ΣΗΜΑΤΑ

II

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Αντικείμενο

Κάθε σήμα αποτελείται από πληροφορία και θόρυβο

Βρίσκω το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος με μετασχ. Fourier

Βασική Υπόθεση: Το σήμα πληροφορίας και το σήμα θορύβου δεν περιέχουν κοινές συχνότητες

1.2 Fourier Transform

Ορίζεται από τις σχέσεις:

$$F\{x(t)\} = X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, d\Omega$$

$$F^{-1}\{X(j\Omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega)\, e^{j\Omega t}\, dt$$

Μερικές από τις βασικές ιδιότητες είναι:

- Γραμμικότητα $\quad \alpha x(t) + b y(t) \xleftrightarrow{F} \alpha X(j\Omega) + b Y(j\Omega)$
- Χρ. Ολίσθηση $\quad x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{j\Omega t_0} X(j\Omega)$
- Συχν. Ολίσθηση $\quad e^{j\Omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{F} X(j(\Omega-\Omega_0))$
- Χρ. Παραγώγιση $\quad x^{(n)}(t) \xleftrightarrow{F} (-j\Omega)^n X(j\Omega)$
- Συχν. Παραγώγιση $\quad t^n x(t) \xleftrightarrow{F} j^n X^{(n)}(j\Omega)$
- Χρ. Κλιμάκωση $\quad x(\alpha t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|\alpha|} X(j\frac{\Omega}{\alpha})$
- Θ. Parseval $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$
- Συνέλιξη $\quad x(t) * y(t) \xleftrightarrow{F} X(j\Omega)\, Y(j\Omega)$

1.2.1 sinc

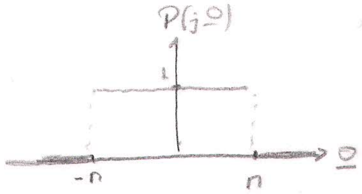
Μια πολύ σημαντική συνάρτηση στην επεξεργασία σήματος

Ορίζεται ως $\quad \mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$

Ισχύουν επίσης τα εξής:

παραθυρική συνάρτηση

- $\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} P(j\Omega) = \begin{cases} 1, & -\pi \le \Omega \le \pi \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$



- Για $t=0$, $\mathrm{sinc}(t)=1$
- Για $t=\pm1,\pm2,\dots$, $\mathrm{sinc}(t)=0$

1.2.2 Σειρά Fourier

Αν η x(t) είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο T_0 τότε

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\Omega_0 t}$$

$$\text{με } C_n = \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jn\Omega_0 t}$$

1.3 Laplace Transform

Ορίζεται από την σχέση

$$\mathcal{L}_\alpha\{x(t)\} = X(s) = \int_\alpha^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

όπου $s = \alpha + j\Omega$

Για τον Μετασχ. Laplace ισχύουν ιδιότητες παρόμοιες με του Μετασχ. Fourier

- Γραμμικότητα, Χρ. και s ολίσθηση, παραγώγιση, συνέλιξη
- Θ. Αρχικής Τιμής $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$
- Θ. Τελικής Τιμής $x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

1.4 Z Transform

Εδώ μιλάμε για σήματα διακριτού χρόνου x_n, $n \in Z$

Ορίζεται από την σχέση

$$Z_\alpha\{x_n\} = X(z) = \sum_{m=\alpha}^{+\infty} x_n z^{-n}$$

όπου $z = re^{j\phi} = re^{j(\omega t+\theta)}$

Μερικές από τις ιδιότητες του είναι

- Γραμμικότητα
- Χρ. Ολίσθηση $x_{n-n_0} \overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X(z)$
- Συχν. Ολίσθηση $\alpha^n x_n \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(\alpha^{-1}z)$

1.5 Systems Theory

Ασχολούμαστε με ΓΧΑ Συστήματα. Αυτά έχουν βασικές ιδιότητες:

- Η συμπεριφορά τους στην είσοδο $x(t)$ περιγράφεται από την σχέση

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

όπου $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του εν λόγω συστήματος, η έξοδος του δηλαδή όταν ως είσοδο θέσω την $\delta(t)$

‼ Μπορώ να ερμηνεύσω τον συνελικτικό τύπο ως εξής: η έξοδος είναι ένας weighted average της ανεστραμμένης εισόδου $x(t)$

- Αν $h(t) = 0 \ \forall t < 0$ τότε το σύστημα είναι αιτιατό, η έξοδος δηλαδή εξαρτάται μόνο από προηγούμενες εισόδους.
  Τα αιτιατά συστήματα είναι τα πιο εύκολα υλοποιήσιμα

- BIBO-stability Ένα ΓΧΑΣ θα είναι BIBO-ευσταθές αν για φραγμένη είσοδο μας δίνει φραγμένη έξοδο. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για αυτό είναι $\|h(t)\|_1 < \infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$

1.5.1 Transfer Function

Για τα ΓΧΑ Συστήματα ισχύει $Y(s) = H(s)X(s) \Leftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

(αντ. για τα διακριτού χρόνου $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$)

Η $H(s)$ καλείται απόκριση συχνοτήτων και μπορεί να εξαχθεί εύκολα από την διαφορική εξίσωση που περιγράφει το εκάστοτε ΓΧΑΣ (υπάρχει πάντα)

Στην γενική περίπτωση η transfer function θα είναι ρητή συνάρτηση της μορφής:

$$H(s) = \frac{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (\text{αντ. } H(z))$$

$$= \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- Επίσης πρέπει $\deg(P(s)) < \deg(Q(s))$ αλλιώς η $h(t)$ έχει παραγώγους της $\delta(t)$ και απορρίπτεται

τα s_i τ.ω $P(s_i) = 0$ ονομάζονται μηδενικά

τα s_j τ.ω $Q(s_j) = 0$ ονομάζονται πόλοι

Για να έχω αιτιατό ευσταθές σύστημα πρέπει:
- → continuous: όλοι οι πόλοι p_i, $Re\{p_i\} < 0$
- → discrete: όλοι οι πόλοι p_i να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου

1.6 Συνήθεις Μετασχηματισμοί

- Fourier

$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1 \qquad \delta(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\Omega t_0}$

$e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\Omega+\alpha}$

- Laplace

$\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1$

$u(t) \xleftrightarrow{L} 1/s$

$e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+\alpha} \quad , Re\{s\} > -\alpha$

- Z

$\delta[n] \xleftrightarrow{Z} 1$

$u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$

$\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$

2 ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ Κ' ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

2.1 Ψηφιακή Συχνότητα

Στον συνεχή χρόνο έχω:

Περίοδος T sec , συχνότητα $f = \frac{1}{T} \cdot Hz = \frac{\text{επαναλήψεις}}{\text{sec}}$

κυκλική συχνότητα $\underline{\Omega} = \frac{2\pi}{T}$, $\underline{\Omega} = 2\pi f$

Στον διακριτό χρόνο έχω:

Περίοδος N δείγματα, συχνότητα $\lambda = \frac{1}{N}$, κυκλ. συχνότητα $\omega = 2\pi\lambda$

- $\omega \in [-\pi, \pi]$

Απ: Έχω $N \in \mathbb{Z}$. Για να δημιουργήσω μεταβολή στο σήμα, πρέπει να έχω τουλ. 2 δείγματα/περίοδο (αλλιώς θα είχα σταθερό σήμα)
Άρα $N \in [2, +\infty)$ και συνεπώς $\lambda = \frac{1}{N} \in [0, \frac{1}{2}]$
$\omega = \frac{2\pi}{N} \in [0, \pi]$
Αν θεωρήσω και αρνητικές συχνότητες, $\omega \in [-\pi, \pi]$

2.2 Δειγματοληψία

Βασικές Έννοιες

Στην κανονική (ομοιόμορφη) δειγματοληψία παίρνω ένα δείγμα κάθε κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί λοιπόν ανάμεσα σε 2 διαδοχικά δείγματα ονομάζεται περίοδος δειγματοληψίας T_s
Αντίστοιχα προκύπτει και η συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 1/T_s$
Προκύπτει λοιπόν το διακριτού χρόνου σήμα

$$x[n] = x(nT_s) \quad , n \in \mathbb{Z}$$

Συχνότητες Δειγματοληπτημένου Σήματος

Το λ μετριέται σε $\frac{\text{κύκλους}}{\text{δείγμα}}$. Αν θέλαμε να βρούμε το αναλογικό του αντίστοιχο θα έπρεπε να είχαμε κύκλους/sec. Αφού όμως 1 δείγμα κάθε T_s, έχω:

$$f = \lambda \frac{1}{T_s} = \lambda f_s \Longrightarrow \underline{f = \lambda f_s}$$

Αφού όμως $\lambda \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ τότε $f \in [-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}]$

> Συνεπώς οι συχνότητες του δειγματοληπτημένου σήματος δεν μπορούν να υπερβαίνουν το μισό της συχνότητας δειγματοληψίας

2.3 Αναδίπλωση

Πρόβλημα 1 "Δειγματοληψία με $f_s < f_0$"

Έστω πως $x_1(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ δειγματοληπτείται με T_s. Θα προκύψει το σήμα $x_1[n] = \cos(2\pi f_0 n T_s) = \cos(2\pi \lambda_0 n)$

Έστω πως δειγματοληπτώ το $x_2(t) = \cos(2\pi f_0' t)$ με ίδιο f_s. Θα προκύψει αντίστοιχα το $x_2[n] = \cos(2\pi f_0' n T_s) = \cos(2\pi \lambda_0' n)$

Έχω $x_1[n] = x_2[n] \Leftrightarrow \cos(2\pi \frac{f_0}{f_s} n) = \cos(2\pi \frac{f_0'}{f_s} n)$

$$\Leftrightarrow f_0' = f_0 \pm \left[\frac{f_0}{f_s}\right] f_s$$

$[x]$ = ακέραιο μέρος του x

$$\text{ή } \lambda_0' = \lambda_0 \pm \underbrace{[\lambda_0]}_{k}$$

Αφού τότε $\cos(2\pi \frac{f_0'}{f_s} n) = \cos(2\pi \frac{f_0 \pm [\frac{f_0}{f_s}] f_s}{f_s} n)$

$$= \cos(2\pi \frac{f_0}{f_s} n + \cancel{2\pi k n}) = \cos(2\pi \frac{f_0}{f_s} n)$$

Άρα αν ένα σήμα περιέχει και τις δύο συχνότητες f_0, f_0' και $\left[\frac{f_0}{f_s}\right] > 0 \Leftarrow f_0 > f_s$, αυτές οι συχνότητες θα <u>αναδιπλωθούν</u> μόλις δειγματοληπτήσω και το σήμα που θα προκύψει δεν θα είναι σωστό

Πρόβλημα 2 "Δειγματοληψία με $f_s > f_0$ και $f_s < 2f_0$"

Εδώ πλέον $\left[\frac{f_0}{f_s}\right] = 0$ άρα δεν αναφέρομαι στο ίδιο πρόβλημα με πριν.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, εξισώνω τα $x_1[n]$, $x_2[n]$ και προκύπτει η εξής συνθήκη:

$$x_1[n] = x_2[n] \Leftrightarrow \dots \Rightarrow f_0' = f_s - f_0$$
$$\text{ή } \lambda_0' = 1 - \lambda_0$$

Δηλαδή εδώ μπορεί να μην χάνω ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας του σήματος μου, αλλά η συχνότητα μου θα αναδιπλωθεί μέχρι να γίνει μικρότερη από $f_s/2$ (αφού $\frac{f_s}{2} < f_0 < f_s$, $f_s - f_0 \in (0, f_s/2]$)

→ Παράδειγμα → βιβλίο, σελ. 12

Έστω $x(t) = \cos(2\pi\, 1.8t) + 0.3\cos(2\pi\, 5.2t)$

Άρα έχω $f_1 = 1.8$, $f_2 = 5.2$

Αν δειγματοληπτήσω με $T_s = 1 \Leftrightarrow f_s = 1$ τότε

- Αναδίπλωση f_1: $\underbrace{1.8 - 1 = 0.8}_{\text{Αφού } f_s < f_1 \text{ χάνω πολλαπλάσια } f_s} \rightarrow \underbrace{1 - 0.8 = 0.2}_{\text{Εδώ } f_1 > f_s/2 \text{ άρα θα βρω το συμμετρικό της } f_1 \text{ ως προς } f_s/2}$
- Αναδίπλωση f_2: $5.2 - 5 = 0.2$

Άρα $x[n] = \cos(2\pi\, 0.2n) + 0.3\cos(2\pi\, 0.2n) = 1.3\cos(2\pi\, 0.2n)$

Παρ. 1 Αν συμβεί αναδίπλωση δεν μπορώ να γυρίσω στο αρχικό $x(t)$

Παρ. 2 Αν συμβεί αναδίπλωση, μπορεί διάφορες κ' πληροφορία να αναδιπλωθούν στην ίδια συχνότητα → καταστροφή.

Παρ. 3 Εν δυνάμει, μία απειρία από σήματα μπορούν να αντιστοιχιστούν στο ίδιο σήμα για δεδομένη συχνότητα δειγματοληψίας

2.4 Discrete Time Fourier Transform

Στον συνεχή χρόνο, για το αναλογικό σήμα $x(t)$ έχω:

$$F\{x(t)\} = X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

Έστω τώρα το σήμα $x[n] = x(nT_s)$. Ορίζω τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου ως εξής:

$$F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Παρατηρώ τις εξής διαφορές ανάμεσα στους μετασχηματισμούς Fourier συνεχούς κ' αναλογικού χρόνου:

- Ο DTF είναι μεταβλητής ω
- Στον CTF, $\Omega \in (-\infty, +\infty)$ ενώ στον DTF, $\omega \in [-\pi, \pi]$
- Ο DTF είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π

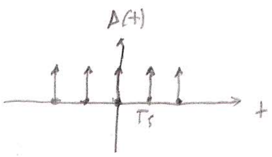
  αφού $e^{j(\omega+2\pi k)n} = e^{j\omega n}$ άρα $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$
- Ο DTF είναι ειδική περίπτωση του μετασχ. Z, για $r=1 \rightarrow z = e^{+j\omega}$

Σχέση DTFT - CTFT

Ισχύει:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(j\left(\Omega - \frac{2n\pi}{T_s}\right)\right)$$

Απ: Έστω $\Delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_s)$. Η $\Delta(t)$ είναι περιοδική άρα από σειρά Fourier έχω:



$$\Delta(t) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\frac{2n\pi}{T_s}t} \quad (1)$$

Έχω

$$x(t)\Delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-nT_s) \underset{\text{delta property}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\,\delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta(t-nT_s) \quad (2)$$

Τώρα:

$$F\{x(t)\Delta(t)\} \overset{(2)}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,e^{-jn\Omega T_s} = X(e^{j\omega})$$

Επίσης:

$$F\{x(t)\Delta(t)\} \overset{(1)}{=} \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\{x(t)e^{j\frac{2\pi n}{T_s}t}\} \underset{\text{ιδιότητα συχν. ολίσθησης}}{=} \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(j\Omega - j\frac{2\pi n}{T_s}\right)$$

DTFT και Αναδίπλωση

Είδαμε λοιπόν πως $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(j\frac{\omega-2n\pi}{T_s}\right)$

$$= \underbrace{\frac{1}{T_s}X\left(j\frac{\omega}{T_s}\right)}_{n=0} + \underbrace{\frac{1}{T_s}X\left(j\frac{\omega-2\pi}{T_s}\right)}_{n=1} + \underbrace{\frac{1}{T_s}X\left(j\frac{\omega+2\pi}{T_s}\right)}_{n=-1} + \dots$$

Άρα ο $X(e^{j\omega})$ αποτελείται από ολισθημένες κατά 2π επαναλήψεις του ίδιου κεντρικού όρου $\frac{1}{T_s}X\left(j\frac{\omega}{T_s}\right)$

- Για το πως συμβαίνει η αναδίπλωση (όψεις κτλ) βλ. Βιβλίο σελ. 15
- Αν $\Omega \in (-\infty, +\infty)$ τότε συμβαίνει πάντα αναδίπλωση.

Γενική απόδειξη

Έστω το $|X(j\Omega)|$ με Ω_m, τότε δειγματοληπτώ με Ω_s και έχω $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum X(\Omega - n\Omega_s)$

Για όχι επικάλυψη, πρέπει $\Omega_s - \Omega_m > \Omega_m \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{\Omega_s \geq 2\Omega_m}$

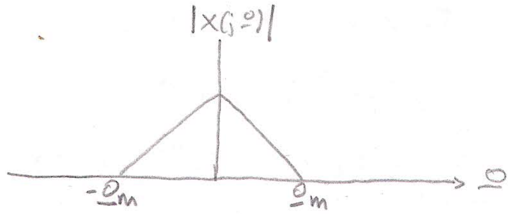
$X(\Omega)$, Ω_m

$X(\Omega - \Omega_s)$, $\Omega_s - \Omega_s$, Ω_s

2.5 Θεώρημα Δειγματοληψίας

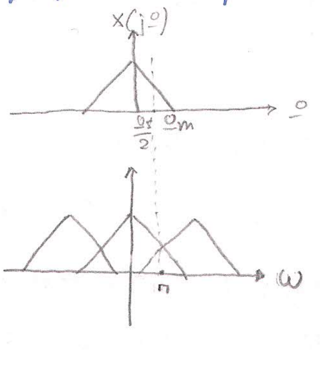
Θ. Shannon Για να μην έχω απώλεια πληροφορίας κατά την δειγματοληψία και ακόμη να μπορώ να ανακατασκευάσω το $x(t)$ από το $x[n]$ αρκεί να δειγματοληπτήσω με $f_s \geq 2f_m$, όπου f_m η μέγιστη συχνότητα του $x(t)$

Ερμηνεία Έστω λοιπόν πως έχω το $x(t)$ με μέγιστη συχνότητα f_m (αντ. Ω_m) και τον μετασχ. Fourier του $X(j\Omega)$. Άρα θα έχω την μορφή



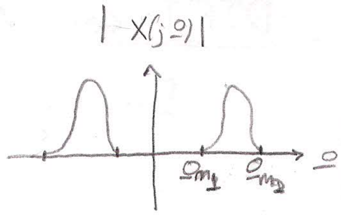
Αυθαίρετα θεωρώ τριγωνική μορφή, έχω όμως πάντα άρτια συμμετρία

Αν δειγματοληπτήσω με $f_s < 2f_m \Rightarrow \Omega_s < 2\Omega_m$ τότε αφού ο $X(e^{j\omega})$ είναι άθροισμα απείρων shift-αρισμένων κεντρικών όρων $X(j\Omega)$ θα έχω αναδίπλωση:



Αυτό δεν συμβαίνει αν $f_s > 2f_m$!

Γενίκευση του Θ. Δειγματοληψίας



Στο Θ. Shannon θεώρησα πως το σήμα περιέχει συχνότητες στο διάστημα $[0, f_m]$. Αν όμως περιέχει στο $[f_{m_1}, f_{m_2}]$?

> <u>Γενικευμένο Θ. Δειγματοληψίας</u> Αν το $x(t)$ περιέχει συχνότητες $[f_{m_1}, f_{m_2}]$ και $k=\left\lfloor \frac{f_{m_1}}{f_{m_2}-f_{m_1}} \right\rfloor > 0 \Leftrightarrow f_{m_1} \le f_{m_2} \le 2f_{m_1}$ τότε μπορώ να κάνω δειγματοληψία χωρίς απώλεια πληροφορίας αν $f_s \in \left[\frac{2f_{m_2}}{k+1}, \frac{2f_{m_1}}{k}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{2f_{m_2}}{2}, \frac{2f_{m_1}}{1}\right] \cup \left[2f_{m_2}, +\infty\right)$

2.6 Ανακατασκευή

Έστω πως έχω δειγματοληπτήσει το $x(t)$ με $f_s \ge 2f_m$ και έχω πάρει το $x[n]$
Είδαμε στο 2.4 πως ισχύει $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(j\frac{\omega-2n\pi}{T_s}\right)$

Αφού δεν έχω επικάλυψη, μπορώ να γράψω

$$X(j\underbrace{\Omega}_{\Omega=\frac{\omega}{T_s}}) = \begin{cases} T_s X(e^{j\omega}), & -\pi \le \omega \le \pi \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Αν τώρα $P(j\omega) = F\{sinc(t)\}$ τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$X\left(j\frac{\omega}{T_s}\right) = T_s X(e^{j\omega}) P(j\omega) =$$

$\omega=\Omega T_s$

$$\Leftrightarrow X(j\Omega) = T_s X(e^{jT_s\Omega}) P(jT_s\Omega)$$

DTFT{}

$$\Leftrightarrow X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jnT_s\Omega} T_s P(jT_s\Omega)$$

$F^{-1}\{\}$

$$\Leftrightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] F^{-1}\left\{e^{-jnT_s\Omega} T_s P(jT_s\Omega)\right\}$$

ιδιότητες Fourier κλιμάκωση και ολίσθηση

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, sinc\left(\frac{t}{T_s} - n\right)}$$

Η ερμηνεία της παραπάνω σχέσης είναι απλή:

- Αφού για $t \in \{\pm1, \pm2, \dots\}$ $sinc(t) = 0$ και $sinc(0) = 1$, σε κάθε σημείο δειγματοληψίας nT_s, $n=0,\pm1,\dots$ θα μηδενίζεται η συνεισφορά στο άθροισμα όλων των δειγμάτων εκτός από το δείγμα που πήραμε την χρονική στιγμή αυτή.
- Σε κάθε άλλη χρονική στιγμή, όλα τα δείγματα συνεισφέρουν στο ανακατασκευασμένο σήμα με ποσοστό που καθορίζει η sinc.
Αυτό προϋποθέτει πως κάθε $x(t_i)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $x[n]$ που ισχύει από το γεγονός πως $f_m < \infty$!

