Κεφ. 1

Το σήμα αποτελείται από πληροφορία και θόρυβο

Βασικός στόχος της ψηφιακής επεξεργασίας είναι να αποκοπεί τελείως το θόρυβο και να διατηρεί την πληροφορία.

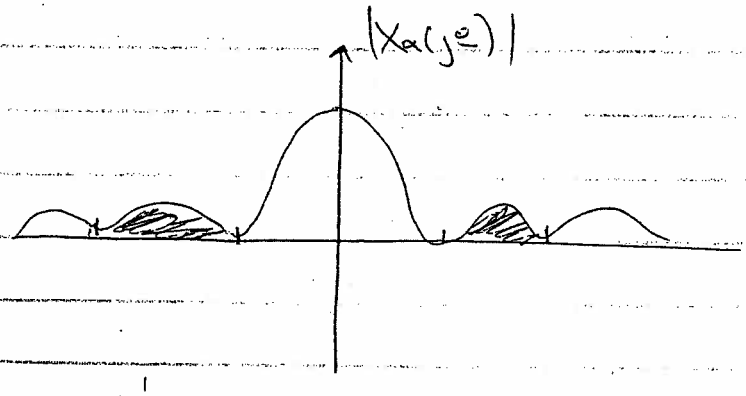
Βασική Υπόθεση: Πληροφορία και θόρυβος δεν έχουν κοινές συχνότητες (διαχωρίζονται χάρη στις συχνότητες τους).

σήμα, πληροφορία, θόρυβος

$$x_a(t) = s_a(t) + n_a(t)$$

$\downarrow$ MF

$$X_a(j\Omega) = S_a(j\Omega) + N_a(j\Omega)$$



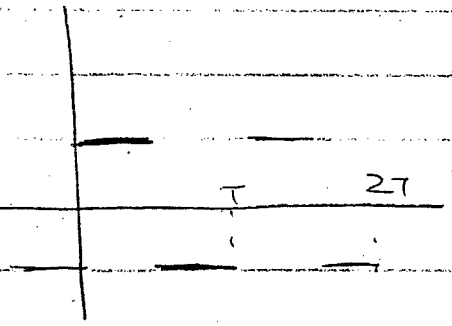
Σήμα αναλογικό: Παίρνει τιμές από ένα σύνολο σε διαφορές χρονικές στιγμές

Σήμα διακριτό (ψηφιακό): Παίρνει τιμές σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές

Αναλογικό $\xrightarrow{\text{Δειγματοληψία}}$ Ψηφιακό

Ψηφιακό $\xrightarrow{\text{Ανακατασκευή}}$ Αναλογικό

Κεφ. 2



Αναλογικό σήμα

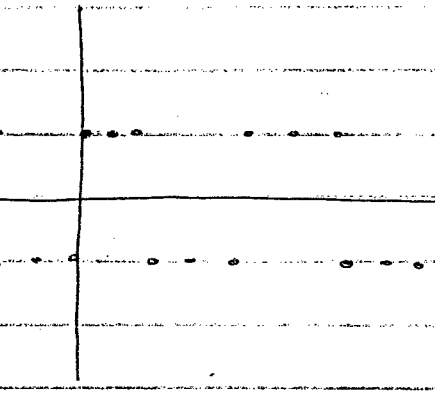
$0 \le T < \infty$

$0 < f = 1/T < \infty$

$0 < \Omega = 2\pi f < \infty$

$-\infty < \Omega < \infty$

$-\infty < f < \infty$



Ψηφιακό σήμα

$2 \le N < \infty$

$0 \le \lambda = 1/N < 1/2$

$0 \le \omega = 2\pi\lambda \le \pi$

Ο ΜΕ επιτρέπει τη χρήση αρνητικές συχνότητες

$-1/2 \le \lambda \le 1/2$

$-\pi \le \omega \le \pi$

Η δημιουργία συχνοτήτων οφείλεται στην εναλλαγή των τιμών από θετικές σε αρνητικές τιμές. Στο συνεχές χρόνο μπορούμε να έχουμε εναλλαγή όσο μικρή και αν είναι η περίοδος.

Στα ψηφιακά σήματα, η μικρότερη περίοδος N για να δημιουργηθεί εναλλαγή από θετικές σε αρνητικές τιμές είναι $N=2$.

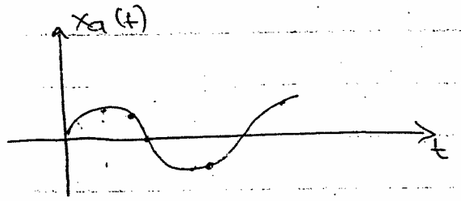
Διαδικασία Δειγματοληψίας

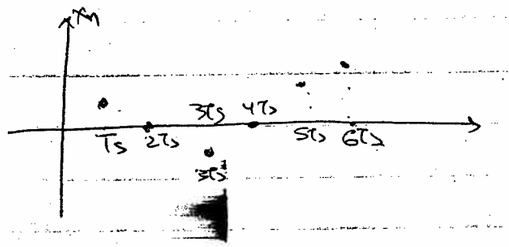
Αν $x_a(t) \longrightarrow$ αναλογικό σήμα που θέλω να δειγματοληπτήσω σε nT_s χρονικές στιγμές δημιουργώ το

$x_n = x_a(nT_s)$

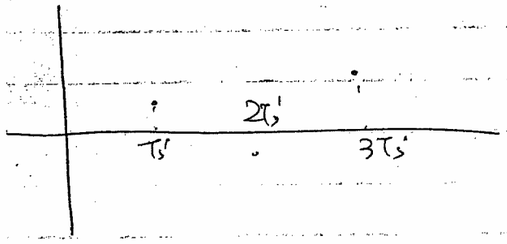
T_s: περίοδος δειγματοληψίας (ανά πόσο χρονικό διάστημα παίρνω δείγματα)

$f_s = 1/T_s$: συχνότητα δειγματοληψίας

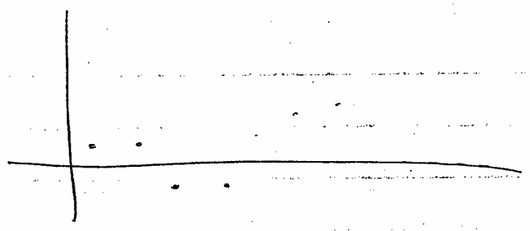




$T_s' > T_s$



$T_s'' < T_s$



Η σχέση μεταξύ της συχνότητας f του αναλογικού σήματος και της συχνότητας λ του σήματος μετά τη δειγματοληψία είναι:

$$!!\ \boxed{f = \lambda \cdot f_s} = \frac{\lambda}{T_s}$$

$$-1/2 \le \lambda \le 1/2$$
$$-f_s/2 \le \lambda f_s \le f_s/2$$
$$-f_s/2 \le f \le f_s/2$$

Οι συχνότητες του $x_a(t)$ δεν μπορούν να υπερβαίνουν το μισό της συχνότητας δειγματοληψίας

$$\cos x = \cos(x + 2\pi k)$$

Ο αρχικός διαχωρισμός των συχνοτήτων ζωνών του αναλογικού σήματος δε διατηρείται απαραίτητα και στο σήμα που παράγεται μετά από τη δειγματοληψία. Συχνότητες ζώνες φυσικά υπάρχουσες στο αναλογικό σήμα στο ψηφιακό είναι δυνατόν να επικαλύπτονται.

Δύο διαφορετικά αναλογικά ημιτονικά σήματα είναι δυνατό να έχουν αρμόνιες την ίδια δειγματοληψία. Δεν υπάρχει λοιπόν αντιστοιχία 1-1.

