ΠΟΛΥ ΚΑΛΕΣ

2) Αν η κρίσιμη συχνότητα δειγματοληψίας για το σήμα $x(t)$ είναι f_s, ποια είναι η αντίστοιχη συχνότητα για το σήμα $y(t)=[x(t/2)]^{2m}$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Έστω $y(t)=[y_1(t)]^{2m}$ με $y_1(t)=x(t/2)$.

Το σήμα έχει ΜF:

$$Y_1(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t/2)\, e^{-j\Omega t}\, dt \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(T)\, e^{-j2\Omega T} \cdot d2T = 2\int_{-\infty}^{\infty} x(T)\, e^{-j2\Omega T}\, dT =$$

$$= 2X(j2\Omega)$$

αλλαγή μεταβλητής
$T=\frac{t}{2} \Rightarrow t=2T$

Ισχύει $X(j\Omega)=0$ για $\Omega>\Omega_0$, όπου Ω_0 η μέγιστη συχνότητα του $x(t)$

Άρα $Y_1(j\Omega)=2X(j2\Omega)=0$ για $\Omega>\frac{\Omega_0}{2}$.

Άρα το $y_1(t)$ έχει τη μισή συχνότητα δειγματοληψίας από το $x(t)$, καθώς έχει τη μισή μέγιστη συχνότητα, δηλαδή $f_1=\frac{f_s}{2}$ ✓

Για το σήμα $y(t)$ ισχύει: $y(t)=\underbrace{y_1(t)\cdot y_1(t)\cdots y_1(t)}_{2m \text{ φορές}}$

Έχουμε πολλαπλασιασμό $2m$ σημάτων, επομένως ο ΜF του $y(t)$ θα είναι η συνέλιξη των ΜF των $2m$ σημάτων. Σ' αυτήν την περίπτωση, η συχνότητα δειγματοληψίας του $y(t)$ είναι το άθροισμα των συχνοτήτων δειγματοληψίας των $2m$ σημάτων.

$\Omega_{max}=2m\frac{\Omega}{2}=m\cdot\Omega$ Άρα $\Omega_s=2m\cdot\Omega$

Συνεπώς: $f_s=2m\frac{\Omega}{2\pi}=2mf=2m\frac{f_s}{2}=m\cdot f_s$

3) Υποθέστε ότι σας δίνονται οι τιμές $X[k]$, $k=0,1,\dots,N-1$ του DFT της πεπερασμένης διάρκειας ακολουθίας $x[n]$, $n=0,1,\dots,N-1$. Βρείτε σχήμα παρεμβολής το οποίο θα μας επιτρέπει να υπολογίζουμε από τις τιμές $X[k]$, τον Διακριτού Χρόνου ΜF της ακολουθίας $x[n]$.

ΜFΔΧ: $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot e^{-jn\omega}$ (1)

Επειδή η ακολουθία $x(n)$ έχει n σημεία ο ΜFΔΧ μετατρέπεται σε $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{-jn\omega}$.

Η $x(n)$ από τον ΑΔΜF ορίζεται ως: $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ (2)

Αντικαθιστούμε την (2) στην (1) και προκύπτει:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\right)e^{-j\omega n} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{jn\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega\right)} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\sum_{n=0}^{N-1}\left[e^{j\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega\right)}\right]^{n} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\,\frac{1-e^{j\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega\right)N}}{1-e^{j\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega\right)}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\,\frac{1-e^{j(2\pi k-\omega N)}}{1-e^{j\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega\right)}} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\,\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{j\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega\right)}}$$

(4) Σχεδιάστε ένα ανωπερατό IIR ψηφιακό φίλτρο τάξης 2 με συχνότητα αποκοπής π/2 μετασχηματίζοντας κατάλληλα ένα κατωπερατό IIR Butterworth φίλτρο.

Εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα:

α) Μετατροπή από ψηφιακό ανωπερατό IIR σε αναλογικό ανωπερατό:

$$\Omega_c = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \implies \boxed{\Omega_c = 1}$$

Αυτή είναι η συχνότητα του αντίστοιχου ανωπερατού αναλογικού IIR φίλτρου.

β) Μετατροπή από αναλογικό ανωπερατό σε αναλογικό κατωπερατό.

Βρίσκουμε τη συχνότητα αποκοπής του αντίστοιχου αναλογικού κατωπερατού φίλτρου με το σχηματισμό $\Omega_c' = \frac{1}{\Omega_c} = 1$

γ) Σχεδιασμός αναλογικού κατωπερατού IIR Butterworth φίλτρου τάξης 2.

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του αναλογικού κατωπερατού IIR από τον τύπο:

$$H(s) = \frac{\Omega_c'^2}{s^2 + \sqrt{2}\cdot\Omega_c'\cdot s + \Omega_c'^2} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

δ) Μετατροπή αναλογικού κατωπερατού σε αναλογικό ανωπερατό.

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του αντίστοιχου αναλογικού ανωπερατού IIR φίλτρου με το σχηματισμό:

$$H(s') = \frac{1}{\left(\frac{1}{s}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{1}{s}\right) + 1}$$

ε) Μετατροπή αναλογικού ανωπερατού σε ψηφιακό ανωπερατό με διγραμμικό μετασχηματισμό

Θέτουμε $s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{z-1}{z+1}$,

οπότε η $H(z)$ είναι: .....

(5) Υποθέστε ότι στην απόκριση μέτρου στο τετράγωνο ενός κανονικοποιημένου ($\Omega_c = 1$) κατωπερατού φίλτρου Butterworth τάξης 3 κάνουμε την αντικατάσταση $\Omega^3 = \Omega^3 - 0.75\Omega$. Τι είδους φίλτρο προκύπτει μετά την παραπάνω αντικατάσταση; Υπολογίστε το σφάλμα δ_p στη ζώνη διάβασης του φίλτρου. Δίνεται ότι η αναδρομική σχέση ορισμού των πολυωνύμων Chebyshev είναι η $C_N(x) = 2x C_{N-1}(x) - C_{N-2}(x)$ με $C_0(x) = 1$, $C_1(x) = x$.

Η απόκριση πλάτους του κατωπερατού φίλτρου Butterworth δίνεται από τον τύπο:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2L}}$$

Επειδή το φίλτρο είναι τάξης 3 ($L=3$) και κανονικοποιημένο ($\Omega_c = 1$), τότε προκύπτει:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\Omega^{2\cdot 3}} = \frac{1}{1+(\Omega^3)^2}$$

Στον τύπο αυτό κάνουμε την αντικατάσταση $\Omega^3 = \Omega^3 - 0.75\Omega$ που δίνει η εκφώνηση και προκύπτει:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega^3 - 0.75\Omega)^2} \quad (1)$$

Υπολογίζουμε το πολυώνυμο Chebyshev τάξης $L=3$ και προκύπτει το εξής: $T_3(\Omega) = 2\cdot\Omega\cdot T_2(\Omega) - T_1(\Omega) = 2\Omega\,[2\Omega T_1(\Omega) - T_0(\Omega)] - T_1(\Omega) =$
$= 2\Omega(2\Omega\Omega - 1) - \Omega = 4\Omega^3 - 2\Omega - \Omega = 4\Omega^3 - 3\Omega = 4\left(\Omega^3 - \frac{3}{4}\Omega\right) =$
$= 4(\Omega^3 - 0.75\Omega)$

Παρατηρούμε ότι ο όρος $\Omega^3 - 0.75\Omega$ εμφανίζεται στην (1), άρα αυτό υποδηλοί ότι η (1) πρέπει να είναι απόκριση πλάτους για φίλτρο

Chebyshev Πράγματι η απόκριση πλάτους για φίλτρα Chebyshev 1ου τύπου δίνεται από τον τύπο:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_L^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

Αν $L=3$ και $\Omega_c = 1$ τότε:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_3^2(\Omega)} = \frac{1}{1+\varepsilon^2 16(\Omega^3 - 0.75\Omega)^2} \quad (2)$$

Αν το $\varepsilon^2 = \frac{1}{16}$ τότε $\frac{1}{1+\frac{1}{16}\cdot 16(\Omega^3 - 0.75\Omega)} = \frac{1}{1+(\Omega^3-0.75\Omega)^2}$

που είναι η (1)

Άρα η (1) αποτελεί την απόκριση πλάτους για φίλτρα Chebyshev 1ου τύπου με $\varepsilon^2 = \frac{1}{16}$

Το σφάλμα δ_p στη ζώνη διάβασης του φίλτρου είναι:

$$\delta_p = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{16}}}$$

CHEBYSHEV 2ΟΥ ΤΥΠΟΥ

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \frac{T_L^2\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}{T_L^2\left(\frac{\Omega_s}{\Omega}\right)}}$$

⑥ Σχεδιάστε ένα FIR φίλτρο γραμμικής φάσης μήκους 5 που θα προσεγγίζει με την έννοια του ελαχίστου-μεγίστου την παρακάτω συμμετρική ιδανική απόκριση συχνότητας:
↳ φίλτρο εγκοπής

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2, & 0 \le \omega \le \pi/4 \\ 0, & \omega = \pi/2 \\ 2, & 3\pi/4 \le \omega \le \pi \end{cases}$$

Επειδή το FIR φίλτρο έχει μήκος 5, η απόκριση συχνότητας θα είναι $R(\omega) = a_0 + 2a_1\cos\omega + 2a_2\cos 2\omega$ $(L=5 \Rightarrow 2N+1=5 \Rightarrow N=2)$

Οι όροι της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου είναι:

h_0	h_1	h_2	h_3	h_4
a_2	a_1	a_0	a_1	a_2

Οι άγνωστοι με τη μέθοδο min-max είναι $N+1$ $(a_0, a_1, a_2, \delta_{max})$.
Το φίλτρο που δίνεται είναι φίλτρο εγκοπής, διότι παρατηρούμε ότι $D(\frac{\pi}{2})=0$ και όχι σε κάποιο διάστημα.

Αυτό σημαίνει ότι οι άγνωστοι μειώνονται από $N+1$ σε $N-1$.
Δηλαδή $R(\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow a_0 + 2a_1\cos\frac{\pi}{2} + 2a_2\cos 2\frac{\pi}{2} = 0$

$$\Rightarrow a_0 - 2a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 2a_2} \quad (1)$$

Παίρνουμε την $R'(\omega) = -2a_1\sin\omega - 4a_2\sin 2\omega$

$$R'(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow -2a_1\sin\frac{\pi}{2} - 4a_2\sin\frac{2\pi}{2} = 0 \Rightarrow -2a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0} \quad (2)$$

Οι άγνωστοι πλέον είναι:

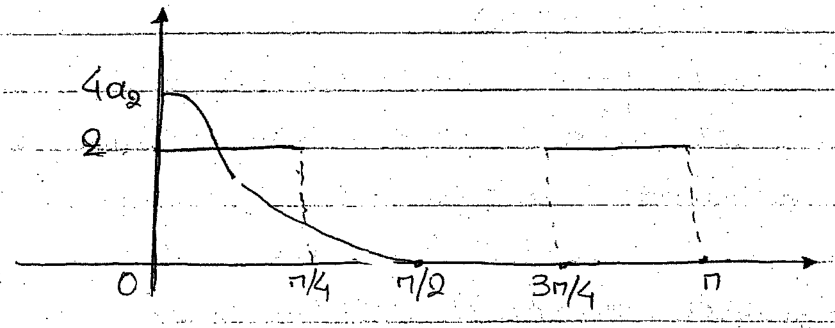
h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	άγνωστοι: a_2, δ_{max}
a_2	0	$2a_2$	0	a_2	

Εφαρμόζουμε το θεώρημα εναλλαγής στη μέθοδο του min-max. Θα επιλέξουμε 2 συχνότητες ω_1, ω_2 με $\omega_1 < \omega_2$, έτσι ώστε η διαφορά $D(e^{j\omega i}) - R(e^{j\omega i})$ για $i=1,2$ να παρουσιάζει εναλλαγή προσήμου σε $\forall \omega_i$, δηλ. $\pm\delta_{max}$ και το σφάλμα δ_{max} να είναι το μέγιστο.

Υποψήφιες συχνότητες είναι αυτές που παρουσιάζει ασυνέχεια η D, καθώς και τα ακρότατα της R. Η απόκριση συχνότητας που προκύπτει από τις ①, ②:

$$R(\omega) = 2a_2 + 2a_2\cos 2\omega = 2a_2(1+\cos 2\omega) = 2 \cdot a_2 \cdot 2 \cdot \cos^2\omega$$

$$\Rightarrow R(\omega) = 4 \cdot a_2 \cdot \cos^2\omega$$



$$D(0) - R(0) = -\delta_{max} \Rightarrow \boxed{2 - 4a_2 = -\delta_{max}} \quad ③$$

$$D\left(\frac{\pi}{4}\right) - R\left(\frac{\pi}{4}\right) = \delta_{max} \Rightarrow 2 - a_2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \delta_{max} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{2 - 2a_2 = \delta_{max}} \quad ④$$

Από ③, ④: $a_2 = \frac{2}{3}$

$$\delta_{max} = \frac{2}{3}$$

Ελέγχουμε αν το σφάλμα που υπολογίσαμε είναι το μέγιστο.