2.6.1 Ατελής Ανακατασκευή

Είδαμε πως μπορούμε να κάνουμε τέλεια ανακατασκευή με $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}-n\right)$

Όμως ανακύπτουν τα εξής προβλήματα:

- Όλα τα δείγματα συνεισφέρουν στην ανακατασκευή κάθε $t_i \neq nT_s$

Άρα → πρέπει να έχω όλα τα δείγματα στη διάθεσή μου
→ Άπειρος χρόνος υπολογισμού, άπειρη μνήμη

Συνεπώς θα χρησιμοποιήσω άλλη συνάρτηση ανακατασκευής, με το ίδιο σκεπτικό και θα πάρω μία προσέγγιση $\hat{x}(t)$ του σήματος $x(t)$, μορφής:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,\phi\left(\frac{t}{T_s}-n\right)$$

Αν η $\phi(n)$ είναι πεπερασμένης χρονικής διάρκειας, χρησιμοποιούνται στην ανακατασκευή πεπερασμένος αριθμός δειγμάτων.

Συνήθεις $\phi(t)$

Κλιμακωτή: $\phi(t)=\begin{cases}1, & |t|\leq 0{,}5\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$

Πεπερασμένη sinc: $\phi(t)=\begin{cases}\mathrm{sinc}(t), & -k\leq t\leq k\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$

B-spline

Τάξης 0: $\phi_0(t)=\begin{cases}1, & |t|\leq 0{,}5\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$, $\Phi_0(j\Omega)=\dfrac{\sin(\Omega/2)}{\Omega/2}$

Τάξης 1: $\phi_1(t)=\begin{cases}1-|t|, & |t|\leq 1\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$, $\Phi_1(j\Omega)=\Phi_0^2(j\Omega)$

⋮

Τάξης k: $\phi_k(t)=\underbrace{\phi_0(t)*\ldots*\phi_0(t)}_{k+1\ \text{συνελίξεις}}$, $\Phi_k(j\Omega)=\Phi_0^{k+1}(j\Omega)$

3 DFT κ' ΣΥΝΕΛΙΚΤΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

3.1 Discrete Fourier Transform

Ο DFT μας επιτρέπει να εκτιμούμε το συχνοτικό περιεχόμενο ακολουθίας N δειγμάτων (ή αντίστοιχα περιόδου N). Ο DFT ουσιαστικά δειγματοληπτεί τον DTFT σε N συχνότητες μέσα σε μια περίοδο. Αυτό μπορώ να το κάνω λόγω του:

Απ: σελ. 49, Βιβλίο

Θ. Ισοδυναμίας Συχνοτικών κ' Χρονικών Δειγμάτων

> Αν δειγματοληπτήσω τον DTFT μιας πεπερασμένης ακολουθίας N δειγμάτων σε τουλάχιστον N συχνότητες σε μια περίοδο 2π, τότε από τα συχνοτικά δείγματα που θα προκύψουν μπορώ να ανακτήσω τα χρονικά $x[n]$ κ' αντίστροφα

Έστω λοιπόν πως έχω την ακολουθία $x[n]$, $n=0,\dots,N-1$ και τον DTFT της που ισούται με $F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jn\omega}$

Διαλέγω N συχνοτικά σημεία στο $[0,2\pi)$, τα $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k=0,\dots,N-1$

Αν συμβολίσω $X[k] = X(e^{j\omega_k})$ τότε έχω:

$$\text{DFT}: \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k=0,\dots,N-1$$

$$\text{DFT}^{-1}: \quad x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n=0,\dots,N-1$$

Άρα το αποτέλεσμα του DFT σε ακολουθία $x[n]$ N δειγμάτων είναι τα N συχνοτικά δείγματα $X[k]$

Αν ορίσω τώρα την μιγαδική σταθερά $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ τότε γράφω:

$$\text{DFT}: \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,(W_N)^{nk}$$

$$\text{DFT}^{-1}: \quad x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\,(W_N^{*})^{nk}$$

3.2 DFT Misc

• **DFT σε Μητρωική Μορφή**

Μπορώ να γράψω το DFT:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = D_N \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

και DFT^{-1}:

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = D_N^{-1} \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

όπου

$$D_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

και $D_N^{-1} = \frac{1}{N} D_N^*$

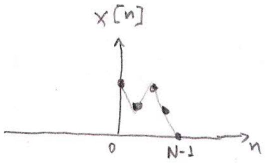
• **Θεώρημα Parseval**

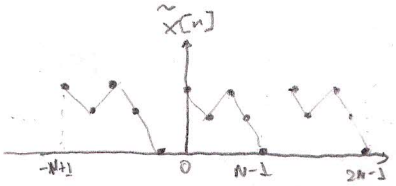
Ισχύει

$$\sum_{n=0}^{N-1} (x[n])^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

• **DFT και Διακριτές Σειρές Fourier (DFS)**

Έστω η $x[n]$, $n=0,\dots,N-1$ και η περιοδική επέκταση $\tilde{x}[n] = x[n \text{ Mod } N] = x[n]_N$, $n \in \mathbb{Z}$.





Αφού η $\tilde{x}[n]$ είναι περιοδική, καθώς και το $e^{\pm j \frac{2\pi}{N} kn}$, η DFS έχει ίδιο τύπο με του DFT, με την διαφορά πως ορίζεται για $n, k \in \mathbb{Z}$. Άρα έχω

Σχέση Ανάλυσης: $$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}$$

Σχέση Σύνθεσης: $$\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j \frac{2\pi}{N} nk}$$

$, n, k \in \mathbb{Z}$

3.3 Ιδιότητες DFT

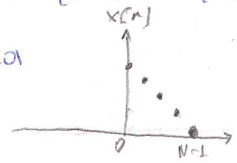
- <u>Γραμμικότητα</u>

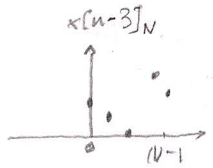
$$a x_1[n] + b x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} a X_1[k] + b X_2[k]$$

Απ: Έπεται αμέσως, από τον ορισμό του DFT

- <u>Μετατόπιση στον Χρόνο κ' την Συχνότητα</u>

Σε ακολουθίες όπως αυτές που εξετάζουμε δεν έχει νόημα η κλασική ολίσθηση αλλά η κυκλική. Έτσι αν ολισθήσω την $x[n]$ κατά m δείγματα θα πάρω την $x[n-m]_N$.





Έχω λοιπόν:

<u>Στο χρόνο:</u> Αν $x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k]$ τότε $x[n-m]_N \xleftrightarrow{DFT} e^{-j\frac{2\pi}{N}km} X[k]$

<u>Στη συχνότητα:</u> " τότε $x[n] e^{j\frac{2\pi}{N}nm} \xleftrightarrow{DFT} X[k-m]_N$

Απ: Μπορώ να σπάσω τον DFT σε 2 όρους κ' να εκμεταλλευτώ το $x[n-m]_N = \begin{cases} x[N+(n-m)] & n-m<0 \\ x(n-m) & n-m\geq 0 \end{cases}$ ή μπορώ διαισθητικά να κοιτάξω τον τρόπο υπολογισμού και να βγάλω το συμπέρασμά μου.

- <u>Συνέλιξη</u>

Αν $x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k]$ και $y[n] \xleftrightarrow{DFT} Y[k]$, $n=0,\dots,N-1$

τότε
$$x[n] \otimes y[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k]\,Y[k]$$
$$x[n]\,y[n] \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{N} X[k] \otimes Y[k]$$

Απ:

• Συμμετρία DFT για $x[n] \in \mathbb{R}$

Αν $x[n] \in \mathbb{R}$ και $x[n] \xrightarrow{DFT} X[k]$ τοτε

$$X[k] = X^*[-k]_N = X^*[N-k] \quad (1)$$

το οποίο σημαίνει:

$$Re\{X[k]\} = Re\{X[-k]_N\} \quad (2)$$

$$Im\{X[k]\} = -Im\{X[-k]_N\} \quad (3)$$

$$|X[k]| = |X[-k]_N| \quad (4)$$

$$\angle X[k] = -\angle X[-k]_N \quad (5)$$

Απ: Εχω $X[-k]_N = X[N-k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}n(N-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)n} \cancel{e^{-j\frac{2\pi}{N}Nn}}^{1}$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \underset{x[n]\in\mathbb{R}}{=} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right)^* = X^*[k]$$

Αρα $X^*[k] = X[N-k] \Rightarrow X[k] = X^*[N-k]$ ∎

Η (4) μας λέει πως το μέτρο του DFT είναι συμμετρικό ως προς N/2 ενω η (5) μας λέει πως η φάση του είναι αντισυμμετρική ως προς N/2.

π.χ Για $N=8$ $\quad |X[0]| = |X[8-0]| = |X[8]|$, $\angle X[0] = -\angle X[8]$

$|X[1]| = |X[8-1]| = |X[7]|$ $\quad \angle X[1] = -\angle X[7]$

• Συμμετρία DFT για $x[n] \in \mathbb{C}$

Ισχυουν ιδιότητες (οχι και τοσο) παρομοιες με τις παραπανω

Βλ. Βιβλίο, σελ. 53

• Συμμετρικές κ' Αντισυμμετρικές $x[n] \in \mathbb{R}$

Αν $x[n] \in \mathbb{R}$ και $x[n] = x[N-n] (= x[-n]_N)$ τοτε:

$$Im\{X[k]\} = 0$$

Αν $x[n] \in \mathbb{R}$ και $x[n] = -x[N-n]$ τοτε

$$Re\{X[k]\} = 0$$

3.4 Fast Fourier Transform

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα DFT

Από τον τύπο του DFT, $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ παρατηρώ πως αν θεωρήσω γνωστές τις ποσότητες $e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$, $n=0,..N-1$, τότε για τον υπολογισμό του $X[k]$ απαιτούνται N πολλαπλασιασμοί και $N-1$ προσθέσεις. Αν θέλω να υπολογίσω όλα τα N συχνοτικά δείγματα τότε απαιτούνται $O(2N^2) = O(N^2)$ πράξεις.

Για να μειώσω την υπολογιστική πολυπλοκότητα θα εφαρμόσω την κλασική αλγοριθμική τεχνική του "διαίρει κ' βασίλευε".

3.4.1 Αποδεκατισμός στον χρόνο

* Για αποδεκατισμό στη συχν, βλ. σελ 59 βιβλίο
Για σχήμα πεταλούδας, βλ. σελ 58 βιβλίο

Έστω ακολουθία $x[n]$, $n=0,\dots,N-1$ και ο DFT της:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] (W_N)^{nk}$$

χωρίζω το sum σε άρτιους κ' περιττούς

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] (W_N)^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] (W_N)^{(2n+1)k}$$

ορίζω τις ακολουθίες $g[n] = x[2n]$, $n=0,\dots,\frac{N}{2}-1$
$h[n] = x[2n+1]$,,

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} g[n] (W_N^2)^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] (W_N^2)^{nk}$$

$W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} g[n] (W_{N/2})^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] (W_{N/2})^{nk}$$

$$= DFT\{g[n]\} + W_N^k \, DFT\{h[n]\}$$

$$= G[k] + W_N^k H[k]$$

- Για να βρω το $X[k]$, $k=0,..,N-1$ πρέπει να βρω τα $G[k], H[k]$, $k=0,\dots,N-1$.
  Όμως οι $g[n], h[n]$ είναι περιόδου $\frac{N}{2}$. Άρα $G[k] = G[\frac{N}{2}+k]$, (αντ. $H[k]$)
- Παράλληλα μπορώ να δείξω πως ισχύει $W_N^k = -W_N^{k+\frac{N}{2}}$.

Συνεχίζοντας με το ίδιο σκεπτικό και σπάζοντας τις $g[n], h[n]$ σε άρτιες και περιττές υπακολουθίες, καταλήγω τελικά σε βάθος αναδρομής $\log_2 N$, όπου πρέπει να υπολογίσω DFT μήκους 2 → trivial.
Κάθε επίπεδο χρειάζεται N πολ/μούς άρα τελικά έχω $O(N\log N)$ πράξεις.

Με τον αποδεκατισμό στο χρόνο καταλήξαμε λοιπόν στους τύπους

$$X[k] = G[k] + W_N^k H[k] \quad , k=0,\dots,\tfrac{L}{2}-1$$

$$X[k] = G[k] - W_N^k H[k] \quad , k=\tfrac{L}{2},\dots,L-1$$

3.5 Κυκλική Συνέλιξη

Έστω ακολουθίες $x[n]$, $h[n]$, $n=0,1,\dots M-1$. Τότε ορίζουμε ως κυκλική συνέλιξη των $x[n]$, $h[n]$ την ακολουθία $y[n]$, επίσης μήκους M όπου:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] \circledast h[n] = \sum_{\ell=0}^{M-1} x[\ell]\, h[n-\ell]_M \\ &= h[n] \circledast x[n] = \sum_{\ell=0}^{M-1} h[\ell]\, x[n-\ell]_M \end{aligned} \quad , n=0,\dots,M-1$$

Βλέποντας μερικούς όρους της ακολουθίας παρατηρώ:

$$y[0] = \sum_{\ell=0}^{M-1} h[\ell]\, x[-\ell]_M = h[0]x[0] + h[1]x[M-1] + \dots + h[M-1]\,x[1]$$

$$y[1] = \sum_{\ell=0}^{M-1} h[\ell]\, x[1-\ell]_M = h[0]x[1] + h[1]x[0] + \dots + h[M-1]\,x[2]$$

$$\vdots$$

$$y[M-1] = \sum_{\ell=0}^{M-1} h[\ell]\, x[M-1-\ell]_M = h[0]x[M-1] + h[1]x[M-2] + \dots + h[M-1]\,x[0]$$

$$y[M] = \sum_{\ell=0}^{M-1} h[\ell]\, x[M-\ell]_M = \sum_{\ell=0}^{M-1} h[\ell]\, x[-\ell]_M = y[0]$$

Από τα παραπάνω βλέπω πως η κυκλική συνέλιξη έχει και αυτή μήκος M.

Επίσης μπορώ να την γράψω σε μητρική μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[M-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & h[M-1] & \dots & h[2] & h[1] \\ h[1] & h[0] & \dots & h[3] & h[2] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ h[M-1] & h[M-2] & \dots & h[1] & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[M-1] \end{bmatrix}$$

Ο τρόπος αυτός υπολογισμού της κυκλικής συνέλιξης απαιτεί χρόνο $(O(M^2)$

- Σχέση ⊛ και DFT

Αντίστοιχα της σχέσης Μετασχ. Fourier κ' Γραμμικής Συνέλιξης, εδώ έχω:

$$x[n] \circledast y[n] \xrightarrow{DFT} X[k]\,Y[k] \quad , k=0,\ldots,M-1$$

Απ: Βλ. βιβλίο, σελ. 65. Αντίστοιχο σκεπτικό με την απόδειξη σχέσης F. με *

Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή ισχύει πως:

$$h[n] \circledast x[n] = DFT^{-1}\{DFT\{h[n]\}\, DFT\{x[n]\}\}$$

$$= IFFT\{FFT\{h[n]\}\, FFT\{x[n]\}\}$$

Άρα μπορώ να υπολογίσω κυκλική συνέλιξη πραγματοποιώντας 3 FFT και M πολλαπλασιασμούς (αμελητέοι)

Συνεπώς μπορώ να μειώσω την πολυπλοκότητα της συνέλιξης σε $O(M\log_2 M)$

3.6 Γραμμική Συνέλιξη

Είναι η κλασσική συνέλιξη. Έστω πως έχουμε αιτιατές ακολουθίες $x[n]$, $h[n]$ μήκους N και L αντίστοιχα. Από τον τύπο της συνέλιξης έχω:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} h[\ell]\, x[n-\ell]$$

$$\overset{\text{αιτιατές}}{=} \sum_{\ell=0}^{n} h[\ell]\, x[n-\ell]$$

Ας δούμε τώρα τους όρους που προκύπτουν για να προσδιορίσουμε το μήκος της:

1η Μεταβατική περίοδος, Διάρκεια L−1:

$$\begin{cases} y[0] = h[0]\,x[0] & 1 \text{ όρος} \\ y[1] = h[0]\,x[1] + h[1]\,x[0] & 2 \text{ όροι} \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Μόνιμη Κατάσταση, Διάρκεια N−L+1:

$$\begin{cases} y[L-1] = h[0]\,x[L-1] + h[1]\,x[L-2] + \ldots + h[L-1]\,x[0] & L \text{ όροι} \\ y[L] = h[0]\,x[L] + h[1]\,x[L-1] + \ldots + h[L-1]\,x[1] & L \;'' \\ \vdots & \vdots \\ y[N-1] = h[0]\,x[N-1] + \ldots + h[L-1]\,x[N-L] & L \;'' \end{cases}$$

Υπόθεση N > L

2η Μεταβατική περίοδος, Διάρκεια L−1:

$$\begin{cases} y[N] = \cancel{h[0]\,x[N]}^{\,0} + h[1]\,x[N-1] + \ldots + h[L-1]\,x[N-L+1] & L-1 \\ y[N+1] = h[2]\,x[N-1] + \ldots + h[L-1]\,x[N-L+2] & L-2 \\ \vdots & \vdots \\ y[N+L-2] = h[L-1]\,x[N-1] & 1 \end{cases}$$

Σύνολο: N + L − 1

Γραμμική Συνέλιξη Μέσω Κυκλικής

Αν έχω ακολουθίες $x[n]$, $h[n]$ μήκους L και N αντίστοιχα τότε αρκεί:

- Προσθέτω $N-1$ μηδενικά στο τέλος της $x[n]$
- " $L-1$ " " " " $h[n]$
- Υπολογίζω $x[n] \circledast h[n]$

Η κυκλική συνέλιξη των προσαυξημένων ακολουθιών θα είναι μήκους $N+L-1$ και θα αποτελεί την γραμμική συνέλιξη των μη προσαυξημένων ακολουθιών.

Γραμμική Συνέλιξη κ' Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων

Έστω τα πολυώνυμα

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_N x^N$$

$$B = b_0 + b_1 x^1 + \dots + b_L x^L$$

και $C = AB$

Αν βάλω τους συντελεστές των A, B, C σε διανύσματα $\alpha[n]$, $b[n]$, $c[n]$ ακολουθώντας τον κανόνα πως στη n-οστή θέση βάζω τον συντελεστή του x^n τότε

$$\alpha[n] * b[n] = c[n]$$

Απ: Ένα παράδειγμα. π.χ. $A = \alpha_0 + \alpha_1 x^1$, $B = b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2$

τότε $c[n] = \alpha[n] * b[n]$ που δίνει

$$c[0] = \alpha_0 b_0$$

$$c[1] = \alpha_0 b_1 + \alpha_1 b_0$$

$$c[2] = \alpha_0 b_2 + \alpha_1 b_1$$

$$c[3] = \alpha_1 b_2$$

Οπότε, $AB = C = \alpha_1 b_2 x^3 + (\alpha_0 b_2 + \alpha_1 b_1) x^2 + (\alpha_0 b_1 + \alpha_1 b_0) x + \alpha_0 b_0$

Γρήγορες Υλοποιήσεις της Γρ. Συνέλιξης

Επικάλυψη κ' Άθροιση, Βιβλίο, σελ. 70

Επικάλυψη κ' Διατήρηση, Βιβλίο, σελ. 72

4 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΦΙΛΤΡΑ

4.1 Γενικά

Ισχύει πάντα η βασική υπόθεση πως θόρυβος κ' πληροφορία δεν έχουν κοινές συχνότητες.

Τα φίλτρα χωρίζονται σε ψηφιακά, με τα οποία επεξεργαζόμαστε ψηφιακά σήματα και αναλογικά, με τα οποία επεξεργαζόμαστε αναλογικά σήματα

- Είναι Γ.Χ.Α. Συστήματα και συνεπώς περιγράφονται πλήρως από την κρουστική τους απόκριση $h(t)$ (αντίστοιχα $h[n]$)
- Σημαντικό ρόλο θα παίζει η απόκριση συχνότητας $H(j\Omega) = F\{h(t)\}$ (αντ. $H(e^{j\omega})$) αφού ο σχεδιασμός των φίλτρων θα γίνεται στο πεδίο της συχνότητας.

- Κατηγορίες Φίλτρων
  - Αναλογικά: Έχουμε $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \dfrac{b_0 s^K + b_1 s^{K-1} + \dots + b_K}{s^L + \alpha_1 s^{L-1} + \dots + \alpha_L} = \dfrac{B(s)}{A(s)}$

    Ο αριθμός $\deg(A) = L$ ονομάζεται τάξη του φίλτρου
  - Ψηφιακά: Εδώ έχω $y[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} h[\ell]x[n-\ell]$

    $\xLeftrightarrow{Z\{\}} Y(z) = H(z)X(z)$

FIR (Finite Impulse Response)
Έχω πεπερασμένη κρ. απόκριση $h[0], \dots, h[L-1]$. Άρα $y[n] = \sum_{\ell=0}^{L-1} h[\ell]x[n-\ell]$, δηλαδή απαιτούνται πεπερασμένος αριθμός πράξεων για τον υπολογισμό κάθε δείγματος εξόδου. Το μήκος της κρ. απόκρισης L ονομάζεται μήκος φίλτρου

IIR (Infinite Impulse Response)
Παρόλο που εδώ η κρ. απόκριση είναι άπειρη, αν $H(z) = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_K z^{-K}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_L z^{-L}}$ και αντικαταστήσω στην $Y(z) = H(z)X(z)$ και πάρω $Z^{-1}\{\}$ τότε τελικά θα καταλήξω σε $y[n] = -\alpha_L y[n-L] \dots - \alpha_1 y[n-1] + b_0 x[n] + \dots + b_K x[n-K]$

το οποίο χρειάζεται πεπερασμένο αριθμό πράξεων για τον υπολογισμό.

