$.

A-6.1 Οι Ρίζες της Μονάδας

Σε πάρα πολλές περιπτώσεις, πρέπει να λύσουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$z^N = 1 \quad (\text{A.10})$$

Στην εξίσωση αυτή, ο N είναι ακέραιος. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $z = 1$, αλλά υπάρχουν και άλλες $N - 1$, αφού η λύση της (A.10) ισοδυναμεί με την εύρεση των ριζών ενός πολυωνύμου N -οστού βαθμού. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης δίνονται από τη σχέση

$$z = e^{j2\pi\ell/N} \quad \text{for } \ell = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

και ονομάζονται N οστές ρίζες της μονάδας. Όπως φαίνεται στο Σχήμα A-16, αυτές οι N λύσεις είναι μιγαδικοί αριθμοί που βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας 1 και ισαπέχουν μεταξύ τους. Συγκεκριμένα η γωνιακή απόσταση μεταξύ τους είναι $2\pi/N$.

A-6.1.1 Διαδικασία Εύρεσης Πολλαπλών Ριζών

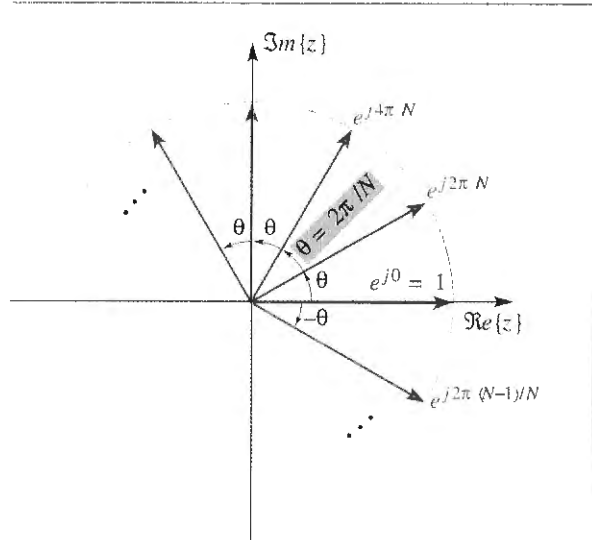
Άπαξ και γνωρίζουμε ότι οι λύσεις της Εξίσωσης (A.10) είναι οι N -οστές ρίζες της μονάδας, μπορούμε να περιγράψουμε ένα δομημένο τρόπο λύσης εξισώσεων με πολλαπλές ρίζες. Για να πετύχουμε το σκοπό μας, ας θεωρήσουμε την παρακάτω πιο γενική περίπτωση

$$z^N = c$$

όπου $c = |c|e^{j\phi}$ μια μιγαδική σταθερά. Η διαδικασία περιλαμβάνει τα παρακάτω έξι βήματα:

1. Γράψτε το z^N σαν $r^N e^{jN\theta}$.
2. Γράψτε το c σαν $|c|e^{j\phi} e^{j2\pi\ell}$ όπου ℓ ακέραιος. Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση που το $c = 1$ μπορούμε να εκφράσουμε τη μονάδα σαν

$$1 = e^{j2\pi\ell} \quad \text{for } \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Σχήμα A-16: Απεικόνιση των N -οστών ριζών της μονάδας ($N = 12$) που αποτελούν λύσεις της $z^N = 1$. Παρατηρήστε ότι υπάρχουν N διακριτές ρίζες.

3. Εξισώστε τα δύο μέλη και επιλύστε χωριστά για τα μέτρα και τα ορίσματα.

$$r^N e^{jN\theta} = |c| e^{j\phi} e^{j2\pi\ell}$$

4. Τα μέτρα είναι οι θετικές N -οστές ρίζες ενός θετικού αριθμού $|c|$:

$$r = |c|^{1/N}$$

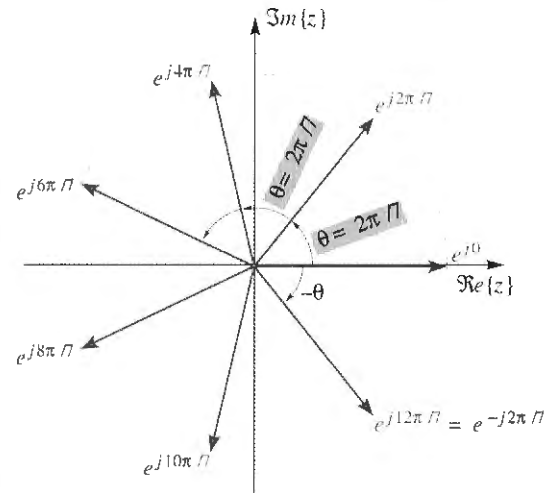
5. Το όρισμα περιέχει την ουσιαστική πληροφορία, αφού υπάρχουν οι ακόλουθες N διαφορετικές λύσεις:

$$N\theta = \phi + 2\pi\ell \quad \ell = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\phi + 2\pi\ell}{N}$$

$$\theta = \frac{\phi}{N} + \frac{2\pi\ell}{N}$$

6. Επομένως, όλες οι N διαφορετικές λύσεις έχουν το ίδιο μέτρο, άλλα τα ορίσματά τους είναι ισαπέχοντα με μια απόσταση $2\pi/N$ μεταξύ των.



Σχήμα A-17: Απεικόνιση των έβδομων ριζών της μονάδας. Παρατηρήστε ότι η ακολουθία $e^{j2\pi\ell/7}$ επαναλαμβάνεται με περίοδο ίση με 7.



Παράδειγμα A-5: Έβδομες Ρίζες της Μονάδας

Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω, λύστε την εξίσωση $z^7 = 1$.


$$r^7 e^{j7\theta} = e^{j2\pi\ell}$$

$$\Rightarrow r = 1$$

$$\Rightarrow 7\theta = 2\pi\ell$$

$$\theta = \frac{2\pi}{7}\ell \quad \ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Επομένως, οι λύσεις βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο και ισαπέχουν μεταξύ τους, όπως φαίνεται και στο Σχήμα Α-17. ■


 **Άσκηση Α.11:** Λύστε την ακόλουθη εξίσωση:


$$z^5 = -1$$

Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $-1 = e^{j\pi}$. Σχεδιάστε όλες τις λύσεις που θα βρείτε.

A-7 Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι

Στο παράρτημα αυτό έγινε μια σύντομη αναφορά στους μιγαδικούς αριθμούς και στην διανυσματική αναπαράσταση των. Αν και η ύλη αυτή θεωρούμε ότι είναι γνωστή στους περισσότερους φοιτητές από την άλγεβρα που διδάσκονται στο Λύκειο, η συχνή χρήση των μιγαδικών απαιτεί πολύ μεγάλη εξοικείωση. Οι εργαστηριακές ασκήσεις του Κεφαλαίου 2 διαπραγματεύονται διάφορα θέματα που άπτονται των μιγαδικών αριθμών. Στην εργαστηριακή άσκηση #2, έχουμε συμπεριλάβει έναν αριθμό συναρτήσεων του Matlab που είναι απαραίτητες για τη διανυσματική απεικόνιση των μιγαδικών αριθμών (`zvect`, `zcat`) και για μετατροπές από πολική μορφή σε Καρτεσιανή και αντίστροφα (`zprint`).