$D(\frac{\pi}{2}) - R(\frac{\pi}{2}) = 0 - 2a_2 \cos^2(\frac{\pi}{2}) = 0 - 0 = 0 < \frac{2}{3}$

Άρα είναι μέγιστο το σφάλμα δ_{max}.

Οπότε

h_0	h_1	h_2	h_3	h_4
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{2}{3}$

$\varphi(\omega) = -\frac{L-1}{2}\cdot\omega = -2\cdot\omega$

7) Ορίστε κατάλληλα την ιδανική απόκριση συχνότητας ενός φίλτρου στις περιοχές μετάβασής του, ώστε οι βέλτιστες λύσεις που προκύπτουν από τη μέθοδο των ζωνών αδιαφορίας και τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων να ταυτίζονται; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θ.δ.ο. η μέθοδος ζωνών αδιαφορίας προκύπτει από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, αν ορίσουμε στις περιοχές μετάβασης την ιδανική απόκριση να είναι ίση με την απόκριση συχνότητας του φίλτρου. Σύμφωνα με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι:

$$E^2(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} |D(\omega) - R(\omega)|^2 d\omega ,$$

όπου $E(\omega)$ η συνάρτηση σφάλματος για να βρούμε τους βέλτιστους συντελεστές

Το ολοκλήρωμα μπορεί να διασπαστεί ως εξής:

$$E^2(\omega) = \int_{R_1} |D(\omega) - R(\omega)|^2 d\omega + \int_{R_2} |D(\omega) - R(\omega)|^2 d\omega ,$$

όπου R_1 είναι η ένωση των ζωνών διάβασης και αποκοπής, ενώ R_2 είναι η ζώνη μετάβασης

Στη μέθοδο ζωνών αδιαφορίας μας ενδιαφέρουν μόνο οι ζώνες διάβασης και αποκοπής. Συνεπώς, όταν δεν υπάρχει το ολοκλήρωμα στην περιοχή R_2, τότε η μέθοδος ζωνών αδιαφορίας ταυτίζεται με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Θα πρέπει να επιλέξουμε την ιδανική απόκριση συχνότητας $D(\omega)$ ίση με την πραγματική απόκριση συχνότητας $H(\omega)$ στην περιοχή μετάβασης για να εξαλειφθεί το 2ο ολοκλήρωμα

(8) Δίνεται ότι: $|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\Omega^6}$ (1).

Βρείτε τη Συνάρτηση Μεταφοράς του αιτιατού φίλτρου. Αναφέρετε την επίδραση που έχει στα χαρακτηριστικά του φίλτρου η αντικατάσταση $\Omega^3 = \frac{1}{2}T_3(\Omega)$ στην (1), όπου $T_n(.)$ το n-στής τάξης πολυώνυμο Chebyshev.

Δίνεται η απόκριση πλάτους του φίλτρου ως $|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\Omega^6}$ (1)

Ο γενικός τύπος για την απόκριση πλάτους ενός αναλογικού IIR Butterworth είναι:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2\cdot L}} \quad (2)$$

Άρα για να προκύψει η συγκεκριμένη απόκριση πλάτους θα πρέπει $\Omega_c = 1$ και $L=3$, οπότε από τον (2) προκύπτει ο (1).

Η συνάρτηση μεταφοράς του κατωπερατού Butterworth τάξης $L=3$ είναι:

$$H(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s^2+\Omega_c\cdot s+\Omega_c^2)}$$

Θέτοντας $\Omega_c = 1$, προκύπτει ο τύπος:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

Η αντικατάσταση $\Omega^3 = \frac{1}{2}T_3(\Omega)$ στην (1) δίνει:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega^3)^2} = \frac{1}{1+\left[\frac{1}{2}T_3(\Omega)\right]^2} \quad (2)$$ όπου

$T_3(\Omega)$ το πολυώνυμο 3ης τάξης Chebyshev.

Υπολογίζουμε το $T_3(\Omega)$ ως εξής:

$T_3(\Omega) = 2\Omega T_2(\Omega) - T_1(\Omega) = 2\Omega\left(2\Omega T_1(\Omega) - T_0(\Omega)\right) - T_1(\Omega) =$

$$= 2\Omega(2\Omega\Omega - 1) - \Omega = 4\Omega^3 - 3\Omega = 4(\Omega^3 - 0.75\Omega)$$:

Άρα $T_3^2(\Omega) = 16\,(\Omega^3 - 0.75\Omega)^2$ (3).

Αντικαθιστούμε την (3) στη (2) και προκύπτει:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\frac{1}{4}\cdot 16\cdot(\Omega^3-0.75\Omega)^2} = \frac{1}{1+4(\Omega^3-0.75\Omega)^2}$$

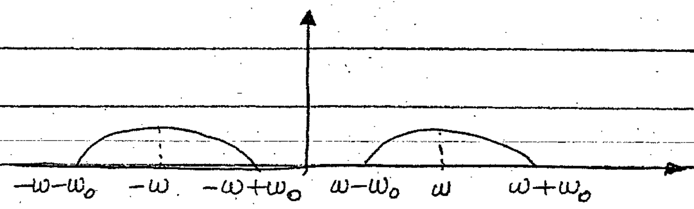
Άρα με την αντικατάσταση που έγινε προέκυψε φίλτρο Chebyshev 1ης τάξης με $\varepsilon^2=4$ και σφάλμα στη ζώνη διάβασης:

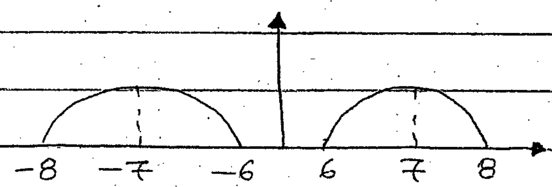
$$\delta_p = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+4}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{5}$$

⑨ α) Προσδιορίστε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για το σήμα $x(t)=\cos(7t)\cdot\cos(t)$, ώστε να μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως.
β) Δίνεται σήμα διακριτού χρόνου $x[n]=\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Βρείτε δύο διαφορετικά σήματα συνεχούς χρόνου από τη δειγματοληψία των οποίων να προκύψει το $x[n]$. Θεωρείστε $f_s=50$ KHz.
γ) Αν η συχνότητα δειγματοληψίας του $x(t)$ είναι f_0, ποια η συχνότητα δειγματοληψίας του $x\left(\frac{t}{2}\right)$;

α)

$y(t)\cdot\cos(\omega_0 t)$





$$\Omega_s \geq 2(\Omega+\Omega_0) = 2\cdot(7+1) = 16$$

$$f_s = \frac{\Omega_s}{2\pi} = \frac{8}{\pi}$$

β) Θεωρούμε το σήμα $x(t)=\cos(2\pi f t)$. Κάνουμε δειγματοληψία και το μετατρέπουμε σε ψηφιακό:

$$x(n\cdot T_s) = \cos(2\pi f n T_s) = \cos\left(\frac{2\pi f n}{f_s}\right) = \cos\left(\frac{2\pi f n}{50000}\right)$$

Για να προκύψει το $x[n]$, θα πρέπει το $\frac{2\pi f n}{50.000} = \frac{n\pi}{2}$

$\Rightarrow f = 12.500$ Hz ή 12.5 KHz

Οποιαδήποτε συχνότητα $\boxed{n \cdot f_s + f_0}$ ή $n \cdot f_s - f_0$ είναι αναλογικά σήματα, που όταν δειγματοληπτηθούν, θα προκύψει το ίδιο ψηφιακό.

Για $n=1$: $f_s + f_0 = 50\ KHz + 12.5\ KHz = 62.5\ KHz$

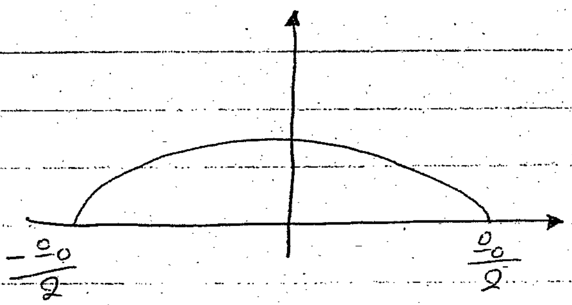
Απάντηση $\cos(2\pi \cdot 12.500t)$, $\cos(2\pi \cdot 62500t)$

Το $\cos(2\pi \cdot 62500t)$ είναι το ίδιο $x[n]$ διότι:

$$f_2 = 62.500\ Hz \geq f_s = 50.000\ Hz$$

1ο θεώρημα αναδίπλωσης: $f_2' = f_2 - \left[\frac{f_2}{f_s}\right] f_s = 12.500\ Hz$

γ) Λόγω της ιδιότητας της κλιμάκωσης, ο ΜΕ του $x\left(\frac{t}{2}\right)$ είναι:



$$\Omega_s \geq 2 * \Omega_{max} = 2 \cdot \frac{\Omega_0}{2} = \Omega_0$$

και $f_s \geq \frac{\Omega_0}{2\pi} = f_0$

(10) Σχεδιάστε ένα αναλογικό ανωπερατό φίλτρο Butterworth τάξης 3 και συχνότητας αποκοπής 3 dB $\Omega_c = 3/2$. Προτείνετε κύκλωμα που θα υλοποιεί το παραπάνω φίλτρο.

Ξεκινάμε από κατωπερατό αναλογικό Butterworth:

$$H_L(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s^2+s\Omega_c+\Omega_c^2)}$$

Για να το μετατρέψουμε σε ανωπερατό, κάνουμε τις εξής αντικαταστάσεις:

$$s_L = \frac{1}{s_a} \quad \text{και} \quad \Omega_L = \frac{1}{\Omega_a} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

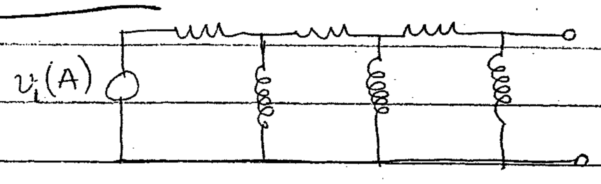
$$H_a\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\frac{1}{\Omega_c^3}}{\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{\Omega_c}\right)\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s\Omega_c}+\frac{1}{\Omega_c^2}\right)}$$

Μετά από πολλαπλασιασμό αριθμητή και παρονομαστή με s^3 πρώτα και μετά με Ω_c^3 έχουμε

$$H_a(s) = \frac{s^3}{(\Omega_c+s)(s^2+\Omega_c s+\Omega_c^2)} \Longrightarrow$$

$$H_a(s) = \frac{s^3}{\left(s+\frac{2}{3}\right)\left(s^2+\frac{2}{3}s+\frac{4}{9}\right)}$$

Τα ανωπερατά υλοποιούνται με πηνία και τα κατωπερατά με πυκνωτές:



(11) Η συνάρτηση μεταφοράς ενός αιτιατού IIR φίλτρου δίνεται από τη σχέση:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

(a) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Αμετάβλητης Κρουστικής Απόκρισης, μετασχηματίστε το παραπάνω φίλτρο σε ψηφιακό.
(b) Το ψηφιακό φίλτρο που βρήκατε, είναι ευσταθές;

(a) $H(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

$$A = \lim_{s \to -2} \cancel{(s+2)} \frac{s+1}{\cancel{(s+2)}(s+3)} = \frac{-1}{1} \Rightarrow A = -1$$

$$B = \lim_{s \to -3} \cancel{(s+3)} \frac{s+1}{(s+2)\cancel{(s+3)}} = \frac{-2}{-1} \Rightarrow B = 2$$

Δηλαδή $H(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3}$

Βρίσκουμε την $h(t)$ με αντίστροφο ΜL

$$h(t) = -e^{-2t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)$$

Δειγματοληπτούμε την $h(t)$, βάζοντας όπου t το $n \cdot T_s$:
Είναι $h(n \cdot T_s) = -e^{-2nT_s} \cdot u(n \cdot T_s) + 2e^{-3nT_s} \cdot u(n \cdot T_s)$

Θέτουμε $T_s = 1$ και είναι $h(n) = -e^{-2n} \cdot u(n) + 2e^{-3n} u(n)$

Παίρνουμε M2 κι έχουμε:

$$H(z) = -\frac{1}{1-z^{-1}\cdot e^{-2}} + \frac{2}{1-z^{-1}\cdot e^{-3}}$$

Η σχέση αναλογικών και ψηφιακών συχνοτήτων είναι:

$\Omega = \frac{\omega}{T_s}$ Για $T_s = 1$: $\Omega = \omega$

Οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι: $z_1 = e^{-2}$ και $z_2 = e^{-3}$.