- Ευστάθεια

Για να είναι τα φίλτρα ευσταθή, αρκεί (αφού έχω υποθέσει αιτιατότητα) να έχω στα μεν αναλογικά τους πόλους στο αρνητικό ημιεπίπεδο ενώ στα δε ψηφιακά όλους τους πόλους εντός του μοναδιαίου κύκλου

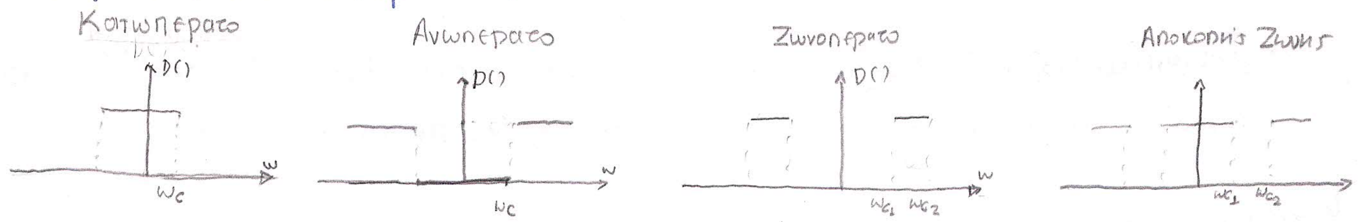
4.2 Ιδανικές Προδιαγραφές Φίλτρου

Συμβολίζω με $d(n) \xleftrightarrow{F} D(e^{j\omega})$ την ιδανική κρουστική απόκριση και απόκριση συχνοτήτων του φίλτρου που θέλω να σχεδιάσω.

Κάθε φίλτρο έχει ζώνες διέλευσης, οι συχνότητες που θέλω να διατηρήσω (πληροφορία)
ζώνες αποκοπής, οι συχνότητες που θέλω να εξαλείψω (θόρυβος)

Αν λοιπόν οι ζώνες διέλευσης είναι μορφής $[\Omega_{\ell i}, \Omega_{ui}]$ τότε το ιδανικό φίλτρο θα έχει χαρακτηριστική $D(j\Omega) = \begin{cases} 1, & \Omega_{\ell i} \le \Omega \le \Omega_{ui} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Μερικά κλασικά φίλτρα παρατίθενται:



- Πραγματική Κρ. Απόκριση

Θα σχεδιάζω συνήθως στο πεδίο της συχνότητας κ θα βρίσκω την $D(e^{j\omega})$. Προφανώς αυτή αντιστοιχεί σε κάποια $d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} D(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$. Επιθυμώ $d[n] \in \mathbb{R}$ ώστε να έχω πραγματικό αποτέλεσμα/έξοδο του φίλτρου. Αυτό εξασφαλίζεται από την συνθήκη:

$$d(n) \in \mathbb{R} \text{ αν } D(e^{-j\omega}) = D^*(e^{j\omega})$$

$$d(t) \in \mathbb{R} \text{ αν } D(-j\Omega) = D^*(e^{j\omega})$$

Απ: Εύκολα, με $F^{-1}\{\}$ και Euler
Αποδεικνύω πως $|D(\cdot)|$ άρτια
$\angle D(\cdot)$ περιττή

Η συνθήκη αυτή μεταφράζεται στην περίπτωση που $D(\cdot) \in \mathbb{R}$ στο να είναι η $D(\cdot)$ άρτια.

4.3 Προσέγγιση Ιδανικών Προδιαγραφών

Είδαμε πως συνήθως η επιθυμητή χαρακτηριστική του φίλτρου είναι μία $D(\cdot) \in \mathbb{R}$

Όμως το φίλτρο που μπορώ να σχεδιάσω έχει συνήθως μία απόκριση συχνότητας $H(\cdot) \in \mathbb{C}$. Μπορώ να γράψω $\underline{H(\cdot) = |H(\cdot)|\, e^{j\phi(\omega)}} = R()\, e^{j\phi(\omega)}$

Η $\underbrace{|H(e^{j\omega})|}_{=R()}$ είναι η απόκριση πλάτους (άρτια αν θέλω πραγματικό φίλτρο)

η $\phi(\omega)$ είναι η συνάρτηση φάσης της απόκρισης συχνότητας (περιττή αν θέλω πραγματικό φίλτρο)

Αν $|H(e^{j\omega_0})| \simeq 0$ τότε $H(e^{j\omega_0}) \simeq 0$.

Άρα θα προσεγγίζω την $D()$ με την $\underbrace{|H()|}_{=R()}$ ενώ θα αδιαφορώ για το τι συμβαίνει με την $\phi(\omega)$ (υπάρχουν λόγοι που το επιτρέπουν)

- ## Γραμμική Φάση κ' Καθυστέρηση Ομάδας

Αν χρησιμοποιούσα ιδανικό φίλτρο, όπου $\phi(\omega) = 0$, θα έπαιρνα έξοδο $y^{\epsilon}(e^{j\omega}) = D(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$

Όμως στην πραγματικότητα το $\phi(\omega)$ υπάρχει* και παίρνω έξοδο $y(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)} y^{\epsilon}(e^{j\omega})$

* Άρα το φίλτρο που μπορώ να σχεδιάσω είναι της μορφής $e^{j\phi(\omega)} D(e^{j\omega})$

Μεταξύ επιθυμητής $y^{\epsilon}()$ κ' πραγματικής $y()$ εξόδου έχω:

- $\underline{|y()| = |y^{\epsilon}()|}$ άρα έχω τις ίδιες συχνότητες με ίδια ενέργεια
- $\angle y() = \angle y^{\epsilon}() + \phi(\omega)$ άρα υπάρχει διαφορά φάσης

Παίρνοντας F^{-1}ΣΞ των y, y^{ϵ} καταλήγω στις σχέσεις:

$$y^{\epsilon}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |y^{\epsilon}(e^{j\omega})|\, e^{j(n\omega + \angle y^{\epsilon}(e^{j\omega}))}\, d\omega$$

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |y^{\epsilon}(e^{j\omega})|\, e^{j\left(\left(n+\frac{\phi(\omega)}{\omega}\right)\omega + \angle y^{\epsilon}(e^{j\omega})\right)}\, d\omega$$

Παρατηρώ τώρα πως αν έχω $\underline{\text{γραμμική φάση } \phi(\omega) = -K\omega} \Leftrightarrow \frac{\phi(\omega)}{\omega} = -K$

τότε $y[n] = y^{\epsilon}[n-K]$, δηλαδή επιθυμητή και πραγματική έξοδος είναι πέραν μιας χρ. ολίσθησης ίδιες → καλό!

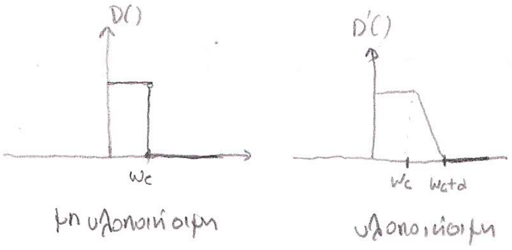
> Η γραμμική φάση είναι ένα ιδιαίτερα επιθυμητό χαρακτηριστικό στις ζώνες διάβασης ενός φίλτρου (οι ζώνες αποκοπής δεν μας νοιάζουν γιατί χάνονται) ώστε να έχω αναλλοίωτη μορφή της εξόδου σε σχέση με την επιθυμητή

Η παράγωγος $-\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \tau(\omega)$ καλείται καθυστέρηση ομάδας και είναι χρήσιμο να την ξέρουμε σε περιπτώσεις που δεν έχουμε γραμμική φάση

- ## Ζώνες Μετάβασης

Είδαμε πως η ιδανική D() παρουσιάζει ασυνέχειες όταν μεταβαίνει από το 0→1 και αντίθετα (μορφής sinc()). Το φίλτρο όμως που υλοποιούμε δεν μπορεί να εμφανίζει ασυνέχειες γτ θα είχαμε άπειρη ενέργεια, άπειρο χρόνο...

Για να αποφύγουμε το φαινόμενο αυτό εισάγουμε τις ζώνες μετάβασης



Βλέπω πως μικραίνω λίγο την ζώνη αποκοπής και εισάγω ζώνη μετάβασης $[\omega_c, \omega_c+\alpha]$. Ο σχεδιαστής καθορίζει το α αλλά όχι την συμπεριφορά του φίλτρου στην ζώνη μετάβασης.

Επιθυμώ μονοτονία στην ζώνη μετάβασης και όχι εξογκώματα (ή μη αποδεκτές)

- ## Ακρίβεια Προσέγγισης

Προσεγγίζουμε λοιπόν την D(·) με την $R(\cdot) = |H()|$. Στις ζώνες ενδιαφέροντος, δλδ στις ζώνες διέλευσης κ αποκοπής ορίζουμε ένα μέγιστο αποδεκτό σφάλμα δ_i, τ.ω.

$$|D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})| \le \delta_i \quad , \text{ για } \omega_{\ell_i} \le \omega \le \omega_{u_i}$$

Μπορώ να μοντελοποιήσω διαφορετική ανοχή για σφάλματα για διαφορετικές συχνότητες χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση βάρους $W(\omega) \ge 1$, τ.ω.

$$W(\omega)\,|D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})| \le \delta_i \quad , \text{ για } \omega \in T = \text{ζώνες ενδιαφέροντος}$$

4.4 Μεταβατικά Φαινόμενα

Τα φίλτρα είναι ΓΧΑΣ με συχνοτική απόκριση $H(e^{j\omega})$. Αν τα τροφοδοτήσω με ημιτονική είσοδο $e^{jn\omega_0}$, τότε παίρνω έξοδο $H(e^{j\omega_0})e^{jn\omega_0}$. Το τελευταίο ισχύει αν η είσοδος καλύπτει **όλους** τους όρους της κρ. απόκρισης.

Αφού υπέθεσα επίσης αιτιατότητα, η έξοδος είναι γραμμικός συνδυασμός των εισόδων κάποιων προηγούμενων χρονικών στιγμών. Το φίλτρο όμως τροφοδοτείται με εισόδους από την $t=0$ και μετά. Ως αποτέλεσμα, για ένα χρονικό διάστημα μέχρι να καλυφθούν οι όροι της κρ. απόκρισης έχω μεταβατικά φαινόμενα, δηλ. το φίλτρο συμπεριφέρεται "περίεργα".

- Μεταβατικά Φαινόμενα σε FIR Φίλτρα

Έστω κρ. απόκριση μήκους L. Άρα έχω $y[n]=\sum_{\ell=0}^{L-1} h[\ell]x[n-\ell]$. Για να προσδιορίσω το άθροισμα πρέπει να ξέρω τις τιμές του $x[n]$ τις προηγούμενες L χρονικές στιγμές.

Άρα όταν υπολογίζω το $y[0]$ υπεισέρχονται στον υπολογισμό οι $x[0]$ και $\underbrace{x[-1],\dots,x[-L+1]}_{\text{αυθαίρετες, συνήθως } 0}$

Συνεπώς θα παρατηρώ μεταβατικά φαινόμενα τις πρώτες $L-1$ χρ. στιγμές.
Η διάρκεια λοιπόν των μεταβατικών φαινομένων σε FIR φίλτρα είναι (σχεδόν) ίση με το μήκος τους

- Μεταβατικά Φαινόμενα σε IIR Φίλτρα

Εδώ έχω άπειρη κρ. απόκριση, άρα $y[n]=\sum_{\ell=0}^{+\infty} h[\ell]x[n-\ell]$. Συνεπώς η έξοδος κάθε χρονικής στιγμής, εξαρτάται από το παρελθόν που δεν ξέρω.

Από την γραμμική άλγεβρα και θεωρία συστημάτων ξέρω πως:

$$|h[n+1]x[-1]+h[n+2]x[-2]+\dots| \le A M \frac{1}{1-p} p^{n+1}$$

όπου $A>0$ σταθερά
M άνω φράγμα του $x[n]$

όπου $p \geq \max\{|z_1|,\dots,|z_r|\}$, z_i πόλος της $H(z)$ του φίλτρου

Αφού όμως το φίλτρο είναι ευσταθές και αιτιατό ισχύει $\forall i$, $|z_i|<1$. Συνεπώς έχω $p<1$ και η επίδραση των αγνώστων εισόδων τείνει στο 0 με εκθετικό ρυθμό. Μάλιστα, όσο πιο κοντά στο 0 είναι οι πόλοι, τόσο μικρότερης διάρκειας μετ. φαινόμενα

· Βλ. 5.9 Βιβλίο, σελ. 101 Τα μετ. φαινόμενα δεν εμφανίζονται μόνο στην αρχή της επεξεργασίας.

5 FIR ΦΙΛΤΡΑ

5.1 Συχνοτική Απόκριση

Εστω FIR φίλτρο περιττης ταξης $L=2N+1$, δηλαδή $h[n]$, $n=0,\dots,2N$

Η συχνοτική απόκριση του φίλτρου είναι $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{2N} h[n]e^{-j\omega n}$. Αναλύοντας εχω:

$$H(e^{j\omega}) = h[0]e^{j0} + \dots + h[N-1]e^{-j\omega(N-1)} + \underbrace{h[N]e^{-j\omega N}}_{\text{κεντρικος όρος}} + h[N+1]e^{-j\omega(N+1)} + \dots + h[2N]e^{-j\omega 2N}$$

$$= e^{-jN\omega}\underbrace{\left[h[0]e^{jN\omega} + \dots + h[N-1]e^{j\omega} + h[N] + h[N+1]e^{-j\omega} + \dots + h[2N]e^{-jN\omega}\right]}_{R(\cdot)} \quad (1)$$

Γενικά μπορώ να γραφω $\underline{\alpha x() + b y() = \frac{\alpha+b}{2}(x()+y()) + \frac{\alpha-b}{2}(x()-y())}$ (2)

Σπαζοντας τώρα τα $e^{x} \overset{\cos x + j\sin x}{=}$ της (1) και εκμεταλλευόμενος πως $\begin{cases}\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)\\ \sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)\end{cases}$ η (1) γίνεται:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega}\left[(h[0]+h[2N])\cos N\omega + j(h[0]-h[2N])\sin N\omega + (h[1]+h[2N-1])\cos(N-1)\omega + \dots\dots\right]$$

Επιλεγοντας τωρα $\begin{matrix}\alpha[n] = h[n]+h[2N-n]\\ b[n] = h[n]-h[2N-n]\end{matrix}$ η τελευταία σχεση γίνεται:

$$H(e^{j\omega}) = \underbrace{e^{-jN\omega}}_{\substack{\text{παραγοντας}\\ \text{φασης}\\ e^{j\phi(\omega)}}}\left[\underbrace{\sum_{n=0}^{N}\alpha[n]\cos(n\omega)}_{\substack{\text{πραγματικο}\\ \text{μερος}\\ R_R(\cdot)}} + \underbrace{j\sum_{n=0}^{N}b[n]\sin(n\omega)}_{\substack{\text{φανταστικο}\\ \text{μερος}\\ R_{Im}(\cdot)}}\right]$$

*Αντιστοιχη αναλυση για ζυγο $L=2N$

Με την εκφραση αυτή $H()$ προσπαθουμε να προσεγγίσουμε την ιδανική απόκριση συχνοτήτων $D(\cdot)$. Παρατηρουμε, σε σχεση και με την αναλυση του 4ου Κεφαλαίου πως:

- Τα FIR φίλτρα ταξης L έχουν γραμμική φαση $\phi(\omega) = -N\omega = -(\frac{L-1}{2})\omega$, που αντιστοιχεί σε καθυστερηση κατα $\frac{L-1}{2}$ δείγματα
- Αν $D(\cdot) \in \mathbb{R} \Rightarrow D_{Im}(\cdot) = 0 \Rightarrow R_{Im}(\cdot) = 0 \Rightarrow b[n] = 0$
- Αν $D(\cdot) \in Im \Rightarrow D_R(\cdot) = 0 \Rightarrow R_R(\cdot) = 0 \Rightarrow \alpha[n] = 0$

ισχύει εξ'ορισμου των $\alpha[n], b[n]$ → Γενικα θελω $d(\cdot) \in \mathbb{R}$ αρα πρεπει $D(e^{-j\omega}) = D^*(e^{j\omega})$ $\begin{cases} D_R(\cdot) \text{ αρτια} \to \alpha[n] \text{ αρτιο} \\ D_{Im}(\cdot) \text{ περιττη} \to b[n] \text{ περιττο}\end{cases}$

αφου $\begin{matrix} D(-\omega) = D_R(-\omega) + jD_{Im}(-\omega) \\ D^*(\omega) = D_R(\omega) - jD_{Im}(\omega)\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} D_R(\omega) = D_R(-\omega) \to \text{αρτια} \\ D_{Im}(-\omega) = -D_{Im}(\omega) \to \text{περιττη}\end{cases}$

5.2 Ελαχιστοποίηση Σφάλματος

Σχεδιάζοντας ένα φίλτρο έχω ως στόχο την προσέγγιση της ιδανικής συχνοτικής απόκρισης $D(\cdot) = D_R(\cdot) + j D_{Im}(\cdot)$ μέσω της πραγματικής συχνοτικής απόκρισης του φίλτρου μου $H(\cdot) = e^{j\phi(\omega)} R(\cdot) = R_R(\cdot) + j R_{Im}(\cdot)$

δεν το λαμβάνω υπόψη

Το σφάλμα της προσέγγισης για κάθε συχνότητα ξεχωριστά δίνεται από την σχέση $\mathcal{E}(\cdot) = D(\cdot) - R(\cdot) = [D_R(\cdot) - R_R(\cdot)] + [D_{Im}(\cdot) - R_{Im}(\cdot)]$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει το σφάλμα σε κάθε συχνότητα ξεχωριστά. Για να βρω το συνολικό σφάλμα θα χρησιμοποιήσω νόρμες.

Ο γενικός τύπος της p-norm είναι $\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (x(t))^p dt\right]^{1/p}$ ενώ στην περίπτωση του ψηφιακού φίλτρου γίνεται $\left[\int_{-\pi}^{+\pi} |\mathcal{E}(\cdot)|^p d\cdot\right]^{1/p}$.

Για την συνάρτηση σφάλματος σε FIR φίλτρα έχω $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha_0, \dots, \alpha_N, b_0, \dots, b_N)$. Είναι δηλαδή συνάρτηση των συντελεστών του φίλτρου. Παρατηρώ τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $D(\cdot) \in \mathbb{R} \rightarrow R \in \mathbb{R} \rightarrow b_n = 0 \rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha_0, \dots, \alpha_N)$
- Αν $D(\cdot) \in Im \rightarrow R \in Im \rightarrow \alpha_n = 0 \rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}(b_0, \dots, b_n)$

- Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (p=2)

Πρόκειται για την 2-νόρμα (ευκλείδια απόσταση).

Εδώ έχω $\mathcal{E}^2(\cdot) = \int_{-\pi}^{+\pi} |D(\cdot) - R(\cdot)|^2 d\omega = \int_{-\pi}^{+\pi} (D_R(\cdot) - R_R(\cdot))^2 d\omega + \int_{-\pi}^{+\pi} (D_{Im}(\cdot) - R_{Im}(\cdot))^2 d\omega$

Συνεπώς $\min_{\alpha_i, b_i} \mathcal{E}^2 = \min_{\alpha_i} \mathcal{E}_R^2 + \min_{b_i} \mathcal{E}_{Im}^2$

για $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y|$?

Σπάσαμε λοιπόν το πρόβλημα σε 2 μισού μεγέθους ανεξάρτητα προβλήματα.

- Μέγιστο Σφάλμα ($p=+\infty$)

Η ∞-νόρμα μας δίνει την μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Άρα εδώ έχω ένα L.P. πρόβλημα $\min_{h_i} \left[\max_{\omega \in T} \mathcal{E}(\omega)\right] \Leftrightarrow \min_{h_i} \mathcal{E}^\infty(\cdot) \leq \min_{\alpha_i} \mathcal{E}_R^\infty(\cdot) + \min_{b_i} \mathcal{E}_{Im}^\infty(\cdot)$

Εδώ, αντίθετα με την 2-norm υπάρχει ανισότητα, άρα πως η ελαχιστοποίηση των ποσοτήτων $\mathcal{E}_R^\infty$, $\mathcal{E}_{Im}^\infty$ δεν εγγυάται την ελαχιστοποίηση του $\mathcal{E}^\infty(\cdot)$. Βέβαια, στην περίπτωση όπου $D \in \mathbb{R}$ ή $D \in Im$ αρκεί η ελαχιστοποίηση του $\mathcal{E}_R^\infty$ ή $\mathcal{E}_{Im}^\infty$ αντίστοιχα

5.3 Σχεδίαση με χρήση Παραθύρου

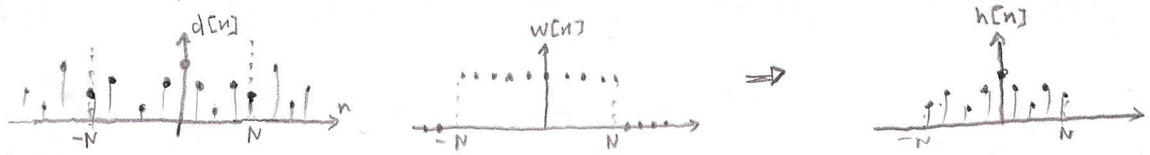
Για να προσδιορίσω τους βέλτιστους συντελεστές, μπορώ να παραγωγίσω την σχέση του σφάλματος ξεχωριστά ως προς καθέναν, να την εξισώσω με 0 και να δείξω πως η λύση αποτελεί τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης απόστασης. Οι λύσεις που θα προκύψουν είναι οι όροι της Σειράς Fourier του $D(\cdot)$. Έτσι έχω:

$$d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} D(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega \qquad \left(\text{σχέση σύνθεσης}: D(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d[n]\, e^{-j\omega n}\right)$$

Αν η $D(\cdot)$ είναι συμμετρική, πράγμα που συμβαίνει κατά κανόνα (π.χ. ανωπερατό/κατωπερατό) τότε και οι συντελεστές $d[n]$ είναι συμμετρικοί, δηλαδή $d[-n] = d[n]$.