 **Εργ. Ασκ.: #2** Εισαγωγή στους Εκθετικούς Μιγάδες

 **Επίδειξη:** Μιγαδικοί Αριθμοί στη MATLAB

Εκτός από τις εργαστηριακές ασκήσεις, υπάρχει και η διεπαφή `zdrill` που μπορεί κανείς να εξασκηθεί στις βασικές πράξεις των μιγαδικών αριθμών. Ένα στιγμιότυπο της διεπαφής φαίνεται στο Σχήμα Α-6.

 **Επίδειξη:** Διεπαφή `Zdrill`

A-8 Προβλήματα

Πρόβλημα.-Α.1 Να μετατραπούν οι παρακάτω μιγαδικοί σε πολική μορφή:

- (i) $z = 0 + j2$
- (ii) $z = (-1, 1)$
- (iii) $z = -3 - j4$
- (iv) $z = (0, -1)$

Πρόβλημα.-Α.2 Να μετατραπούν οι παρακάτω μιγαδικοί σε τετραγωνική μορφή:

- (i) $z = \sqrt{2} e^{j(3\pi/4)}$
- (ii) $z = 1.6 \angle (\pi/6)$
- (iii) $z = 3e^{-j(\pi/2)}$
- (iv) $z = 7 \angle (7\pi)$

Πρόβλημα.-Α.3 Υπολογίστε την παρακάτω έκφραση. Δώστε την απάντησή σας σε τετραγωνική μορφή:

- (i) j^3
- (ii) $e^{j(\pi+2\pi m)}$ (m ακέραιος)
- (iii) j^{2n} (n ακέραιος)
- (iv) $j^{1/2}$ (βρείτε δύο απαντήσεις)

Πρόβλημα.-Α.4 Απλοποιήστε τις ακόλουθες μιγαδικές εκφράσεις:

- (i) $3e^{j2\pi/3} - 4e^{-j\pi/6}$
- (ii) $(\sqrt{2} - j2)^8$
- (iii) $(\sqrt{2} - j2)^{-1}$

(iv) $(\sqrt{2} - j2)^{1/2}$

(v) $\Im\{je^{-j\pi/3}\}$

Δώστε τις απαντήσεις σας και σε Καρτεσιανή και σε πολική μορφή.

Πρόβλημα.-A.5 Υπολογίστε κάθε μια από τις παρακάτω εκφράσεις και δώστε τις απαντήσεις και σε τετραγωνική και σε πολική μορφή. Υποθέστε ότι $z_1 = -4 + j3$ και $z_2 = 1 - j$.

(i) z_1^*

(vi) z_1/z_2

(ii) z_2^2

(vii) e^{z_2}

(iii) $z_1 + z_2^*$

(viii) $z_1 z_1^*$

(iv) jz_2

(ix) $z_1 z_2$

(v) $z_1^{-1} = 1/z_1$

Πρόβλημα.-A.6 Απλοποιήστε το παρακάτω μιγαδικό άθροισμα:

$$z = e^{j9\pi/3} + e^{-j5\pi/8} + e^{j13\pi/8}$$

Δώστε την απάντηση σας για το z σε πολική μορφή.

Σχεδιάστε ένα διανυσματικό διάγραμμα των τριών διανυσμάτων καθώς και του αθροίσματός τους (z).

Πρόβλημα.-A.7 Απλοποιήστε τις ακόλουθες μιγαδικές εκφράσεις. Δώστε τις απαντήσεις σας σε πολική μορφή και σε όσο πιο απλή αριθμητική μορφή μπορείτε.

(i) Αν $z = -3 + j4$, υπολογίστε το $1/z$.

(ii) Αν $z = -2 + j2$, υπολογίστε το z^5 .

(iii) Αν $z = -5 + j13$, υπολογίστε το $|z|^2$.

(iv) Αν $z = -2 + j5$, υπολογίστε το $\Re\{ze^{-j\pi/2}\}$

Πρόβλημα.-A.8 Λύστε ως προς z την εξίσωση:

$$z^4 = j$$

Βεβαιωθείτε ότι βρήκατε όλες τις δυνατές λύσεις και εκφράστε τις σε πολική μορφή.

Πρόβλημα.-A.9 Έστω $z_0 = e^{j2\pi/N}$. Να αποδείξετε ότι $z_0^{N-1} = 1/z_0$.

Πρόβλημα.-A.10 Υπολογίστε το $(-j)^{1/2}$ και σχεδιάστε το(α) αποτέλεσμα(τα).

Εργαστηριακές Ασκήσεις

Το παράρτημα αυτό περιέχει ένα Πίνακα με τους τίτλους των εργαστηριακών ασκήσεων που περιέχονται στο CD-ROM που συνοδεύει το βιβλίο. Αν και σε κάθε κεφάλαιο αντιστοιχεί κατά μέσο όρο μία εργαστηριακή άσκηση, οι τελευταίες ασκήσεις χρησιμοποιούν έννοιες από διάφορα κεφάλαια. Στον Πίνακα Β-1 περιέχονται οι τίτλοι των εργαστηριακών ασκήσεων που υπάρχουν στο CD-ROM καθώς και το κεφάλαιο στην ύλη του οποίου “κυρίως” βασίζεται η εργαστηριακή άσκηση.

Για την επιτυχή ολοκλήρωση των εργαστηριακών ασκήσεων, αρκεί ο φοιτητής να ακολουθήσει την διαδικασία που περιγράφεται σε κάθε μια από αυτές. Η δομή των εργαστηριακών ασκήσεων που έχει επιλεγεί από τους συγγραφείς είναι τέτοια που στις περισσότερες από αυτές ο φοιτητής μπορεί να απαντήσει και να υλοποιήσει μόνος του όλα όσα του ζητούνται. Σε μερικές περιπτώσεις βέβαια, οι εργαστηριακές ασκήσεις απαιτούν πολύπλοκες υλοποιήσεις. Παραδείγματα τέτοιων ασκήσεων είναι η Εργαστηριακή άσκηση #4 που αναφέρεται στη σύνθεση μουσικής και η Εργαστηριακή Άσκηση #5 που αναφέρεται στην υλοποίηση του Σχήματος σηματοδότησης DTMF.

Για την υλοποίηση των εργαστηριακών ασκήσεων απαιτείται η έκδοση 5.2.1 (ή νεότερη) του Matlab. Μερικές εργαστηριακές ασκήσεις απαιτούν m -αρχεία που δεν περιέχονται στο Matlab. Στο CD-ROM περιέχεται το εργαλείο *SP First* που περιέχει όλες τις συναρτήσεις που απαιτούνται για την επιτυχή υλοποίηση των εργαστηριακών ασκήσεων. Για περισσότερες πληροφορίες, ανατρέξτε στην Εργαστηριακή άσκηση #2.



ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Εγκαταστήστε στο Matlab το εργαλείο *SP-First*



Εργ. Ασκ.: Όλες οι Εργαστηριακές ασκήσεις περιέχονται στο CD-ROM

Πίνακας Β-1: Τίτλοι Εργαστηριακών Ασκήσεων που Περιέχονται στο CD-ROM.

<i>Εργ. Άσκηση</i>	<i>Θέμα</i>	<i>Αναφορά</i>
#1	Εισαγωγή στο Matlab	Κεφ. 2
#2α	Εισαγωγή στα Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα-Φαιν. Πολυόδευσης	Κεφ. 2
#2β	Εισαγωγή στα Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα-Εύρεση Κατεύθυνσης	Κεφ. 2
#3	ΑΜ και FM Ημιτονοειδή Σήματα	Κεφ. 3
#4	Σύνθεση Ημιτονοειδών Σημάτων	Κεφ. 3
#5	FM Σύνθεση για Μουσικά Όργανα	Κεφ. 3
#6	Ψηφιακές Εικόνες: Σ-σε-Δ και Δ-σε-Σ	Κεφ. 4
#7	Δειγματοληψία, Συνέλιξη και Επεξεργασία με Χρήση FIR Φίλτρων	Κεφ. 5
#8	Απόκριση Συχνότητας	Κεφ. 6
#9	Κωδικοποίηση και Αποκωδικοποίηση Τονικών Σημάτων	Κεφ. 6 και 7
#10	Φιλτράρισμα Ζώνης	Κεφ. 7
#11	Διεπαφή ReZ- Τα τρία Πεδία z , n και $\hat{\omega}$	Κεφ. 8
#12	Διεπαφές Χρήστη για Συνέλιξη Σημάτων	Κεφ. 9
#13	Αριθμητικός Υπολογισμός Σειρών Fourier	Κεφ. 10
#14α	Σχεδίαση με Σειρές Fourier---Γεννήτρια Ισχύος	Κεφ. 12
#14β	Σχεδίαση με Σειρές Fourier-Παραμόρφωση	Κεφ. 12
#15	Σειρές Fourier	Κεφ. 12
#16	ΑΜ Σύστημα Επικοινωνίας	Κεφ. 12
#17	Ψηφιακή Επικοινωνία: FSK Modem (Κωδικοποίηση)	Κεφ. 13
#18	Ψηφιακή Επικοινωνία: FSK Modem (Αποκωδικοποίηση)	Κεφ. 13
#19	Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier	Κεφ. 13
#20	Εξαγωγή Συχνότητων Μουσικών Τόνων	Κεφ. 13

Ευρετήριο

- Αθροιστής, 281
Αθροιστής (Adder), 125
Αιτιατότητα
 ορισμός, 303
Αιτιατότητα (Causality), 303
Αιφνίδια εφαρμοζόμενη είσοδος (Suddenly applied input), 218
Ακολουθία δέλτα (Delta sequence), 120
Ακολουθία κρουστικής απόκρισης (Impulse response sequence), 121
Ακύρωση (Nulling), 195
Ανάλυση Fourier (Fourier analysis), 51
Ανάλυση φασματογραφήματος (Spectrogram analysis), 67
Ανάστροφη δομή (Transposed form structure), 227
Ανάστροφη μορφή (Transposed form), 128
Αναδρομικά φίλτρα (Recursive filter), 215
Ανακατασκευή, 87, 99, 405
Ανακατασκευή (Reconstruction), 79
Ανακατασκευή σήματος περιορισμένου εύρους ζώνης (Bandlimited signal reconstruction), 407
Αναλογικά σήματα (Analog signals), 80
Αναλογική επεξεργασία σήματος (Analog signal processing), 270
Αναλογικό φίλτρο πρώτης-τάξης (First-order analog filter), 318
Αναπαράσταση στο πεδίο συχνότητας, 40
Ανιχνευτής φωρατή (Envelope detector), 400
Αντήχηση (Reverberation), 304
Αντίστροφες σχέσεις Euler (Inverse Euler Formulas), 474
Αντίστροφες σχέσεις του Euler (Inverse Euler formulas), 24
Αντίστροφο σύστημα, 305
Αντίστροφο φίλτρο, 392
Αντίστροφο φιλτράρισμα (Inverse filtering), 192

- Αντίστροφος DFT, 439
 Αντίστροφος DTFT, 414
 Αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier, 439
 Αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Inverse discrete Fourier transform (IDFT)), 430
 Αντιμεταθετική Ιδιότητα της Συνέλιξης (Commutative property of convolution), 134
 Αντιστάθμιση επίδρασης ενός ΓΧΑ φίλτρου (Compensation for the effect of an LTI filter), 390
 Αντισταθμιστής-καθυστερητής τρέχουσας μέσης τιμής (Delay-compensated running-average filter), 139
 Απευθείας δομή τύπου I (Direct form I structure), 226
 Απευθείας δομή τύπου II (Direct form II structure), 227
 Απευθείας μορφή (Direct form), 127
 Αποδιαμόρφωση (Demodulation), 397
 Απολύτως ολοκληρώσιμα σήματα (Absolutely integral signals), 345
 Αποπολύπλεξη (Demultiplexing), 403
 Αποσυνέλιξη, 143, 192, 392
 Αποσυνέλιξη (Deconvolution), 142
 Απόκριση FIR συστημάτων σε ημιτονοειδή (Sinusoidal response of FIR systems), 145
 Απόκριση ΓΧΑ συστημάτων σε περιοδικές διεγέρσεις, 324
 Απόκριση μόνιμης κατάστασης, 241
 Απόκριση μόνιμης κατάστασης (Steady-state response), 150
 Απόκριση σε ημιτονοειδή, 145
 Απόκριση σε ημιτονοειδή διεγερση, 315
 αλλαγή μέτρου και φάσης, 320
 Απόκριση συχνότητας
 γραφική παράσταση Loglog, 318
 Απόκριση συχνότητας (Frequency response), 146
 Απόκριση συχνότητας, γραφική παράσταση, 161
 Απόκριση των FIR συστημάτων σε ημιτονοειδής διεγέρσεις, 145
 Απόρριψης ζώνης, 388
 Απόσταση δειγμάτων (Sample spacing), 18
 Αρμονική, 47
 Αρνητικές συχνότητες, 442
 Αρνητική συχνότητα, 40
 Αρνητική συχνότητα (Negative frequency), 23
 Αρχή αβεβαιότητας, 437, 452
 Αρχή αβεβαιότητας (Uncertainty principle), 356
 Αρχή της υπέρθεσης (Principle of superposition), 130
 Αρχικές συνθήκες ηρεμίας (Initial rest conditions), 218
 Ασταθές σύστημα, 302
 Ασταθές σύστημα (Unstable system), 223
 Βάσης-2 FFT (Radix-2 FFT), 460
 Βηματική απόκριση
 IIR συστήματος πρώτης-τάξης, 222
 Βιομηχανικός δείκτης Dow-Jones (Dow-Jones industrial average), 137
 ΓΧΑ συστήματα
 ιδιότητες, 297
 σε σειρά και παράλληλα, 297, 382
 ΓΧΑ συστήματα συνεχούς-χρόνου
 αιτιατότητα, 303
 απόκριση συχνότητας, 315, 316
 ευστάθεια, 301
 Γεωμετρικές σειρές (Geometric series), 294
 Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα (ΓΧΑ) Συστήματα (Linear time-invariant (LTI) systems), 129
 Γραμμική παρεμβολή, 101
 Γραμμική παρεμβολή (Linear interpolation), 18
 Γραμμική φάση, 326
 Γραμμική-φάση (Linear-phase), 207
 Γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα, 132
 Γραμμικότητα, 130
 μετασχηματισμού Fourier, 351
 Γραμμικότητα (Linearity), 129
 Γραφικές παράστασεις Bode (Bode plots), 318
 Γωνία μιγαδικού αριθμού (Angle of complex number), 473
 Γωνιακή συχνότητα, 14
 Γωνιακή συχνότητα (Radian frequency), 9
 Δέκτης (Receiver), 398
 Δίπλευρο εκθετικό σήμα (Two-sided exponential), 358
 Δειγματολήπτης