$x_a(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ $\qquad$ $y_a(t) = \cos(2\pi(f_0 + l f_s)t + \phi)$

$x_n = x_a(nT_s)$ $\qquad$ $y_n = y_a(nT_s) =$

$= \cos(2\pi f_0 n T_s + \phi)$

$= \cos(2\pi(f_0 + l f_s) n T_s + \phi)$

$= \cos(2\pi f_0 n T_s + 2\pi l n \underbrace{f_s T_s}_{1} + \phi)$

$= \cos(2\pi f_0 n T_s + 2\pi l n + \phi)$

$= \cos(2\pi f_0 n T_s + \phi)$

$= x_n$

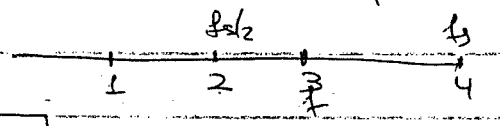
Δύο διαφορετικά αναλογικά σήματα που οι συχνότητες τους διαφέρουν κατά ακέραια πολλαπλάσια της f_s έχουν το ίδιο ψηφιακό σήμα μετά τη δειγματοληψία.

Έστω f η συχνότητα του αναλογικού σήματος και f_s η συχνότητα δειγματοληψίας.

1. $f < f_s/2$ ✓.

2. $f > f_s/2$ αλλα $f < f_s$

f' : παιρνω την κατοπτρικη της f ως προς $f_s/2$



$$\boxed{f' = f_s - f}$$

3. $f > f_s/2$ και $f > f_s$

$f = 3$

$f_s = 1,8$

$f' : f - k \cdot f_s$ → αφαιρω απο την f οσα ακεραια πολλαπλασια της f_s

$f' > f_s/2$ (2)

$f' < f_s/2$ ✓

Η διαδικασια αυτη γινεται για να αποφυγουμε το φαινομενο της αναδιπλωσης της συχνοτητας. Επρεπε συμβαινει οταν $f > f_s/2$.

Αλλα χανουμε σε πληροφορια.

Άσκηση 1

Έστω $x_n = \cos\left(2\pi \frac{k}{\mu} n\right)$ όπου k, μ πρώτοι μεταξύ τους. Να βρεθεί η ακέραιη που εξαρτάται η περιοδικότητα του σήματος.

Λύση

$$x_n = x_{n+N} \qquad \cos x = \cos y$$

$$\cos\left(2\pi \frac{k}{\mu} n\right) = \cos\left(2\pi \frac{k}{\mu}(n+N)\right) \qquad x = 2\lambda\pi \pm y$$

$$2\pi \frac{k}{\mu}(n+N) = 2\lambda\pi \pm 2\pi \frac{k}{\mu} n$$

$$\frac{k}{\mu} n + \frac{k}{\mu} N = \lambda \pm \frac{k}{\mu} n$$

(+)

$$\cancel{\frac{k}{\mu} n} + \frac{k}{\mu} N = \lambda + \cancel{\frac{k}{\mu} n}$$

$$\lambda = \frac{kN}{\mu} \in Z$$

Πρέπει το μ να διαιρεί το N.

(−)

$$\frac{k}{\mu} n + \frac{k}{\mu} N = \lambda - \frac{k}{\mu} n$$

$$2\frac{k}{\mu} n + \frac{k}{\mu} N = \lambda$$

$$\lambda = \frac{(2n+N)k}{\mu}$$

$$\lambda \in Z$$

Πρέπει το μ να διαιρεί το $2n+N$ που δεν ισχύει $\forall n$

Άσκηση 2

Δώστε παράδειγμα δειγματοληψίας περιοδικού αναλογικού σήματος το οποίο να καταλήγει σε περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου.

ΥΣΗ

$x_a(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

Το δείγματοληπτώ με T_s $\quad t \to n T_s$

$x_n = \cos(2\pi f_0 u T_s)$

Για να είναι περιοδικό πρέπει: $\quad u \to n+N$

$$\boxed{x_n = x_{n+N}}$$

$\cos(2\pi f_0 n T_s) = \cos(2\pi f_0 (n+N) T_s)$

$\cancel{2\pi} f_0 (n+N) T_s = \cancel{2\pi} \lambda \pm \cancel{2\pi} f_0 n T_s$

$f_0 n T_s + f_0 N T_s = \lambda \pm f_0 n T_s$

(+)

$\cancel{f_0 n T_s} + f_0 N T_s = \lambda + \cancel{f_0 n T_s}$

$\lambda = f_0 N T_s \to \frac{1}{f_s}$

$\frac{f_0}{f_s} = \frac{\lambda}{N} \in Z$

(−)

$f_0 n T_s + f_0 N T_s = \lambda - f_0 n T_s$

$2 f_0 n T_s + f_0 N T_s = \lambda$

$(2n + N)\frac{f_0}{f_s} = \lambda$

$\frac{f_0}{f_s} = \frac{\lambda}{2n+N} \in Z$

Άρα το σήμα το ψηφιακό είναι περιοδικό αν $f_s \in Z$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω ψηφιακό σήμα που προκύπτει από δείγματοληψία αναλογικού σήματος που είναι υπ. συνδυασμός 3 ημιτονικών σημάτων με

$\lambda_1 = 0.15, \quad \lambda_2 = 0.2, \quad \lambda_3 = 0.4$

Αν $f_s = 8\,kHz$ ποιες είναι οι αναλογικές συχνότητες του σήματος f_1, f_2, f_3

Άσκηση 4

Έστω αναλογικό σήμα:

$$x_a(t) = 1{,}2\cos(3{,}2\pi t + 0{,}2\pi) + 0{,}8\sin(6{,}2\pi t + 0{,}7\pi)$$

Να υπολογίσετε το σήμα διακριτού χρόνου που προκύπτει από δειγματοληψία με $T_s = 1$.

Άσκηση 5 (Θέμα 1α – Ιανουάριος '10)

$$x(t) = \cos(5t)\cdot\cos t - \frac{1}{2}\cos 4t \qquad \cos a\cdot\cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$$

$$= \frac{1}{2}\cos(5+1)t + \frac{1}{2}\cos(5-1)t - \frac{1}{2}\cos 4t$$

$$= \frac{1}{2}\cos 6t + \cancel{\frac{1}{2}\cos 4t} - \cancel{\frac{1}{2}\cos 4t}$$

$$= \frac{1}{2}\cos 6t$$

$$\Omega = 6 \Rightarrow 2\pi f = 6 \Rightarrow f = \frac{3}{\pi}$$

Άρα $f_s > 2f \Rightarrow f_s > \frac{6}{\pi}$

Σεπτ. '06 – Θέμα 1α.

Άσκηση 6 (Θ' Θέμα 1b – Ιανουάριος '10)

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right) \qquad f_s = 50\,kHz$$

$$x_1(t) = \cos(2\pi f_0 t) \qquad 2\pi\lambda = \frac{\pi}{8} \qquad f_0 = \lambda f_s$$

$$= \cos\left(2\pi \frac{50\cdot 10^3}{16} t\right) \qquad \lambda = \frac{1}{16} \qquad = \frac{50\cdot 10^3}{16}$$

$$x_2(t) = \cos\left(2\pi\left(\frac{50\cdot 10^3}{16} + 100\cdot 10^3\right)t\right)$$

Θέμα 1α – Ιανουάριος '08.

Άσκηση 7 (Θέμα 1d - Ιανουάριος '10)

$x(t) \rightarrow f_s$

$x(2t) \rightarrow ?$

$x(t) \xrightarrow{MF} X(j\Omega)$

$y(t) = x(2t) \xrightarrow{MF} Y(j\Omega)$

$$Y(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(2t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$$

$2t \rightarrow \tau$.
$t \rightarrow \tau/2$
$dt \Rightarrow d\tau/2$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\Omega \tau/2}\, \frac{d\tau}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j(\frac{\Omega}{2})\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2} X(j\Omega/2)$$

$\Omega \rightarrow \Omega/2$

$2\pi f_1 = 2\pi f/2$

$f_1 = f/2$

$\boxed{f_s = f_s'/2}$

Θέμα 1c - Σεπτ' 06.