Η Σειρά Fourier θα μας δώσει λοιπόν άπειρους συντελεστές. Εμείς όμως έχουμε FIR φίλτρο, άρα θα κρατήσουμε μόνο μερικούς από αυτούς. Εδώ έστω $L = 2N+1$

Για να κρατήσω τους όρους αυτούς πολλαπλασιάζω την $d[n]$ με ένα παράθυρο $w[n]$



Εδώ επέλεξα τετραγωνικό παράθυρο $w[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \pm 1, \ldots \pm N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Αυτό όμως έχει σαν συνέπεια την εμφάνιση του φαινομένου Gibbs

Άρα μπορώ να επιλέξω διαφορετικά παράθυρα, π.χ. τριγωνικό $w[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N+1}, & n = 0, \pm 1, \ldots \pm N \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$

Τέλος, για να έχω αιτιατότητα, αρκεί να ολισθήσω τη $h[n]$ κατά $N-1$ θέσεις δεξιά.

! Η χρήση ΣF κ' αποκοπή όρων προσεγγίζει βέλτιστα την $D(\cdot)$ ως προς $\mathcal{E}^2$

5.4 Σχεδίαση με χρήση Ζωνών Αδιαφορίας

Θα ονομάζω ζώνες ενδιαφέροντος $T = \{\text{ζώνες διάβασης}\} \cup \{\text{ζώνες αποκοπής}\}$, ενώ θα ονομάζω ζώνες αδιαφορίας τις ζώνες μετάβασης. Σε αυτήν την μέθοδο αδιαφορώ για το σφάλμα στις ζώνες αδιαφορίας. Δεν μπορώ πλέον να χρησιμοποιήσω Σ.F για να προσεγγίσω βέλτιστα ως προς $\mathcal{E}^2$.

Εδώ έχω $\quad \mathcal{E}^2(\cdot) = \int_T |D(\cdot) - R(\cdot)|^2 d\omega = \int_T [D_R(\cdot) - R_R(\cdot)]^2 d\omega + \int_T [D_{Im}(\cdot) - R_{Im}(\cdot)]^2 d\omega$

Άρα εδώ πρέπει να λύσω το πρόβλημα ελαχιστοποίησης που συμβαίνει:

- Παίρνω παραγώγους της $\mathcal{E}^2(\cdot)$ ως προς κάθε συντελεστή του φίλτρου και τις εξισώνω με 0.
- Λύνω το σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους που προκύπτει.

5.5 Ελαχιστοποίηση $\mathcal{E}^2$ με Μητρώα

Είδαμε πως $R(\cdot) = h_0 e^{jN\omega} + h_1 e^{j(N-1)\omega} + \dots + h_N \cancel{e^{j0\omega}}^{1} + \dots + h_{2N-1} e^{-j(N-1)\omega} + h_{2N} e^{-jN\omega}$

$$= \left[e^{jN\omega} \; e^{j(N-1)\omega} \dots 1 \dots e^{-j(N-1)\omega} \; e^{-jN\omega} \right] \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{2N} \end{bmatrix}$$

$$R(\cdot) = \phi_{2N+1}^T(\omega)\, h = h^T \phi_{2N+1}(\omega)$$

Μπορώ να γράψω τώρα:

$$[D(\cdot)-R(\cdot)]^2 = (D(\cdot)-R(\cdot))(D^*(\cdot)-R^*(\cdot)) = |D|^2 + RR^* - RD^* - (RD^*)^*$$

$$= |D|^2 + h^{*T}\phi^*\phi^T h - D^*(\cdot)\phi^T h - (D^*\phi^T h)^*$$

Ολοκληρώνω τώρα και έχω

$$\int (D(\cdot)-R(\cdot))^2 d\omega = \int |D|^2 d\omega + h^{*T}\int \phi^*\phi^T d\omega\, h - \int D^*(\cdot)\phi^T d\omega\, h - \int D^*(\cdot)\phi^T d\omega\, h$$

$$\mathcal{E}^2 = \;'' \; + h^{*T} A(\omega)\, h - \alpha^T h - \alpha^{*T} h^*$$

$Ah = v$

διάνυσμα με τους όρους της σειράς Fourier αφού υπολογίζω $\langle D(\cdot), e^{jn\omega} \rangle$, $n = -N, \dots, N$

Παραγωγίζοντας τώρα τα παραπάνω ως προς κάθε h_i^* και εξισώνοντας με 0, έχω:

$$0 + v_i - 0 - \alpha_i^* = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i^* = v_i \quad , i = 1, \dots, 2N+1$$

$$\Rightarrow \alpha^* = Ah \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{2N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ \vdots \\ \alpha_{2N+1}^* \end{bmatrix}$$

~~όπου α_i είναι οι βέλτιστοι συντελεστές του φίλτρου~~

$$\Rightarrow h = A^{-1}\alpha^*$$

, όπου h_i είναι οι συντελεστές του φίλτρου

5.6 Min-Max Προσέγγιση

Εδώ προσπαθώ να ελαχιστοποιήσω το $\mathcal{E}^{\infty}$, δηλαδή $\min_{h_i} \max_{\omega} \mathcal{E}(\omega)$

Το πρόβλημα δεν είναι δυνατόν να διαιρεθεί σε επιμέρους υποπροβλήματα και είναι NP-complete. Ευτυχώς υπάρχουν συνθήκες που επιτρέπουν την λύση του αν DER.

Το Θεώρημα Εναλλαγής

Βιβλίο, σελ. 131

Προσπαθώ λοιπόν να προσεγγίσω την $D(\omega)$ μέσω φίλτρου FIR τάξης $2N+1$, δηλαδή μέσω της συνάρτησης $\sum_{n=0}^{2N} \alpha_n \phi_n(\omega) = \alpha^T \phi_{2N+1}(\omega)$.

Στόχος μας είναι να επιλέξουμε διάνυσμα συντελεστών φίλτρου $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{2N+1} \end{bmatrix}$ τέτοιο ώστε $\min_{\alpha} \max_{\omega} \left| D(\omega) - \alpha^T \phi_{2N+1}(\omega) \right|$.

Οι συναρτήσεις $\phi_n(\omega)$ που επιλέγουμε μπορεί να είναι της μορφής $\phi_n(\omega) = \cos(n\omega)$ ή $\phi_n(\omega) = \sin(n\omega)$, καθότι εξασφαλίζουν αντιστρεψιμότητα και είναι Haar functions

Προφανώς αν η $D(\omega)$ είναι άρτια θα διαλέξω $\phi_n(\omega) = \cos(n\omega)$ ενώ αν η $D(\omega)$ είναι περιττή θα διαλέξω $\phi_n(\omega) = \sin(n\omega)$

Το Θεώρημα εναλλαγής μας λέει πως οι $\alpha_1, \dots, \alpha_{2N+1}$ προσεγγίζουν βέλτιστα την $D(\omega)$ κατά την min max έννοια αν υπάρχουν $2N+2$ σημεία εναλλασσόμενου προσήμου, στα οποία η τιμή του σφάλματος εμφανίζει τοπικό ακρότατο, και κατά απόλυτη τιμή ολικό ακρότατο, έστω δ.

Αν αυτά τα $2N+2$ συχνοτικά σημεία ήταν γνωστά, τότε αρκεί να έλυνα το

$$\begin{bmatrix} \phi_1(\omega_1) & \cdots & \phi_{2N+1}(\omega_1) & 1 \\ \phi_1(\omega_2) & \cdots & \phi_{2N+1}(\omega_2) & -1 \\ \vdots & & & \\ \phi_1(\omega_{2N+2}) & \cdots & \phi_{2N+1}(\omega_{2N+2}) & (-1)^{2N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{2N+1} \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(\omega_1) \\ D(\omega_2) \\ \vdots \\ D(\omega_{2N+2}) \end{bmatrix}$$

Η δυσκολία έγκειται στο να υπολογίσουν τα $2N+2$ συχνοτικά σημεία.

6 IIR ΦΙΛΤΡΑ

6.1 Εισαγωγή

Εδω εχω τις ιδιες προδιαγραφες με το προηγούμενο κεφαλαιο.
Θα σχεδιάζω κατωπερατα φίλτρα τα οποία θα μετασχηματίζω σε άλλα είδη.

Η συχν. αποκριση των φίλτρων μας είναι:

$$H(j\Omega) = \frac{B(j\Omega)}{A(j\Omega)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m (j\Omega)^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n (j\Omega)^n}, \quad N>M$$

Αφου θελω φίλτρο με πραγματικους συντελεστες, πρεπει $H^*(j\Omega) = H(-j\Omega)$.

Μπορω τωρα να γραφω: $H(j\Omega)H^*(j\Omega) = H(j\Omega)H(-j\Omega) = |H(j\Omega)|^2 = \dfrac{\sum_{m=0}^{M} c_m \Omega^{2m}}{\sum_{n=0}^{N} d_m \Omega^{2n}}$

6.2 Butterworth Φίλτρα

Χαρακτηρίζονται απο αποκριση πλατους $|H(j\Omega)|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$

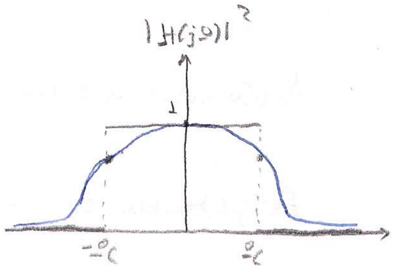
N: τάξη φίλτρου
Ω_c: συχνοτητα αποκοπής

Η συχνοτητα Ω_c καλείται συχνοτητα αποκοπής των 3db, διότι το πλατος της πολ/ζεται με 0.7 και εχει την μισή ενεργεια.

Αφου για $\Omega = \Omega_c$, ανεξάρτητα απο το N, ισχυει $|H(j\Omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,7$

Για $\Omega > \Omega_c$, $\frac{\Omega}{\Omega_c} > 1 \rightarrow \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} \gg 1 \rightarrow |H(j\Omega)| \simeq 0$

$\Omega < \Omega_c$, $\frac{\Omega}{\Omega_c} < 1 \rightarrow \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} \simeq 0 \rightarrow |H(j\Omega)| \simeq 1$



- Πόλοι Συνάρτησης Μεταφοράς

Χρησιμοποιώντας την $|H(s)|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$, παρατηρω πως η συναρτηση μεταφορας του φίλτρου εχει πολους για $1+\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N} = 0 \Leftrightarrow s_n = j\Omega_c e^{j\pi\frac{2n+1}{2N}}$

$\Leftrightarrow s_n = \Omega_c e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2n+1}{2N}\right)}, \quad n = 0, \ldots, 2N-1$

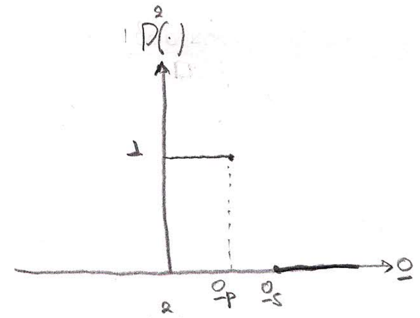
Βλεπω πως $\forall s_n$, η s_n^* ειναι επισης ρίζα

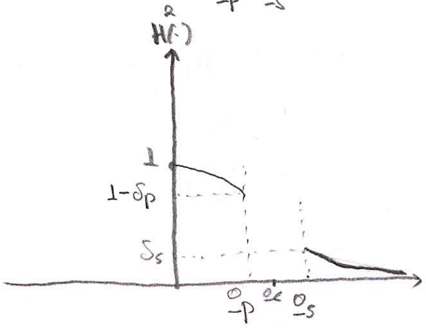
Αρα η $|H(s)|^2 = H(s)H(-s)$, το οποίο μας εξασφαλίζει πραγματικους συντελεστες και ευστάθεια. (Αναλυση, σελ. 158 Βιβλίο)

• Σχεδίαση Βάσει Προδιαγραφών

Οι προδιαγραφές που μου δίνονται είναι η συχνότητα άκρο της ζώνης μετάβασης Ω_p, αντίστοιχα της ζώνης αποκοπής Ω_s και τα μέγιστα επιτρεπτά σφάλματα δ_p, δ_s.

Αυτά που ουσιαστικά πρέπει να υπολογίσω είναι η τάξη φίλτρου N και η Ω_c.





Έχω λοιπόν ζώνη διάβασης $[0, \Omega_p]$, ζώνη μετάβασης $[\Omega_p, \Omega_s]$ και ζώνη αποκοπής $[\Omega_s, \infty)$.

Παρατηρώ πως η $|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\frac{\Omega}{\Omega_c})^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ με $|H(j0)|^2 = 1$ και $|H(j\infty)|^2 = 0$.

Αρκεί λοιπόν να μελετήσω το σφάλμα στα σημεία Ω_p, Ω_s.

Οι περιορισμοί που προκύπτουν λοιπόν είναι:

$$|H(j\Omega_p)|^2 \geq (1-\delta_p)^2 \qquad (1)$$

$$|H(j\Omega_s)|^2 \leq \delta_s^2 \qquad (2)$$

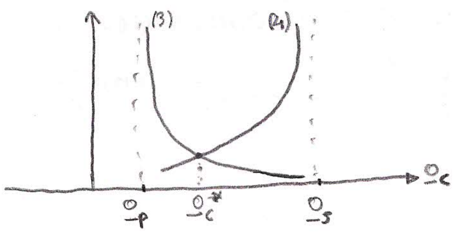
Από την (1): $\frac{1}{1+(\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^{2N}} \geq (1-\delta_p)^2 \iff \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} \leq \underbrace{\frac{1}{(1-\delta_p)^2} - 1}_{\Delta_p} \iff 2N \log\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right) \leq \log(\Delta_p)$

$\Rightarrow N \geq \frac{\log(\Delta_p)}{2\log(\frac{\Omega_p}{\Omega_c})}$ (3), αφού $\Omega_p < \Omega_c \to \log(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}) < 0$

Είναι εύλογο να υποθέσω πως $\Omega_p < \Omega_c < \Omega_s$ αφού $|H(j\Omega_c)|^2 = \frac{1}{2}$

Δουλεύοντας αντίστοιχα για την (2) υπολογίζω πως $N \geq \frac{\log(\Delta_s)}{2\log(\frac{\Omega_s}{\Omega_c})}$ (4)

Αν μελετήσω τα δεξιά μέλη των (3), (4) σε σχέση με το Ω_c έχω:



Το Ω_c^* λοιπόν είναι το Ω_c που ψάχναμε, για το οποίο ικανοποιούνται οι (3), (4).
Για να το βρω εξισώνω τα δεξιά μέλη των (3), (4).
Έπειτα προσδιορίζω το N με απλή αντικατάσταση.

6.3 Φίλτρα Chebyshev

- Πολυώνυμα Chebyshev 1ου τύπου

Το πολυώνυμο Chebyshev 1ου τύπου τάξης k ορίζεται από τον τύπο:

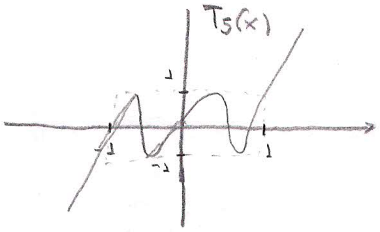
$$T_k(x)=\begin{cases}\cos(k\cos^{-1}(x)) & ,\ |x|\le 1\\ \cosh(k\cosh^{-1}(x)) & ,\ |x|>1\end{cases}$$ ή από την αναδρομή $$T_k(x)=\begin{cases}1 & ,\ k=0\\ x & ,\ k=1\\ 2xT_{k-1}(x)-T_{k-2}(x) & ,\ k\ge 2\end{cases}$$

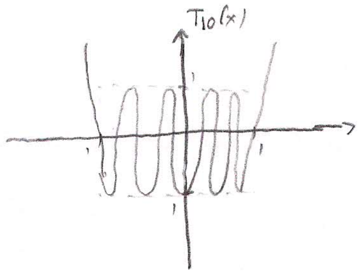
Η χαρακτηριστική ιδιότητα των πολυωνύμων Chebyshev είναι πως

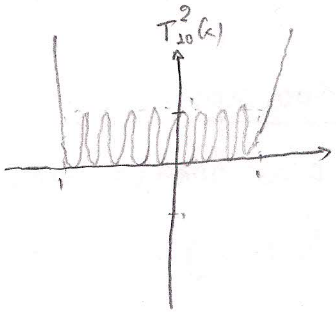
για $x\in[-1,1]$, το $T_k(x)\in[-1,1]$ και πιο συγκεκριμένα κάνει σταθερό κυματισμό μεταξύ των 2 ακροτάτων του

για $|x|>1$, το πολυώνυμο εμφανίζει μονότονη συμπεριφορά, είναι δηλαδή αύξον αν k περιττός και φθίνον αν k άρτιος, ενώ το $T_k(x)$ παίρνει μεγάλες τιμές γρήγορα.

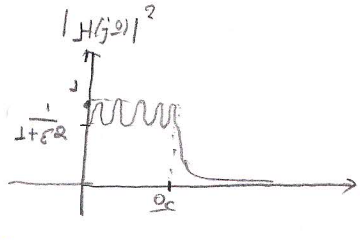
Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε εύκολα πως το $T_k^2(x)$ κάνει σταθερό κυματισμό μεταξύ 0 και 1 για $x\in[-1,1]$ και τείνει πιο γρήγορα σε μεγάλες τιμές για $|x|>1$.







- Φίλτρα Chebyshev 1ου τύπου



Η απόκριση πλάτους εδώ είναι $|H(j\Omega)|^2=\dfrac{1}{1+\varepsilon^2 T_N^2(\frac{\Omega}{\Omega_c})}$

Για $\Omega\in[0,\Omega_c]$, $T_N^2\in[0,1]$ άρα $|H(j\Omega)|^2\in\left[\frac{1}{1+\varepsilon^2},1\right]$

Για $\Omega>\Omega_c$, T_N^2 παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, άρα $|H(j\Omega)|^2\to 0$ γρήγορα.

Για να προσδιορίσω τα N, Ω_c, ε δουλεύω ως εξής

- Παρατηρώ πως για $\Omega=\Omega_c$, $|H(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2}$, παίρνει δηλαδή την μικρότερη τιμή της (που την έχει ξαναπάρει) στην ισοκυματική της περιοχή. Άρα ουσιαστικά, η $[0,\Omega_c]$ είναι περιοχή διέλευσης, άρα επιλέγω $\Omega_c=\Omega_p$.
- Προφανώς πρέπει στο $[0,\Omega_p]$, $|H(j\Omega)|^2\ge(1-\delta_p)^2 \xRightarrow{\Omega=\Omega_c} \varepsilon=\sqrt{\frac{1}{(1-\delta_p)^2}-1}$
- Τώρα πρέπει να προσδιορίσω την τάξη. Είδα πως για $\Omega>\Omega_c$, η $|H(j\Omega)|^2$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα αρκεί να ισχύει ο περιορισμός του δ_s για $\Omega=\Omega_s$. Συνεπώς λύνω ως προς N την $|H(j\Omega)|^2\le\delta_s^2$

6.4 Μετασχηματισμοί Συχνότητας

Στις προηγούμενες ενότητες σχεδίασα κατωπερατά Butterworth κ' Chebyshev φίλτρα. Από αυτά μπορούμε με μετασχηματισμούς συχνότητας να πάρω αμέσα ανωπερατά, ζωνοπερατά ή αποκοπής ζώνης φίλτρα. Θα δούμε πως.

· Κατωπερατό σε Κατωπερατό

Αν έχω κανονικοποιημένο Butterworth, δηλαδή $\Omega_c = 1$ και θέλω να φτιάξω φίλτρο με συχνότητα αποκοπής Ω_c τότε θέτω $\Omega \to \frac{\Omega}{\Omega_c}$ (αντ. $s \to \frac{s}{\Omega_c}$)

*ίδια τα δ_p', δ_s'

· Κατωπερατό σε Ανωπερατό

Εδώ αρκεί να αντικαταστήσω $\left(s \to \frac{1}{s}\right)$ $\Omega \to -\frac{1}{\Omega}$

ίδια δ_p', δ_s' και $\Omega_c' = \frac{1}{\Omega_c}$

· Κατωπερατό σε Ζωνοπερατό

Αν θέλω από κατωπερατό να φτιάξω ζωνοπερατό με ζώνη διέλευσης $[\Omega_u, \Omega_l]$ αρκεί να αντικαταστήσω $\Omega \to \frac{\Omega^2 - \Omega_u \Omega_l}{\Omega}$ $\left(s \to s + \frac{\Omega_u \Omega_l}{\Omega}\right)$

· Κατωπερατό σε Αποκοπής Ζώνης

Εδώ αρκεί να εφαρμόσω τον αντίστροφο μετασχηματισμό από την περίπτωση του ζωνοπερατού. Αν έχω ζώνη αποκοπής $[\Omega_u, \Omega_l]$ τότε $\Omega \to \frac{\Omega}{\Omega_u \Omega_l - \Omega^2}$ $\left(s \to \frac{s}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}\right)$

6.5 Σχεδίαση Ψηφιακών IIR Φίλτρων

Μέχρι τώρα σχεδίαζα αναλογικά IIR φίλτρα. Θέλω να βρω έναν μετασχηματισμό συχνότητας που θα μου δίνει αναλογικά τα οποία θα διατηρούν τις προδιαγραφές και i) θα έχουν συνάρτηση μεταφοράς ρητή ως προς z ii) θα έχουν όλους τους πόλους εντός μοναδιαίου κύκλου.