- ορισμός, 5
- Δειγματολήπτης (Sampler), 5
- Δειγματοληψία, 79, 405, 408
 - Υποδειγματοληψία, 91
- Δειγματοληψία (Sampling), 3
- Δειγματοληψία και κρουστικό σήμα, 275
- Δεύτερος νόμος του Newton (Newton's second law), 30
- Διάσπαση σε απλά κλάσματα, 364
- Διάσπαση σε μερικά κλάσματα, 363
- Διάσπαση σε μερικά κλάσματα (Partial fraction expansion), 238
- Διαίρεση μιγαδικών αριθμών (Complex number division), 475
- Διαίρεση πολυωνύμων (Polynomial division), 363
- Διακριτική ικανότητα φασματογραφήματος (Resolution of the spectrogram), 451
- Διακριτού Χρόνου Μετασχηματισμός Fourier (Discrete-time Fourier transform (DTFT)), 412
- Διακριτού Χρόνου Μετασχηματισμός Fourier (DTFT) αντίστροφος, 414
- Διακριτού-χρόνου μετασχηματισμός Fourier (DTFT), 431
- Διακριτός μετασχηματισμός Fourier, 439
- Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier transform (DFT)), 429
- Διακρότημα, 43
- Διαμορφωτής πλάτους διπλής πλευρικής ζώνης (Double-sideband amplitude modulator (DSBAM)), 395
- Διαμόρφωση Πλάτους
 - διπλής πλευρικής ζώνης (DSBAM), 395
- Διαμόρφωση Πλάτους Διπλής Πλευρικής Ζώνης (Double-sideband amplitude modulation), 395
- Διαμόρφωση πλάτους, 45
 - μεταδιδόμενο φέρον, 399
- Διαμόρφωση πλάτους (Amplitude modulation), 42
- Διαμόρφωση πλάτους διπλής πλευρικής ζώνης με μεταδιδόμενο φέρον (Double-sideband amplitude modulation with transmitted carrier), 399
- Διαμόρφωση συχνότητας
 - τερέτισμα (Chirp), 68
 - στιγμαία συχνότητα, 69
 - συνάρτηση γωνίας, 68
- Διαμόρφωση συχνότητας (Frequency Modulation FM), 68
- Διανυσματική αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού (Complex number represented as vector), 470
- Διαπασών, 30
- Διαπασών (Tuning fork), 10
- Διαφορά φάσης, 14
- Διαφορά φάσης (Phase shift), 9
- Διαφορές πρώτης τάξης, 186
- Διαφορίση και ολοκλήρωση συνέλιξης (Differentiation and integration of convolution), 299
- CLTIdemo, 374
- Δομές υλοποίησης (Implementation structures), 226
- Δυνάμεις μιγαδικών αριθμών (Complex powers), 481
- Δυϊκότητα (Duality), 368
- Εικονική μεταβλητή ολοκλήρωσης, 289
- Εικονική μεταβλητή ολοκλήρωσης (Dummy variable of integration), 283
- Εικονικός δείκτης άθροισης, 293
- Εικόνα
 - διαβαθμίσεων του γκρι (gray-scale), 3
- Εικόνα (Image), 3
- Εκθετικό σήμα αριστερής επέκτασης (Left-sided exponential signal), 346
- Εκθετικός μιγαδικός, 474
- Ενεργός απόκριση συχνότητας (Effective frequency response), 416
- Ενεργός περιοχή, 270
- Ενεργός περιοχή (Support), 115
- Ενεργός περιοχή ακολουθίας (Support of sequence), 115
- Εξίσωση ανάλυσης Fourier, 54
- Εξίσωση διαφορών (Difference equation), 116
- Εξίσωση διαφορών τροφοδότησης προς τα εμπρός (Feed-forward difference equation), 126
- Εξομάλυνση και εικόνα (Smoothing and image), 164
- Επίδειξη Στροβοσκοπίου (Strobe demonstration), 94
- Επίπεδο- z (z -plane), 194
- Ερμηνεία της καθυστέρησης (Interpretation of delay), 170
- Εσωτερικό γινόμενο (Inner product), 53