Θέμα 1b - Σεπτ' 09

Ασκηση 8 (Θεμα 1 - Ιουλιος '09 / Θεμα 1α - Σεπτ' 09)

1. $x_0(t) = \cos(2\pi 100 t)$ ✓ ?
2. $x_0(t) = e^{-2t} u(t)$
3. $x_0(t) = F^{-1}\{ u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0) \}$
4. $x_0(t) = F^{-1}\{ F\{z(t)\} [u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)] \}$
5. $x(t) = \begin{cases} 4, & t = 2 \\ 2\cos(100t), & \forall t \neq 2 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

2 Επειδη το σημα μας δεν ειναι περιορισμενης χρονικης διαρκειας, αρα δεν μπορω να βρω καταλληλη συχνοτητα f_s

3. Πρεπει $\omega_s > 2\omega_0$

$2\pi f_s > 2\omega_0$

$f_s > \frac{\omega_0}{\pi}$

4. $\omega_s' > \omega_s + 2\omega_0$

$f_s' > \frac{\omega_s + 2\omega_0}{2\pi}$

5. $f_s > 2f \Rightarrow$ $f = 50/\pi$

$f_s > \frac{100}{\pi}$

1. $f = 100$ $f_s > 200$

Άσκηση 9 (Θέμα 1 - Μαρτίου 2009)

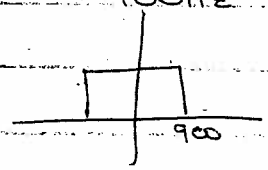
$f_1 = 300Hz$ $f_s = 2000Hz$ $>900Hz$

$f_2 = 400Hz$

$f_3 = 1300Hz$

$f_4 = 3600Hz$

$f_5 = 5000Hz$



$f_s' = f_s$

ΛΥΣΗ

$\frac{f_s}{2} = 1000$

(100) $f_1 < 1000$ ✓

(0) $f_2 < 1000$ ✓

$f_3 > 1000$ & $f_3 < 2000$

$f_3' = 2000 - 1300 = 700 < 1000$ ✓

$f_4 > 1000$ & $f_4 > 2000$

$f_4' = f_4 - 2000 = 3600 - 2000 = 1600 > 1000$

$f_4'' = 2000 - 1600 = 400 < 1000$ ✓

$f_5 > 1000$ & $f_5 > 2000$

$f_5' = 5000 - 2 \cdot 2000 = \boxed{1000}$ → Πέφτει στο φίλτρο → 900

$\lambda_1 = f_1 / f_s = \frac{300}{2000}$ $f_1' = \lambda_1 \cdot f_s = \frac{300}{2000} \cdot 2000 = 300$

$\lambda_2 = 400/2000$ $f_2' = 400$

$\lambda_3 = 700/2000$ $f_3' = 700$

$\lambda_4 = 400/2000$ $f_4' = 400$

$\lambda_5 = 900/2000$ $f_5' = 900$

Θέμα 1 - Ιούλιος 2007

Θεμα 1α - Σεπτ'10.

* Σχεση ΜΕ Αναλ. και Συχνοτ.

Αν $x_a(t) \longrightarrow X_a(j\Omega)$

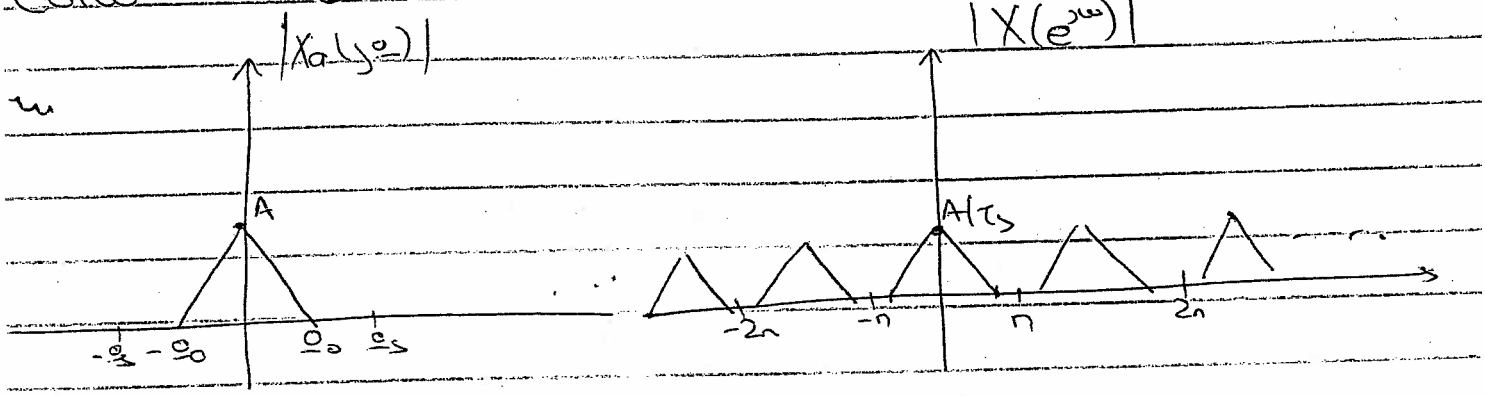
$x_n \longrightarrow X(e^{j\omega})$

$x_n = x_a(nT_s)$

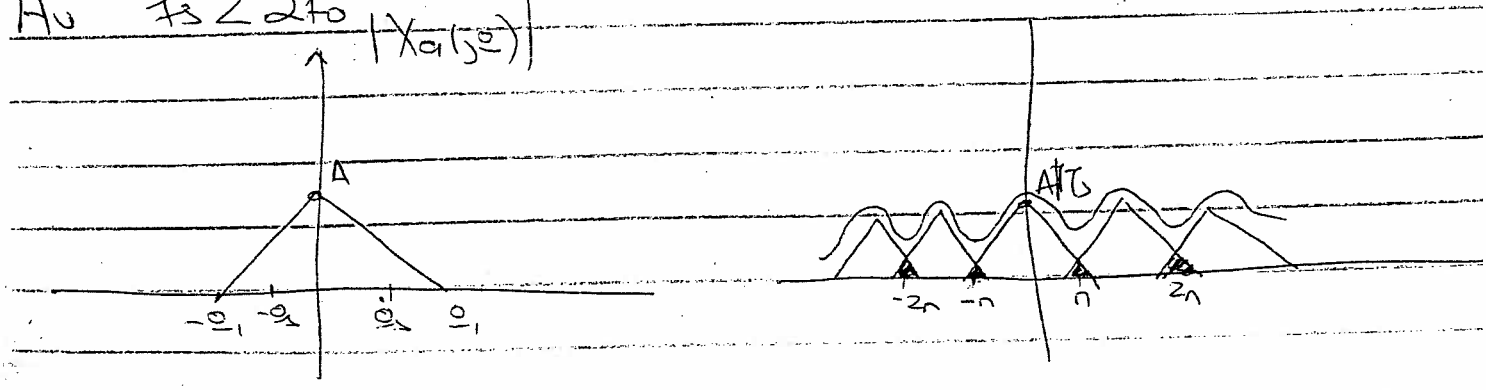
Τοτε: $$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\frac{\omega-2\pi n}{T_s}\right).$$

$$\overset{n=0}{=} \frac{1}{T_s} X_a\left(j\frac{\omega}{T_s}\right)$$

Εστω $f_s > 2f_0$



Αν $f_s < 2f_0$



Θεώρημα Δείγματοληψίας Shannon

Ένα σήμα $x_a(t)$ συνεχούς χρόνου, το οποίο δεν περιέχει συχνότητες $> f_m$, μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως από τα δείγματα του αν $\boxed{f_s \geq 2 f_m}$

Η $\boxed{f_s = 2 f_m}$ ισχύει μόνο για μη πολιτικά σήματα και δέχεται <u>ορίο του Nyquist</u>.