- **Μέθοδος Αμετάβλητης Κρουστικής Απόκρισης**

Έστω ότι έχω αναλογικό IIR φίλτρο με $h_a(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} H_a(s)$.

Δημιουργώ την $h_n = T_s h_a(nT_s)$, όπου $F\{h_n\} = H(e^{j\omega}) = \cancel{\frac{1}{T_s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cancel{T_s} H_a\left(j\frac{\omega+2n\pi}{T_s}\right)$

Η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης παραβλέπει την αναδίπλωση συχνοτήτων και κρατάει μόνο τον κεντρικό όρο του αθροίσματος, δλδ $H(e^{j\omega}) = H_a\left(j\frac{\omega}{T_s}\right)$, η οποία προκύπτει από τον μετασχηματισμό $\Omega \to \frac{\omega}{T_s}$

Το βασικό μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι πως το ~~φίλτρο~~ σήμα πρέπει να έχει μηδενική ενέργεια στην ζώνη συχνοτήτων $[\pi, +\infty)$, αλλιώς το φαινόμενο αναδίπλωσης εμφανίζεται έντονα.

- **Μέθοδος Διγραμμικού Μετασχηματισμού**

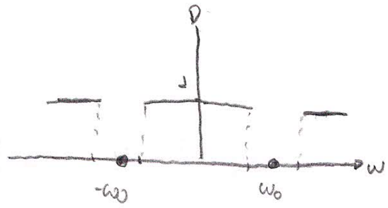
Ξεκινώντας πάλι από αναλογικό IIR με $h_a(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H_a(s)$, ο γραμμικός μετασχηματισμός ορίζεται ως $s \to \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, όπου η αντιστοίχιση αναλογικής με ψηφιακή συχνότητα δίνεται από την σχέση $\Omega = \tan\frac{\omega}{2}$, η οποία είναι αυστηρώς αύξουσα και πετυχαίνει 1-1 αντιστοίχιση μεταξύ $(-\pi, \pi]$ και $(-\infty, +\infty)$.

7 ΕΙΔΙΚΑ ΨΗΦΙΑΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

7.1 Φίλτρα Εγκοπής

Θέλω να σχεδιάσω φίλτρο που θα αποκόπτει μία ακριβώς συχνότητα ω_0.

Άρα $D(\cdot) = \begin{cases} 0, & \omega=\omega_0 \\ 1 & \text{αλλού} \end{cases}$. Καθώς ένα τέτοιο φίλτρο παρουσιάζει ασυνέχεια, ορίζω μια ζώνη μετάβασης $[\omega_\ell, \omega_u]$ περί την ω_0 ώστε να μπορώ να υλοποιήσω το φίλτρο.



- ### FIR Φίλτρα Εγκοπής

Εδώ $H(e^{j\omega_0})=0 \Leftrightarrow R(e^{j\omega_0})=0 \overset{D\ \text{συμμετρική}}{\Longleftrightarrow} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \cos(n\omega) = 0$ (1)

Αν λύσω την (1) ως προς α_0, προκύπτει $\alpha_0 = -\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \cos(n\omega)$

Επίσης στο ω_0, η $R(\cdot)$ παρουσιάζει ελάχιστο και εναλλάσσει πρόσημο, συνεπώς έχω $R^{(1)}(e^{j\omega_0}) = 0 \Leftarrow \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \cdot n \cdot \sin(n\omega_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -(\sin(\omega_0))^{-1} \sum_{n=2}^{N} \alpha_n \cdot n \cdot \sin(n\omega_0)$

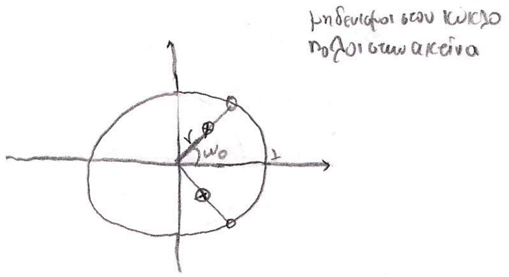
Με τις δύο αυτές παρατηρήσεις προσδιορίσαμε 2 από τους συντελεστές του FIR φίλτρου και πρέπει να υπολογίσουμε άλλους $N-2$.

Εδώ χρησιμοποιώ όποια μέθοδο μου ζητείται (ζώνες αδιαφορίας, min-max) και σχεδιάζω το φίλτρο μου.

- ### IIR Φίλτρα Εγκοπής

Είναι εύκολο να σχεδιάσω τέτοια IIR φίλτρα

Τα μηδενικά τα τοποθετώ για να κόψω τις συχνότητες ενώ τους πόλους για να είναι απότομη η μετάβαση



Έχω λοιπόν $H(z) = A \dfrac{(z-e^{j\omega_0})(z-e^{-j\omega_0})}{(z-re^{j\omega_0})(z-re^{-j\omega_0})} = A \dfrac{z^2 - 2\cos(\omega_0) + 1}{z^2 - 2r\cos(\omega_0) + r^2}$

Θα υπολογίσω το A έτσι ώστε η μέγιστη τιμή του $H(z)$ να είναι 1.

Έχω $\max_{\omega}\{H(e^{j\omega})\} = \max\{H(0), H(e^{j\pi})\} \Leftarrow A = \dfrac{1 + r^2 + 2r\cos(\omega_0)}{2 + 2\cos(\omega_0)}$

Το r γενικά κινείται στο $(0,1)$. Όσο $r \to 0$ τόσο πιο σταθερό γίνεται το φίλτρο.

Αφού έχω βρει το A, προσδιορίζω το r λύνοντας την $|H(e^{j\omega_\ell})|^2 = (1-\delta)^2$

Από τις 4 λύσεις που θα προκύψουν για το r, κρατάω την πιο κοντά στο 0

7.2 Ψηφιακοί Διαφοριστές

Απο ιδιοτητες Fourier ξερω πως αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\Omega)$ τοτε $y(t) = x^{(1)}(t) \leftrightarrow j\Omega X(j\Omega) = Y(j\Omega)$

Εχω τωρα $x(t) \xrightarrow{digitalize} x(nT_s) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(j\frac{\omega-2n\pi}{T_s}\right) = X(e^{j\omega})$

$$y(t) \longrightarrow y(nT_s) \longleftrightarrow \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y\left(j\frac{\omega-2n\pi}{T_s}\right) = Y(e^{j\omega})$$

Υποθετοντας οτι δεν υπαρχουν αναδιπλωσεις, δηλ $f_s \geq 2f_{max}$ και $x(t)$ πεπερασμενου ευρους ζωνης, τοτε για $\omega \in [-\pi, \pi]$ εχω:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} X\left(j\frac{\omega}{T_s}\right) \quad \text{και} \quad Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} Y\left(j\frac{\omega}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s}\frac{j\omega}{T_s} X\left(j\frac{\omega}{T_s}\right) = \frac{j\omega}{T_s} X(e^{j\omega})$$

Αρα εχω $Y(e^{j\omega}) = \underbrace{\frac{j\omega}{T_s}}_{D(\cdot)} X(e^{j\omega}) \Leftrightarrow D(e^{j\omega}) = j\frac{\omega}{T_s}$

$$x(nT_s) \longrightarrow \boxed{D(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T_s}} \longrightarrow y(nT_s)$$

- Βλεπω πως $D(\cdot) \in Im$ αρα προσεγγιζω με $R(\cdot) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(n\omega)$
- Μπορω να συνδυασω διαφοριση και φιλτραρισμα σε ενα φιλτρο αφου ειναι ΓΧΑΣ.

7.3 Ψηφιακοί Ολοκληρωτές

Ομοια με πριν, αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\Omega)$ τοτε $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\Omega} X(j\Omega) = Y(j\Omega)$

Ακολουθωντας ιδια διαδικασια με πριν προκυπτει $D(e^{j\omega}) = \frac{T_s}{j\omega} = -j\frac{T_s}{\omega}$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$

Αν η $\omega = 0$ ανηκει σε ζωνη αποκοπης, τοτε δεν εχω προβλημα και προσεγγιζω οπως πριν αφου και εδω $D(\cdot) \in Im$.

Αν η $\omega = 0$ ανηκει σε ζωνη διαβασης τοτε $D(\cdot) = +\infty$

Εδω θα χρησιμοποιησω την αναδρομικη σχεση $y_n = y_{n-1} + \int_{(n-1)T_s}^{nT_s} x(\tau)d\tau$. Εκφραζοντας το ολοκληρωμα ως συνελιξη εχω $y_n = y_{n-1} + x_n * h_n$, οπου h_n κρ. αποκριση N ορων. Παιρνοντας ΖΜΣ της τελευταιας σχεσης εχω $H(z) = \frac{h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{N-1} z^{-(N-1)}}{1 - z^{-1}}$

Προσεγγιση Ολοκληρωματος

- Κανονας Ορθογωνιου: $y_n = y_{n-1} + T_s x_{n-1} \xleftrightarrow{Z} H(z) = \frac{T_s z^{-1}}{1 - z^{-1}}$, $H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega}{2}} \frac{T_s}{2j\sin\frac{\omega}{2}}$

  αρα καθυστερηση κατα μιση χρ. μοναδα
- Κανονας Τραπεζιου: $y_n = y_{n-1} + 0.5T_s(x_{n-1} + x_n) \leftrightarrow H(z) = \frac{T_s}{2}\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$ ...
- Κανονας Simpson: $y_n = y_{n-2} + \frac{T_s}{3}(x_n + 4x_{n-1} + x_{n-2})$ ...

Για $\omega \to \pi$ $\varepsilon \to \infty$. Αρα πρεπει $f_s \geq 2f_{Nyq}$ ωστε το συχνοτικο περιεχομενο να συγκεντρωθει στη ζωνη $[0, 0.5\pi]$

8 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

8.1 Κατασκευάζοντας Πιθανότητες

Ένας χώρος πιθανότητας είναι μία τριάδα (Θ, F, P), η οποία αποτελείται από:

- έναν δειγματοχώρο Θ, ο οποίος έχει ως στοιχεία όλα τα δυνατά αποτελέσματα των πιθανοτικών πειραμάτων
- ένα σύνολο γεγονότων F, το οποίο είναι ένα δυναμοσύνολο του Θ (ή αλλιώς σ-άλγεβρα του Θ). Προφανώς $\Theta \in F$, $\emptyset \in F$, αν $A \in F$ τότε $A' \in F$.
- μία συνάρτηση πιθανότητας $P: F \to [0,1]$ και είναι ο τρόπος με τον οποίο εκχωρούμε πιθανότητα σε γεγονότα.

Μία τυχαία μεταβλητή $X: \Theta \to \mathbb{R}$ αντιστοιχίζει δείγματα του Θ σε πραγματικούς αριθμούς. π.χ coin toss, $\Theta = \{heads, tails\}$. Ορίζω Τ.Μ $X(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \theta = heads \\ 0, & \text{αν } \theta = tails \end{cases}$

Κάθε Τ.Μ ορίζει με τη σειρά της σύνολα $A_x = \{\theta : X(\theta) \leq x\}$

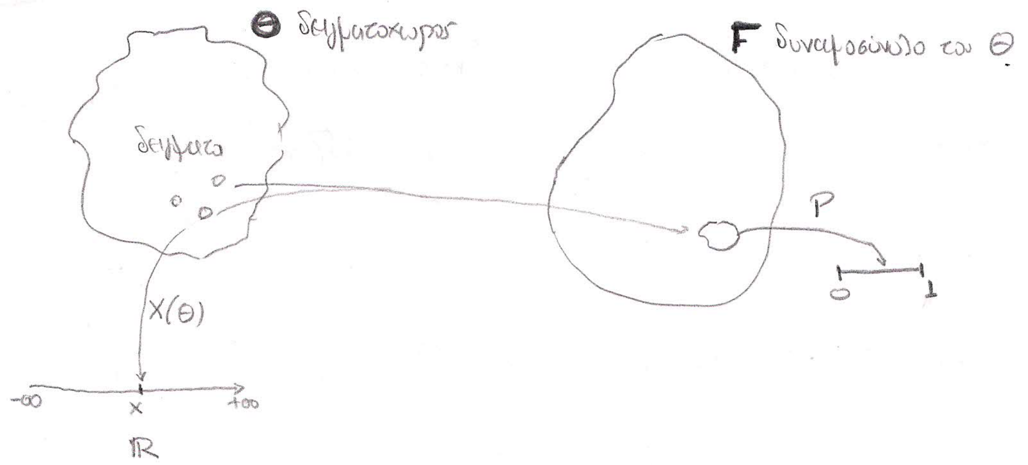
π.χ

$$A_0 = \{\theta : X(\theta) \leq 0\} = \{tails\}$$

$$A_1 = \{\theta : X(\theta) \leq 1\} = \{heads, tails\}$$

Αν η $X(\theta)$ είναι τέτοια ώστε $A_x \in F \ \forall x \in \mathbb{R}$ τότε η $X(\theta)$ είναι μετρήσιμη και ονομάζεται τυχαία μεταβλητή.

Χώρος Πιθανότητας



Συναρτηση Κατανομής Πιθανοτητας (CDF)

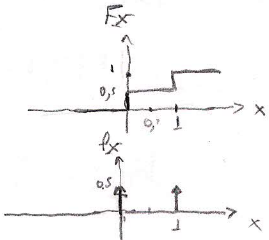
Η CDF μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι μιά συναρτηση $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ και ορίζεται απο τον τυπο $F_X(x) = P_r\{X(\theta) \le x\}$

Για καθε CDF ισχυει:
- Η $F_X(x)$ είναι αυξουσα ως προς το x
- $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$
- $P_r\{a < X \le b\} = F_X(b) - F_X(a)$

Συναρτηση Πυκνοτητας Πιθανοτητας (PDF)

Η PDF μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι μία συναρτηση $f_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, η οποία ικανοποιεί $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \iff f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$.

Για καθε PDF ισχυει
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$



π.χ για δίκαιο coin toss, $F_X(-a) = 0$ $F_X(0) = \frac{1}{2}$ $F_X(0,5) = \frac{1}{2}$ $F_X(1) = 1$

$f_X(-a) = 0$ $f_X(0) = \frac{1}{2}$ $f_X(0,5) = 0$ $f_X(1) = \frac{1}{2}$

! Στην διακριτή περίπτωση δηλαδή $f_X(x_i) = P_r\{X(\theta) = x_i\}$

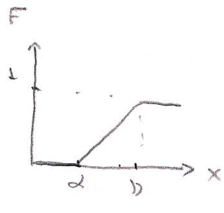
Καποιες απο τις πιο συνηθισμενες CDF/PDF είναι:

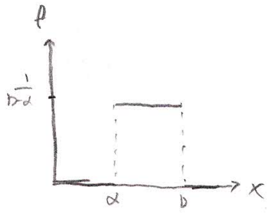
- Η ομοιομορφη (uniform) κατανομή, οπου όλα τα στοιχεία του δειγματοχώρου είναι ισοπίθανα.

Εδω εχουμε

CDF: $F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & , x \ge b \end{cases}$

pdf: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \le x \le b \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$





μεσος ορος
διασπορα

Η κανονική (Gaussian) που συμβολίζεται με $N(m, \sigma)$.

Εδω εχουμε $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Στην ειδική περίπτωση που εχουμε την $N(0,1)$, είναι $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

8.2 Ροπές

• Θα ονομάζω ροπή n-οστής τάξης μιας τυχαίας μεταβλητής $X(\theta)$ με pdf $f_X(x)$ την ποσότητα $E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x)\,dx$

Η ροπή 1ης τάξης $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ ονομάζεται στοχαστικός μέσος όρος της Τ.Μ X, και τον συμβολίζω και ως $\bar{X}$ ή μ.

• Γενικεύω τις ροπές εισάγοντας την έννοια της κεντρικής ροπής η οποία ορίζεται ως $E[(X-\mu)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^n f_X(x)\,dx$, όπου μ ο στοχαστικός μέσος όρος.

Την κεντρική ροπή 2ης τάξης την καλούμε διασπορά $\sigma_X^2 = E[(X-\mu)^2]$

Παρ Αν θέλω να αντικαταστήσω μία συνάρτηση με μία μόνο σταθερά, τότε επιλέγω τον μέσο όρο της συνάρτησης και ελαχιστοποιώ το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

π.χ Για δίκαιο coin toss, $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = 0\,\cancel{f_X(0)} + 1\, f_X(1) = \frac{1}{2}$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

8.3 Πολλές Τυχαίες Μεταβλητές

Όταν έχω >1 Τ.Μ οι ορισμοί αλλάζουν λίγο. Εδώ θα υποθέσω πως έχω 2 Τ.Μ. $X_1(\theta), X_2(\theta)$

· Joint CDF $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2\}$

· Joint PDF $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{d^2 F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{dx_1\,dx_2}$

Δύο Τ.Μ X_1, X_2 είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητες αν $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$ ή αντίστοιχα, αν $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$.

· Συσχέτιση (Correlation) $E[X_1,X_2] = \iint x_1 x_2 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$

Αν $E[X_1,X_2] = E[X_1]E[X_2]$ τότε θα λέω πως οι X_1, X_2 είναι ασυσχέτιστες

• Αν $E[X_1,X_2]=0$ τότε οι Τ.Μ αμοιβαίως ορθογώνιες

Αν οι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες τότε είναι και ασυσχέτιστες

Αν οι X_1, X_2 είναι ασυσχέτιστες και ~~...~~ Gaussian τότε είναι και ανεξάρτητες.

· Συνδιασπορά (covariance) $cov(X_1,X_2) = E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)]$

Αν $cov(X_1,X_2)=0 \Leftarrow E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)]=0 \Leftarrow E[X_1X_2] - \mu_1 E[X_2] - \mu_2 E[X_1] - \mu_1\mu_2) = 0$

$\Rightarrow E[X_1X_2] = E[X_1]E[X_2] \Leftarrow$ οι X_1, X_2 είναι ασυσχέτιστες

· Πινακας Συνδιασπορών:

Εστω οι Τ.Μ $X_1, X_2, \ldots X_n$ και οι μεσοι οροι τους $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.
Φτιαχνω το διανυσμα $X = [X_1-\mu_1, X_2-\mu_2, \ldots, X_n-\mu_n]^T$ και οριζω την μητρα συνδιασποράς:

$$C = E[X X^T] = E\left[\begin{bmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \\ \vdots \\ x_n-\mu_n \end{bmatrix} [x_1-\mu_1, x_2-\mu_2, \ldots, x_n-\mu_n] \right]$$

$$= \begin{bmatrix} cov(X_1,X_1) & cov(X_1,X_2) & \ldots & cov(X_1,X_n) \\ cov(X_1,X_2) & cov(X_2,X_2) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ cov(X_1,X_n) & & & cov(X_n,X_n) \end{bmatrix}$$

· Παρ ο πινακας ειναι συμμετρικος ως προς την διαγωνιο
· Παρ2 Στην διαγωνιο εχουμε $cov(X_i,X_i) = \sigma_{X_i}^2$, δηλαδη διασπορες.
· Παρ.3 Το (i,j) στοιχειο εχει την $cov(X_i, X_j)$

8.4 Νομοι της Στατιστικής

· Νομος των Μεγαλων Αριθμων

Εστω ακολουθια Τ.Μ $X(\theta_1), X(\theta_2)\ldots$ που εχουν ιδια κατανομη, μεσο ορο μ και ειναι ανεξαρτητες
Οριζω $y_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X(\theta_i)$. Ο νομος των Μεγαλων Αριθμων λεει πως $\lim_{k\to\infty} E[(y_k-\mu)^2] = 0$

Απ: Πραγματι, $E[(y_k-\mu)^2] = \frac{1}{k^2}E[(\sum_{i=0}^{k} X(\theta_i) - \mu k)^2] = \frac{1}{k^2}E[(\underbrace{\sum X(\theta_i) - \mu}_{\text{μεση τιμή 0, ανεξαρτητες}})^2] = \frac{1}{k^2}E[\sum(X(\theta_i)-\mu)^2]$
$= \frac{\sigma^2}{k}$, το οποιο για $k\to\infty$, τεινει στο 0.

Αρα η διασπορά του αριθμητικού μεσου ορου k δειγματων ειναι $\frac{\sigma^2}{k} \xrightarrow{\ k\to\infty\ } 0$ και εχει μεσο ορο μ, αρα ειναι καλή εκτιμηση του στοχαστικού μεσου όρου, αφου δεν διαφερει απο μια σταθερό.

· Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Το προηγουμενο θεωρημα μας λεει οτι ο αριθμητικο Μ.Ο ειναι καλή προσεγγιση του στοχαστικού Μ.Ο.
Το θεωρημα αυτο βρισκει την κατανομή του $y_k - \mu$, δηλαδή του σφάλματος προσεγγισης,
δηλαδή $\lim_{k\to\infty} Pr\left\{ \underbrace{\frac{y_k-\mu}{\left(\frac{\sigma_x}{\sqrt{k}}\right)}}_{\text{κανονικοποιηση}} \le x \right\} \sim N(0,1)$, δηλαδή η συναρτηση σφαλματος ειναι Gaussian με $\mu=0$ και $\sigma^2=1$

9. ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΦΙΛΤΡΑ WIENER

9.1 Στοχαστικά Σήματα

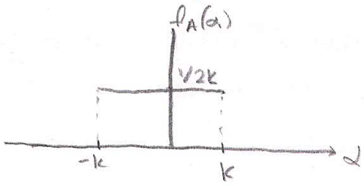
Στο προηγούμενο κεφάλαιο, αποτέλεσμα ενός τυχαίου πειράματος ήταν η τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής. Εδώ, αποτέλεσμα ενός πειράματος θα είναι ένα σήμα, συνεχούς ή διακριτού χρόνου. Κάθε αποτέλεσμα του πειράματος ονομάζεται υλοποίηση.

Έτσι θα παίρνω ένα στοχαστικό σήμα $x(t,\theta)$ (αντίστοιχα $x(n,\theta)$) όπου:

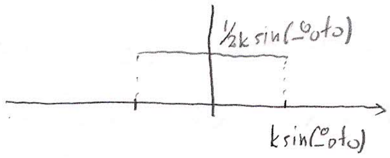
- Αν κρατήσω $\theta=\theta_i$ έχω μία συγκεκριμένη υλοποίηση του σήματος άρα το $x(t,\theta_i)$ είναι συνάρτηση του χρόνου.
- Αν κρατήσω $t=t_0$, τότε το $x(t_0,\theta)$ είναι μία τυχαία μεταβλητή.

• Παράδειγμα: Έστω το σήμα $X(t) = A\sin(\Omega_0 t)$, όπου A είναι Τ.Μ $\mathcal{U}(-k,k)$, $k>0$. Το πλάτος δηλαδή του σήματος είναι μία Τ.Μ και συνεπώς το σήμα είναι στοχαστικό.

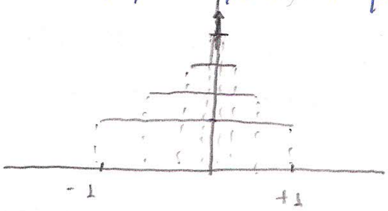
Από την pdf της A έχω:



Αν παγώσω τον χρόνο σε κάποια στιγμή t_0, τότε $X(t_0) = A\sin(\Omega_0 t_0)$. Η pdf της $X(t_0)$ είναι:



Καθώς μεταβάλλεται το t, μεταβάλλεται η μορφή της pdf



Έχω μια ακολουθία κατανομών που συγκλίνει στην $\delta(\cdot)$

Παρ. 1 Παρόλο που οι κατανομές είναι διαφορετικές, έχουν κοινό στοχαστικό μέσο όρο $\mu=0$

Παρ. 2 Θα ήθελα η Τ.Μ μου, δηλ. εδώ $X(t)$ να διατηρεί την ίδια pdf για κάθε t (εδώ δεν συμβαίνει). Αυτό λέγεται στασιμότητα πρώτης τάξης υπό την αυστηρή έννοια, και θα το δούμε πιο αναλυτικά στην συνέχεια.

9.2 Στατιστικές 1ης και 2ης τάξης

- **Αυτοσυσχέτιση και Ετεροσυσχέτιση**

*εδώ ως συσχέτιση ορώ συνδιασπορά, καθώς είναι ισοδύναμα

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μας δίνει την συσχέτιση του σήματος με τον εαυτό του σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές, $r_x(t_1, t_0) = E[(X(t_0) - \mu_{t_0})(X(t_1) - \mu_{t_1})]$

Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης μας δείχνει πόσο συσχετίζονται δύο σήματα X, Y σε διαφορετικές χρ. στιγμές t_1, t_2, δηλ. $r_{x,y}(n,k) = E[(X(n) - \mu_x(n))(Y(n+k) - \mu_y(n+k))]$

(ενναλ., $r_{xy}(k) = E[(X(n) - \mu_x(n))(Y(n+k) - \mu_y(n+k))]$)

- **Στασιμότητα**

Μια στοχαστική διαδικασία καλείται:

- (Ισχυρά) **Αυστηρά Στάσιμη 1ης τάξης**: όταν για κάθε χρ. στιγμή t διατηρεί την ίδια cdf / pdf
- **Ασθενώς Στάσιμη 1ης τάξης**: όταν για κάθε χρ. στιγμή t διατηρεί την ίδια μέση τιμή μ.
- **Αυστηρά Στάσιμη 2ης τάξης**: όταν η joint pdf των Τ.Μ που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές στιγμές της στοχαστικής διαδικασίας δεν εξαρτάται από τις χρ. στιγμές αλλά από την διαφορά τους, δηλ. $F_X(t_1, t_2) = F_X(t_1 - t_2)$. Συνεπώς όλες οι χρ. στιγμές που ισαπέχουν έχουν ίδια joint pdf/cdf.
- **Ασθενώς στάσιμη 2ης τάξης** όταν είναι ασθενώς στάσιμη πρώτης τάξης και ισχύει $r_{x,y}(n,k) = r_{x,y}(k)$ δηλαδή η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται από την χρ διαφορά και όχι από τις χρ. στιγμές.

Παρ: Η αυστηρή στασιμότητα έχει να κάνει με cdf/pdf ενώ η ασθενής στασιμότητα έχει να κάνει με στατιστικές.

Παρ. II Οι στασιμότητες μου δημιουργούν πίνακα συνδιασπορών ειδικής μορφής.

Για $t_0, t_1, \dots, t_n$:

ασθενής στασ. 2ης τάξης

$t_{i+1} - t_i = \Delta$

$$\begin{bmatrix} r(t_0,t_0) & r(t_0,t_1) & \dots & r(t_0,t_n) \\ r(t_1,t_0) & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ r(t_n,t_0) & \dots & \dots & r(t_n,t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(0) & r(\Delta) & r(2\Delta) & \dots & r(n\Delta) \\ r(\Delta) & r(0) & r(\Delta) & & \vdots \\ r(2\Delta) & r(\Delta) & r(0) & & \\ \vdots & & & \ddots & r(\Delta) \\ r(n\Delta) & \dots & & r(\Delta) & r(0) \end{bmatrix}$$

Μορφή Toeplitz

9.3 Φασμα Ισχυος Στοχαστικων Σηματων

Ειδαμε πως αν $x(t)$ σήμα, τοτε η ενεργεια σε κάθε συχνοτητα ω δίνεται απο την ποσοτητα $|X(j\omega)|^2$

Εδω το σήμα είναι μία στοχαστική διαδικασία $X_\theta(n)$. Αν παρω μια υλοποίηση $X_{\theta_i}(n)$ τοτε μπορω κανονικά να υπολογίσω το συχνοτικο της περιεχόμενο ως $|X_{\theta_i}(e^{j\omega})|^2$. Αυτή η ποσοτητα ομως δεν μου λέει κάτι για το συχνοτικό περιεχομενο όλης της διαδικασίας.

Θα χρησιμοποιήσω λοιπον τον μεσο ορο, και θα ορίσω το μεσο φασμα ισχυος ως $$\Phi_x(e^{j\omega}) = E\left[|X_\theta(e^{j\omega})|^2\right]$$

Αποδεικνύεται πως $$\Phi_x(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{r_x(n)\}$$ οπου r_x η συνάρτηση αυτοσυσχετισης του σήματος μας.

9.4 Λευκός Θόρυβος

Λευκος Θορυβος είναι ένα στοχαστικό σήμα, του οποίου η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι της μορφής $R_x(t_1, t_2) = r_x(t_1, t_1)\,\delta(t_1 - t_2)$, το οποιο μπορεί να γραφτεί και στην μορφή $r_x(n) = \begin{cases} \lambda, & n=0 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$

! Εδω είναι $r_x(0) = E[(X_0 - \mu)^2] = \sigma^2$ δηλαδή η διασπορά του θορύβου είναι λ!

Συνεπως το φάσμα ισχυος του λευκού θορυβου $\Phi_x(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{r_x(n)\} = R_x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k) e^{-j\omega k} = \lambda$

- Δεν βάζω περιορισμο στην κατανομή που μου δημιουργεί τον λευκό θορυβο αλλα θελω να έχει μηδενική μέση τιμή.

9.5 Εργοδικοτητα

Οταν ο στοχαστικος μέσος ορος μίας τ. διαδικασίας μπορεί να προσεγγιστεί απο τον χρονικο μεσο ορο, τοτε η διαδικασία καλείται εργοδική $1^{ης}$ ταξης.

δηλαδή $\hat{E}[X] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_{\theta_i}(n) \simeq E[X]$

Οταν ισχύει το αντίστοιχο για την αυτοσυσχετιση, τοτε καλειται εργοδική $2^{ης}$ ταξης.

δηλαδή $r_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_{\theta_i}(n)\, x_{\theta_i}(n-k)$

9.6 Επίδραση ΓΧΑΣ σε Στοχαστικό Σήμα

Έστω πως σε ΓΧΑΣ με απόκριση $h(n)$ εφαρμόζω στοχαστικό σήμα $x_\theta(n)$. Τότε η έξοδος που θα πάρω είναι επίσης στοχαστικό σήμα $y_\theta(n) = h(n) * x_\theta(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) x_\theta(n-m)$.

- Αν η $x_\theta(n)$ είναι ασθενώς στάσιμη 1ης τάξης τότε:

$$E[y_\theta(n)] = \mu_y^{(n)} = E\left[\sum h(m) x_\theta(n-m)\right] \underset{\substack{\text{linearity και} \\ h(m)\ \text{ντετερμινιστική}}}{=} \sum_m h(m) E[x_\theta(n-m)] = \sum_m h(m)\mu_x = \mu_x \sum h(m)$$

Συνεπώς $\mu_y = \mu_x \sum_m h(m)$. Αν $\mu_x = 0$ τότε $\mu_y = 0$

Η σχέση όμως αυτή μας αποδεικνύει πως και η $y_\theta(n)$ έχει σταθερό μέσο όρο μ_y και συνεπώς είναι ασθενώς στάσιμη 1ης τάξης

- Αν η $x_\theta(n)$ είναι ασθενώς στάσιμη 2ης τάξης, με $\mu_x = 0$, συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_x(n)$ και φάσμα $\Phi_x(e^{j\omega})$:

$$\text{Έχω}\quad r_{xy}(k) \underset{\substack{\mu_x=0\\ \mu_y=0}}{=} E[x_\theta(n+k) y_\theta(n)] = E\left[x_\theta(n+k)\sum_m h(m) x(n-m)\right] = E\left[\sum_m h(m) x_\theta(n+k) x_\theta(n-m)\right]$$

$$= \sum_m h(m) E[x(n+k)x(n-m)] \underset{\text{ασθ. στάσιμο 2ης τάξης}}{=} \sum_m h(m) r_x(k+m) = h(-k) * r_x(k)$$

Άρα $r_{x,y}(k) = h(-k) * r_x(k)$

Θέλω τώρα να υπολογίσω την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της εξόδου. Έχω:

$$r_y(k) = E[y(n)y(n-k)] = \sum h(m) r_{x,y}(k-m) = h(k) * r_{xy}(k)$$

Άρα $r_y(k) = h(k) * r_{x,y}(k) = h(k) * h(-k) * r_x(k)$

Τέλος, θέλω να υπολογίσω το φάσμα ισχύος της εξόδου. Έχω:

$$\Phi_y(e^{j\omega}) = F\{r_y(n)\} = F\{h(k) * h(-k) * r_x(k)\} = F\{h(k)\} F\{h(-k)\} F\{r_x(k)\}$$

$$\Phi_y(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_x(e^{j\omega})$$

9.7 Βέλτιστο Γραμμικό Φιλτράρισμα

Υποθέτω πως παρατηρώ σήμα $x_\Theta(n) = \underset{\text{πληροφορία}}{s_\Theta(n)} + \underset{\text{θόρυβος}}{w_\Theta(n)}$, όπου s, w ασυσχέτιστα, δηλαδή $r_{w,s}(n) = 0$

Θέλω να δημιουργήσω μια εκτίμηση $\hat{s}_\Theta(n)$ της πληροφορίας μέσω των παρατηρήσεων $x_\Theta(n_i)$ που έχω. Επιλέγω γραμμική συνάρτηση, άρα $\hat{s}_\Theta(n) = F(\ldots, x(n-1), x(n), \ldots) = \sum_m h(m)x(n-m)$ και συνεπώς $\hat{s}_\Theta(n) = h(n) * x(n)$.

Υποθέτω πως τα s, x είναι από κοινού στάσιμα 2ης τάξης και $\mu_s = \mu_x = 0$.

- Ελαχιστοποίηση Σφάλματος

Ως συνάρτηση κόστους θα επιλέξω το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, άρα ως σκοπό έχω να $\min_{h_i} E[(s_\Theta(n) - h(n) * x_\Theta(n))^2]$. Παραγωγίζοντας την προηγούμενη σχέση και εξισώνοντας με το μηδέν προκύπτουν:

$$2E[(s_\Theta(n) - h(n)*x_\Theta(n))x(n-k)] = 0 \overset{E\text{'s linearity}}{\Leftrightarrow} E[s(n)x(n-k)] = E[x(n-k)\sum_m h(m)x(n-m)]$$

$$\Leftrightarrow E[s(n)x(n-k)] = \sum_m h(m)\underbrace{E[x(n-k)x(n-m)]}_{r_x(k-m)} \Leftrightarrow \boxed{r_{s,x}(k) = h(m) * r_{x,x}(k)} \quad (1)$$

Παρ: Η σχέση αυτή μας λέει πως το βέλτιστο γραμμικό φίλτρο, όταν οδηγηθεί με την ακολουθία αυτοσυσχέτισης των παρατηρήσεων θα μας δώσει ως έξοδο την ακολουθία ~~αυτο~~ετεροσυσχέτισης παρατηρήσεων-πληροφορίας

9.8 Φίλτρο Wiener

Οι συντελεστές του βέλτιστου ως προς $\mathcal{E}^2$ φίλτρου, πρέπει να ικανοποιούν όπως είδαμε πριν την σχέση $r_{s,x}(k) = h(k) * r_x(k)$. Παίρνοντας τον μετ. Fourier της σχέσης αυτής έχω:

$$F\{r_{s,x}(k)\} = F\{h(k)\} \cdot F\{r_x(k)\} \Leftrightarrow H_w(e^{j\omega}) = \frac{\Phi_{x,s}(e^{j\omega})}{\Phi_x(e^{j\omega})} \quad (1)$$

Αφού $x(n) = s(n) + w(n)$ έχω $s(n+k)x(n) = s(n+k)s(n) + s(n+k)w(n)$, οπου αν εφαρμόσω την μέση τιμή παίρνω $E[s(n+k)x(n)] = E[s(n+k)s(n)] + E[s(n+k)w(n)]$

$$\Rightarrow r_{s,x}(k) = r_s(k) + \underbrace{\cancel{r_{s,w}(k)}}_{0,\ \text{αφού } s,w \text{ ασυσχέτιστα}}$$

$$\Leftrightarrow r_{s,x}(k) = r_s(k)$$

$$\Leftrightarrow \Phi_{s,x}(e^{j\omega}) = \Phi_s(e^{j\omega}) \quad (2)$$

Έχω επίσης $x(n)x(n+k) = (s(n) + w(n))x(n-k)$

$$\overset{E[\,]}{\Longleftrightarrow} r_x(k) = r_{s,x}(k) + r_{w,x}(k)$$

$r_{w,x}(k) = E[w(n)x(n+k)] = E[w(n)(s(n+k) + w(n+k))]$
$= E[w(n)s(n+k)] + E[w(n)w(n+k)]$
$= \overset{0}{\cancel{r_{w,s}(k)}} + r_w(k) = r_w(k)$

$$\Leftrightarrow r_x(k) = r_{s,x}(k) + r_w(k)$$

$$\overset{F\{\}}{\Longleftrightarrow} \Phi_x(e^{j\omega}) = \Phi_{s,x}(e^{j\omega}) + \Phi_w(e^{j\omega})$$

$$\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \Phi_x(e^{j\omega}) = \Phi_s(e^{j\omega}) + \Phi_w(e^{j\omega}) \quad (3)$$

Από (1) $\overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}}$ $H_w(e^{j\omega}) = \dfrac{\Phi_s(e^{j\omega})}{\Phi_s(e^{j\omega}) + \Phi_w(e^{j\omega})} \Leftrightarrow H_w(e^{j\omega}) = \dfrac{\overbrace{(\Phi_s/\Phi_w)}^{\text{SNR, signal-noise ratio}}}{1 + (\Phi_s/\Phi_w)}$

Η πυκνότητα φάσματος του σήματος εξόδου, $\hat{s}(n)$ θα είναι λοιπόν:

$$\Phi_{\hat{s}} = |H_w|^2 \Phi_x \quad (\text{όπως είδα στο } 9.6)$$

Παρατηρώ τώρα πως:

- Αν $\Phi_s >> \Phi_w$ τότε $H_w \sim 1$ και συνεπώς $\Phi_{\hat{s}} \sim \Phi_s$, το φίλτρο δηλαδή επιτρέπει την διέλευση συχνοτήτων όπου το σήμα πληροφορίας είναι πολύ ισχυρότερο του θορύβου.
- Αν $\Phi_s << \Phi_w$ τότε $H_w \sim 0$ και $\Phi_{\hat{s}} \sim 0$, το φίλτρο δηλαδή αποκόπτει συχνότητες όπου ο θόρυβος είναι πολύ ισχυρότερος του σήματος.
- Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η αντίστοιχη συχνότητα πολ/ζεται με αριθμό $\in(0,1)$ ανάλογο με την σχετική ισχύ σήματος θορύβου

9.9 FIR Φίλτρο Wiener

Το φίλτρο της 9.8 είναι άπειρη κρ. απόκριση → μη υλοποιήσιμο.

Εδώ θα θεωρήσω πεπερασμένη κρ. απόκριση N όρων $h(0), \dots, h(N-1)$. Άρα

προσεγγίζω την $s(n)$ με την $\hat{s}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) = [h(0)\ h(1) \dots h(N-1)] \cdot \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-N+1) \end{bmatrix}$

Ψάχνοντας τα $h(n)$ που ελαχιστοποιούν το ε^2, καταλήγουμε πάλι σε εξισώσεις όπως στην 9.7 :

$$r_{sx}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)\, r_x(n-m) \quad , \ n = 0, \dots, N-1$$

μορφή πίνακα

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} r_{sx}(0) \\ r_{sx}(1) \\ \vdots \\ r_{sx}(N-1) \end{bmatrix}}_{R_{sx}} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & \cdots & r_x(N-1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x(N-2) \\ \vdots & & & \vdots \\ r_x(N-1) & r_x(N-2) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix}}_{\text{Η μήτρα συνδιασποράς της } X,\ \text{Toeplitz αφού υπέθεσα στασιμότητα } 2^{ης} \text{ τάξης}} \underbrace{\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{bmatrix}}_{H}$$

$$\Longleftrightarrow \ h_w = R_{xx}^{-1} R_{sx}$$, το βέλτιστο διάνυσμα φίλτρων.

Απόδειξη $H_w = R_{xx}^{-1} R_{sx}$

Έχω στη διάθεση μου τα $X_n = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]$ και ψάχνω $H = [h(0), h(1), \dots, h(N-1)]$ για να βρω $\hat{s}_n = H^T X_n$ ώστε να ελαχιστοποιώ την:

$$\varepsilon^2 = E[(s(n) - \hat{s}(n))^2] = E[(s_n - H^T X_n)^2] = E[s_n^2 + (H^T X_n)^2 - 2H^T s_n X_n]$$

$$= E[s_n^2] + H^T E[X_n X_n^T] H - 2H^T E[s_n X_n]$$

$$= R_{ss} + H^T R_{xx} H - 2H^T R_{sx}$$

Παίρνοντας την παράγωγο $= 0$ ως προς H, έχω:

$$2R_{xx}H - 2R_{sx} = 0 \Rightarrow R_{sx} = R_{xx} H \leftarrow H = R_{xx}^{-1} R_{sx}$$

Ισχύει αν συμμετρικός, $\dfrac{d\, x^T A x}{dx} = 2Ax$

52

1º ΜΕΡΟΣ

1.1 "Εστω αιτιατο ΓΧΑΣ με $h(t) \xleftrightarrow{L} H(s)$. Αν δειγματοληπτήσω την $h(t)$ με f_s τοτε προκυπτει $h[n] \xleftrightarrow{Z} H(z)$. ΝΔΟ α) Αν $H(s)$ λογος πολυωνύμων, τοτε $H(z)$ λογος πολυων. b) Αν $H(s)$ ευσταθής τοτε $H(z)$ ευσταθής." (2.11, βιβλιο)

Απ: α) $H(s)$ λογος πολυωνύμων $\rightarrow$ $H(s) = \frac{b_0 + b_1 s^1 + \dots + b_M s^M}{1 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_N s^N} = \frac{A_1}{s - s_1} + \dots + \frac{A_N}{s - s_N}$ (1)

σταθερες, πόλοι

μπορω να σπάσω το κλάσμα κατα τα γνωστά. Τωρα εχω

$L^{-1}\{(1)\} = h(t) = A_1 e^{s_1 t} u(t) + A_2 e^{s_2 t} u(t) + \dots + A_N e^{s_N t} u(t)$

Δειγματοληπτώντας την παραπάνω με $f_s \rightarrow T_s$ προκύπτει

$h[n] = (A_1 e^{s_1 T_s n} + A_2 e^{s_2 T_s n} + \dots + A_N e^{s_N T_s n})\, u[n]$

$= A_1 (e^{s_1 T_s})^n u[n] + \dots + A_N (e^{s_N T_s})^n u[n]$

Αρα $H(z) = \frac{A_1}{1 - \underbrace{e^{s_1 T_s}}_{z_1} z^{-1}} + \dots + \frac{A_N}{1 - \underbrace{e^{s_N T_s}}_{z_N} z^{-1}}$, ο οποίος γίνεται εύκολα λογος πολυωνύμων

b) Αν το sys ευσταθες, τοτε $Re\{s_i\} < 0$

Ομως αυτο σημαίνει πως $|z_i| = |e^{s_i T_s}| \overset{T_s > 0,\ s_i < 0 \rightarrow s_i T_s < 0}{=} |e^{Re\{s_i\} T_s}| < 1$. Αρα είναι ευσταθές και το $h[n]$ αφου εχει πόλους εντός του μοναδιαίου κύκλου.