- Ευστάθεια, 231, 301
γενικός ορισμός, 301
συνθήκη, 301
- Ευστάθεια (Stability), 223
- Ευσταθές σύστημα (Stable system), 223
- Ευσταθή συστήματα, 232
- Εύρος ζώνης (Bandwidth), 349
- Ζευγοειδές (Doublet), 287
- Ζεύγη μετασχηματισμών Fourier, 345
- Ζυγισμένο φίλτρο τρέχοντα μέσου όρου (Centralized averager), 117
- Ζωνοδιαβατό φίλτρο, 388
- Ζωνοπερατό φίλτρο, 328
- Ζωνοπερατό φίλτρο (Bandpass filter), 201
- Hamming, 446
- Hertz
Heinrich, 15
μονάδα συχνότητας, 15
- Ημιτονικά σήματα (Sine signals), 9
- Ημιτονοειδή (Sinusoids), 9
- Ημιτονοειδή σήματα (Sinusoidal signals), 9
- Ημιτονοειδής διαμόρφωση πλάτους (Sinewave amplitude modulation), 394
- Ημιτονοειδής συνιστώσα μόνιμης κατάστασης, 242
- Ηχώ
απόκριση συχνότητας, 371
μοντέλο, 371
- Ηχώ (Echo)
μοντέλο, 304
- Θεμελιώδης περίοδος, 324
- Θεμελιώδης περίοδος, 47
- Θεμελιώδης συχνότητα, 47, 54
- Θεμελιώδης συχνότητα (Fundamental frequency), 42
- Θετική συχνότητα (Positive frequency), 23
- Θεωρία Jean-Baptiste Fourier, 34
- Θεώρημα δειγματοληψίας, 86, 104, 405
- Θεώρημα δειγματοληψίας (Sampling theorem), 79
- Θεώρημα δειγματοληψίας Shannon/Nyquist, 405, 407
- Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon, 86, 105
- Θόρυβος (Noise), 118
- IIR φίλτρα δεύτερης-τάξης, 244
- Ιδανικά φίλτρα, 326
διέλευσης υψηλών συχνοτήτων, 389
διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων, 387
ζωνοπερατό, 328
καθυστέρηση, 326
κατωπερατό, 327, 387
υψηλοπερατό, 327, 389
φίλτρο διέλευσης ζώνης συχνοτήτων, 328
φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων, 327
φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων, 327
- Ιδανική ανακατασκευή, 87
- Ιδανική καθυστέρηση, 287
- Ιδανικό φίλτρο
απόρριψης ζώνης, 329
- Ιδανικός Μετατροπέας Σ -σε- Δ , 80
- Ιδανικός Μετατροπέας Σ -σε- Δ (Ideal C-to-D converter), 6
- Ιδανικός Μετατροπέας Συνεχούς-σε-Διακριτό (Ideal continuous-to-discrete converter), 6
- Ιδανικός μετατροπέας (Δ -σε- Σ) (Ideal D-to-C converter), 412
- Ιδανικός μετατροπέας Δ -σε- Σ , 87
- Ιδανικός μετατροπέας Σ -σε- Δ (Ideal C-to-D converter), 411
- Ιδανικός μετατροπέας διακριτού-σε-συνεχές (Δ -σε- Σ) (Ideal discrete-to-continuous (D-to-C) converter), 412
- Ιδανικός μετατροπέας συνεχούς-σε-διακριτό (Σ -σε- Δ) (Ideal continuous-to-discrete (C-to-D) converter), 411
- Ιδιάζον ολοκλήρωμα (Improper integral), 344
- Ιδιότητα δειγματοληψίας του κρουστικού σήματος, 276
- Ιδιότητα διαμόρφωσης (Modulation property), 369
- Ιδιότητα διαμόρφωσης συνημιτόνου (Cosine modulation property), 370

- Ιδιότητα μοναδιαίας καθυστέρησης μετασχηματισμού- z (Unit-delay property of the z -transform), 185
- Ιδιότητα ορθογωνιότητας (Orthogonality property), 53
- Ιδιότητα συζυγούς συμμετρίας, 153, 321
- Ιδιότητα συζυγούς συμμετρίας (Conjugate-symmetry property), 148
- Ιδιότητα συνέλιξης, 359
- Ιδιότητα συχνотικής ολίσθησης (Frequency shifting property), 370
- Ιδιότητα υπέρθεσης μετασχηματισμού- z , 184
- Ιδιότητα χρονικής καθυστέρησης μετασχηματισμού- z (Time-delay property of z -transform), 185
- Ιδιότητες μετασχηματισμού- z , 184
- Κέρδος (Gain), 147
- Κέρδος ΓΧΑ συστήματος, 147
- Κανονικοποιημένη γωνιακή συχνότητα (Normalized radian frequency), 81
- Κανονικοποιημένη συχνότητα, 81
- Καρτεσιανή μορφή (Cartesian form), 20, 471
- Κατωπερατό φίλτρο, 387
- Κατωπερατό φίλτρο (Lowpass filter), 157
- Κλίμακα C-μερίζονος, 67
- φασματογράφημα, 67
- Κλιμάκωση συχνότητας, 88
- Κρουστική απόκριση, 121, 280
- FIR φίλτρου, 121
- PIR συστήματος πρώτης-τάξης, 219
- Κρουστική απόκριση δωματίου (Room impulse response), 392
- Κρουστικός συρμός (Impulse train), 354, 405
- Κυκλική συχνότητα (Cyclic frequency), 14
- Κύκλωμα δειγματοληψίας και συγκράτησης (Sample-and-hold circuit), 412
- Κύρια τιμή (Principal value), 17, 162, 471
- Κύρια ψευδώνυμα, 88
- Κύριο ψευδώνυμο (Principal alias), 84
- Κύριος λοβός (Mainlobe), 435
- Matlab GUI
- CLTIdemo, 323
- DITIdemo, 173
- convdemo, 293
- con2dis, 106
- dconvdemo, 134
- zdrill, 478
- Μοдем μεταλλαγής μετατόπισης συχνότητας (Frequency-shift keying (FSK) modem), 422
- Μέση τιμή (Average value), 57
- Μέτρο (Magnitude), 473
- Μέτρο μιγαδικού αριθμού (Magnitude of complex number), 21
- Μήκος φίλτρου (Filter length), 118
- Μίκτης (Mixer), 398
- Μείωση modulo 2π , 17
- Μεταβατική απόκριση (Transient response), 150
- Μεταβατικό τμήμα (Transient part), 151
- Μετασχηματισμός Fourier
- γραμμικότητα, 351
- ιδιότητες, 354
- και ΓΧΑ συστήματα, 381
- κρουστικού σήματος, 350
- κρουστικού συρμού, 354
- μοναδικότητα, 341
- περιοδικού σήματος, 350, 352
- σταθερού σήματος, 350
- συνέλιξης, 360
- τετραγωνικού σήματος, 352
- ως όριο σειράς Fourier, 342
- ύπαρξη και σύγκλιση, 344
- Μετασχηματισμός Fourier (Fourier transform)
- ολοκλήρωμα ανάλυσης (analysis integral), 340
- ολοκλήρωμα σύνθεσης (synthesis integral), 340
- Μετασχηματισμός Fourier, ιδιότητες
- αναστροφή, 356
- διαφοροποίηση, 366
- κλιμάκωση (scaling), 355
- πίνακας, 371
- πολλαπλασιασμός σημάτων, 368
- συμμετρία, 357
- συνέλιξη, 359