Ειδικές περιπτώσεις

1. $[0 \quad f_m]$ οι συχνότητες του σήματος και χωρίζω ότι στη πληροφορία $[0 \quad f_{\acute{\iota}}]$ και μόνο θόρυβος στο $[f_{\acute{\iota}} \quad f_m]$.
Τότε $f_s \geq 2 f_{\acute{\iota}}$

2. Όταν στη πληροφορία είναι συγκεντρωμένη στο διάστημα $[f_{m_1}, f_{m_2}]$
Τότε: $n_0 = \left\lceil \frac{f_{m_1}}{f_{m_2} - f_{m_1}} \right\rceil$

$$f_s \in \left[\frac{2 f_{m_2}}{n_0+1} \quad \frac{2 f_{m_1}}{n_0}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{2 f_{m_2}}{2} \quad \frac{2 f_{m_1}}{1}\right] \cup [2 f_{m_2} \quad \infty)$$

Άσκηση 10 - Φεβρ. '03 Θέμα 1.
$[8 \quad 10]$ kHz $\quad n_0 = \left\lceil \frac{8}{10-8} \right\rceil = 4$

$$f_s \in \left[\frac{2 \cdot 10}{5} \quad \frac{2 \cdot 8}{4}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{2 \cdot 10}{2} \quad \frac{2 \cdot 8}{1}\right] \cup [2 \cdot 10 \quad \infty) \qquad \boxed{f_s = 4}$$

Διαδικασία Ανακατασκευής

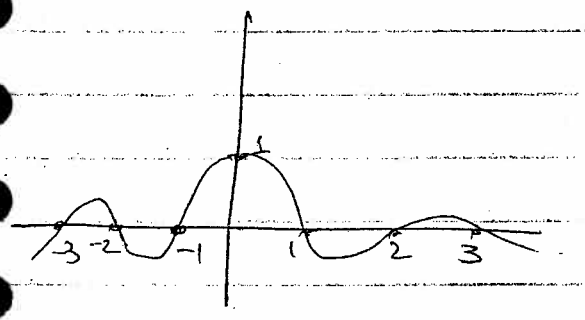
Ψηφιακό ⟶ Αναλογικό

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \, \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right)$$

$\mathrm{sinc}(\tau) = \frac{\sin \pi\tau}{\pi\tau}$

↓

Συνάρτηση δειγματοληψίας

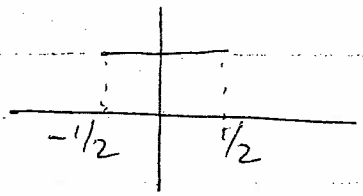


Η συνάρτηση sinc(τ) εκτείνεται σε όλο το αναλογικό διάστημα. Άρα έχει σημασία σε κάθε χρονική στιγμή t/nT_s να συμμετέχουν όλα τα δείγματα στην ανακατασκευή, αφού κάθε δείγμα συνεισφέρει με ένα ποσοστό. Συνεπώς, για να δημιουργήσουμε το αναλογικό σήμα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, πρέπει να καθυστερούν τα δείγματα στη ώστε όλα τα δείγματα είναι διαθέσιμα.

Αντί της sinc(τ) χρησιμοποιώ

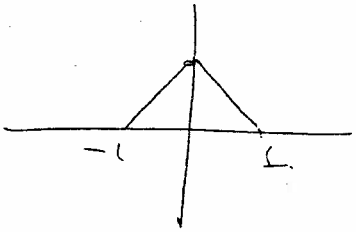
1. Κλιμακωτή συνάρτηση:

$$\phi(\tau) = \begin{cases} 1 & -1/2 \le \tau \le 1/2 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



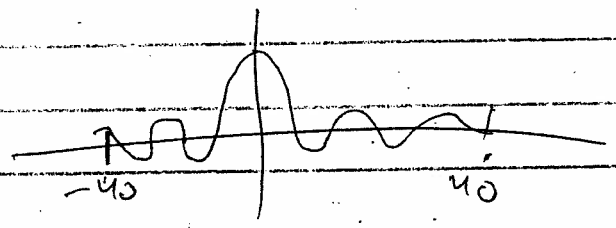
2. Τριγωνική συνάρτηση

$$\phi(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau| & -1 \le \tau \le 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



3 Πεπερασμένο χρόνο sinc

$$\phi(\tau) = \begin{cases} \sin(\tau) & -4_0 \le \tau \le 4_0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Κεφάλαιο 4

Έστω πεπερασμένη ακολουθία x_n μήκους L
$x_0, \dots, x_{L-1}$

Τότε ορίζεται ο Διακριτού χρόνου ΜΕ (DTFT)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\omega n} \qquad \left(X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z \right.$$

Εφόσον η $X(e^{j\omega})$ είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π, αρκεί να απεικονίσω μία περίοδό της. Αν ο τρόπος απεικόνισης είναι ψηφιακός τότε θα πρέπει να δειγματοληπτήσουμε την $X(e^{j\omega})$ σε διακριτές συχνότητες και να απεικονίσουμε τα αντίστοιχα συχνοτικά δείγματα.

ΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΧΡΟΝΙΚΕΝ ΚΑΙ ΣΥΧΝΟΤΙΚΕΝ ΔΕΙΓΜΑΤΕΝ

Αν δειγματοληπτήσω τον ΜΕ μιας πεπερασμένης ακολουθίας L δείγμα με κανονικό τρόπο σε τουλάχιστον L συχνότητες, τότε από τα συχνοτικά δείγματα μπορώ να λάβω τα χρονικά δείγματα και το αντίθετο.

Έστω x_n μήκους L $x_0, \dots, x_{L-1}$

Τα L συχνοτικά σημεία $\omega_k = \frac{2\pi k}{L}$

Ο DTFT $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-jn\omega}$

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-jn\omega_k} = \boxed{\sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\frac{2\pi k n}{L}} = X_k}$$

Διακριτός ΜΕ DFT

Μέσω του αντίστροφου DFT (IDFT) παίρνω από τα συχνοτικά δείγματα τα χρονικά.

$$\boxed{x_n = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} X_k\, e^{j\frac{2\pi kn}{L}}}$$

Αν δειγματοληπτήσω σε $L' > L$ συχνότητες τότε θεωρώ ότι ο DFT μήκους L' αντιστοιχεί σε μία ακολουθία x_n' μήκους L'

$$x_n' = \begin{cases} x_n & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & L \le n \le L'-1 \end{cases}$$

Άσκηση 1

Έστω πεπερασμένη ακολουθία x_n μήκους L και X_k ο DFT της μήκους L

a. Αν $L=2N$ και η x_n είναι συμμετρική $x_n = x_{L-1-n}$ τ.δ.ό $X_{L/2} = 0$

b. Αν $L=2N$ και η x_n είναι αντισυμμετρική $x_n = -x_{L-1-n}$ τ.δ.ό $X_0 = 0$

ΛΥΣΗ

a.

$$X_k = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\frac{2\pi kn}{L}} = \sum_{n=0}^{\frac{L}{2}-1} x_n e^{-j\frac{2\pi kn}{L}} + \overbrace{\sum_{n=L/2}^{L-1} x_n e^{-j\frac{2\pi kn}{L}}}^{n \to L-1-n} =$$

$n \to L/2$

$L-1-n \to L/2$

$n = L-1-L/2 = L/2 - 1$

$n = L-1$

$L-1-n = L-1$

$n = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}$$ 3

$$= \sum_{n=0}^{\frac{L}{2}-1} x_n e^{-j\frac{2\pi k n}{L}} + \sum_{n=0}^{\frac{L}{2}-1} \underline{x_{L-1-n}} e^{-j\frac{2\pi k(L-1-n)}{L}}$$

$$\boxed{x_n = x_{L-1-n}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{L}{2}-1} x_n e^{-j\frac{2\pi k n}{L}} + \sum_{n=0}^{\frac{L}{2}-1} x_n e^{-j\frac{2\pi k(L-1-n)}{L}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{L}{2}-1} x_n \left(e^{-j\frac{2\pi k n}{L}} + e^{-j\frac{2\pi k(L-1)}{L}} e^{j\frac{2\pi k n}{L}}\right) \quad (1)$$