1.2 "Να βρεθεί f_s για τα α) $x(t) = \begin{cases} \cos(\alpha t), & \forall t \in \mathbb{R} - \{Q\} \\ \lambda, & \forall t \in Q \end{cases}$ b) $x(t) = \begin{cases} \lambda, & \forall t \in \mathbb{R} - \{Q\} \\ \cos(\alpha t), & \forall t \in Q \end{cases}$

οπου Q απειρο, αριθμήσιμο σύνολο."

Απ: α) Η $x(t)$ είναι ασθενως ισοδύναμη ($\langle x(t), e^{j\omega t} \rangle = \langle \cos(\alpha t), e^{j\omega t} \rangle$) με την $\cos(\alpha t)$ αφού διαφέρουν σε αριθμήσιμο πλήθος σημείων. Αρα η f_s καθορίζεται απο το συνημίτονο και είναι $f_m = \frac{\alpha}{2\pi} \rightarrow f_s = \frac{\alpha}{\pi}$

b) Αντίθετα με το α) εδω η $x(t)$ είναι ασθενως ισοδύναμη με την σταθερή λ.

Αρα $f_m = 0 \rightarrow f_s = \varepsilon$psilon

1.3 "Να βρεθεί η f_s για το $x(t) = e^{\alpha t}u(t)$"

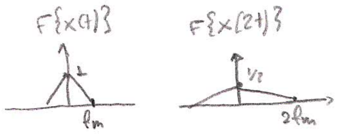
Απ: $F\{x(t)\} = \frac{1}{j\Omega - \alpha} \neq 0$ για κάθε Ω. Άρα $f_{max} = +\infty$ → δεν υπάρχει f_s

1.4 "Αν ο ρυθμός Nyquist για το $x(t)$ είναι Ω_s (αντιστ. f_s), ποιος είναι για τα
a) $x^{(1)}(t)$ b) $x(2t)$ c) $x^2(t)$ d) $x(t)\cos(\Omega_0 t)$"

a) Έχω $x^{(1)}(t) \xrightarrow{F} j\Omega X(j\Omega) = Y(j\Omega)$. Άρα αν $X(j\Omega)=0 \to Y(j\Omega)=0$

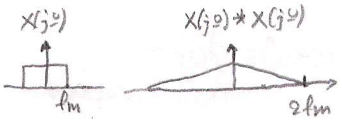
Συνεπώς δεν μεταβάλλεται ο f_s

b) $x(2t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2} X(j\frac{\Omega}{2})$, έχω δηλ. αποσυμπίεση κατά παράγοντα 2 στην συχνότητα



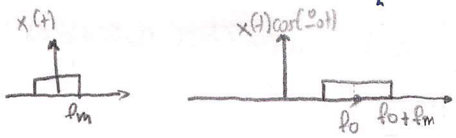
Άρα $f'_m = 2f_m \to f'_s = 2f_s = 4f_m$

c) $x^2(t) = x(t)\,x(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * X(j\Omega)$. Ξέρω πως αν $X(j\Omega)$ εκτείνεται M τότε ο



$X(j\Omega) * X(j\Omega)$ εκτείνεται $2M$. Συνεπώς $f'_m = 2f_m \to f'_s = 2f_s$

d) $x(t)\cos(\Omega_0 t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[X(j(\Omega - \Omega_0)) + X(j(\Omega + \Omega_0))\right]$



Άρα $f_m' = f_0 + f_m \to f_s' = f_0 + f_s/2$

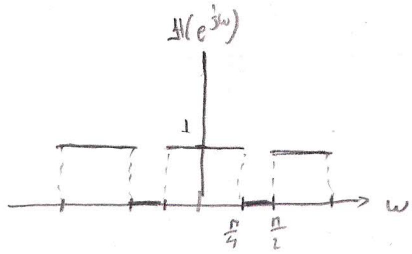
1.5 "Σήμα $x(t)$ με $f_{max} = 20$ kHz περνά από φίλτρο που αποκόπτει τις $5\text{kHz} \leq f \leq 10\text{kHz}$. Το φίλτρο είναι ψηφιακό, άρα πρέπει πρώτα να δειγματοληπτήσω το $x(t)$ και έπειτα να το φιλτράρω. Να βρεθεί η f_s και η κρ. απόκριση $H(e^{j\omega})$ του φίλτρου." (Άσκ. 8, Έτος Βιβλίου)

Απ: Για να μην έχω αναδίπλωση θέλω $f_s = 2f_m = 40$ kHz

Αυτό που δίνει mapping στις ψηφ. συχνότητες $f = \lambda f_s \Rightarrow \Omega = \omega f_s \Rightarrow \omega = \frac{2\pi f}{f_s}$

Άρα το διάστημα $\{5\text{kHz}, 20\text{kHz}\}$ γίνεται map στο $\left\{\frac{2\pi \cdot 5}{40}, \frac{2\pi \cdot 20}{40}\right\} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$

Άρα το φίλτρο έχει την μορφή



1.6 "Σήμα με $f_m = 1$ kHz, έστω $x(t)$. Εμφανίζεται θόρυβος $w(t) = A\sin(2\pi 50 t)$. Να βρεθεί ψηφ. φίλτρο με έξοδο $y[n] = x[n] + \alpha x[n-1] + b x[n-2]$ που να απομακρύνει τον θόρυβο.

(Ασκ. 9, Εκτός Βιβλίου)

Απ: Δειγματοληπτώ με $f_s = 2f_m = 2$kHz. Άρα ο θόρυβος βρίσκεται στην ψηφιακή συχνότητα

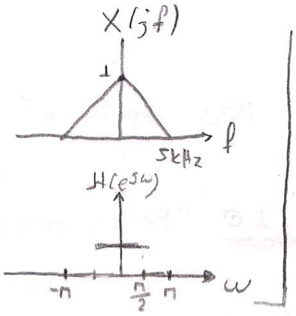
$\omega_0 = \frac{2\pi\cdot 50}{2000} = 0{,}05\pi$. ($f_0 = 0{,}025$).

Θέλω $H(e^{j\omega_0}) = 0$ Έχω $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + \alpha e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) + b e^{-j2\omega}X(e^{j\omega})$

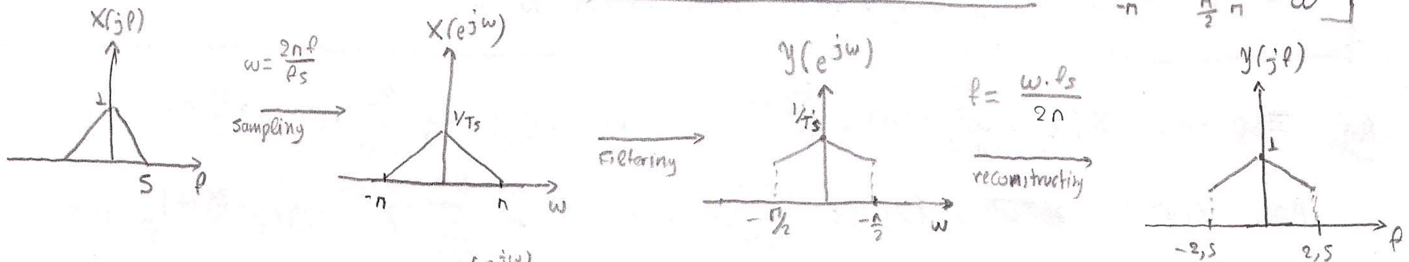
$$\Leftrightarrow \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = 1 + \alpha e^{-j\omega} + b e^{-j2\omega} = (1 - c e^{-j\omega})(1 - d e^{-j\omega}), \text{ όπου } \begin{matrix} \alpha = -(c+d) \\ b = cd \end{matrix}$$

$$\text{Άρα } H(e^{j\omega_0}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - c e^{-j\omega_0} = 0 \\ 1 - d e^{-j\omega_0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = e^{j\omega_0} \\ d = e^{-j\omega_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\cos(0{,}05\pi) \\ b = 1 \end{cases}$$

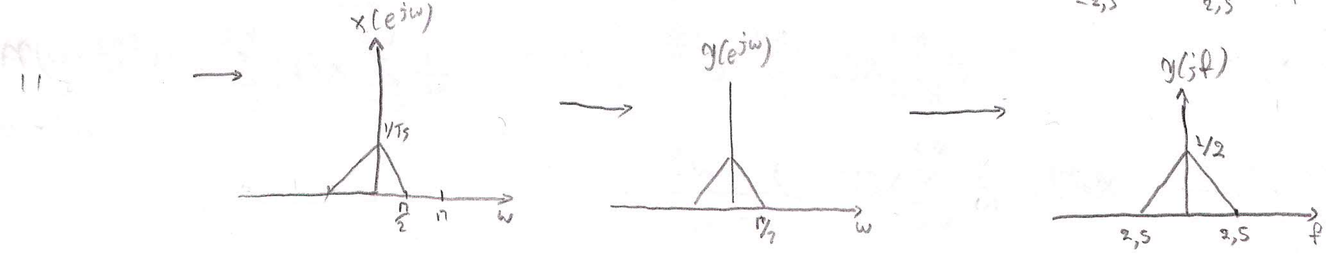
1.7 Δειγματοληπτούμε το $x(t)$ με f_1, το περνάμε από φίλτρο $H(e^{j\omega})$ και το ανακατασκευάζουμε με f_2, παίρνοντας την έξοδο $y(t)$. Να βρεθεί ο $Y(jf)$ αν a) $f_1 = f_2 = 10$kHz b) $f_1 = 20$kHz, $f_2 = 10$ kHz c) $f_1 = 10$kHz, $f_2 = 20$kHz



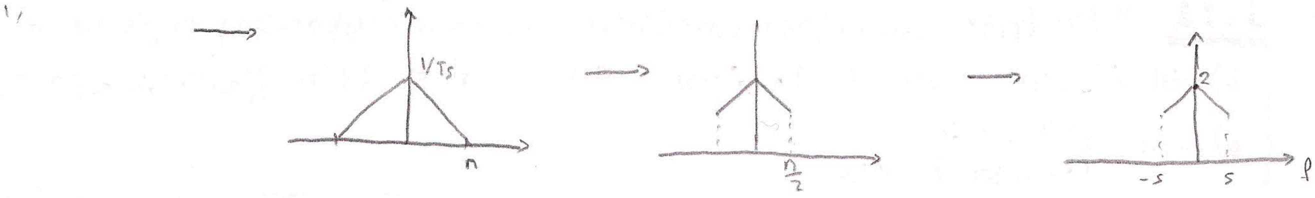
a)



b)



c)



1.8 "Έστω $x[n] = \{1, -1, 2, 3, 0, 0\} \xrightarrow{DFT} X[k]$. Να βρεθεί σε ποια ακολουθία αντιστοιχεί ο $W_3^{2k}X[k]$ χωρίς χρήση DFT, DFT^{-1}." (4.5, Βιβλίο)

Απ: $y[k] = W_3^{2k}X[k] = e^{-j\frac{2\pi}{3}2k}X[k] = e^{-j\frac{2\pi}{6}4k}X[k]$.

Από ιδιότητα ολίσθησης, $y[n] = x[n-4]_6 = \{2, 3, 0, 0, 1, -1\}$

1.9 "Υπολογίστε IFFT μέσω FFT"

Απ: Μπορώ να υπολογίσω FFT, άρα την σχέση $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ (1)

Θέλω να υπολογίσω την $x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$

$$\Longleftrightarrow N x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$\overset{*}{\Longleftrightarrow} N x^*[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X^*[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = DFT\{X^*[k]\}$$

Άρα input $X^*[k] \xrightarrow{FFT} N x^*[n] \xrightarrow[()^*]{1/N} x[n]$

1.10 "Βρείτε σχήμα παρεμβολής που να υπολογίζει τον $F\{x[n]\} = X(e^{j\omega})$, χρησιμοποιώντας τα $X[k] = DFT\{x[n]\}$. Η $x[n]$ έχει μήκος N."

Απ: Ξέρουμε $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$. Ισχύει $x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ (1)

Άρα $X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\right)e^{-jn\omega}$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\left(\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\right)e^{-jn\omega}\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{e^{j\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega\right)n}}_{\alpha^n,\ \alpha = e^{j\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega\right)}}$$

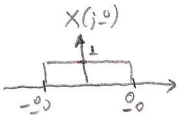
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\,\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

1.11 "Να βρεθεί, αν υπάρχει, κατάλληλη συχνότητα δειγματοληψίας για τα a) $x(t) = \cos(200\pi t)$ b) $x(t) = e^{-4t}u(t)$ c) $x(t) = F^{-1}\{u(\Omega+\Omega_0) - u(\Omega-\Omega_0)\}$ d) $F^{-1}\{F\{z(t)\}[u(\Omega+\Omega_0) - u(\Omega-\Omega_0)]\}$
e) $x(t) = \begin{cases} 4, & t=2 \\ 2\cos(100t), & \text{αλλού} \end{cases}$"

Απ: 1) $x(t) = \cos(2\pi 100 t) \rightarrow f_{max} = 100 \rightarrow f_s = 200$

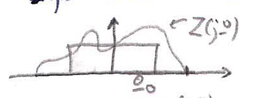
2) Ασκ 1.3

3) $F\{x(t)\} = u(\Omega+\Omega_0) - u(\Omega-\Omega_0)$



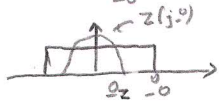
Άρα $f_{max} = \Omega_0 \rightarrow f_s = 2\Omega_0$

4) $F\{x(t)\} = F\{z(t)\}[u(\Omega+\Omega_0) - u(\Omega-\Omega_0)]$ → αν



τότε $f_m = \frac{2\Omega_0}{2\pi}$

αν



τότε $f_m = \frac{2\Omega_z}{2\pi}$

5) Ασκ 1.2

1.12 Να βρεθούν 3 σήματα που αν δειγματοληπτηθούν με ~~κ...~~ συχνότητα $f_s = 40kHz$, παράγεται το σήμα $x[n] = e^{j\frac{\pi}{8}n}$

Απ: Είναι $x[n] = e^{j2\pi\frac{1}{16}n}$, άρα $f = 1/16$

- Αν δεν υπήρχε αναδίπλωση τότε το συνεχές σήμα ήταν $x(t) = e^{j2\pi f t}$ το οποίο όταν δειγματοληπτηθεί με f_s (T_s) δίνει $x[n] = e^{j2\pi f n T_s} = e^{j2\pi \frac{f}{f_s} n}$

  Άρα $\frac{f}{f_s} = \frac{1}{16} \Rightarrow \underline{f = 2{,}5\ kHz}$

- Αν υπήρξε αναδίπλωση, όπου $f' > f_s$, τότε $x[n] = e^{j2\pi \frac{f+kf_s}{f_s} n}$

  Άρα $f' = \frac{f+kf_s}{f_s} \xrightarrow{k=1} \underline{f' = 42{,}5\ kHz}$

  $\xrightarrow{k=2} \underline{f' = 82{,}5\ kHz}$

  $\vdots$

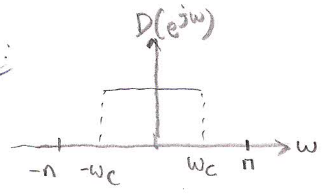
- Αν $f_s > f''$ αλλά $f_s < 2f''$ τότε είχαμε αναδίπλωση κατοπτρική ως προς της $\frac{f_s}{2} = 20kHz$

  Άρα $\underline{f'' = 37{,}5\ kHz}$

2ο ΜΕΡΟΣ

2.1 "Να σχεδιαστεί κατωπερατό FIR φίλτρο μήκους $2N+1$, με συχνότητα αποκοπής w_c, με χρήση τετραγωνικού παραθύρου"

Απ:



Θα βρω τους όρους της σειράς Fourier. Είναι:

• $n=0$, $d[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{+w_c} D(e^{jw})\cancel{e^{jwn}}\, dw = \frac{w_c}{\pi}$

• $n\neq 0$, $d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} e^{jnw}\, dw = \dots = \frac{\sin(w_c n)}{\pi n}$

Παρατηρώ πως $d[-n]=d[n]$. Αυτό συμβαίνει επειδή η $D(\cdot)$ είναι άρτια.

Πολ/ζω με τετρ. παράθυρο για να κρατήσω τους $2N+1$ κεντρικούς όρους et voilà.

2.2 "Να σχεδιαστεί FIR, κατωπερατό, γραμμικής φάσης, μήκους $N=7$, με $w_c=0{,}3\pi$ φίλτρο με χρήση τριγωνικού παραθύρου"

Απ: Αφού γραμμικής φάσης, $N=7$ και $D(e^{jw})$ συμμετρική, τότε οι συντελεστές είναι της μορφής $h[3], h[2], h[1], h[0], h[1], h[2], h[3]$.

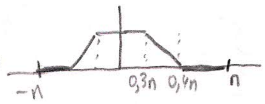
Δουλεύω όπως πριν για να υπολογίσω τα $d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} e^{jnw}\, dw$

Έχω το τριγωνικό παράθυρο $w[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{\underset{\to 3}{N+1}}, & n = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Άρα $h[n] = d[n]\,w[n]$

2.3 "FIR $\leadsto$ βέλτιστο ως προς ε^2, γραμμικής φάσης, μήκους 3, με περιοχή διάβασης $[0, 0{,}3\pi]$ και αποκοπής $[0{,}4\pi, \pi]$ αν a) Η $D(\cdot)$ είναι γραμμική στην περιοχή μετάβασης b) με ζώνες αδιαφορίας"

Απ: a) Εδώ μπορώ να ορίσω την D,



άρα όπως στις παραπάνω

b) FIR γρ. φάσης, μήκους 3, $D(\cdot)$ άρτια $\longrightarrow$ συντελεστές φίλτρου $h[1], h[0], h[1]$

Άρα <u>a τρόπος</u>) $H(e^{jw}) = h[1] + h[0]e^{-jw} + h[1]e^{-jw} = e^{-jw}\underbrace{\left[h[0] + 2h[1]\cos(w)\right]}_{R(e^{jw})}$

<u>b τρόπος</u>) Από θεωρία, $D(\cdot)$ είναι $\rightarrow$ προσεγγίζω με $\sum_{n=0}^{1} d[n]\cos(nw)$

Βρίσκω τώρα το σφάλμα $\varepsilon^2(h[0], h[1]) = \int_{I} \left(D(e^{jw}) - R(e^{jw})\right)^2 dw \quad (1)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d(1)}{d\,h[0]} = 0 \Rightarrow \\[2ex] \dfrac{d(1)}{d\,h[1]} = 0 \Rightarrow \end{array}\right\}\ 2 \text{ εξισώσεις, } 2 \text{ αγνώστοι} \longrightarrow \text{προσδιορίζω τα } h[0], h[1]$$

2.4 " Όπως στη 2.3, αλλά min-max "

<u>Απ</u>: Έχουμε ίδιες $D(\cdot)$ και $R(e^{j\omega}) = h[0] + 2h[1]\cos(\omega)$ όπως στην 2.3.

Έχω λοιπόν $\mathcal{E}(\omega) = |D(\omega) - R(\omega)|$ (1)

Από το Θ. Εναλλαγής, πρέπει να βρω 3 διαδοχικά σημεία $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{E}(\omega_1) = -\mathcal{E}(\omega_2) = \mathcal{E}(\omega_3) = \delta = \max_{\omega \in T} \mathcal{E}(\omega)$$

ή

$$-\mathcal{E}(\omega_1) = \mathcal{E}(\omega_2) = -\mathcal{E}(\omega_3) = \delta = \max_{\omega \in T} \mathcal{E}(\omega)$$

αντίστοιχα.

Παρατηρώ τώρα πως $\dfrac{\mathcal{E}(\omega)}{d\omega} = \mathcal{E}'(\omega) = \underbrace{D'(\omega)}_{0,\text{ αφού } D \text{ σταθερή στο } T} - R'(\omega) = -R'(\omega) = -2h[1]\sin(\omega)$

Όμως $\sin(\omega) \geq 0$ για $\omega \in [0, \pi] \Rightarrow \mathcal{E}'(\omega) \leq 0 \rightarrow \mathcal{E}(\omega)$ (γνησίως) φθίνουσα.