- συχνοτική ολίσθηση, 370
 Μετασχηματισμός- z
 ζεύγη, 180
 ιδιότητα υπέρθεσης, 184
 ιδιότητα χρονικής καθυστέρησης, 185
 ορισμός, 180
 πίνακας μετασχηματισμών, 238
 περιοχή σύγκλισης, 229
 συνέλιξη και ο, 187
 ως ένας τελεστής, 186
 Μετατροπές Αναλογικού-σε-Ψηφιακό (Α-σε-Ψ) (Analog-to-digital (A-to-D) converter), 81
 Μετατροπές Διακριτού-σε-Συνεχές (Δ-σε-Σ) (Discrete-to-continuous (D-to-C) converter), 87
 Μετατροπές Σ-σε-Δ, 81
 Μετατροπή Διακριτού σε Συνεχές (Discrete-to-continuous conversion), 99
 Μετατροπή Συνεχούς-σε-Διακριτό (Σ-σε-Δ) (Continuous-to-discrete (C-to-D) conversion), 6
 Μετατροπή διακριτού σε συνεχές
 υπερδειγματοληψία, 102
 Μη γραμμικά συστήματα (Nonlinear systems), 131
 Μη γραμμικό σύστημα, 282
 Μη-αιτιατό φίλτρο (Noncausal filter), 116
 Μηδενικά (Zeros), 194
 Μηδενικά της $H(z)$, 194
 Μιγαδικά Πλάτη (Complex amplitudes), 329
 Μιγαδικά εκθετικά σήματα
 ορθογωνιότητα, 53
 Μιγαδικά εκθετικά σήματα (Complex exponential signals), 20
 Μιγαδικές ρίζες (Complex roots), 481
 Μιγαδικοί αριθμοί, 470
 Μιγαδικοί αριθμοί (Complex numbers), 20
 Μιγαδικό εκθετικό σήμα, 21
 Μιγαδικό πλάτος (Complex amplitude), 23
 Μοναδιαίο κρουστικό σήμα, 274
 Μοναδιαία βηματική ακολουθία (Unit-step), 140
 Μοναδιαία καθυστέρηση, 125
 Μοναδιαία καθυστέρηση (Unit delay), 122
 Μοναδιαία κρουστική ακολουθία (Unit impulse sequence), 120
 Μοναδιαία κρουστική απόκριση, 121
 Μοναδιαία κρουστική απόκριση (Unit impulse response), 120
 Μοναδιαίο κρουστικό σήμα (Unit impulse signal), 273
 Μοναδιαίος κύκλος, 193, 482
 Μοναδιαίος κύκλος (Unit circle), 193
 Μονοδιάστατο σύστημα συνεχούς-χρόνου (One dimensional continuous-time system), 4
 Μουσική κλίμακα (Musical scale), 67
 Μουσικό πεντάγραμμα (Musical score), 65
 Ο DTFT της συνάρτησης sinc, 414
 Οκτάβα (Octave), 66
 Ολοκλήρωμα κατά Riemann, 281, 342, 428
 Ορισμα μιγαδικού αριθμού (Argument of complex number), 21
 Ορισμός μετασχηματισμού- z , 180
 Πίνακας ζευγών μετασχηματισμών Fourier, 371
 Πίνακας ιδιοτήτων μετασχηματισμού Fourier, 371
 Παράγωγος
 συμβολισμός της, 278
 Παράγωγος βηματικής συνάρτησης (Derivative of the unit step), 277
 Παράγωγος κρουστικού σήματος, 287
 Παράγωγος συνέλιξης, 299
 Παράθυρο Hamming (Hamming window), 436
 Παράθυρο δεδομένων (Data window), 432
 Παράσταση στο πεδίο- συχνότητας (Frequency-domain representation), 340
 Παράσταση στο πεδίο-χρόνου (Time-domain representation), 340
 Παραγοντοποίηση πολυωνύμων- z (Factoring z -polynomials), 191
 Παραμόρφωση πολυόδευσης, 304
 Παραμόρφωση πολυόδευσης (Multipath distortion), 371
 Παρεμβολή
 Συγκράτηση Μηδενικής Τάξης, 100
 γραμμική, 101

- κυβική spline, 102
 Παρεμβολή Κυβικής Spline, 101
 Παρεμβολή με παλμούς (Interpolation with pulses), 99
 Παρεμβολή περιορισμένου εύρους (Bandlimited interpolation), 104
 Παρεμβολή περιορισμένου εύρους ζώνης (Bandlimited interpolation), 410
 Πεδίο- $\hat{\omega}$ ($\hat{\omega}$ -domain), 179
 Πεδίο- n (n -domain), 179
 Πεδίο- z (z -domain), 179
 Πεδίο-συχρότητας (Frequency-domain), 150, 331
 Πεδίο-χρόνου (Time-domain), 150, 331
 Πεπερασμένη διάρκεια, 302
 Πεπερασμένο άθροισμα Fourier (Finite Fourier sum), 428
 Περίοδος, 14, 47
 Περίοδος (Period), 10
 Περίοδος Δειγματοληψίας (Sampling period), 3
 Περίοδος δειγματοληψίας, 18
 Περιβάλλουσα, 44
 Περιοδικά σήματα, 442
 Περιοδικά σήματα (Periodic signal), 14
 Περιοδικός κρουστικός συρμός (Periodic impulse train), 405
 Περιοδικότητα της $H(e^{j\hat{\omega}})$ (Periodicity of $H(e^{j\hat{\omega}})$), 153
 Περιοχή αποκοπής (Stopband), 327
 Περιοχή διάβασης (Passband), 327
 Περιοχή μετάβασης (Transition region), 423
 Περιοχή σύγκλισης (Region of convergence), 229
 Περιστρεφόμενος δίσκος, 94
 Περιστρεφόμενος φάσσορας (Rotating phasor), 22, 23
 Πλάτος, 13
 Πλάτος (Amplitude), 9
 Πλευρικές ζώνες (Sidebands), 396
 Πολική μορφή (Polar form), 20, 471
 Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού, 471
 Πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών (Complex number multiplication), 475
 Πολλαπλασιαστής (Multiplier), 125
 Πολυμεσικά Πληροφοριακά Συστήματα (Multimedia information systems), 7
 Πολυωνυμικός πολλαπλασιασμός, 124
 Πολυωνυμικός πολλαπλασιασμός (Polynomial multiplication), 123
 Πολύπλεξη διαίρεσης συχνότητας (Frequency division multiplexing), 403
 Πολύπλεξη διαίρεσης συχνότητας (Frequency-division multiplexing) (FDM), 403
 Πομπός (Transmitter), 398
 Πραγματικό μέρος (Real part), 471
 Προσεταιριστική Ιδιότητα της Συνέλιξης (Associative property of convolution), 135
 Πρόσθεση μιγαδικών αριθμών (Complex number addition), 477
 Πρόσθεση φασόρων (Phasor addition), 25
 Πόλοι (Poles), 194
 Πόλοι της $H(z)$, 194
 Ρίζες της μονάδας (Roots of Unity), 482
 Ρίζες της μονάδας (Roots of unity), 200
 Ραδιοφωνική μετάδοση AM (AM radio), 45
 Ρητή συνάρτηση, 363
 Ρητή συνάρτηση (Rational function), 224
 Ρητός μετασχηματισμός Fourier (Rational Fourier transform), 359
 Ρυθμός Nyquist (Nyquist rate), 86, 424
 Ρυθμός δειγματοληψίας (Sampling rate), 80
 Σήμα
 διακριτού-χρόνου (discrete-time), 3
 ομιλίας (speech), 2
 συνεχούς-χρόνου (continuous-time), 2
 Σήμα (Signal), 1, 3
 Σήμα διακριτού-χρόνου, 80
 Σήμα διαμορφωσης (Modulating signal), 395
 Σήμα ορθογώνιου παλμού (Rectangular pulse signal), 347
 Σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης, 407
 Σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης (Bandlimited signal), 349
 Σήμα-εισόδου (Input-signal), 114
 Σήμα-εξόδου (Output-signal), 114
 Σήματα