Επειδή για $\int$ πιάνει το $X_{L/2}$ θα θέσω στην (1) όπου $k \to L/2$

$$X_{L/2} = \sum_{n=0}^{\frac{L}{2}-1} x_n \left(e^{-j\frac{2\pi \frac{L}{2} n}{L}} + e^{-j\frac{2\pi \frac{L}{2}(L-1)}{L}} e^{j\frac{2\pi \frac{L}{2} n}{L}}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{L}{2}-1} x_n \left(\underline{e^{-j\pi n}} + e^{-j\pi(L-1)} \underline{e^{j\pi n}}\right)$$

$$e^{j\pi} = -1 = e^{-j\pi}$$

$$e^{j\pi n} = (-1)^n = e^{-j\pi n}$$

$$e^{2j\pi} = e^{-2j\pi} = e^{-2j\pi n} = e^{2j\pi n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{L}{2}-1} x_n \left((-1)^n + \underbrace{e^{-j\pi(L-1)}}_{-1 = (-1)^{L-1} = (-1)^{2N-1}} (-1)^n\right)$$

$$L = 2N$$

$$L-1 = 2N-1$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{L}{2}-1} x_n \left(\underline{(-1)^n} - (-1)^n\right) = 0$$

b. $$X_k = \sum_{\eta=0}^{L-1} x_\eta \cdot e^{-j\frac{2\pi k \eta}{L}} = \sum_{\eta=0}^{L/2-1} x_\eta e^{-j\frac{2\pi k \eta}{L}} + \sum_{\eta=L/2}^{L-1} x_\eta \cdot e^{-j\frac{2\pi k \eta}{L}} =$$

$\eta = L-1-\eta$

$\eta \to L/2$

$L-1-\eta \to L/2$

$\eta = L-1-L/2 = L/2-1$

$\eta = L-1$

$L-1-\eta = L-1$

$\eta = 0$

$$\Leftrightarrow X_k = \sum_{\eta=0}^{L/2-1} x_\eta \cdot e^{-j\frac{2\pi k \eta}{L}} + \sum_{\eta=0}^{L/2-1} x_{L-1-\eta} \cdot e^{-j\frac{2\pi k(L-1-\eta)}{L}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{L/2-1} x_n \cdot e^{-j\frac{2\pi k \cdot n}{L}} + \sum_{n=0}^{L/2-1} -x_n \cdot e^{-j\frac{2\pi k(L-1-n)}{L}}$$

$$= \sum_{n=0}^{L/2-1} x_n \cdot \left(e^{-j\frac{2\pi k \cdot n}{L}} - e^{-j\frac{2\pi k(L-1-n)}{L}}\right)$$

για $k=0$

$$\Rightarrow X_0 = \sum_{n=0}^{L/2-1} x_n \cancel{\left(e^{-j\cdot 0} - e^{0}\right)}^{\to 0} \Rightarrow \boxed{X_0 = 0}$$

Άσκηση 2

Έστω x_n πραγματική ακολουθία μήκους L

α. Δείξτε ότι η συνθήκη $X_k = X^*_{L-k}$ είναι ικανή και αναγκαία ώστε το X_k είναι ο DFT πραγματικής ακολουθίας

β. Δείξτε ότι το X_0 είναι πραγματικός αριθμός

γ. Αν L άρτιος δείξτε ότι $X_{L/2}$ είναι πραγματικός

ΛΥΣΗ

α. Αν $X_k = X^*_{L-k} \Rightarrow$

$$\left(e^{-j\omega}\right)^* = (\cos\omega - j\sin\omega)^* = \cos\omega + j\sin\omega = e^{j\omega}$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\frac{2\pi k n}{L}}$$

$$X_{L-k} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\frac{2\pi(L-k)n}{L}} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n \frac{e^{-j\frac{2\pi k n}{L}}}{1} e^{j\frac{2\pi k n}{L}}$$

$$= \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{j\frac{2\pi k n}{L}}$$

$$X^*_{L-k} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n^* e^{-j\frac{2\pi k n}{L}}$$

Αν $X_k = X^*_{L-k}$ $\quad x_n = x_n^* \rightarrow$ πραγματική ακολουθία

Αν x_n πραγματική ακολουθία $\Rightarrow x_n = x_n^* \Rightarrow$

$X^*_{L-k} = \sum x \; e^{-j\frac{2\pi k n}{L}}$

b.

$$X_0 = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^0 = x_0 + x_1 + \cdots + x_{L-1} \in \mathbb{R}$$

Αφού x_n πραγματική ακολουθία.

c)

$$X_{L/2} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\frac{2\pi L/2}{L}n} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\pi n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{L-1} x_n (-1)^n = \underbrace{x_0 - x_1 + x_2 - \cdots - x_{L-1}}_{\text{πολ. ένας ακολουθία πραγματικών αριθμών} \Rightarrow \text{πραγματικός αριθμός}}$$

Άσκηση 3 (Θ2-Ι09 / Θ2-Ι07)

Έστω x_n ακολουθία μήκους L και X_k ο DFT της μήκους L. Να βρείτε <u>σχήμα παρεμβολής</u> από το σήμα παίρνω τον <u>διακριτού χρόνου φ MF</u> από τον DFT της ακολουθίας

$$X(e^{j\omega}) = A(X_k)$$

ΛΥΣΗ

<u>DTFT</u>: $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\omega n}$

$$= \sum_{n=0}^{L-1} \frac{1}{L} \cdot \sum_{k=0}^{L-1} X_k e^{j\frac{2\pi k n}{L}} \cdot e^{-j\omega n} =$$

$$= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X_k \sum_{n=0}^{L-1} e^{\left(j\frac{2\pi k n}{L} - j\omega n\right)} =$$

$$= \frac{1}{L} \cdot \sum_{k=0}^{L-1} X_k \cdot \sum_{n=0}^{L-1} e^{\left[jn\left(\frac{2\pi k}{L} - \omega\right)\right]}$$

$$\boxed{= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X_k \cdot \frac{1 - \left(e^{j\left(\frac{2\pi k}{L} - \omega\right)}\right)^L}{1 - e^{j\left(\frac{2\pi k}{L} - \omega\right)}}}$$

$$\sum_{n=0}^{L-1} a^n = \frac{1-a^L}{1-a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

Κυκλικός Δείκτης

$\langle n \rangle_L$: το ακέραιο υπόλοιπο της διαίρεσης του n με το L

$\langle 18 \rangle_5 = 3$

$\langle -13 \rangle_7 = 1$

Ιδιότητες DFT

α. Γραμμικότητα	$ax_n + by_n$	$aX_k + bY_k$
β. Κυκλική μετατόπιση στο χρόνο	$x_{\langle n-n_0 \rangle_L}$	$e^{-j\frac{2\pi k n_0}{L}} X_k$
γ. Κυκλική μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\frac{2\pi k_0 n}{L}} x_n$	$X_{\langle k-k_0 \rangle_L}$
δ. Κυκλική συνέλιξη στο χρόνο	$\sum_{\ell=0}^{L-1} x_\ell y_{\langle n-\ell \rangle_L}$	$X_k Y_k$
ε. Πολλ/μός στο χρόνο	$x_n y_n$	$\frac{1}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} X_\ell Y_{\langle k-\ell \rangle_L}$

Άσκηση 4 (Θέμα 2 - Σεπ/βρ 09)

Δίνεται ο DFT X_k του x_n. Υπολογίστε (χωρίς χρήση της διόπτρας της χρονικής αλίσθησης) τον DFT Y_k του σήματος

$y_n = x_{\langle n+s \rangle_N}$

ΛΥΣΗ

(Αν κάναμε χρήση της ιδιότητας

$Y_k = e^{-j\frac{2\pi k(-s)}{N}} X_k = e^{j\frac{2\pi s k}{N}} X_k$)