3) Επειδή το φίλτρο είναι αιτιατό, για να είναι και ευσταθές θα πρέπει όλοι οι πόλοι να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, κάτι που συμβαίνει, αφού $|z_1| = \frac{1}{e^2} < 1$

και $|z_2| = \frac{1}{e^3} < 1$

(12) Να σχεδιαστεί ένα συμμετρικό FIR φίλτρο γραμμικής φάσης μήκους 5 εγκοπής που να προσεγγίζει με την έννοια του min-max τις ακόλουθες πρακτικές προδιαγραφές:

$$D(\omega)=\begin{cases}1 & , \ 0.2\pi<\omega<0.8\pi \\ 0 & , \ \omega=0\end{cases}$$

Επειδή το FIR είναι φίλτρο γραμμικής φάσης μήκους 5, η $R(\omega)$ δίνεται από τον τύπο: $R(\omega)=a_0+2a_1\cos\omega+2a_2\cos 2\omega$, επειδή $L=5 \Rightarrow 2N+1=5 \Rightarrow N=2$

Το φίλτρο είναι εγκοπής, γιατί μηδενίζεται η ιδανική απόκριση συχνότητας για $\omega=0$.

Παίρνουμε $R(0)=0 \Rightarrow a_0+2a_1+2a_2=0$

$$\Rightarrow \boxed{a_0=-2a_1-2a_2} \quad (1)$$

Επίσης $R'(\omega)=-2a_1\sin\omega-4a_2\sin 2\omega$

$R'(0)=0 \Rightarrow 0=0$ (?)

Παρατηρούμε ότι όταν η εγκοπή είναι στο 0 ή στο π δεν κερδίζουμε αγνώστους a_i, οπότε μπορούμε λόγω συμμετρίας να πάρουμε την ισότητα: $R(0)=R(\pi)$

$$\Rightarrow \cancel{a_0}+2a_1+\cancel{2a_2}=\cancel{a_0}-2a_1+\cancel{2a_2}$$

$$\Rightarrow 4a_1=0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1=0} \quad (2)$$

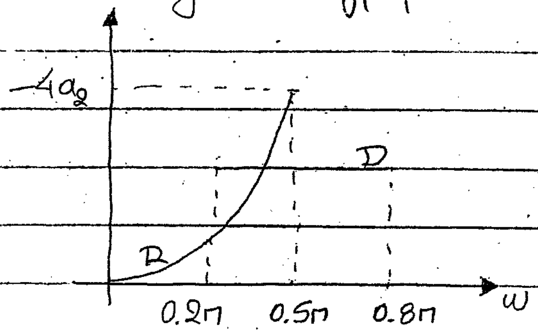
Άρα χρησιμοποιώντας τις (1), (2) έχουμε:

$$R(\omega)=a_0+2a_2\cos 2\omega=-2a_2+2a_2\cos 2\omega=-2a_2(\cos 2\omega-1)=$$

$$=2a_2\sin^2\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{R(\omega)=-4a_2\sin^2\omega}$$

Κατασκευάζω τις γραφικές παραστάσεις:



$D(0.2\pi) - R(0.2\pi) = \delta_{max}$
$D(0.5\pi) - R(0.5\pi) = -\delta_{max}$

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 4a_2 \sin^2(0.2\pi) = \delta_{max} \\ 1 + 4a_2 = -\delta_{max} \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_{max} = 1 \,,\; a_2 = 1$$

$D(0.3\pi) - R(0.3\pi) = 1 - 4\sin^2(0.3\pi) = 0.9989 < 1$

Άρα το ζεύγος $\omega_1 = 0.2\pi$ και $\omega_2 = 0.5\pi$ είναι αποδεκτό.
Οπότε, οι συντελεστές υπολογίζονται ως εξής:

$a_0 = -2 \,,\; a_1 = 0 \,,\; a_2 = 1$

Επιπλέον

	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4
	a_2	a_1	a_0	a_1	a_2
	1	0	-2	0	1

$$\varphi(\omega) = -\frac{L-1}{2}\omega = -2\omega$$

(13) Δίνεται ο ΔΜF $X[k]$, $k=0,1,\dots,N-1$ του σήματος $x[n]$, $n=0,1,\dots,N-1$. Υπολογίστε (χωρίς τη χρήση της χρονικής κυκλικής ολίσθησης) το Διακριτό ΜF $Y(k)$ του σήματος $y[n]=x[n+5]_N$, όπου με $[n]_N$ συμβολίζουμε τη διαδικασία modulo, το ακέραιο δηλαδή υπόλοιπο του n με το N (θεωρήστε ότι $N>5$)

Εφόσον $y[n]=x[n+5]_N$ θα ισχύει:

$$Y(k)=\sum_{l=0}^{N-1} y_l \cdot e^{-j2\pi\frac{lk}{N}}=\sum_{l=0}^{N-1} x[l+5]_N e^{-j2\pi\frac{lk}{N}}$$

Θέτουμε $l+5=m \Rightarrow l=m-5$, άρα τα όρια του αθροίσματος θα γίνουν: $l=0 \Rightarrow m=5$

$$l=N-1 \Rightarrow N-1=m-5 \Rightarrow m=N-1+5$$

Δηλαδή $Y(k)=\sum_{m=5}^{N-1+5} x[m]_N e^{-j\frac{2\pi(m-5)}{N}k}=$

$$=\sum_{m=5}^{N-1+5} x[m]_N e^{-j\frac{2\pi mk}{N}} \cdot e^{-j2\pi\frac{(-5)k}{N}}=$$

$$=e^{-j\frac{2\pi(-5)k}{N}} \sum_{m=5}^{N-1+5} x[m]_N e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}=$$

$$=e^{-j\frac{2\pi(-5)k}{N}}\left[\sum_{m=5}^{N-1} x[m]_N e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}+\sum_{n=N}^{N-1+5} x[m]_N e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}\right]$$

Στο 1ο άθροισμα, επειδή $m<N \Rightarrow x[m]_N=x[m]$

Στο 2ο άθροισμα, επειδή $m\geq N \Rightarrow x[m]_N=x[m-N]$

Τελικά: $Y(k)=e^{-j\frac{2\pi(-5)k}{N}}\left[\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\cdot e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}+\sum_{m=N}^{N-1+5} x[m-N]\cdot e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}\right]$

Στο 1ο άθροισμα θέτω $m=l$.

Στο 2ο άθροισμα θέτω $m-N=l \Rightarrow m=N+l$.

Άρα τα όρια του αθροίσματος θα γίνουν:

$m=N \Rightarrow l=0$

$m=N-1+5 \Rightarrow l=4$

$$Y(k)=e^{-j\frac{2\pi(-5)k}{N}}\left[\sum_{l=5}^{N-1} x[l]e^{-j\frac{2\pi l k}{N}}+\sum_{l=0}^{4} x[l]e^{-j\frac{2\pi l k}{N}}\cdot e^{-j2\pi k}\right]=$$

$$=e^{-j\frac{2\pi(-5)k}{N}}\left[\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\cdot e^{-j\frac{2\pi l k}{N}}\right]=e^{-j\frac{2\pi(-5)k}{N}}\cdot X(k)$$

(14) Σχεδιάστε ένα κατωπερατό IIR φίλτρο (ψηφιακό) δεύτερης τάξης με συχνότητα αποκοπής $\omega_c=\frac{\pi}{4}$ και $\delta_p=0.1$ μετασχηματίζοντας με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού ένα κατωπερατό IIR φίλτρο Chebyshev τύπου I. Ποια συχνότητα θα πρέπει να ορίσουμε σα συχνότητα αποκοπής ω_s του ψηφιακού φίλτρου, αν θέλουμε $\delta_s=\delta_p$;

Πρώτα υπολογίζουμε τη συχνότητα αποκοπής Ω_c του αντίστοιχου αναλογικού κατωπερατού φίλτρου Chebyshev.

Δηλαδή $\Omega_c=\tan\frac{\omega_c}{2}=\tan\frac{\pi}{8}=0.0068 \Rightarrow \boxed{\Omega_c=0.0068}$

Υπολογίζουμε το ε: $\varepsilon=\sqrt{\frac{1}{(1-\delta_p)^2}-1}=\sqrt{\frac{1}{(1-0.1)^2}-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\varepsilon=0.4843}$

Η συνάρτηση μεταφοράς για το φίλτρο Chebyshev είναι:

$$\boxed{H(s)=\frac{\frac{\Omega_c^{L}}{\varepsilon\cdot 2^{L-1}}}{(s-s_0)(s-s_1)\dots(s-s_{L-1})}}=\frac{\frac{(0.0068)^2}{\varepsilon\cdot 2^{L-1}}}{(s-s_0)(s-s_1)}$$

Συνάρτηση Μεταφοράς Αναλογικού Κατωπερατού Chebyshev

Για να βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς του ψηφιακού κατωπερατού Chebyshev, θέτουμε όπου:

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{0.00004850}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - s_0\right)\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - s_1\right)}$$

$$\delta_p = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \quad \text{και} \quad \delta_s = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \cdot T_L\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}$$

$$\Omega_s = \tan\frac{w_s}{2} \quad \text{και} \quad \Omega_p = \tan\frac{w_p}{2}$$

$$\delta_s = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \cdot T_L\left(\frac{\tan\frac{w_s}{2}}{\tan\frac{w_p}{2}}\right)}$$

Αφού θέλουμε $\delta_s = \delta_p \Longrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \cdot T_L\left(\frac{\tan\frac{w_s}{2}}{\tan\frac{w_p}{2}}\right)}$

(15) Δίνεται το σήμα $x(t)=A\cdot\sin(\omega_0 t)$, A: τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[-1,1]$. Να χαρακτηριστεί το σήμα ως προς τη στασιμότητά του.

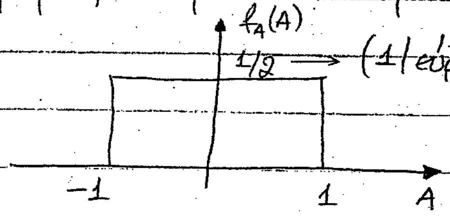
Ένα σήμα $x(t)$ είναι ασθενώς στάσιμο 1ης τάξης όταν
$\tilde{x}(t)=E\{x(t,\theta)\}=\tilde{x}$: ο στοχαστικός μέσος όρος είναι μια σταθερά ανεξάρτητη του χρόνου

$$\Rightarrow E\{x(t)\}=E\{A\cdot\sin\omega_0 t\}=\sin(\omega_0 t)\cdot \underbrace{E\{A\}}_{\text{μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής}}$$

ή το A ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[-1,1]$ ισχύει ότι

$$E\{A\}=\int_{-\infty}^{\infty}A\cdot f_A(A)\,dA=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}A\cdot dA=\frac{1}{2}\left[\frac{A^2}{2}\right]_{-1}^{1}=0$$

Η γραφική παράσταση ομοιόμορφης κατανομής



$\rightarrow$ (1/εύρος διαστήματος)

Οπότε $E\{x(t)\}=0 \Longrightarrow$ το σήμα $x(t)$ είναι ασθενώς στάσιμο 1ης τάξης.

Ένα σήμα ονομάζεται ασθενώς στάσιμο 2ης τάξης αν είναι ασθενώς στάσιμο 1ης τάξης και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ικανοποιεί τη σχέση: $R_x(t_1,t_2)=R_x(t_2-t_1)$ δηλαδή εξαρτάται μόνο από τη διαφορά των χρονικών στιγμών

$$R_x(t_1,t_2)=E\{x(t_1)\cdot x(t_2)\}=E\{(x(t_1,\theta)-\overset{0}{\cancel{\tilde{x}(t_1)}})\cdot(x(t_2,\theta)-\overset{0}{\cancel{\tilde{x}(t_2)}})\}=$$

$$=E\{A\sin(\omega_0 t_1)\cdot A\cdot\sin(\omega_0 t_2)\}=E\{A^2\sin(\omega_0 t_1)\cdot\sin(\omega_0 t_2)\}=$$

$$=E\left\{\frac{A^2}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\cos(\omega_0(t_1+t_2))-\cos(\omega_0(t_1-t_2))\right]\right\}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η αυτοσυσχέτιση του $x(t)$ δεν εξαρτάται μόνο από τη διαφορά των χρονικών στιγμών, αλλά και από το άθροισμα. Άρα το $x(t)$ δεν είναι ασθενώς στάσιμο 2ης τάξης.

(16) Δίνεται το σήμα $x(t) = A\cdot \sin(w_0 t + \theta)$, A: τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο $[-1, 1]$ και θ τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 2\pi]$. Να χαρακτηριστεί το σήμα ως προς τη στασιμότητα.