Συνεπώς τα ακρότατα της $\mathcal{E}(\cdot)$ είναι τα άκρα των διαστημάτων ενδιαφέροντος, δηλαδή τα σημεία $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0.3\pi$, $\omega_3 = 0.4\pi$, $\omega_4 = \pi$

Από αυτά προκύπτουν οι 3-άδες
$(0, 0.4\pi, \pi)$
$(0, 0.3\pi, \pi)$ } Απορρίπτονται γιατί δεν εμφανίζει η $\mathcal{E}(\cdot)$ εναλλασσόμενο πρόσημο
$(0, 0.3\pi, 0.4\pi)$
$(0.3\pi, 0.4\pi, \pi)$

Προσδιορίζω 2 διαφορετικές 3-άδες $h[0], h[1], \varepsilon$ λύνοντας το sys $\left.\begin{array}{l}(1)|_{\omega_1} = \varepsilon \\ (1)|_{\omega_2} = -\varepsilon \\ (1)|_{\omega_3} = \varepsilon\end{array}\right\}$ ή $\left.\begin{array}{l}(1)|_{\omega_2} = -\varepsilon \\ (1)|_{\omega_3} = \varepsilon \\ (1)|_{\omega_4} = \varepsilon\end{array}\right\}$

και επαληθεύω από το τελευταίο διαδοχικό δείγμα ότι το ε βρέθηκε σωστά.

2.5 " FIR, γρ. φάσης, μήκους 5, ζυγής, που προσεγγίζει κατά την min max έννοια την συνάρτηση $D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \omega = 0{,}5\pi \\ 1, & \frac{3\pi}{4} \leq \omega \leq \pi \end{cases}$

<u>Απ</u>: $D(\cdot) \in \mathbb{R}$ και συμμετρική άρα συντελεστές $h[2], h[1], h[0], h[1], h[2]$, καθυστέρηση $N = 2$

και $R(\omega) = \alpha[0] + 2\alpha[1]\cos(\omega) + 2\alpha[2]\cos(2\omega)$

- Έχω $D(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 0 \Rightarrow R(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 0 \Rightarrow \underline{\alpha[0] = 2\alpha[2]}$
- Έχω $R'(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 0 \rightarrow \underline{\alpha[1] = 0}$ $\quad \rightarrow$ Άρα $R(\omega) = 2\alpha[2] + 2\alpha[2]\cos(2\omega)$

Είναι $R'(\omega) = -4\alpha[2]\sin(2\omega)$, άρα $\mathcal{E}' = |D(\cdot) - R(\cdot)|'$ γνησίως φθίνουσα.

Έπειτα συνεχίζω όπως στην 2.4 ..

Τελικά $h[n] = \{ \underset{\alpha[2]}{\underset{\uparrow}{h[0]}}, \underset{\alpha[1]}{\underset{\uparrow}{h[1]}}, \underset{\alpha[0]}{\underset{\uparrow}{h[2]}}, \underset{\alpha[1]}{\underset{\uparrow}{h[3]}}, \underset{\alpha[2]}{\underset{\uparrow}{h[4]}} \}$

2.6 "Έστω $D(\omega)=\sum_{n=0}^{N+1} d[n]\cos^n(\omega)$. Να προσεγγιστεί με FIR φίλτρο μήκους $L=2N+1$, γρ. φάσης α) Με την έννοια min-max b) με ελάχιστα τετράγωνα. Να βρεθεί σφάλμα.

Απ: Από πολυώνυμα Chebyshev έχω $T_k(x)=\cos(k\cos^{-1}(x))$, $|x|\le 1$

και αναδρομικά, $T_0(x)=1$ $\quad T_1(x)=x$ $\quad T_k(x)=2xT_{k-1}(x)-T_{k-2}(x)$.

Όμως $|\cos(\omega)|\le 1$, άρα για $x=\cos(\omega)$ έχω:

- $T_0(\cos(\omega)) = \cos(0\cdot\omega)=1$
- $T_1(\cos(\omega))=\cos(1\cdot\omega)=\cos(\omega)$
- $T_2(\cos(\omega))=\cos(2\cdot\omega)=2\cos^2(\omega)-1$

$\vdots$

$T_k(\cos(\omega)) = \cos(k\omega)=2^{k-1}\cos^k(\omega)+\ldots\{$χαμηλότερης τάξης δυνάμεις του cos$\}\ldots$

$$\iff \cos^k(\omega)=\frac{1}{2^{k-1}}\left(\cos(k\omega)-\ldots\right)$$

$$\iff \cos^k(\omega)=\sum_{n=0}^{k} \lambda[n]\cos(n\omega) \longrightarrow D(\omega)=\sum_{n=0}^{N+1} d[n]\cos^n(\omega)=\sum_{n=0}^{N+1}\hat d[n]\cos(n\omega)$$

α) Αφού $D(-\omega)=D(\omega)$ άρτια κ' $D\in\mathbb{R}$ προσεγγίζω με $R(\omega)=\sum_{n=0}^{N}\alpha[n]\cos(n\omega)$.

Θα διαλέξω $\alpha[n]=\hat d[n]$, άρα $E(\omega)=d[n+1]\cos((N+1)\omega)$

Εύκολα βλέπω τώρα πως max $E(\omega)=\pm d[n+1]$ για $\cos((N+1)\omega)=\pm1 \Rightarrow (N+1)\omega=k\pi$

$\iff \omega_k=\frac{k\pi}{N+1}$, $k=0,\ldots,N+1$. Βρήκα λοιπόν N+2 συχνοτικά σημεία που ικανοποιούν το Θεώρημα της εναλλαγής, άρα το φίλτρο είναι min-max βέλτιστο.

Από τα πολυώνυμα Chebyshev, $d[n+1]\cos^{N+1}(\omega)=\frac{d[N+1]}{2^{N+1-1}}\cos((N+1)\omega)\mp\ldots\{\cos(\lambda\omega),\ \lambda<k$ κλπ$\}$

Άρα το μέγιστο σφάλμα είναι $\frac{d[N+1]}{2^N}$, αφού την επίδραση των άλλων όρων $\cos(\lambda\omega)$ την λάβαμε υπόψιν στα $\hat d[n]$ που ορίσαμε.

b) Υπό την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων,

ακολουθώ την γνωστή διαδικασία, με σειρές Fourier και χρησιμοποιώντας τις

- $D(\cdot)$ πραγματική, άρα $h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}D(\cdot)\cos(n\omega)\,d\omega$
- $\cos(n\omega)\cos(\ell\omega)=\frac{1}{2}\cos((n+\ell)\omega)+\frac{1}{2}\cos((n-\ell)\omega)$

καταλήγω στους ίδιους συντελεστές. Άρα ίδιο σφάλμα.

* Παρατήρηση $D(\omega)=\sum_{n=0}^{N+1} d[n]\Big[\underbrace{\cos^2(\tfrac{\omega}{2})-\sin^2(\tfrac{\omega}{2})}_{\cos(\omega)}\Big]^n$, άρα ίδια άσκηση

2.7 "Σχεδιάστε αναλογικό, ανωπερατό φίλτρο Butterworth τάξης 3 και συχνότητας αποκοπής $\Omega_c = \frac{3}{2}$ "

Απ: Το ανωπερατό έχει $\Omega_c = \frac{3}{2}$, άρα το αντίστοιχο κατωπερατό έχει $\Omega_c' = \frac{1}{\Omega_c} = \frac{2}{3}$

Το κανονικοποιημένο κατωπερατό τάξης $L=3$ έχει $H(s) = \frac{1}{(s-s_0)(s-s_1)(s-s_2)}$

Για $s \to \frac{s}{\frac{2}{3}}$ γίνεται $H'(s) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{(s-\frac{2}{3}s_0)\cdots(s-\frac{2}{3}s_2)}$

Τέλος, για να γίνει ανωπερατό, $s \to \frac{1}{s}$, . . .

2.8 " Η συνάρτηση μεταφοράς αιτιατού IIR είναι $H(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης να γίνει ψηφιακό. Είναι ευσταθές; "

Απ: Έχω $H(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} \Leftarrow \dots \Rightarrow H(s) = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+2}$

- Από $L^{-1}\{\}$ $\Rightarrow h(t) = 2e^{-3t}u(t) - e^{-2t}u(t)$
- Δειγματοληπτώ την $h(t)$ με T_s και προκύπτει $h[n] = h(nT_s) = \left(2e^{-3nT_s} - e^{-2nT_s}\right)u[n]$
- Μπορώ να θεωρήσω (από θεωρία βιβλίο) $T_s = 1$

Άρα $h[n] = 2e^{-3n}u[n] - e^{-2n}u[n] \xrightarrow{Z\{\}} \frac{2}{1-e^{-3}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-2}z^{-1}} = H(z)$

Οι πόλοι της $H(z)$ είναι $z_1 = e^{-3}$ και $z_2 = e^{-2}$, με $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ άρα το ψηφιακό φίλτρο είναι ευσταθές.

2.9 "Υποθέστε πως στην απόκριση μέτρου στο τετράγωνο ενός κανονικοποιημένου κατωπερατού φίλτρου Butterworth $3^{ης}$ τάξης κάνουμε αντικατάσταση $\Omega^3 \leftarrow \Omega^3 - 0{,}75\Omega$.
α) Τι φίλτρο προκύπτει; β) Υπολογίστε το σφάλμα στην ζώνη διάβασης του φίλτρου.

Λύση: Έχω $|H_B(j\Omega)|^2 = \dfrac{1}{1+(\Omega^3)^2}$

Κάνω την αντικατάσταση και παίρνω $|H'(j\Omega)|^2 = \dfrac{1}{1+(\Omega^3 - \frac{3}{4}\Omega)^2} = \dfrac{1}{1+(\frac{1}{4})^2(4\Omega^3 - 3\Omega)^2}$

Από τα πολυώνυμα Chebyshev έχω: $T_0(\Omega) = 1$, $T_1(\Omega) = \Omega$, $T_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1$,
$T_3(\Omega) = 4\Omega^3 - 2\Omega - \Omega = 4\Omega^3 - \Omega$.

Άρα $|H'(\ )|^2 = \dfrac{1}{1+(\frac{1}{2})^2(T_3(\Omega))^2}$ Άρα προκύπτει ένα φίλτρο Chebyshev $3^{ης}$ τάξης!
με $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Τα υπόλοιπα γνωστά από θεωρία...

3ο ΜΕΡΟΣ (ΚΕΦ 8, 9)

3.1 "Εστω X_1, X_2 ανεξαρτητες Τ.Μ ακολουθουν την $U[-1.5, 1.5]$

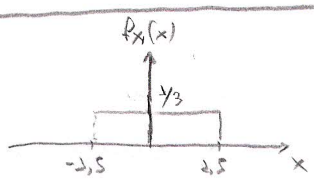
α) Να βρεθει η joint pdf των X_1, X_2

β) Να βρεθει η pdf της $Y = X_1 + X_2$

γ) Να βρεθει η μεση τιμή και η διασπορά των X_1, X_2, Y."

Απ: α) Η X_1 εχει pdf

Προφανως $f_{X_1} = f_{X_2}$



Αφου X_1, X_2 ανεξαρτητες, $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2)$, η οποία ως συνάρτηση 2 μεταβλητων χρειάζεται x-y-z επίπεδο για να παρασταθεί.

b) Στην διακριτή περίπτωση, αφου X_1, X_2 ανεξαρτητες:

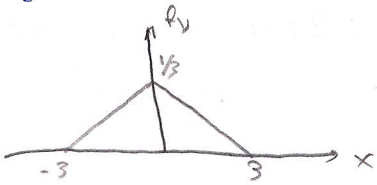
$$f_Y(x) = Pr\{Y = x\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Pr\{X_1 = m\}\, Pr\{X_2 = x - m\}$$

αφου σε ολες τις περιπτωσει $X_1 + X_2 = m + x - m = x$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(m)\, f_{X_2}(x-m) = f_{X_1}(x) * f_{X_2}(m)$$

Γενικευοντας στην συνεχή περίπτωση ισχυει το ίδιο, δηλ $f_Y(x) = f_{X_1}(x) * f_{X_2}(x)$

Αρα η γρ. παρασταση της $f_Y(x)$ είναι:



c) Ό,τι βρω για την X_1 ισχύει και για την X_2.

Εχω $\mu_{X_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X_1}(x)\, dx = \int_{-1,5}^{+1.5} x\, \frac{1}{3}\, dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1.5}^{1.5} = 0$

Αφου $Y = X_1 + X_2 \longrightarrow E[Y] = E[X_1] + E[X_2] = 0$

Τωρα $\sigma_{X_1}^2 = \sigma_{X_2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \cancel{\mu_x}^{\,0})^2 f_x(x)\, dx = \frac{1}{3}\int_{-1.5}^{+1.5} x^2\, dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1.5}^{1.5} = 0.75$

Ομοίως δουλεύω για την Y

3.2 " Να χαρακτηριστεί ως προς την στασιμότητα το $x(t)=A\sin(\omega_0 t)$, $A\sim U[-1,1]$ "

Απ: • Αρχικά εξετάζω ως προς την ισχυρή στασιμότητα. Για να είναι ισχ. στάσιμη, πρέπει η pdf να μην αλλάζει με τον χρόνο

Εδώ $A\sim U[-1,1]$ άρα $A\sin(\omega_0 t_0)\sim U[-\sin(\omega_0 t_0), +\sin(\omega_0 t_0)]$ Άρα όχι.

• Ως προς ασθενή στασιμότητα 1ης τάξης θέλω η μέση τιμή να μην είναι συνάρτηση του χρόνου. Πράγματι $E[x(t)] = E[A\sin(\omega_0 t)] = \sin(\omega_0 t)\underbrace{E[A]}_{0} = 0$. Άρα είναι.

• Για ασθενή στασιμότητα 2ης τάξης θέλω: R_x ανεξάρτητη του χρόνου

$$R_x(t_1,t_2) = E[(x_1(t_1)-\mu_x)(x(t_2)-\mu_x)] = E[x(t_1)x(t_2)]$$

$$= E[A^2\sin(\omega_0 t_1)\sin(\omega_0 t_2)] = \underbrace{E[A^2]}_{=\sigma^2\neq 0}\sin(\omega_0 t_1)\sin(\omega_0 t_2)$$ Άρα όχι.

3.3 " Να εξεταστεί ως προς την στασιμότητα η $x(t)=A\sin(\omega_0 t+\Theta)$ όπου $A\sim U[-1,1]$ και $\Theta\sim U[0,2\pi]$, με A,Θ ανεξάρτητες Τ.Μ "

Απ: • Ως προς ισχυρή στασιμότητα, με ανάλογα επιχειρήματα της 3.2, όχι.

• Ως προς ασθενή στασιμότητα 1ης τάξης:

$$E[x(t)] = E[A\cdot\sin(\omega_0 t+\Theta)] \underset{\text{ανεξαρτησία}}{=} E[A]\,E[\sin(\omega_0 t+\Theta)] = 0$$ Άρα ΝΑΙ

Αν δεν ήξερα $E[A]=0$ τότε $E[\sin(\omega_0 t+\Theta)] = \int_0^{2\pi}\sin(\omega_0 t+\theta)\, f_\Theta(\theta)\, d\theta$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\omega_0 t+\theta)\, d\theta = 0$$

• Ως προς ασθενή στασιμότητα 2ης τάξης:

$$E[X(t_1)X(t_2)] = E[A^2\cos(\omega_0 t_1+\Theta)\cos(\omega_0 t_2+\Theta)]$$

$$= E\left[A^2\frac{1}{2}\left(\cos(\omega_0(t_1-t_2)) - \cos(\omega_0(t_1+t_2)+2\Theta)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}E[A^2]\left[\cos(\omega_0(t_1-t_2)) - \underbrace{E[\cos(\omega_0(t_1+t_2)+2\Theta)]}_{0}\right]$$

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}E[A^2]}_{\text{σταθερά}}\cos(\omega_0(t_1-t_2))}_{\text{εξαρτάται μόνο από την χρ. διαφορά } t_1-t_2}$$ άρα ΝΑΙ

3.4 "Έστω στοχαστικό σήμα $x_\theta(n) = s_\theta(n) + w_\theta(n)$, όπου $w_\theta(n)$ λευκός θόρυβος.
Ισχύει $\mu_s = \mu_w = 0$ και $r_{s,w}(n) = 0$, και $r_s(n) = 0,5^{|n|}$ $r_w(n) = \delta(n)$.
α) Να βρεθεί βέλτιστο αιτιατό FIR φίλτρο μήκους N=3 και το ελάχιστο $\mathcal{E}^2$
b) " συμμετρικό " " " " " άρτιας και το " " (10.4, Βιβλίο)

Απ: α) Ξέρω πως $h_w = R_{xx}^{-1} R_{sx}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & r_x(2) \\ r_x(1) & r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(2) & r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_{sx}(0) \\ r_{sx}(1) \\ r_{sx}(2) \end{bmatrix}$$

Αποδεικνύω (από σελ. 50) $r_{sx}(k) = r_s(k)$
$r_{xx}(k) = r_{sx}(k) + r_w(k)$ και λύνω το σύστημα.

b) Εδώ $H = [h(0)\ h(1)\ h(0)]$, άρα $\hat{s}(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2)$

$$= h(0)\big(x(n) + x(n-2)\big) + h(1)x(n-1)$$

$$= H X$$

$$= \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x(n) + x(n-2) \\ x(n-1) \end{bmatrix}$$

Εδώ ο $R_{xx} = E\begin{bmatrix} (x(n) + x(n-2))^2 & \cdots \\ \cdots & \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2r_x(0) + 2r_x(2) & 2r_x(1) \\ 2r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix}$$

3.5 "Έστω $\hat{s}(n) = h(1)x(n-n_1) + h(2)x(n-n_2) + \ldots + h(L)x(n-n_L)$ προσεγγίζει
το $s(n)$, όπου $n_1, \ldots, n_L$ γνωστοί ακέραιοι. Να βρεθούν συνθήκες που ελαχιστοποιούν
το τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ $s(n)$, $\hat{s}(n)$, αν γνωρίζω τα $R_x(n)$, $r_{xs}(n)$." (10.8, Βιβλίο)

Απ: Είναι $\hat{s}(n) = [h(1)\ h(2) \ldots h(L)] \begin{bmatrix} x(n-n_1) \\ \vdots \\ x(n-n_L) \end{bmatrix} = H^T X$

Αποδεικνύω κατά τα της σελ. 51 πως $H_w = R_{xx}^{-1} R_{sx}$

$$= \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(n_2-n_1) & \cdots \\ r_x(n_2-n_1) & r_x(0) & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{sx}(n_1) \\ r_{sx}(n_2) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

3.6 "Δίνεται σήμα $x[n] = s[n] + w[n]$, όπου $\mu_s = \mu_w = 0$ και s, w ασυσχέτιστα. Δίνονται επίσης οι συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος $\Phi_s(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ και $\Phi_w(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \pi/2 \\ 0.1 & \text{αλλού} \end{cases}$. Να βρεθεί το βέλτιστο μη αιτιατό φίλτρο Wiener αν θέλουμε να προσδιορίσουμε το σήμα $s[n]$. "

Απ: Ξέραμε πως $H(e^{j\omega}) = \dfrac{\Phi_s(e^{j\omega})}{\Phi_s(e^{j\omega}) + \Phi_w(e^{j\omega})} = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{3} \\ 0/0, & \frac{\pi}{3} < |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & |\frac{\pi}{2}| < |\omega| \end{cases}$

Στο $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ έχουμε απροσδιοριστία. Μπορώ να επιλέξω:

- $H(\cdot) = 0$, βέλτιστο αλλά όχι υλοποιήσιμο
- Η μεταβάλλεται γραμμικά από το 1 στο 0. Υλοποιήσιμο, με μικρότερο φαινόμενο Gibbs

3.7 " Μία auto-regressive διαδικασία τάξης p χρησιμοποιεί τις p προηγούμενες εξόδους για να προβλέψει την τρέχουσα. Όταν οδηγείται με λευκό θόρυβο $w[n]$, τότε δίνει έξοδο $y_0[n] = -\sum_{k=1}^{p} \alpha[k] y[n-k] + w[n]$ (1). Αν $\mu_w = 0$ και σ_w^2 τότε να βρεθεί η διασπορά και η ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας"

Απ: Έχουμε $\mu_y = 0$, αφού τροφοδοτώ το σύστημα που αντιστοιχεί σε AR διαδικασία με σήμα μηδενικού μέσου όρου ($\mu_w = 0$)

Η διασπορά της $y[n]$ δίνεται από την σχέση $E[(y_0[n] - \mu_y)^2] = E[y_0^2[n]] = r_{yy}(0)$.

$$(1) \xrightarrow{\times y[n-\ell]} y[n] y[n-\ell] = -\sum \alpha[k] y[n-k] y[n-\ell] + y[n-\ell] w[n]$$

$$\xrightarrow{E[\,]} E[\quad " \quad] = -\sum \alpha[k] E[\quad " \quad] + E[\quad " \quad]$$

$$\Rightarrow r_{yy}[\ell] = -\sum_{k=0}^{p} \alpha[k] r_{yy}[\ell-k] + r_{wy}[\ell]$$

Έχω τώρα $r_{w,y}[\ell] = E[w[n] y[n-\ell]] = E[w[n](w[n-\ell] - \alpha[1] y[n-\ell-1] - \dots]$

$$= E[w[n] w[n-\ell]] = \sigma_w^2 \delta[\ell]$$

Άρα $r_{yy}[\ell] = -\sum_{k=1}^{p} \alpha[k] r_{yy}[\ell-k] + \sigma_w^2 \delta[\ell]$

Συνεπώς $\sigma_y^2 = r_{yy}[0] = -\sum_{k=1}^{p} \alpha[k] r_{yy}[k] + \sigma_w^2$