2 ——— 5

1 | 5
1 | 0

$x_n = \{1,2,3,4,5\}$

$y_n = x_{\langle n-2\rangle_5}$

$y_0 = x_{\langle -2\rangle_5} = x_3$

$y_1 = x_{\langle -1\rangle_5} = x_{\langle 4\rangle_5} = x_4$

$y_2 = x_{\langle 2-2\rangle_5} = x_{\langle 0\rangle_5} = x_0$

$y_3 = x_{\langle 3-2\rangle_5} = x_{\langle 1\rangle_5} = x_1$

$y_4 = x_{\langle 4-2\rangle_5} = x_{\langle 2\rangle_5} = x_2$

$x_n = \{1,2,3,4,5\}$

$z_n = x_{\langle n+2\rangle_5}$

$z_0 = x_{\langle 2\rangle_5} = x_2$

$z_1 = x_{\langle 4+2\rangle_5} = x_{\langle 3\rangle_5} = x_3$

$z_2 = x_{\langle 2+2\rangle_5} = x_{\langle 4\rangle_5} = x_4$

$z_3 = x_{\langle 5\rangle_5} = x_0$

$z_4 = x_{\langle 4+2\rangle_5} = x_{\langle 6\rangle_5} = x_1$

$y_n = x_{\langle n-4\rangle_N} =$

$$\begin{cases} x_{N+n-4} & n-4<0 \quad n<4 \\ x_{n-4} & n-4\geq 0 \quad n\geq 4 \end{cases}$$

$z_n = x_{\langle n+4\rangle_N} =$

$$\begin{cases} x_{n+4} & n+4<N \quad n<N-4 \\ x_{n+4-N} & n\geq N-4 \end{cases}$$

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x_{\langle n+5\rangle_N} e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-6} x_{n+5} e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + \sum_{n=N-5}^{N-1} x_{n+5-N} e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

1ο αθροίσμα

$n+5=l$
$n=l-5$

$n=0$
$l-5=0$
$l=5$

$n=N-6$
$l-5=N-6$
$l=N-1$

$n+5-N=l$
$n=l+N-5$

$N-5$
$l+N-5=N-5$
$l=0$

$n=N-1$
$l+\cancel{N}-5=\cancel{N}-1$

$$= \sum_{l=5}^{N-1} x_l e^{-\frac{2\pi k(l-5)}{N}} + \sum_{l=0}^{4} x_l e^{-j\frac{2\pi k(l+N-5)}{N}}$$

$$= \sum_{l=5}^{N-1} x_l e^{-j\frac{2\pi k l}{N}} e^{\frac{10\pi k}{N}} + \sum_{l=0}^{4} x_l e^{-j\frac{2\pi k l}{N}} e^{j\frac{10\pi k}{N}} \underbrace{e^{-j2\pi k}}_{1}$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} x_l e^{-j\frac{2\pi k l}{N}} \underbrace{e^{j\frac{10\pi k}{N}}}$$

$$= e^{j\frac{10\pi k}{N}} \underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} x_l e^{-j\frac{2\pi k l}{N}}} = e^{j\frac{10\pi k}{N}} X_k$$

<u>Άσκηση 5</u> Θέμα 1-Σεπ'02

Δίνεται το σήμα διακριτού χρόνου

$x_n = \{1, -2, 4, 3, 0, -1\}$

Αν X_k ο DFT του x_n βρείτε σε ποιο σήμα διακριτού χρόνου αντιστοιχεί ο DFT

$Y_k = e^{-j\frac{4\pi k}{3}} X_k$

$\cancel{-j\frac{4\pi k}{3} = \frac{2\pi k n_0}{6} - j}$ (ιδιότητα κυκλικής μετατόπισης στο χρόνο)

$\Rightarrow \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{3}_{1}} = \frac{\cancel{2}\pi n_0}{\cancel{6}_{2}} \Rightarrow n_0 = 4$

$y_n = x_{\langle n-4 \rangle_6}$

$y_0 = x_{\langle -4 \rangle_6} = x_2 = 4$

$y_1 = x_{\langle -3 \rangle_6} = x_3 = 3$

$y_2 = x_{\langle -2 \rangle_6} = x_4 = 0$

$y_3 = x_{\langle -1 \rangle_6} = x_5 = -1$

$y_4 = x_{\langle 0 \rangle_6} = x_0 = 1$

$y_5 = x_{\langle 1 \rangle_6} = x_1 = -2$

Το να υπολογίσω τον DFT μιας ακολουθίας μήκους L
$\rightarrow O(L^2)$

Όταν το μήκος της ακολουθίας μου είναι δύναμη του 2
$L = 2^n$

τότε μπορώ να υπολογίσω τον DFT μέσω του FFT
(Fast Fourier Transform) $O(L \log_2 L)$

1 Αποδοτικότητα στο χρόνο: Έστω X_k τα δείγματα του DFT, τα οποία χωρίζουμε σε δύο σύνολα με δείγματα άρτιου και περιττού δείκτη. Έτσι ο DFT μήκους L υπολογίζεται μέσω 2 DFT μήκους $L/2$. Η ίδια διαδικασία 2 φορές έως ότου φτάσουμε σε DFT μήκους 1, ο οποίος δεν απαιτεί καμία πράξη για να υπολογιστεί.

$$X_k = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j\frac{2\pi k n}{L}} = \sum_{n=0}^{\frac{L}{2}-1} x_{2l} e^{-j\frac{2\pi k l}{L/2}} + \sum_{n=L/2}^{L-1} x_{2l+1} e^{-j\frac{2\pi k l}{L/2}}$$

2 Αποδοτικότητα στη ανάμνηση: Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μνήμη και να διατηρήσουμε ενδιάμεσα δείγματα με περιττό και άρτιο δείκτη.

$$X_k = \sum_{l=0}^{L-1} x_l e^{-j\frac{2\pi k l}{L}}$$

$$= \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_l e^{-\frac{2\pi k l}{L}} + \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} x_{\frac{L}{2}+l} e^{-\frac{2\pi k(\frac{L}{2}+l)}{L}}$$

$k = 2m$

$k = 2m+1$

?

Ιανουάριος 201 - Θέμα 1

$x_n \quad n=0,\dots,N-1$

$z_k = r e^{j(\theta_0 + 2\pi k/N)} \quad k=0,\dots,N-1 \quad N = RM$

ΛΥΣΗ

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n z^{-n}$$

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot z_k^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \left(r e^{j(\theta_0 + \frac{2\pi k}{N})}\right)^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left(x_n \cdot (r e^{j\theta_0})^{-n}\right)\left(e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}\right)$$

$$\bar{x}_n = x_n \cdot (r e^{j\theta_0})^{-n}$$

DFT Ονομαστικ. $$\boxed{= \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}_n e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}}$$

$$\frac{1}{M} = \frac{R}{N}$$

$N = RM$

$0 \le n \le N-1$

$n = R \cdot l + q$

$0 \le l \le M-1$

$0 \le q \le R-1$

$$= \sum_{Rl+q=0}^{N-1} \bar{x}_{Rl+q} e^{-j\frac{2\pi k(Rl+q)}{N}}$$

$$= \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{R-1} \bar{x}_{Rl+q} e^{-j\frac{2\pi k R l}{N}} e^{-j\frac{2\pi k q}{N}}$$

$$= \sum_{q=0}^{R-1} e^{-j\frac{2\pi k q}{N}} \underbrace{\sum_{l=0}^{M-1} \bar{x}_{Rl+q} e^{-j\frac{2\pi k l}{M}}}_{\text{DFT } M \text{ ονομαστικ.}}$$

$M = 2^q$

$$X(z_k) \sum_{q}^{R-1} \left(e^{-j\frac{2\pi kq}{N}} \underbrace{\sum_{l=0}^{M-1} x_{Rl+q}\, e^{-j\frac{2\pi kl}{M}}} \right)$$