Για να ελέγξουμε αν είναι ασθενώς στάσιμο 1ης τάξης, παίρνουμε τη μέση τιμή.

$$E\{x(t)\} = E\{A\cdot \sin(w_0 t + \theta)\} = E\{A\}\cdot E\{\sin(w_0 t+\theta)\} =$$

$$= E\{A\}\cdot \int_0^{2\pi} \sin(w_0 t + \theta)\frac{1}{2\pi - 0}\, d\theta =$$

$$= E\{A\}\cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(w_0 t+\theta)\, d\theta = E\{A\}\frac{1}{2\pi}\Big[-\cos(w_0 t + \theta)\Big]_0^{2\pi} =$$

$$= E\{A\}\cdot 0 = 0.$$

Παρατηρούμε ότι το $x(t)$ είναι ασθενώς στάσιμο 1ης τάξης. Για να ελέγξουμε αν είναι ασθενώς στάσιμο 2ης τάξης παίρνουμε τη μέση τιμή του γινομένου: $R_x(t_1, t_2) = E\{(x(t_1,\theta) - \overset{0}{\bar{x}(t_1)})\cdot(x(t_2,\theta) - \overset{0}{\bar{x}(t_2)})\} =$

$$= E\{x(t_1)\cdot x(t_2)\} = E\{A\cdot \sin(w_0 t_1 + \theta)\, A\cdot \sin(w_0 t_2 + \theta)\} =$$

$$= E\left\{A^2\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\cos(w_0(t_1+t_2) + 2\theta) - \cos(w_0(t_1 - t_2))\right]\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}E\{A^2\}\cdot\left[\underbrace{E\{\cos(w_0(t_1+t_2)+2\theta)\}}_{\to 0} - E\{\cos(w_0(t_1-t_2))\}\right] =$$

γιατί βγαίνει έξω από τα όρια
ή αλλιώς τα ολοκληρώματα άρτιας συνάρτησης
στα πλαίσια μιας περιόδου κάνει 0

$$= \frac{1}{2}E\{A^2\}E\{\cos(w_0(t_1 - t_2))\}.$$ Η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται μόνο από τη διαφορά των χρονικών στιγμών, άρα είναι ασθενώς στάσιμο 2ης τάξης.

(17) Έστω τυχαία σήματα $S_n(\theta)$, $x_n(\theta)$, $R_x(n)$, $R_{xs}(n)$. Ενδιαφερόμαστε για ένα FIR φίλτρο της γενικής μορφής

$$\hat{S}_n(\theta) = h_1 \cdot x_{n-n_1} + h_2 \cdot x_{n-n_2} + \dots + h_L \cdot x_{n-n_L},$$

όπου $n_1, n_2, \dots, n_L$: γνωστοί ακέραιοι. Να βρεθούν οι απαραίτητες εξισώσεις που ορίζουν τους βέλτιστους συντελεστές που ελαχιστοποιούν το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, μεταξύ $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{επιθυμητή} \\ \text{έξοδος}}}{S_n(\theta)}$ και $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{πραγματική} \\ \text{έξοδος}}}{\hat{S}_n(\theta)}$

Γνωρίζουμε ότι $\hat{S}_n(\theta) = H_L^t \cdot x_n(\theta)$ όπου $H_L^t = [h_1, h_2, \dots, h_L]^t$ και $x_n(\theta) = [x_{n-n_1}(\theta), x_{n-n_2}(\theta), \dots, x_{n-n_L}(\theta)]^t$

Οι βέλτιστοι συντελεστές υπολογίζονται παίρνοντας το μέσο τετραγωνικό σφάλμα: $E\{(S_n(\theta) - \hat{S}_n(\theta))^2\} =$

$$= E\{[S_n(\theta) - h_1 x_{n-n_1}(\theta) - h_2 x_{n-n_2}(\theta) - \dots - h_L x_{n-n_L}(\theta)]^2\}$$

και εξισώνοντας τις μερικές παραγώγους ως προς τους συντελεστές του φίλτρου με το 0.

Το (2) εξισώσεων με τη μορφή πινάκων γράφεται:

$$E\{X_n(\theta) S_n(\theta)\} = E\{X_n(\theta) \cdot X_n^t(\theta)\} \cdot H_L$$ ή ισοδύναμα $B_L = R_L \cdot H_L$

Από εδώ προκύπτει ότι: $H_{min} = R^{-1} \cdot B$

με $R = E\{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{πίνακας} \\ \text{αυτοσυσχέτισης}}}{X_n(\theta) X_n^t(\theta)}\}$ και $B = E\{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{πίνακας} \\ \text{ετεροσυσχέτισης}}}{S_n(\theta) X_n(\theta)}\}$

$x_n(\theta) \cdot x_n^t(\theta) = \dots = R$

$B = E\{S_n(\theta) x_n(\theta)\} = $

$H = R^{-1} \cdot B \iff R \cdot H = B$

(18) (α) Θεωρείστε τη στοχαστική διαδικασία $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t)$ όπου A τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στο $[-2, 2]$. Αποφανθείτε για το είδος στασιμότητας 1ης τάξης της διαδικασίας.
(β) Αν $\omega_0 = 0$, εξετάστε αν η προκύπτουσα διαδικασία είναι εργοδική 1ης τάξης:

(α) $E\{x(t)\} = E\{A \cdot \cos(\omega_0 t)\} = \cos(\omega_0 t) \cancelto{0}{E\{A\}} = 0$

Άρα είναι ασθενώς στάσιμη 1ης τάξης.

γιατί $E\{A\} = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot f_A(A)\, dA = \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} A\, dA = \frac{1}{4} \left[\frac{A^2}{2}\right]_{-2}^{2} = 0$

(β) Για να είναι εργοδική 1ης τάξης, πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\bar{x} = \lim_{k \to \infty} \frac{x(t_1, \theta) + x(t_2, \theta) + \ldots + x(t_k, \theta)}{k}$$

Αν $\omega_0 = 0$, τότε:

$$\bar{x} = \lim_{k \to \infty} \frac{A\cos(0 \cdot t_1) + A\cos(0 \cdot t_2) + \ldots + A\cos(0 \cdot t_k)}{k} = \lim_{k \to \infty} \frac{k \cdot A}{k} = A$$

Μια στοχαστική διαδικασία είναι εργοδική αν οι στοχαστικά μέσες τιμές συμπίπτουν με τις χρονικά μέσες τιμές. Η χρονικά μέση τιμή είναι 0 από το ερώτημα (α), ενώ η στατιστικά μέση τιμή είναι A. Άρα επειδή οι 2 αυτές μέσες τιμές δε συμπίπτουν, δεν είναι εργοδική 1ης τάξης.

(*) Όταν ο κανός στοχαστικός μέσος όρος κάθε χρονικής στιγμής δε συμπίπτει με το χρονικό αριθμητικό μέσο όρο, τότε το σήμα δεν είναι εργοδικό 1ης τάξης.

(19) Το σήμα $x(n)$ είναι άθροισμα του επιθυμητού σήματος S_n και του θορύβου W_n. Δίνεται ότι τα σήματα S_n και W_n έχουν μέση τιμή 0 και είναι ασυσχέτιστα: $R_s(k)=0.5^{|k|}$, $R_W(k)=\delta(k)$

α) Προσδιορίστε το (Σ) εξισώσεων που ορίζει το βέλτιστο αιτιατό FIR φίλτρο Wiener $L=3$.

β) Βρείτε τη σχέση μεταξύ των συντελεστών h_0, h_1, h_2 ενός αιτιατού FIR φίλτρου, ώστε να εξαλείφεται η κυκλική συχνότητα $w_0=\frac{\pi}{4}$.

γ) Προσδιορίστε τις εξισώσεις που ορίζουν τους συντελεστές ενός FIR φίλτρου με $L=3$ το οποίο ικανοποιεί το (β) κι είναι βέλτιστο κατά την έννοια του μέσου τετραγωνικού σφάλματος.

δ) Ποια από τις 2 περιπτώσεις, (α) ή (γ) έχει το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα;

α) Εφαρμόζουμε την εξίσωση Wiener-Hopf:

$$\begin{bmatrix} R_{xs}(0) \\ R_{xs}(1) \\ R_{xs}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & R_x(2) \\ R_x(1) & R_x(0) & R_x(1) \\ R_x(2) & R_x(1) & R_x(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Επειδή τα σήματα είναι ασυσχέτιστα ισχύει ότι

$R_x(k)=R_s(k)+R_W(k)$ και $R_{xs}(k)=R_s(k)$, $R_{sW}(k)=0$

$$R_x(0)=R_s(0)+R_W(0)=0.5^0+\delta(0)=1+1=2$$

$$R_x(1)=R_s(1)+R_W(1)=0.5+0=0.5$$

$$R_x(2)=R_s(2)+R_W(2)=0.5^2+0=0.25$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2h_0+0.5h_1+0.25h_2=1 \\ 0.5h_0+2h_1+0.5h_2=0.5 \\ 0.25h_0+0.5h_1+2h_2=0.25 \end{cases}$$

β) Παίρνουμε την απόκριση συχνότητας 0, γιατί θέλουμε να εξαλειφθεί η κυκλική συχνότητα

$H(e^{j\omega})=0$ όπου $\omega_0=\frac{\pi}{4}$

Άρα $H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{2} h_n\cdot e^{-j\omega_0 n} \Rightarrow H(e^{j\omega})=h_0+h_1\cdot e^{-j\omega_0}+h_2\cdot e^{-j2\omega_0}$

Θέτουμε $H(e^{j\omega})=0$ και προκύπτει: $h_0+h_1\cdot e^{-j\pi/4}+h_2\cdot e^{-j2\pi/4}=0$

$$\Rightarrow h_0+h_1\cos\frac{\pi}{4}-jh_1\sin\frac{\pi}{4}+h_2\cancelto{0}{\cos\frac{\pi}{2}}-jh_2\sin\frac{\pi}{2}=0$$

$$\Rightarrow h_0+h_1\frac{\sqrt{2}}{2}-jh_1\frac{\sqrt{2}}{2}-jh_2=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{h_0+h_1\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{πραγματικό}}-j\underbrace{\left(h_1\frac{\sqrt{2}}{2}+h_2\right)}_{\text{φανταστικό}}=0$$

$h_0+h_1\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ και $h_1\frac{\sqrt{2}}{2}+h_2=0$

$h_0=-h_1\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $h_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}h_1$

γ) $\hat{S}_n=-\frac{\sqrt{2}}{2}h_1x_n+h_1x_{n-1}-\frac{\sqrt{2}}{2}h_1x_{n-2}=$

$$=h_1\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}x_n+x_{n-1}-\frac{\sqrt{2}}{2}x_{n-2}\right\}$$

Το φίλτρο έχει μόνο 1 άγνωστο το h_1 και η ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος προκύπτει από:

$$\frac{\partial}{\partial h_1}E\{(S_n-\hat{S}_n)^2\}=0$$

$$\Rightarrow E\left\{S_n+\frac{\sqrt{2}}{2}h_1x_n-h_1x_{n-1}+\frac{\sqrt{2}}{2}h_1x_{n-2}\right\}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_n+x_{n-1}-\frac{\sqrt{2}}{2}x_{n-2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} R_{sx}(0) + R_{sx}(1) - \frac{\sqrt{2}}{2} R_{sx}(2) - \frac{\sqrt{2}}{2} h_1 R_x(0) + \frac{\sqrt{2}}{2} h_1 R_x(1) -$$

$$- \frac{2}{4} h_1 R_x(2) + h_1 \frac{\sqrt{2}}{2} R_x(1) - h_1 \cdot R_x(0) + \frac{\sqrt{2}}{2} h_1 R_x(1) - \frac{2}{4} h_1 R_x(2) +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} h_1 R_x(1) - \frac{2}{4} h_1 R_x(1) = 0$$

$\Rightarrow$ λύνουμε ως προς h_1

$$\Rightarrow h_1 = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(R_s(0)+R_s(2)\right) + R_s(1)}{2R_x(0) - 2\sqrt{2}R_x(1) + R_x(2)}$$

δ) Η 1η περίπτωση έχει μικρότερο σφάλμα, γιατί κάναμε ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος με 3 αγνώστους h_0, h_1, h_2. Ενώ στη 2η περίπτωση οι 2 από τις 3 παραμέτρους είναι περιορισμένες, δηλ. h_0, h_2 γράφονται συναρτήσει της h_1, άρα έχουμε μεγαλύτερο σφάλμα.

20) Ένα αναλογικό σήμα $x(t)$ έχει συγκεντρωμένη την ενέργειά του στη συχνοτική ζώνη [8 10] kHz. Βρείτε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας, η οποία επιτρέπει την ακριβή ανακατασκευή του.

Σύμφωνα με το Γενικό Θεώρημα Δειγματοληψίας, ένα σήμα $x(t)$ συνεχούς χρόνου που περιέχει συχνότητες στο διάστημα $[f_{m1}\ f_{m2}]$ μπορεί να ανακατασκευαστεί ακριβώς από τα δείγματα $X_n = x_a(n \cdot T_s)$, αν η συχνότητα δειγματοληψίας ικανοποιεί

$$f_s \in \left[\frac{2f_{m2}}{n_0+1}\ \ \frac{2f_{m1}}{n_0}\right] \cup \ldots \cup \left[\frac{2f_{m2}}{2}\ \ \frac{2f_{m1}}{1}\right] \cup \left[2f_{m2}\ \ \infty\right] \text{ με } n_0 = \left\lfloor \frac{f_{m1}}{f_{m2}-f_{m1}} \right\rfloor$$

$$n_0 = \frac{8}{10-8} = \frac{8}{2} = 4 \qquad f_s \in [4\ \ 4] \cup \ldots \cup [10\ \ 16] \cup [20\ \ \infty]$$

21) α) Βρείτε την κρουστική απόκριση ενός FIR φίλτρου γραμμικής φάσης και μήκους 5, που προσεγγίζει βέλτιστα με τη min-max έννοια το παρακάτω φίλτρο εγκοπής.