- βίντεο , 4
- δύο διαστάσεων (two-dimensional), 4
- ημιτονοειδή, 9
- ημιτόνου, 9
- ομιλίας, 2
- συνημιτόνου, 9
- Σήματα (Signals), 2
- Σήματα FM, 69
- Σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης, 105, 405
- Σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης (Bandlimited signals), 105
- Σήματα συνεχούς-χρόνου, 80
 - άπειρου μήκους, 270
 - δίπλευρης επέκτασης, 271
 - δεξιάς επέκτασης (right-sided), 271
 - μονόπλευρα, 271
 - πεπερασμένου μήκους, 272
- Σειρές Fourier, 52, 329
 - εξίσωση σύνθεσης, 54
 - συντελεστές, 55
 - σφάλμα προσέγγισης (approximation error), 61
 - σύγκλιση (convergence), 61
 - τετραγωνικό κύμα, 57
 - φαινόμενο Gibbs, 61
 - φασματικές γραμμές, 55
- Σειρές Fourier
 - ορθογωνιότητα, 53
- Σειρές Fourier (Fourier series), 51
- Σημείο ημίσειας ισχύος (Half-power point), 334
- Σταθερός (DC) συντελεστής, 57
- Σταθμισμένη τρέχουσα μέση τιμή (Weighted running average), 117
- Στιγμιαία συχνότητα (Instantaneous frequency), 69
- Στροβοσκόπιο, 94
- Συγκράτηση Μηδενικής Τάξης (Zero-order hold), 100
- Συζυγής μιγαδικού αριθμού (Conjugate of complex number), 481
- Συμμετρία ημίσειας κύματος, 74
- Συμμετρικό φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής, 138
- Συμπλήρωση σήματος με μηδενικά (Zero-padding), 445
- Συνάρτηση Dirichlet, 161
- spectgr, 450
- Συνάρτηση γωνίας (Angle function), 68
- Συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$
 - IIR φίλτρον, 224
- Συνάρτηση μεταφοράς (System function), 182
- Συνάρτηση πλάτους (Amplitude function), 161
- Συνέλιξη
 - αναστροφή και μετατόπιση, 290
 - αντιμεταθετική ιδιότητα, 134
 - προσεταιριστική ιδιότητα, 135
- Συνέλιξη (Convolution), 122
- Συνέλιξη και ΓΧΑ συστήματα, 132
- Συνέλιξη και μετασχηματισμός- z (Convolution and the z -transform), 187
- Συνέλιξη κρουστικών συναρτήσεων, 287
- Συνέλιξη στο Matlab (Convolution in Matlab), 124
- Συνέλιξη συνεχούς-χρόνου
 - αντιμεταθετική ιδιότητα, 285
 - επιμεριστική ιδιότητα, 285
 - ιδανικό σύστημα ολοκλήρωσης, 286
 - προσεταιριστική ιδιότητα, 285
 - σύστημα διαφόρισης, 286
 - σύστημα ιδανικής καθυστέρησης, 287
 - ταυτοτικό στοιχείο, 286
- Συνέλιξη ως τελεστής (Convolution as an operator), 133
- Συνδεση ΓΧΑ συστημάτων σε σειρά, 190
- Συνδεσμολογία σε σειρά ΓΧΑ συστημάτων (Cascaded LTI systems), 135
- Συνδεσμολογίες σε σειρά ΓΧΑ συστημάτων, 159
- Συνελικτικό άθροισμα, 281
 - υπολογισμός, 293
- Συνελικτικό άθροισμα (Convolution sum), 132
- Συνελικτικό ολοκλήρωμα
 - υπολογισμός, 289
- Συνελικτικό ολοκλήρωμα (Convolution integral), 281
- Συνεσμολογία σε σειρά (Cascade connection), 135
- Συνεχές ρεύμα (Direct current), 16
- Συνεχής (DC) συνιστώσα, 41
- Συνεχής συνιστώσα, 52

- Συνεχούς Χρόνου Μετασχηματισμός Fourier (Continuous-time Fourier transform (CTFT)), 414
- Συνημιτονικά κύματα (Cosine waves), 9
- Συνημιτονικά σήματα (Cosine signals), 9
- Συνημιτονικό σήμα διακριτού-χρόνου, 82
- Συνθετικό Φωνήεν (Synthetic Vowel), 47
- Συστήματα
ορισμός, 4
- Συστήματα ανατροφοδότησης (Feedback systems), 215
- Συστήματα διακριτού-χρόνου, 114
- Συστήματα περιγραφόμενα από διαφορικές εξισώσεις (Systems described by differential equations), 367
- Συστήματα συνεχούς-χρόνου, 279
ιδανική καθυστέρηση, 383
ιδανικό σύστημα καθυστέρησης, 280
ιδανικός διαφοριστής, 280
ιδανικός ολοκληρωτής, 280
κρουστική απόκριση, 280
σύστημα ιδανικής καθυστέρησης, 365
σύστημα τετραγώνου, 280
- Συχνοτική διακριτή ικανότητα, 453
- Συχνοτική διακριτική ικανότητα, 438
- Συχνοτική διακριτότητα (Frequency resolution), 435
- Συχνότητα
γωνιακή, 14
κυκλική, 14
- Συχνότητα αναδίπλωσης, 93
- Συχνότητα αποκοπής, 335, 349
- Συχνότητα αποκοπής (Cutoff frequency), 327
- Συχνότητα δειγματοληψίας (Sampling frequency), 407
- Συχνότητα διακριτού-χρόνου (ω), 82
- Συχνότητα διακριτού-χρόνου (Discrete-time frequency), 82
- Συχνότητα φέροντος (Carrier frequency), 45, 395
- Συχνότητες αποκοπής, 328
- Σχέση DFT και CTFT, 432
- Σχέση DFT και DTFT, 431
- Σχέση DTFT και CTFT, 431
- Σχηματικά διαγράμματα (Block diagrams), 5, 126
- Σύνδεση συστημάτων σε σειρά, 190
- Σύνθεση Fourier (Fourier synthesis), 51
- Σύστημα
διακριτού-χρόνου, 5
συνεχούς-χρόνου, 5
συνεχούς-χρόνου (Continuous-time system), 5
- Σύστημα (System), 1, 4
- Σύστημα FIR
απόκριση συχνότητας, 146
- Σύστημα ορθογώνιας διαμόρφωσης (Quadrature modulation system), 420
- Σύστημα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (Finite impulse response (FIR) system), 122
- Σύστημα αναπαραγωγής CD (CD audio system), 6
- Σύστημα αντιστάθμισης (Compensator system), 392
- Σύστημα διαμόρφωσης μονής πλευρικής ζώνης (Single sideband system (SSBAM)), 397
- Σύστημα διαμόρφωσης πλάτους, 282, 369
- Σύστημα διαφορών πρώτης-τάξης (First-difference system), 155
- Σύστημα διαφοριστής, 283
- Σύστημα ιδανικής χρονικής καθυστέρησης, 365
- Σύστημα καθυστέρησης, 154
- Σύστημα καθυστέρησης (Delay system), 122
- Σύστημα μετάδοσης AM (AM broadcast system), 403
- Σύστημα μοναδιαίας-καθυστέρησης (Unit-delay system), 122
- Σύστημα ολοκλήρωσης, 282
- Σύστημα παλμοκωδικής διαμόρφωσης (amplitude modulation (PAM) system), 423
- Σύστημα παραμόρφωσης (Distorting system), 392
- Σύστημα τετραγώνου, 130
- Σύστημα τετραγώνου (Squarer system), 4
- Σύστημα τρέχουσας τιμής ολοκληρώματος (Running integral system), 384
- Σύστημα χρονικής αναστροφής, 131
- Σύστημα χρονικής αναστροφής (Time-flip system), 130
- Tukey J. W. και Cooley J. W., 441