Για να υπολογίσω το FFT M σημείων απαιτούνται:

$$\frac{M}{2}\log_2 M$$

~~Αλλά για τα FFT σειρές~~

$$\cancel{\frac{M}{2}\log_2 M + M = \frac{M}{2}\log_2 M}$$

$$R\left(\frac{M}{2}\log_2 M + M\right)$$ → πολλ/σμοί με το $e^{-j\frac{2\pi kq}{N}}$

$$= \frac{N}{2}\log_2 M + N$$

Αν χρησιμοποιούσα DFT μήκους N. $N = 2^6$.

$$\frac{N}{2}\log_2 N$$

$$\frac{N}{2}\log_2 M + N < \frac{N}{2}\log_2 N$$

$N = RM$

$\log_2 N = \log_2 R + \log_2 M$

$$\log_2 M + 2 < \log_2 N$$

$$\cancel{\log_2 M} + 2 < \cancel{\log_2 M} + \log_2 R$$

$$4 < R$$

~~1 2 3~~

Συνελιξη

1. Γραφικη ~~Sum~~ Συνελιξη.

$$y_n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l h_{n-l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_{n-l} h_l$$

Για πεπερασμενες ακολουθιες :

Εστω $x_n \xrightarrow{(x_0,\dots,x_{N-1})} N \ (=L)$ $\quad y_n \to N+L-1 \ (= 2L-1)$

$(h_0,\dots,h_{L-1})$ $h_n \longrightarrow L$ $\quad (y_0 \dots y_{N+L-2})$

$$y_n = \sum_{l=0}^{n} x_l h_{n-l} = \sum_{l=0}^{n} x_{n-l} h_l$$

$L < N$

$$y_0 = \sum_{l=0}^{0} x_l h_{0-l} = x_0 h_0$$

$$y_1 = \sum_{l=0}^{1} x_l h_{1-l} = x_0 h_1 + x_1 h_0$$

$$y_2 = \sum_{l=0}^{2} x_l h_{2-l} = x_0 h_2 + x_1 h_1 + x_2 h_0$$

$$y_L = \sum_{l=0}^{L} x_l h_{L-l} = x_1 h_{L-1} + \dots + x_L h_0$$

$$y_N = \sum_{l=0}^{N} x_l h_{N-l} = x_{N+L-1} h_{L-1} + \dots + x_{N-1} h_1$$

$N - l = L - 1$

$l = N - L + 1$

$$y_{N+L-2} = \sum_{l=0}^{N+L-2} x_l h_{N+L-2-l} = x_{N-1} h_{L-1}$$

$N+L-2-l = L-1$

$l = N-1$

$$x_n * h_n \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$x_n = \{1, 3, 2\}$ $N = 3$

$h_n = \{4, 7\}$ $L = 2$

$\Rightarrow$ [illegible] y_n $0 \le n \le N+L-1 = 4$

$y_n = x_n * h_n$

$$y_n = \sum_{l=0}^{4} x_l \cdot h_{n-l}$$

$$y_0 = \sum_{l=0}^{0} x_l \cdot h_{0-l} = \sum_{l=0}^{0} x_l \cdot h_{-l} = x_0 h_0 = 4$$

$$y_1 = \sum_{l=0}^{1} x_l \cdot h_{1-l} = x_0 \cdot h_{1-l} + x_1 \cdot h_{1-l} = x_0 \cdot h_1 + x_1 \cdot h_0 = 7 + 12 = 19$$

$$y_2 = \sum_{l=0}^{2} x_l \cdot h_{n-l} = \cancel{x_0 \cdot h_{2-0}} + x_1 \cdot h_{2-1} + x_2 \cdot h_0 = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 4 = 29$$

$$y_3 = \sum_{l=0}^{3} x_l \cdot h_{3-l} = \cancel{x_0 h_3} + \cancel{x_1 h_2} + x_2 h_1 + \cancel{x_3 h_0} = 2 \cdot 7 = 14$$

2. Κυκλική Συνέλιξη

Για να υπολογιστεί κυκλική συνέλιξη πρέπει και οι δύο ακολουθίες να έχουν το ίδιο μήκος, και η τελική ακολουθία έχει το ίδιο μήκος.

$x_n \to M \qquad y_n = x_n \circledast h_n \longrightarrow M$

$h_n \to M$

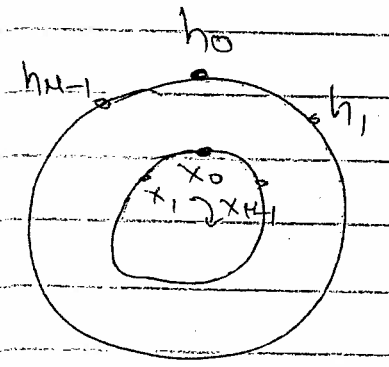
$$y_n = \sum_{l=0}^{M-1} x_l h_{\langle n-l \rangle_M} = \sum_{l=0}^{M-1} x_{\langle n-l \rangle_M} h_l$$

$y_0 = x_0 h_0 + x_1 h_{M-1} + x_2 h_{M-2} + \dots + x_{M-1} h_1$

$y_1 = x_0 h_1 + x_1 h_0 + x_2 h_{M-1} + \dots + x_{M-1} h_2$

$\vdots$

$y_{M-1} = x_0 h_{M-1} + x_1 h_{M-2} + \dots + x_{M-1} h_0$



Ο πρώτος όρος προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τους αντίστοιχους και προσθέτοντας τα γινόμενα. Για να πάρω τους υπόλοιπους όρους κάνω shift τον εξωτερικό κύκλο κατά μία θέση και επαναλαμβάνω την ίδια διαδικασία.

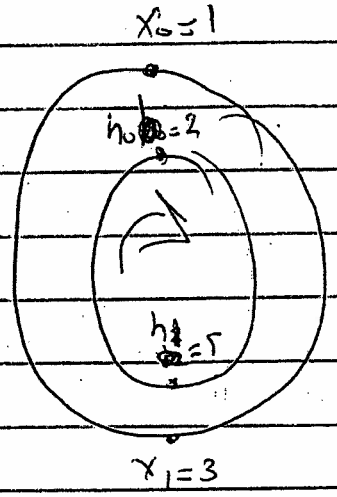
Να βρεθεί η κυκλική του συνελίξη

$x_n = \{1, 3\}$ $N = 2 = M$

$h_n = \{2, 5\}$ $L = 2 = M$

$y_n = x_n \circledast h_n$

$$y_n = \sum_{l=0}^{M-1} x_l \cdot h_{\langle n-l \rangle_M} \quad i$$



$y_0 = x_0 h_0 + h_1 \cdot x_1 = 2 + 15 = 17$

$y_1 = x_0 h_1 + h_0 x_1 = 5 + 6 = 11$

Γραμμική

$Y_0 = x_0 h_0 = 2$

$Y_1 = x_0 h_1 + x_1 h_0 = 11$

$Y_2 = \cancel{x_0 h_2} + x_1 h_1 + \cancel{x_2 h_0} = 15$

$x_n \circledast h_n \xrightarrow{DFT} X_k \odot H_k$

Γραμμική Συνέλιξη από Κυκλική

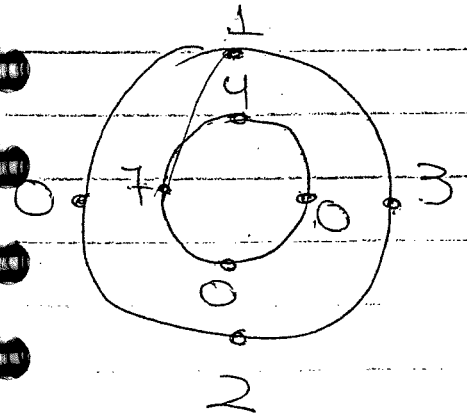
Επειδή στη ~~γραμμική~~ κυκλική συνέλιξη όλες οι ακολουθίες πρέπει να έχουν το ίδιο μήκος πρέπει και οι ακολουθίες της γραμμικής να αποκτήσουν το ίδιο μήκος. Όμως το αποτέλεσμα της γραμμικής συνέλιξης έχει μήκος $N+L-1$ άρα πρέπει και οι δύο άλλες ακολουθίες να αποκτήσουν μήκος $N+L-1$. Άρα προσθέτω στην ακολουθία μήκους N με $L-1$ μηδενικά και αυτή μήκους L με $N-1$ μηδενικά.