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 , & [0, 0.45\pi] \cup [0.55\pi, \pi] \\ 0 , & 0.5\pi \end{cases}$$

Ποια η τιμή του μέγιστου σφάλματος;

β) Αποδείξτε ότι, ορίζοντας κατάλληλα την ιδανική απόκριση συχνότητας στις περιοχές μετάβασης, οι βέλτιστες λύσεις απ' τη μέθοδο γωνιών αδιαφορίας και ελαχίστων τετραγώνων ταυτίζονται.

(α) Αφού το φίλτρο έχει μήκος 5 $\Rightarrow L=5 \Rightarrow 2N+1=5 \Rightarrow 2N=4$
$\Rightarrow N=2$

Δηλαδή η απόκριση συχνότητας θα είναι

$$R(\omega) = a_0 + 2a_1 \cos\omega + 2a_2 \cos 2\omega$$

Οι όροι της κρουστικής απόκρισης θα είναι:

$h_0 \quad h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4$

$a_2 \quad a_1 \quad a_0 \quad a_1 \quad a_2$

Οι άγνωστοι με τη μέθοδο min-max είναι $N+1=3$ ($a_0, a_1, a_2, \delta_{max}$). Το φίλτρο που δίνεται είναι φίλτρο εγκοπής, διότι παρατηρούμε ότι $D(0.5\pi)=0$ και όχι σε κάποιο διάστημα.

Αυτό σημαίνει ότι οι άγνωστοι μειώνονται από $N+1$ σε $N-1$.
Δηλαδή $R(0.5\pi)=0 \Rightarrow a_0 + 2a_1 \cancel{\cos\frac{\pi}{2}}^{0} + 2a_2 \cos \cancel{2}\frac{\pi}{\cancel{2}} = 0$

$$\Rightarrow a_0 - 2a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 2a_2} \quad (1)$$

Παίρνουμε την $R'(\omega) = -2a_1 \sin\omega - 2a_2 \sin 2\omega \cdot 2$

$$\Rightarrow R'(\omega) = -2a_1 \sin\omega - 4a_2 \sin 2\omega$$

Είναι $R'(0.5\pi) = 0 \Rightarrow -2a_1 \sin\frac{\pi}{2} - 4a_2 \cancel{\sin\frac{2\pi}{2}}^{\,0} = 0$

$$\Rightarrow -2a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0} \quad (2)$$

Οι άγνωστοι πλέον είναι:

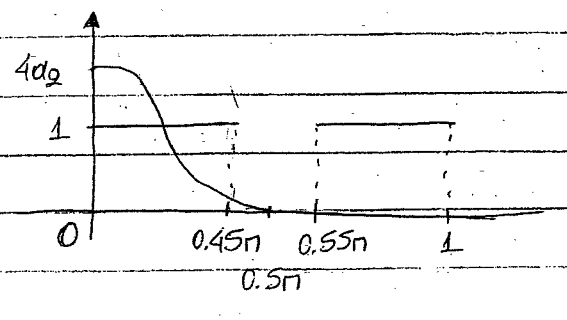
h_0	h_1	h_2	h_3	h_4
a_2	0	$2a_2$	0	a_2

άγνωστοι: a_2, δ_{max}

Εφαρμόζουμε το θεώρημα εναλλαγής στη μέθοδο του min-max. Θα επιλέξουμε 2 συχνότητες ω_1, ω_2 με $\omega_1 < \omega_2$, έτσι ώστε η διαφορά $D(e^{j\omega_i}) - R(e^{j\omega_i})$ για $i=1,2$ να παρουσιάζει εναλλαγή προσήμου σε $\forall \omega_i$, δηλ. $\pm\delta_{max}$ και το σφάλμα δ_{max} να είναι το μέγιστο. Υποψήφιες είναι αυτές που παρουσιάζει ασυνέχεια η D, καθώς και τα ακρότατα της R. Η απόκριση συχνότητας που προκύπτει από τις (1), (2):

$$R(\omega) = 2a_2 + 2a_2 \cos 2\omega = 2a_2(1 + \cos 2\omega) = 2a_2 \cdot 2 \cdot \cos^2\omega$$

$$\Rightarrow R(\omega) = 4a_2 \cos^2\omega$$



$$D(0) - R(0) = -\delta_{max} \Rightarrow \boxed{1 - 4a_2 = -\delta_{max}} \quad (3)$$

$$D(0.45\pi) - R(0.45\pi) = \delta_{max} \Rightarrow 1 - a_2 \cos^2(0.45\pi) = \delta_{max} \Rightarrow \ldots$$

Βρίσκουμε από τις παραπάνω εξισώσεις τα a_2 και δ_{max}.

Η γραμμική φάση είναι $\varphi(\omega) = -\frac{L-1}{2}\cdot\omega = -2\cdot\omega$

(β) Θα δείξουμε ότι η μέθοδος ζωνών αδιαφορίας προκύπτει από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων αν ορίσουμε στις περιοχές μετάβασης την ιδανική απόκριση συχνότητας του φίλτρου.

Θα είναι $E^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})|^2 d\omega$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να διασπαστεί ως:

$E^2(\omega) = \int_{R_1} |D(\omega) - R(\omega)|^2 d\omega + \int_{R_2} |D(\omega) - R(\omega)|^2 d\omega$,

όπου $R_1 = [0, 0.45\pi] \cup [0.55\pi, \pi] \cup 0.5\pi$

και $R_2 = (0.45\pi, 0.55\pi)$ και ορίζουν τις περιοχές διάβασης/αποκοπής και μετάβασης αντίστοιχα.

Στη μέθοδο ζωνών αδιαφορίας ολοκληρώνουμε στις περιοχές ενδιαφέροντος (διάβασης/αποκοπής). Άρα όταν δεν υπάρχει το ολοκλήρωμα στην περιοχή R2, τότε η μέθοδος ζωνών αδιαφορίας συμπίπτει με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

(22) Έστω ότι θέλετε να σχεδιάσετε ένα FIR φίλτρο γραμμικής φάσης που να έχει μήκος ίσο με 5. Θέλετε το φίλτρο αυτό να προσεγγίζει κατά τη min-max έννοια την παρακάτω συμμετρική συνάρτηση:

$$D(\omega) = \begin{cases} 0 & , 0 < \omega < 0.2\pi \\ 1 & , 0.3\pi < \omega < 0.7\pi \\ 0 & , 0.8\pi < \omega < \pi \end{cases}$$

Βρείτε τις εξισώσεις που ορίζουν τους βέλτιστους συντελεστές.

Έχουν μήκος $L=5 \Rightarrow 2N-1=5 \Rightarrow 2N=4 \Rightarrow N=2$

και η απόκριση συχνότητας θα είναι: $R(\omega) = a_0 + 2a_1 \cos\omega + 2a_2 \cos 2\omega$

Οι όροι της κρουστικής απόκρισης θα είναι:

$h_0 \quad h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4$

$a_2 \quad a_1 \quad a_0 \quad a_1 \quad a_2$

Πρέπει να βρούμε 4 συχνότητες $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$ στις ζώνες διάβασης / αποκοπής όπου:

$D(\omega_1) - R(\omega_1) = -\left(D(\omega_2) - R(\omega_2)\right) = D(\omega_3) - R(\omega_3) = -\left(D(\omega_4) - R(\omega_4)\right)$

και $\max_\omega |D(\omega) - R(\omega)| = |D(\omega_i) - R(\omega_i)|$, $i = 1, \dots, 4$

Παρατηρούμε ότι η $R'(\omega) = -2a_1 \sin\omega - 4a_2 \sin 2\omega$ έχει σταθερό πρόσημο στο $[0, 0.5\pi]$, οπότε η συνάρτηση σφάλματος θα είναι στο ίδιο διάστημα γνησίως μονότονη (αύξουσα), αφού στο $[0, 0.5\pi]$ θα είναι σταθερή ανά διαστήματα (0 για $[0, 0.2\pi]$ και 1 για $[0.3\pi, 0.5\pi]$.

Για $i=1$: $D(\omega_i) - R(\omega_i) = D(0) - R(0) = \delta_{max}$

Για $i=2$: ...

Επιλύουμε το (Σ) και βρίσκουμε τους συντελεστές και το δ_{max}

(23) Δίνονται οι ακόλουθες ιδανικές προδιαγραφές ενός φίλτρου

$$D(e^{j\omega})=\begin{cases} j\omega & , \omega\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] \\ 0 & , \omega\in\left[-\pi,\frac{-1.2\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{1.2\pi}{4},\pi\right]\end{cases} \qquad T_s=1$$

Θέλουμε να προσεγγίσουμε το ιδανικό φίλτρο αυτό με μια συνάρτηση $H(e^{j\omega})$. Ορίστε τη συνάρτηση βάρους $W(\omega)$ και το μέγιστο αποδεκτό σφάλμα προσέγγισης δ_{max}, ώστε:

α) το σχετικό σφάλμα στη ζώνη διάβασης και το απόλυτο σφάλμα στη ζώνη αποκοπής να μην υπερβαίνουν το 0.01

β) το σχετικό σφάλμα στη ζώνη διάβασης να μην υπερβαίνει το 0.01, ενώ το απόλυτο σφάλμα στη ζώνη αποκοπής να μην υπερβαίνει το 0.001.

α) Σχετικό σφάλμα προσέγγισης στη ζώνη διάβασης

$$\frac{|D(e^{j\omega})-H(e^{j\omega})|}{|D(e^{j\omega})|}\le 0.01 \qquad \text{για } |\omega|\le\frac{\pi}{4}$$

ζώνη διάβασης

Απόλυτο σφάλμα προσέγγισης στη ζώνη αποκοπής

$$|D(e^{j\omega})-H(e^{j\omega})|\le 0.01 \qquad \text{για } \frac{1.2\pi}{4}\le|\omega|\le\pi$$

Ισχύει: $W(\omega)\,|D(e^{j\omega})-H(e^{j\omega})|\le\delta_{max}$

Θέλουμε $\delta_{max}=0.01$ και

στη ζώνη διάβασης: $W(\omega)=\frac{1}{|D(e^{j\omega})|}=\frac{1}{|\omega|}$ για $|\omega|\le\frac{\pi}{4}$

στη ζώνη αποκοπής: $W(\omega)=1$ για $\frac{1.2\pi}{4}\le|\omega|\le\pi$

Δηλαδή $W(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{|\omega|} & \text{για } |\omega|\le\frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{για } \frac{1.2\pi}{4}\le|\omega|\le\pi\end{cases}$

β) Θέλω $\frac{|D(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|}{|D(e^{j\omega})|} \leq 0.01$ για $|\omega| \leq \frac{\pi}{4}$

$W(\omega) = \frac{1}{|D(e^{j\omega})|}$ στη ζώνη διάβασης

$|D(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})| \leq 0.001$ για $\frac{1.2\pi}{4} \leq |\omega| \leq \pi$

$\Rightarrow 10 \cdot |D(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})| \leq 0.01$

↳ $W(\omega)$ στη ζώνη αποκοπής.

Άρα επιλέγω $\delta_{max} = 0.01$ και

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{|\omega|} & \text{για } |\omega| \leq \frac{\pi}{4} \\ 10 & \text{για } \frac{1.2\pi}{4} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΟ

$s^{\kappa} = \frac{1}{s^{a}}$ ↓ ↑ $\Omega^{\kappa} = \frac{1}{\Omega^{a}}$

ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΑΝΩΠΕΡΑΤΟ

$s^{a} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ ↓ ↑ $\Omega^{a} = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

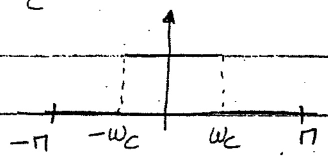
ΨΗΦΙΑΚΟ ΑΝΩΠΕΡΑΤΟ

ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΟ → ΨΗΦΙΑΚΟ ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΟ: $s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

ΨΗΦΙΑΚΟ ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΟ → ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΟ: $\Omega = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

ΨΗΦΙΑΚΟ ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΟ

(24) ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΜΕΣΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ: Σχεδιάστε κατωπερατό FIR φίλτρο γραμμικής φάσης, μήκους 7, που να έχει συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 0.3\pi$.