- Τάξη FIR φίλτρου (Order of FIR filter), 118
 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier, 441
 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier transform (FFT), 430
 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT), 441, 460
 Τελεστής μοναδιαίας καθυστέρησης (Unit-delay operator), 186
 Τελεστικός συμβολισμός
 σε σχηματικά διαγράμματα, 187
 Τελεστικός συμβολισμός (Operator notation), 186
 Τερέτισμα (Chirp), 68
 Τερέτισματα (σήματα), 69
 Τετραγωνική μορφή (Rectangular form), 471
 Τετραγωνική μορφή μιγαδικού αριθμού, 471
 Τετραγωνικό κύμα, 56, 329
 γραφική παράσταση φάσματος, 58
 μέση τιμή, 57
 συνεχής (DC) τιμή, 57
 συντελεστές Σειράς Fourier, 57
 σύνθεση, 58
 Τετραγωνικό παράθυρο, 434
 Τετραγωνικό παράθυρο (Rectangular window), 432
 Τιμήμα μόνιμης κατάστασης (Steady-state part), 151
 Τρέχουσα τιμή ολοκληρώματος, 286
 Τριγωνικό κύμα, 59
 συντελεστές σειράς Fourier, 60
 σύνθεση, 60
 Τριγωνομετρικές ταυτότητες (Trigonometric identities), 13
 Τροφοδότηση προς τα εμπρός
 συντελεστές, 216
 Τύπος συνελικτικού αθροίσματος (Convolution sum formula), 133
 Τύπος του DeMoivre, 482
 Τύπος του Euler, 474
 Τύπος του Euler (Euler's formula), 21

 Υπέρθθεση, 331
 αρχή της, 282
 Υπέρθθεση (Superposition), 130

 Υπέρθθεση και απόκριση συχνότητας (Superposition and the frequency response), 147
 Υπερδειγματοληψία, 102
 Υπερδειγματοληψία (Over-Sampling), 89
 Υψηλερατό φίλτρο, 327, 389

 Φάση (Phase), 473
 Φάσμα
 δίπλευρης επέκτασης, 40
 ορισμός, 39
 Φάσμα (Spectrum), 39
 Φάσμα βασικής ζώνης (Baseband spectrum), 396
 Φάσμα σήματος διακριτού-χρόνου, 85, 89
 Φάσορας
 πρόσθεση, 26
 Φάσορας (Phasor), 23
 Φέρον (Carrier), 395
 Φέρον σήμα (Carrier signal), 45
 Φίλτρα ακύρωσης (Nulling filters), 196
 Φίλτρα διέλευσης συχνοτήτων, 387
 Φίλτρα διέλευσης συχνοτήτων (Frequency selective filters), 386
 Φίλτρο FIR (FIR filter), 115
 Φίλτρο ανακατασκευής (Reconstruction filter), 410
 Φίλτρο απόρριψης ζώνης συχνοτήτων, 329
 Φίλτρο διέλευσης ζώνης συχνοτήτων, 203, 419
 Φίλτρο διέλευσης ζώνης συχνοτήτων (Bandpass filter), 201
 Φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων (Lowpass filter), 157
 Φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής L -σημείων, 199
 Φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής L -σημείων, 160
 Φίλτρο τρέχουσας μέσης τιμής (Running-average filter), 114
 Φαινόμενο πολυόδευσης (multipath fading), 38
 Φανταστικό μέρος (Imaginary part), 471
 Φασματογράφημα (Spectrogram), 65
 Φασματικές συνιστώσες (Spectral components), 42
 Φασματική ανάλυση περιοδικών σημάτων (Spectrum analysis of periodic signals), 447

- Φασματική ανάλυση σημάτων πεπερασμένου μήκους (Spectrum analysis of finite-length signals), 445
- Φασματική γραμμή (Spectral line), 41
- Φασματογράφημα
Matlab, 67
παίνου, 67
- Φασματογράφημα (Specgram), 67
- Φασματογράφημα (Spectrogram), 448
- Φασματογράφημα δειγματοληπτημένου περιοδικού σήματος, 450
- Φασματογράφημα ευρείας ζώνης (Wideband spectrogram), 458
- Φασματογράφημα σήματος ομιλίας, 455
- Φασματογράφημα στενής ζώνης (Narrowband spectrogram), 457
- Spectrograms in Matlab, 450
- Φιλτράρισμα, 362
δειγματοληπτημένων σημάτων συνεχούς χρόνου, 167
- Φιλτράρισμα (Filtering), 331
- Φιλτράρισμα FIR (FIR filtering), 137
- Φιλτράρισμα διακριτού-χρόνου (Discrete-time filtering), 417
- Φιλτράρισμα τρέχουσας μέσης τιμής (Running-average filtering), 160
- Φιλτραρισμένα δειγματοληπτημένα σήματα συνεχούς χρόνου (Filtered sampled continuous-time signals), 167
- Φιλτραρισμένο σήμα ομιλίας (Filtered speech), 459
- Φυσική του διαπασών (Physics of tuning fork), 30
- Φωρατής (Envelope), 44, 395, 399
- Χρονικά-εξαρτημένος διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Time-dependent discrete Fourier transform), 448
- Χρονικά-μεταβαλλόμενο σύστημα, 282
- Χρονική -κυματομορφή (Time-waveform), 2
- Χρονική αμεταβλητότητα, 129
- Χρονική αμεταβλητότητα (Time invariance), 129
- Χρονική καθυστέρηση σήματος, 17
- Χρονική ολίσθηση (Time shift), 16
- Χρονική προώθηση σήματος, 17
- Χρονική-παραθύρωση (Time-windowing), 432
- Χρονο-Συχνотικό Φάσμα (Time-frequency spectrum), 65
- Χρονο-Συχνотικό φάσμα, 65
- Ψευδωνυμία, 82, 405, 408
- Ψευδωνυμία (Aliasing) (Αναδίπλωση (Folding)), 407
- Ψευδώνυμο, 84
αναδίπλωση, 84
κύριο, 84
- Ψηφιακή επεξεργασία σημάτων συνεχούς-χρόνου (Discrete-time processing of continuous-time signals), 415