Ιδανική συνάρτηση που θέλουμε να προσεγγίσουμε:

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & , |\omega| \le 0.3\pi \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

$L = 7 \Rightarrow 2N+1 = 7 \Rightarrow 2N = 6 \Rightarrow N = 3$

Φίλτρο FIR $(L=7)$: $h_0 \; h_1 \; h_2 \; h_3 \; h_4 \; h_5 \; h_6$

$\qquad\qquad\qquad\quad a_3 \; a_2 \; a_1 \; a_0 \; a_1 \; a_2 \; a_3$

Η απόκριση συχνότητας θα δίνεται από τη σχέση:

$$R(e^{j\omega}) = a_0 + 2a_1\cos\omega + 2a_2\cos 2\omega + 2a_3\cos 3\omega$$

Αν έχουμε $R(e^{j\omega})$ πραγματική, τότε οι συντελεστές της κρουστικής απόκρισης $h_0, h_1, \dots, h_6$ θα είναι συμμετρικοί ως προς τον κεντρικό όρο.

Για να βρω τους συντελεστές a_0, a_1, a_2, a_3, εφαρμόζω το κριτήριο του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος.

$$E^2(a_0, a_1, a_2, a_3) = \int_{-\pi}^{\pi} [D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})]^2 \, d\omega$$

Ψάχνω a_0, a_1, a_2, a_3 ώστε $E^2(a_0, a_1, a_2, a_3)$ ελάχιστο.

$$\frac{dE^2(a_0, a_1, a_2, a_3)}{da_n} = 0 \rightarrow \text{δίνει τα επιθυμητά } a_n, \; n = 0,1,2,3$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega}) \cdot \cos(n\omega)\, d\omega$$

Για $n=0$: $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-0.3\pi}^{0.3\pi} 1\cdot\cos(0\cdot\omega)\,d\omega=\frac{1}{2\cancel{\pi}}\,0.6\cancel{\pi}=0.3$

Για $n\neq 0$: $a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-0.3\pi}^{0.3\pi}\cos(n\omega)\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n\omega)}{n}\right]_{-0.3\pi}^{0.3\pi}=$

$=\frac{\sin(0.3n\pi)}{n\cdot\pi}$ για $n=1,2,3$

Έτσι προκύπτουν τα a_0, a_1, a_2, a_3

(25) Με τη βοήθεια του $\boxed{\text{τετραγωνικού παραθύρου}}$, σχεδιάστε κατωπερατό FIR φίλτρο γραμμικής φάσης μήκους $2N+1$, που να έχει περιοχή διάβασης το διάστημα $[0, 0.3\pi]$, περιοχή αποκοπής το $[0.4\pi, \pi]$ και στην περιοχή μετάβασης $[0.3\pi, 0.4\pi]$ μεταβάλλεται γραμμικά από την τιμή 1 στην τιμή 0.

Εδώ είναι $w_c = 0.3\pi$ και $w_a = 0.4\pi$

Συνάρτηση που προσεγγίζουμε:

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & , |\omega| \le 0.3\pi \\ -\frac{10}{\pi}\cdot|\omega|+4 & , 0.3\pi \le |\omega| \le 0.4\pi \\ 0 & , |\omega| \ge 0.4\pi \end{cases}$$

Γνωρίζω ότι οι συντελεστές της κρουστικής απόκρισης h_n του βέλτιστου FIR φίλτρου είναι όροι της σειράς Fourier της $D(e^{j\omega})$

$$h_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega})\, e^{-j(n-N)\omega}\, d\omega \quad \text{για } L = 2N+1$$

$$h_n = -\frac{\gamma_{n-N}}{(n-N)^2} \quad \text{και} \quad \gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D''(e^{j\omega})\cdot e^{jn\omega}\, d\omega$$

(26) ΜΕΘΟΔΟΣ ΖΩΝΩΝ ΑΔΙΑΦΟΡΙΑΣ (ομοίως με πριν και μοναδιαία συνάρτηση βάρους $W(\omega)$)

Ολοκληρώνω στην περιοχή: $T = [-\pi, -0.4\pi] \cup [-0.3\pi, 0.3\pi] \cup [0.4\pi, \pi]$, δηλ. αγνοούμε τις ζώνες μετάβασης

$$\underbrace{\bar{E}^2(a_0, a_1)}_{\downarrow\ \text{ελάχιστο}} = \int_T \left[D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})\right]^2 \cdot w^2(\omega)\, d\omega$$

Παραγωγίζω ως προς a_0, a_1: $\frac{d\bar{E}^2(a_0,a_1)}{da_0} = 0$ και $\frac{d\bar{E}^2(a_0,a_1)}{da_1} = 0$

(27) Έστω ότι έχουμε FIR φίλτρο μήκους 3 και εφαρμόζουμε ως είσοδο την ακολουθία $u(n)=0.5^n$. Αν τα 3 πρώτα δείγματα της αντίστοιχης εξόδου είναι 1, 0, 3, τότε να βρεθεί η συνολική έξοδος του φίλτρου για κάθε $n\geq 0$. Θεωρείστε μηδενικές αρχικές συνθήκες.

$$u_n \longrightarrow \boxed{h_n} \longrightarrow y_n = u_n * h_n$$

$$u_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$$

			$n=0$	$n=1$	$n=2$
		$h(n)$	h_0	h_1	h_2
$1/4$	$1/2$	1			

$$y_0 = h_0 \cdot 1 \qquad y_1 = h_1 + \frac{1}{2}h_0 \qquad y_2 = h_2 + \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{4}h_0$$

$$h_0 \cdot 1 = 1 = y_1 \implies h_0 = 1$$

$$h_1 \cdot 1 + h_0 \frac{1}{2} = 0 = y_2 \implies h_1 = -\frac{1}{2}$$

$$h_2 \cdot 1 + h_1 \cdot \frac{1}{2} + h_0 \cdot \frac{1}{4} = 3 = y_3 \implies h_2 = 3$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\cdot h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\cdot u(n-k) = \sum_{k=0}^{2} h(k)\, u(n-k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{2} h(k)\cdot u(n-k) = h(0)\cdot u(n) + h(1)\cdot u(n-1) + h(2)\cdot u(n-2) =$$

$$= \dots = 12\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Άρα η αντίστοιχη έξοδος είναι:

$$y(n) = \begin{cases} 1 & \text{για } n=0 \\ 0 & \text{για } n=1 \\ 12\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{για } n\geq 2 \end{cases}$$

(28) Η ιδανική απόκριση συχνότητας ενός ψηφιακού φίλτρου δίνεται από τη σχέση $D(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N+1} d_n \cdot \cos(n\omega)$. Να βρείτε την κρουστική απόκριση του βέλτιστου FIR μήκους $2N+1$ και γραμμικής φάσης με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων.

Επειδή το φίλτρο είναι πραγματικό, οι συντελεστές θα είναι συμμετρικοί ως προς τον κεντρικό όρο.

Αφού $L=2N+1$: $B(e^{j\omega}) = a_0 + 2a_1\cos\omega + 2a_2\cos 2\omega + \dots + 2a_N\cos(N\omega)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(a\omega) = \begin{cases} 0, & a\neq 0 \\ 2\pi, & a=0 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega})\cos(n\omega)\,d\omega \quad , n=0,\dots,N$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{N+1} d_k\cdot\cos(k\omega)\cos(n\omega)\,d\omega$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N+1} d_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\omega)\cdot\cos(n\omega)\,d\omega$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N+1} d_k\left[\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(k+n)\omega]\,d\omega + \int_{-\pi}^{\pi}\cos[(k-n)\omega]\,d\omega\right]$$

I) Αν $k=n=0$ τότε $a_n = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{N+1} d_n[2\pi+2\pi] = d_n$

II) Αν $k=n\neq 0$ τότε $a_n = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N+1} d_k[0+2\pi] = \frac{d_k}{2} = \frac{d_n}{2}$

III) Αν $k\neq n$, $k\neq 0$, $n\neq 0$ τότε $a_n = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N+1} d_k[0+0] = 0$

(29) Σχεδιάστε κατωπερατό αναλογικό φίλτρο Butterworth τάξης $L=2$ με $\Omega_p = 1$ kHz, $\Omega_s = 2$ kHz και με συνάρτηση βάρους που είναι $W(\Omega)=1$ στη ζώνη διάβασης και $W(\Omega)=10$ στη ζώνη αποκοπής.

$$|H(j\Omega)| = \text{Απόκριση πλάτους} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2L}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{4}}}$$

$[0, \Omega_p]$: Ζώνη διάβασης

Μέγιστο σφάλμα $= W(\Omega_p)\cdot[1-|H(j\Omega_p)|] = W(\Omega_s)\cdot|H(j\Omega_s)| = \delta_{max}$

$[\Omega_s, \infty)$: Ζώνη αποκοπής

$$W(\Omega_p)\cdot\left(1-\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^4}}\right) = W(\Omega_s)\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^4}}$$

$\Longrightarrow \Omega_c = \ldots\ldots$

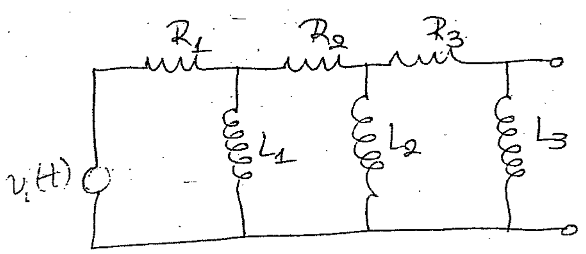
(30) Σχεδιάστε ανωπερατό αναλογικό Butterworth τάξης $L=3$ με συχνότητα αποκοπής $\Omega_c = 0.2\pi$.

Αναλογικό κατωπερατό IIR Butterworth

$$H_3(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s^2+\Omega_c\cdot s+\Omega_c^2)}$$

Είναι $\Omega_c^{\kappa} = \frac{1}{\Omega_c^{\alpha}} = \frac{1}{0.2\pi}$ και $s^{\kappa} = \frac{1}{s^{\alpha}}$

Άρα
$$H_3(s) = \frac{\left(\frac{1}{0.2\pi}\right)^3}{\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{0.2\pi}\right)\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{0.2\pi}\cdot\frac{1}{s}+\left(\frac{1}{0.2\pi}\right)^2\right)}$$



(31) Σχεδιάστε ψηφιακό κατωπερατό IIR Butterworth τάξης $L=2$, το οποίο να έχει $\omega_p = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.4\pi$, $W(\omega)=1$, με τη χρήση διγραμμικού μετασχηματισμού.

Σχεδιάζω αντίστοιχο IIR αναλογικό κατωπερατό φίλτρο με $\Omega = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Άρα για $L=2$:

$$H(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\Omega_c \cdot s + \Omega_c^2} \qquad |H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2 \cdot L}}}$$

$$\Omega = \tan\frac{\omega}{2} \qquad s_{αναλ} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Για να βρω την Ω_c:

$$\Omega_p = \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = \tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) = 0.5095$$

$$\Omega_s = \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = \tan\left(\frac{0.4\pi}{2}\right) = 0.7265$$

Είναι $\cancel{W(\Omega_p)}^{1} \cdot [1 - |H(j\Omega_p)|] = \cancel{W(\Omega_s)}^{1} |H(j\Omega_s)|$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{0.5095}{\Omega_c}\right)^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{0.7265}{\Omega_c}\right)^4}} \Rightarrow \Omega_c = 0.7857$$

Αντικαθιστώ $s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$: $H(z) = \dfrac{\Omega_c^2}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + \sqrt{2}\Omega_c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \Omega_c^2} = \ldots$

(32) Σχεδιάστε ψηφιακό κατωπερατό IIR Butterworth με $L=2$ και συχνότητα αποκοπής των 3 dB, $\omega_c = 0.3\pi$

- Σχεδιάζω πρώτα αναλογικό κατωπερατό IIR Butterworth

$$H(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\,\Omega_c \cdot s + \Omega_c^2} \quad \text{όπου} \quad \Omega_c = \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = 0.5095$$

- Αντικαθιστώ $s = \dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

και παίρνω $$H(z) = \frac{\Omega_c^2}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + \sqrt{2}\,\Omega_c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \Omega_c^2}$$

(33) Σχεδιάστε ψηφιακό ανωπερατό IIR Butterworth τάξης $L=3$ με συχνότητα αποκοπής των 3 dB $\omega_c = 0.2\pi$.

- Σχεδιάζω αναλογικό κατωπερατό IIR Butterworth

$$H_k(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s^2 + \Omega_c \cdot s + \Omega_c^2)}$$

με $$\Omega_c^k = \frac{1}{\Omega_c^a} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)}$$

- Σχεδιάζω αναλογικό ανωπερατό IIR

$$H_a(s) = \frac{(\Omega_c)^3}{\left(\frac{1}{s} + \Omega_c\right)\left[\frac{1}{s^2} + \Omega_c \frac{1}{s} + \Omega_c^2\right]}$$

- Σχεδιάζω ψηφιακό ανωπερατό IIR

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$H_a(z) = \frac{(\Omega_c)^3}{\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + \Omega_c\right)\left(\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)^2 + \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)\Omega_c + \Omega_c^2\right)}$$

(34) Σχεδιάστε ψηφιακό ανωπερατό IIR Butterworth τάξης $L=3$ με $\omega_p = 0.4\pi$, $\omega_s = 0.3\pi$

$$\Omega_p = \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 0.7265$$

$$\Omega_s = \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 0.5095$$

$$\Omega_p' = \frac{1}{\Omega_p} = 1.376$$

$$\Omega_s' = \frac{1}{\Omega_s} = 1.9627$$

$$H_L(s) = \frac{(\Omega_c')^3}{(s'+\Omega_c')(s'^2+s'\cdot\Omega_c'+\Omega_c'^2)}$$

$$W(\Omega_p')\left[1-H(j\Omega_p)\right] = W(\Omega_s')\,|H(j\Omega_s)|$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega_p'}{\Omega_c'}\right)^6}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega_s'}{\Omega_c'}\right)^6}} \Rightarrow \Omega_c'$$

Στην $H_L(s)$ βάζω όπου $s = \frac{1}{s} \Rightarrow H_a(s)$

Στην $H_a(s)$ βάζω όπου $s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow H_a(z)$

(35) Δίνεται η ακολουθία $x(n)=\{1,-1,2,3,0,0\}$. Χωρίς να υπολογίσετε τον ΔΜF, βρείτε την ακολουθία που έχει ΔΜF της μορφής $w_3^{2k}\cdot X(k)$.

Η ιδιότητα που εφαρμόζεται είναι η κυκλική ολίσθηση στο χρόνο:

$$x(n-n_0) \Longleftrightarrow w_N^{n_0 k}\cdot X(k) = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0 k}\cdot X(k)$$

Έχουμε $N=6$, ενώ ο όρος που δίνεται είναι $w_3^{2k}\cdot X(k)$ θα σχηματίσουμε

$$w_3^{2k} = \left(e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)^{2k} = \left(e^{-j\frac{2\pi\cdot 2}{3\cdot 2}}\right)^{2k} = \left(e^{-j\frac{4\pi}{6}}\right)^{2k} = \left(e^{-j\frac{2\pi}{6}}\right)^{4k} = (w_6)^{4k}$$

Άρα $w_3^{2k} = w_6^{4k}$

$$w_3^{2k}\cdot X(k) = w_6^{4k}\cdot X(k)$$

Δηλαδή μετατοπίζουμε κατά 4 θέσεις κυκλικά την ακολουθία.

$$\{1,-1,2,3,0,0\} \longrightarrow \{2,3,0,0,1,-1\}$$

(36) Να βρεθεί ο ΔΜF N-σημείων της $x(n)=4+\cos^2\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$

$$x(n) = 4+\cos^2\left(\frac{2\pi n}{N}\right) = 4+\left(\frac{e^{j\left(\frac{2\pi}{N}n\right)}+e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}n\right)}}{2}\right)^2 =$$

$$= 4+\left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}n}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}{2}\right)^2+\cancel{2}\,\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}n}}{\cancel{2}}\cdot\frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}{2} =$$

$$= 4+\frac{e^{2j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}}{4}+\frac{e^{-2j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}}{4}+\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}n}\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}{2} =$$

$$= 4+\frac{e^{j\frac{4\pi}{N}n}}{4}+\frac{e^{-j\frac{4\pi}{N}n}}{4}+\frac{1}{2} = \frac{9}{2}+\frac{e^{j\frac{4\pi}{N}n}}{4}+\frac{e^{-j\frac{4\pi}{N}n}}{4} =$$

$$= \frac{1}{N}\left[N\frac{9}{2}+N\frac{1}{4}e^{j\frac{4\pi}{N}n}+N\cdot\frac{1}{4}e^{-j\frac{4\pi}{N}n}\right]$$

Άρα $X(k)=\begin{cases} 9/2\cdot N & ,\ k=0 \\ 1/4\, N & ,\ k=2 \text{ και } k=N-2 \\ 0 & ,\ \text{αλλού} \end{cases}$

37) Είναι $x(n)=\delta(n)+\delta(n-5)\cdot 2$

α) Να βρεθεί ο ΔΜΕ 10 σημείων της $x(n)$

$$X(k)=1+2\cdot 1\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 5k}$$

διότι $\delta(n) \xleftrightarrow{\text{ΔΜF}} 1$

$$\delta(n-5) \leftrightarrow 1\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0 k} = e^{-j\frac{2\pi}{10}\cdot 5k} = e^{-j\pi k}$$

ροτί $x(n-n_0) \xleftrightarrow{\text{ΔΜF}} e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0 k}\cdot X(k)$

Άρα $X(k)=1+2e^{-j\pi k}$

Είναι $e^{-j\pi k}=\cos\pi k - j\sin\pi k = \cos\pi k \begin{cases} 1, & k=\text{άρτιος} \\ -1, & k=\text{περιττός} \end{cases}$

Δηλαδή $X(k)=1+2\cdot(-1)^k$

β) Να βρεθεί η ακολουθία $w(n)$ που έχει τον ΔΜΕ $w(k)=e^{j2k\frac{2\pi}{10}}\cdot X(k)$

Είναι $Y(k)=e^{j2k\frac{2\pi}{10}}\cdot X(k)=e^{-j\frac{2\pi}{10}(-2)k}\cdot X(k)$

Δηλαδή $y(n)=x(n+2)$

38) Έστω ότι διαθέτουμε πρόγραμμα που υπολογίζει το ΔΜF μιας μιγαδικής ακολουθίας $x(n)$. Πώς μπορούμε με τη βοήθεια του προγράμματος αυτού να υπολογίσουμε την $x(n)$ μιας ακολουθίας $X(k)$.

Είναι $x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cdot W_N^{-n\cdot k}$

και $W_N^{-nk}=e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\cos\frac{2\pi}{N}nk+j\sin\frac{2\pi}{N}nk$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ

Χρησιμοποιείται για το σχεδιασμό ψηφιακών IIR φίλτρων.

- Ξεκινάμε από ένα αναλογικό IIR φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_k s^k}{1 + a_1 s + \ldots + a_L s} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \ldots + \frac{A_L}{s - s_L},$$

όπου $s_1, s_2, \ldots, s_L$ οι πόλοι.

- Με L^{-1} η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = \left(A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t} + \ldots + A_L \cdot e^{s_L t}\right) u(t)$$

- Για να δημιουργήσουμε κρουστική απόκριση διακριτού χρόνου που να έχει χαρακτηριστικά όμοια με της $h(t)$, δειγματοληπτούμε την $h(t)$ με T_s ώστε:

$$h(n) = T_s \cdot h(n \cdot T_s) = T_s \cdot \left(A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \ldots + A_L e^{s_L t}\right) u(n).$$

Η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης παραβλέπει το φαινόμενο αναδίπλωσης συχνότητας, προκειμένου να βρει την αντιστοιχία μεταξύ αναλογικών και ψηφιακών συχνοτήτων. Ενώ ισχύει:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(j \frac{\omega + 2\pi n}{T_s}\right),$$

η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης είναι:

$$H(e^{j\omega}) = H\left(\frac{j\omega}{T_s}\right)$$

Από τη σχέση αυτή η αντιστοιχία αναλογικών και ψηφιακών συχνοτήτων είναι: $\boxed{\Omega = \frac{\omega}{T_s}}$

Τελικά η συνάρτηση μεταφοράς που αντιστοιχεί στην κρουστική απόκριση $h(n)$ είναι η

$$H(z) = \frac{T_s \cdot A_1}{1 - z^{-1} \cdot e^{s_1 T_s}} + \ldots + \frac{T_s \cdot A_L}{1 - z^{-1} \cdot e^{s_L T_s}} \quad (1)$$

ΒΗΜΑΤΑ ΜΕΘΟΔΟΥ

① Σχεδιάζουμε ένα αναλογικό φίλτρο με τις ίδιες προδιαγραφές, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\Omega = \frac{1}{T_s}$

② Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει αναλύεται σε απλά κλάσματα.

③ Χρησιμοποιώντας την ① βρίσκουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του ψηφιακού φίλτρου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Βασική ιδιότητα της μεθόδου της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης είναι ότι το τελικό φίλτρο που προκύπτει είναι ανεξάρτητο της περιόδου δειγματοληψίας. Συνεπώς, μπορούμε να επιλέξουμε $T_s = 1$. Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι η γραμμική αντιστοίχιση ψηφιακών και αναλογικών συχνοτήτων μέσω του $\Omega = \frac{\omega}{T_s}$, ενώ το μειονέκτημα είναι ότι παραβλέπει το φαινόμενο αναδίπλωσης της συχνότητας με αποτέλεσμα τη μη ακριβή ικανοποίηση των προδιαγραφών

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

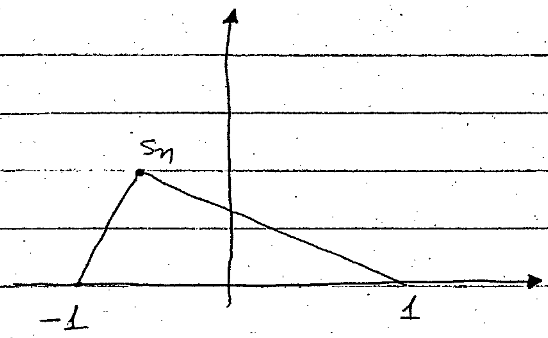
Η μέθοδος του διγραμμικού μετασχηματισμού δεν έχει τα μειονεκτήματα της μεθόδου της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης. Ο μετασχηματισμός που εφαρμόζεται και ικανοποιεί τα βασικά χαρακτηριστικά των IIR φίλτρων είναι ο διγραμμικός και δίνεται από τη σχέση:

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει είναι η

$$H(z) = H_a\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

Αν υποθέσουμε ότι οι πόλοι του αναλογικού φίλτρου βρίσκονται στο αρνητικό ημιεπίπεδο (δηλαδή το αναλογικό φίλτρο είναι ευσταθές).
Τότε όπως προκύπτει από το σχήμα,
ο λόγος των δύο αποστάσεων
είναι μικρότερος του 1,
με αποτέλεσμα $|z_n| < 1$.
Άρα και το ψηφιακό φίλτρο είναι ευσταθές.



Η αντιστοίχηση μεταξύ αναλογικής και ψηφιακής συχνότητας που προκύπτει μέσω του διγραμμικού μετασχηματισμού, θέτοντας $s = j\Omega$ και $z = e^{j\omega}$ στον τύπο $s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ είναι:

$$\Omega = \tan\frac{\omega}{2}$$

[illegible]

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ

Ντετερμινιστικό σήμα: είναι αυτό για το οποίο δεν υπάρχει καμία αβεβαιότητα όσον αφορά στην τιμή του σε κάθε χρονική στιγμή. Άρα τα ντετερμινιστικά σήματα μπορούν να αναπαρασταθούν ως πλήρως καθορισμένες συναρτήσεις του χρόνου.

Στοχαστικό ή τυχαίο σήμα: είναι αυτό για το οποίο υπάρχει κάποιος βαθμός αβεβαιότητας, προτού καν εμφανιστεί.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

Στατιστική 1ης τάξης ενός στοχαστικού σήματος: είναι το ντετερμινιστικό σήμα που προκύπτει παίρνοντας το στοχαστικό μέσο όρο σε κάθε χρονική στιγμή.

Δηλαδή $\tilde{x}_n = E\{x_n(\theta)\}$ ή $\tilde{x} = E\{x(t,\theta)\}$

Στοχαστικό σήμα διακριτού χρόνου: $x_n(\theta)$

Στοχαστικό σήμα συνεχούς χρόνου: $x(t,\theta)$

Στατιστική 2ης τάξης ενός στοχαστικού σήματος: αποτελεί η συσχέτιση του σήματος με τον εαυτό του σε 2 διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Πιο συγκεκριμένα ορίζονται 2 συναρτήσεις:

α) η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης που δείχνει τη συσχέτιση μιας ακολουθίας με τον εαυτό της σε 2 διαφορετικές στιγμές χρονικές, δηλαδή $R_{xx}(n_1,n_2)$ ή $R(n_1,n_2)$ ισούται με

$$R_x(n_1,n_2) = E\{(x_{n_1}(\theta)-\tilde{x}_1)\cdot(x_{n_2}(\theta)-\tilde{x}_2)\}$$

$$R_x(t_1,t_2) = E\{(x(t_1,\theta)-\tilde{x}(t_1))\cdot(x(t_2,\theta)-\tilde{x}(t_2))\}$$

β) η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης που δείχνει πως συσχετίζονται μεταξύ τους 2 διαφορετικά σήματα σε 2 διαφορετικές χρονικές στιγμές.

$R_{xy}(n_1, n_2) = E\{(x_{n1}(\theta) - \tilde{x}_{n1}) \cdot (y_{n2}(\theta) - \tilde{y}_{n2})\}$: διακριτού χρόνου

$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{(x(t_1, \theta) - \tilde{x}(t_1)) \cdot (y(t_2, \theta) - \tilde{y}(t_2))\}$: συνεχούς χρόνου

ΛΕΥΚΟΣ ΘΟΡΥΒΟΣ

Ένα στοχαστικό σήμα ονομάζεται **λευκός θόρυβος** όταν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισής του είναι της μορφής:

$R_x(n_1, n_2) = R_x(n_1, n) \cdot \delta(n_1 - n_2)$: διακριτού χρόνου

$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_1) \cdot \delta(t_1 - t_2)$: συνεχούς χρόνου

Στο λευκό θόρυβο τα δείγματα συσχετίζονται μόνο με τον εαυτό τους και είναι ασυσχέτιστα με τα δείγματα οποιασδήποτε άλλης χρονικής στιγμής.

Η ετεροσυσχέτιση του θορύβου με οποιοδήποτε άλλο σήμα είναι 0:

$R_{x\omega} = 0$

ΑΣΘΕΝΩΣ ΣΤΑΣΙΜΟ ΣΗΜΑ

Ένα σήμα ονομάζεται **ασθενώς στάσιμο σήμα 1ης τάξης** όταν ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$\tilde{x}_n = E\{x_n(\theta)\} = \tilde{x},$$

δηλαδή όταν ο στοχαστικός μέσος όρος είναι μια σταθερά ανεξάρτητη του χρόνου.

• Μια συνάρτηση $x(\theta)$ από το θ στους πραγματικούς ονομάζεται **μετρήσιμη ή τυχαία μεταβλητή** αν για κάθε πραγματικό x το σύνολο $A_x = \{\theta : x(\theta) \leq x\} \in F$ (όπου το F περιέχει όλα τα δυνατά σύνολα στα οποία μπορούμε να δώσουμε πιθανότητα). Δηλαδή το A_x είναι ένα γεγονός.

• **Ασθενώς στάσιμο 2ης τάξης:** όταν είναι ασθενώς στάσιμο 1ης τάξης και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ικανοποιεί τη σχέση:

$$R_x(n_1, n_2) = R_x(n_2 - n_1) = E\{(x_{n1}(\theta) - \tilde{x}_{n1})(x_{n2}(\theta) - \tilde{x}_{n2})\},$$

δηλαδή η αυτοσυσχέτιση του σήματος σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές εξαρτάται μόνο από τη διαφορά των χρονικών στιγμών.

• Όταν το σήμα είναι ασθενώς στάσιμο 1ης τάξης με αποτέλεσμα ο στοχαστικός μέσος όρος να είναι κοινός σε κάθε χρονική στιγμή, τότε τα στάσιμα σήματα που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\tilde{x} = \lim_{k \to \infty} \frac{x_1(\theta) + x_2(\theta) + \ldots + x_k(\theta)}{k}$$

λέγονται **εργοδικά** 1ης τάξης.

• Για τα εργοδικά σήματα 2ης τάξης ισχύει:

$$R_x(k) = R_x(n+k-n) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k} (x_n(\theta) - \tilde{x}) \cdot (x_{k+n}(\theta) - \tilde{x})$$

Παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, όταν έχουμε εργοδικότητα, είναι αρκετό μόνο ένα σήμα.

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΣΗΜΑ ΣΑΝ ΕΙΣΟΔΟΣ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Έστω στοχαστικό σήμα $x_n(\theta)$, το οποίο είναι είσοδος σε ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση h_n. Η έξοδος του (Σ) είναι επίσης στοχαστικό σήμα που δίνεται από τον τύπο:

$$y_n(\theta) = h_n * x_n(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_n \cdot x_{n-k}(\theta)$$

$$(\text{στοχαστικό})\ x_n(\theta) \longrightarrow \underbrace{\boxed{h_n}}_{\text{ντετερμινιστικό}} \longrightarrow y_n(\theta)\ (\text{στοχαστικό})$$

Η h_n είναι ντετερμινιστική ακολουθία σε αντίθεση με την είσοδο και την έξοδο που είναι στοχαστικές διαδικασίες.

Ας υποθέσουμε ότι το $x_n(\theta)$ είναι μηδενικής μέσης τιμής και ασθενώς στάσιμο 2ης τάξης με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_x(n)$ και πυκνότητα φάσματος $\Phi_x(e^{j\omega})$

$$F\{R_x(n)\} = \Phi_x(e^{j\omega})$$

$$\Phi_Y(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \cdot \Phi_x(e^{j\omega})$$

• **Τυχαία μεταβλητή:** Μία συνάρτηση $x(\theta)$ από το θ στους πραγματικούς αριθμούς θα ονομάζεται μετρήσιμη ή τυχαία μεταβλητή αν για κάθε πραγματικό x το σύνολο $A_x = \{\theta : x(\theta) \leq x\} \in F$ (όπου F περιέχει όλα τα δυνατά σύνολα στα οποία μπορούμε να δώσουμε πιθανότητα), δηλαδή το A_x είναι ένα γεγονός.

• **Μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης:** Αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα μοντέλα στοχαστικών διαδικασιών. Μία διαδικασία $y_n(\theta)$ ονομάζεται διαδικασία αυτοπαλινδρόμησης L όταν πρόκειται για την έξοδο ενός IIR φίλτρου της μορφής:

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 \cdot z^{-1} - \ldots - a_L \cdot z^{-L}}$$

με είσοδο λευκό θόρυβο.
Αν $w_n(\theta)$ είναι μία ακολουθία λευκού θορύβου, τότε η έξοδος του φίλτρου $y_n(\theta)$ ικανοποιεί την αναδρομή:

$$y_n(\theta) = a_1 \cdot y_{n-1}(\theta) + \ldots + a_L \cdot y_{n-L}(\theta) + w_n(\theta)$$

Το φίλτρο είναι ευσταθές, δηλαδή οι πόλοι του ανήκουν στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

ΦΙΛΤΡΑΡΙΣΜΑ

Δίνεται το σήμα $s_n(\theta)$. Όταν το σήμα αυτό διέρχεται μέσα από κάποιο φίλτρο προστίθεται λευκός θόρυβος από το φίλτρο με αποτέλεσμα η έξοδος να αλλοιώνεται.

$$s_n(\theta) \longrightarrow \boxed{\text{φίλτρο}} \longrightarrow \hat{s}_n(\theta)$$

Το $\hat{s}_n(\theta)$ αποτελεί εκτίμηση του αρχικού σήματος $s_n(\theta)$ και ισχύει ότι το $\hat{s}_n(\theta)$ είναι προσέγγιση του $s_n(\theta)$.
Ο υπολογισμός του σφάλματος γίνεται με τη βοήθεια του
ΜΕΣΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ: $E\{|s_n(\theta)-\hat{s}_n(\theta)|^2\}$

ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ WIENER

Ας θεωρήσουμε ότι τα $s_n(\theta)$, $x_n(\theta)$ είναι από κοινού ασθενώς

καθαρή πληροφορία — σήμα εισόδου

στάσιμα με μέση τιμή 0 και γνωστές στατιστικές 2ης τάξης.
$R_s(n)$, $R_{sx}(n)$, $R_x(n)$.
Ισχύει το εξής:

$$x_n(\theta) \longrightarrow \boxed{\text{φίλτρο}} \longrightarrow \hat{s}_n(\theta),$$

όπου $x_n(\theta) = s_n(\theta) + w_n(\theta)$
και $x_n(\theta)$: σήμα εισόδου στο φίλτρο
$s_n(\theta)$: καθαρή πληροφορία που περιέχεται στο σήμα εισόδου
$w_n(\theta)$: ο θόρυβος που προστίθεται απ' το φίλτρο

Ισχύει η εξής βασική σχέση:

$$R_{xs}(l) = h_n * R_x(l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cdot R_x(l-k)$$ ΕΞΙΣΩΣΗ WIENER-HOPF

• Δύο σήματα ονομάζονται από κοινού ασθενώς στάσιμα 2ης τάξης όταν είναι ασθενώς στάσιμα 2ης τάξης και επιπλέον η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης ικανοποιεί τη σχέση.

Παίρνοντας ΜF και στα 2 μέρη της εξίσωσης προκύπτει ότι η απόκριση συχνότητας του βέλτιστου μη-αιτιατού φίλτρου Wiener ισούται με:

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{\Phi_{xs}(e^{j\omega})}{\Phi_x(e^{j\omega})}} \quad (1)$$

Το φίλτρο που έχει αυτή την απόκριση συχνότητας ονομάζεται φίλτρο Wiener.

$x_n(\theta) = s_n(\theta) + w_n(\theta)$ κι επειδή ο θόρυβος και η καθαρή πληροφορία είναι ασυσχέτιστα σήματα προκύπτουν οι ακόλουθες βασικές σχέσεις:

(1) $R_{xs}(n) = R_s(n) \Longrightarrow \Phi_{xs}(e^{j\omega}) = \Phi_s(e^{j\omega})$

(2) $R_x(n) = R_s(n) + R_w(n) \Longrightarrow \Phi_x(e^{j\omega}) = \Phi_s(e^{j\omega}) + \Phi_w(e^{j\omega})$

(3) $R_{sw}(n) = 0$

Η σχέση (1) τροποποιείται ως εξής:

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{\Phi_s(e^{j\omega})}{\Phi_s(e^{j\omega}) + \Phi_w(e^{j\omega})}} \quad (2)$$

Απόκριση Συχνότητας βέλτιστου μη-αιτιατού φίλτρου Wiener

Πυκνότητα φάσματος εξόδου (ΜF της $R_{\hat{s}}(n)$)

$$\Phi_{\hat{s}}(e^{j\omega}) = \left[\frac{\Phi_s(e^{j\omega})}{\Phi_s(e^{j\omega})+\Phi_W(e^{j\omega})}\right] \cdot \Phi_X(e^{j\omega})$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: 1) Όταν το σήμα πληροφορίας είναι πολύ ισχυρότερο του θορύβου, δηλαδή $\Phi_s(e^{j\omega}) \gg \Phi_W(e^{j\omega})$, τότε $\Phi_{\hat{s}}(e^{j\omega}) \approx \Phi_s(e^{j\omega})$, δηλαδή το φίλτρο επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων (μικρή αλλοίωση).

2) Όταν ο θόρυβος είναι πολύ ισχυρότερος του σήματος πληροφορίας $\Phi_s(e^{j\omega}) \ll \Phi_W(e^{j\omega})$, τότε $\Phi_{\hat{s}}(e^{j\omega}) = 0$ (το φίλτρο κόβει συχνότητες).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Όταν πληροφορία και θόρυβος δεν έχουν επικαλυπτόμενες συχνοτικές ζώνες, δηλαδή ισχύει η βασική υπόθεση, τότε το βέλτιστο φίλτρο Wiener είναι της μορφής 01, κόβει και περνάει.

ΑΙΤΙΑΤΟ FIR ΦΙΛΤΡΟ WIENER

Θεωρούμε ότι το φίλτρο είναι αιτιατό κι έχει γραμμική φάση, δηλαδή $\hat{s}_n(\theta) = h_n * x_n(\theta) = \sum_{k=0}^{L-1} h_k \cdot x_{n-k}(\theta) =$

$$= h_0 \cdot x_n(\theta) + h_1 \cdot x_{n-1}(\theta) + \dots + h_{L-1} x_{n-L+1}(\theta) = H_L^T \cdot x_n^T(\theta)$$

όπου $H_L^T = \{h_0, h_1, \dots, h_{L-1}\}$

και $x_n^T(\theta) = \{x_n(\theta), x_{n-1}(\theta), \dots, x_{n-L+1}(\theta)$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι: $E\{(s_n(\theta) - \hat{s}_n(\theta))^2\} =$

$$= E\{[s_n(\theta) - H_L^T \cdot x_n^T(\theta)]^2\} = E\{[s_n(\theta) - h_0 \cdot x_n(\theta) \dots]\}$$

Για να βρούμε τους βέλτιστους συντελεστές του αιτιατού φίλτρου Wiener υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ως προς τους συντελεστές h_i και θέτοντας τη μερική παράγωγο ίση με μηδέν προκύπτει η μέση τιμή

$$E\{x_{n-\ell}(\theta) \cdot s_n(\theta)\} = \sum_{k=0}^{L-1} h_k \cdot E\{x_{n-\ell}(\theta) \cdot x_{n-k}(\theta)\}$$

και το (2) γράφεται με τη μορφή μητρώων ως εξής:

$$E\{x_n(\theta) \cdot s_n(\theta)\} = E\{x_n(\theta) \cdot x_n^T(\theta)\} \cdot H_L^T$$

ή ισοδύναμα γράφεται ως εξής (ο τελευταίος τύπος)

$$\begin{bmatrix} R_{xs}(0) \\ R_{xs}(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ R_{xs}(L-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x(0) & \cdots & R_x(L-1) \\ R_x(1) & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ R_x(L-1) & & R_x(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{L-1} \end{bmatrix}$$

μητρώο ετεροσυσχέτισης — μητρώο αυτοσυσχέτισης Toeplitz — μητρώο κρουστικής απόκρισης

[illegible]

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible]

[illegible]
[illegible]