Η $x_n=\{1,3,2\}$ Άρα η y_n έχει μήκος
$h_n=\{4,7\}$ $3+2-1=4$

Άρα θα προσθέσω στην x_n με 1 μηδενικό
h_n 2 —"—

$x_n'=\{1,3,2,0\}$
$h_n'=\{4,7,0,0\}$

και τώρα θα εφαρμόσω κυκλική συνέλιξη.



$Y_0=1\cdot4+3\cdot0+0\cdot2+0\cdot7=4$

$Y_1=1\cdot7+3\cdot4+0\cdot2+0\cdot0=19$

$Y_2=1\cdot0+3\cdot7+4\cdot2+0\cdot0=29$

$Y_3=1\cdot0+3\cdot0+2\cdot7+0\cdot4=14$

Θέμα 3: Σεπτέμβριος 2006

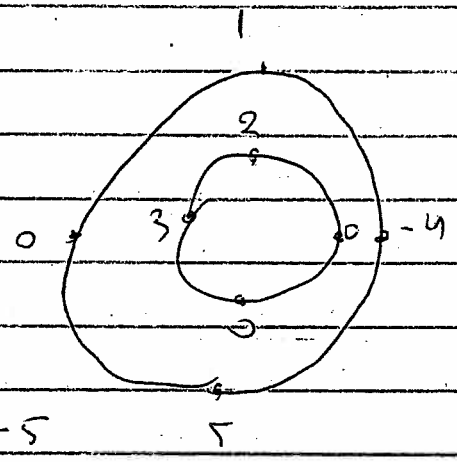
$x_1(n) = \{2, 3\}$ $\quad L = 2$

$x_2(n) = \{1, -4, 5\}$ $\quad N = 3$

$N + L - 1 = 4$

$x_1(n) = \{2, 3, 0, 0\}$

$x_2(n) = \{1, -4, 5, 0\}$



$y_0 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 3 = 2$

$y_1 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot -4 + 0 \cdot -4 + 0 \cdot 3 = -5$

$y_2 = 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 0 = -2$

$y_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = 10$

Κεφ 5

Φίλτρο: Είναι ένα FXAΣ το οποίο έχει σαν αποτέλεσμα το διαχωρισμό της πληροφορίας από το θόρυβο.
Ανάλογα με το αν το σήματος που έχουν σαν είσοδο είναι αναλογικό ή ψηφιακό

Αναλογικά		Ψηφιακά
$h(t)$	κρουστική απόκριση	h_n
$\downarrow$ MF		$\downarrow$ MF
$H(j\Omega)$	απόκριση συχνότητας	$H(e^{j\omega})$
$\downarrow$ ML		$\downarrow$ Mz
$H(s)$	συνάρτηση μεταφοράς	$H(z)$

Κατηγορίες φίλτρων

Αναλογικά

Η σχέση εισόδου - εξόδου περιγράφεται ως εξής:

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_L s^L}{1 + a_1 s + \dots + a_L s^L}$$

τάξη του φίλτρου

Ψηφιακά

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k}$$

$$Y(z) = X(z)\,H(z)$$

Για την υλοποίησή τους ψηφιακής επεξεργασίας απαιτείται το πλήθος των αριθμητικών πράξεων

1. FIR (Πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης)

τότε η

$$y_n = h_0 x_n + h_1 x_{n-1} + \dots + h_{L-1} x_{n-L+1}$$

$h_n \Rightarrow$ μήκος L

Το μήκος της κρουστικής απόκρισης αναφέρεται και μήκος του φίλτρου

2. IIR (Άπειρης κρουστικής απόκρισης)

η σχέση εισόδου-εξόδου

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_k z^{-k}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_L z^{-L}}$$

$\longrightarrow$ τάξη του φίλτρου

όπου είναι λόγος πολυωνύμων του z

Λόγω ομοιότητας των βασικών μεταφοράς των αναλογικών και των ψηφιακών IIR φίλτρων, τα αναλογικά δείχνονται και αυτά IIR.

Τα FIR είναι πάντα ευσταθή

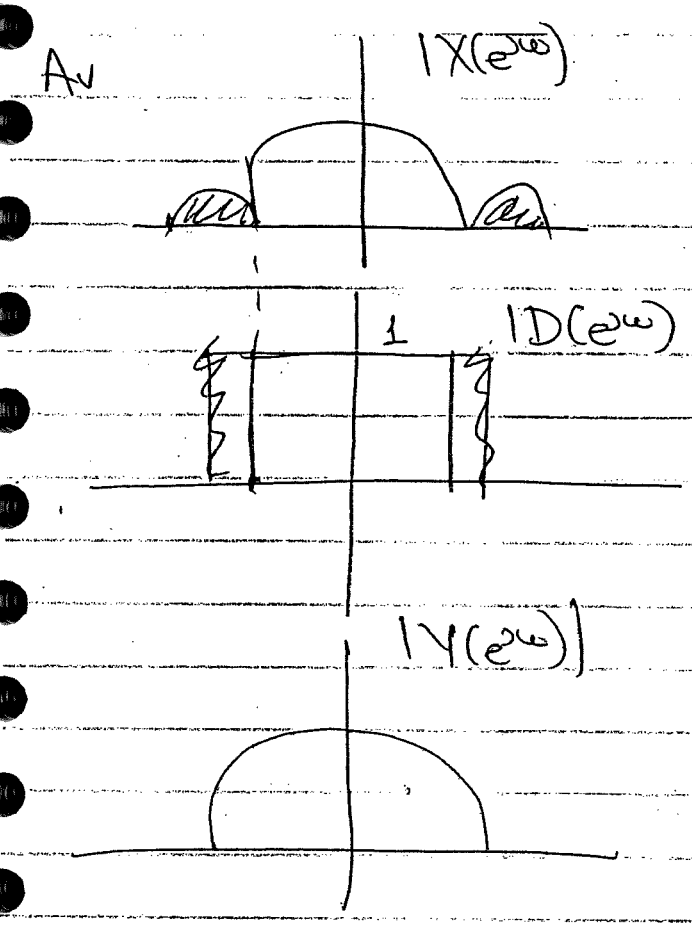
Τα IIR αναλογικά είναι ευσταθή $Re(s) < 0$.

Τα IIR ψηφιακά — " — $|z| < 1$.

Ιδανικές Πρόσλαγραφές

Η απόκριση συχνότητας $D(e^{j\omega})$ ή $D(j\Omega)$
κρουστική απόκριση $d(n)$ ή $d(t)$

Αν



$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = D(e^{j\omega})X(e^{j\omega})}$$

$$\boxed{Y(j\Omega) = D(j\Omega)\,X(j\Omega)}$$

Οι ζώνες συχνοτήτων που περιέχουν πληροφορία ονομάζονται ζώνες διάβασης και αυτές που περιέχουν θόρυβο λέγονται ζώνες απόσβεσης.

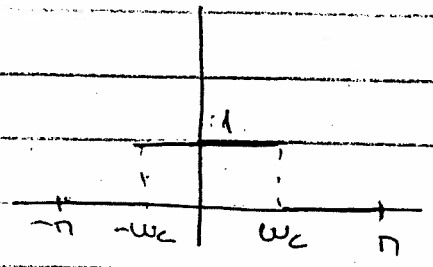
Μας ενδιαφέρει η D να είναι 1 στις ζώνες διάβασης και 0 στις ζώνες απόσβεσης.

$$D() = \begin{cases} 1, & \text{ζώνες διάβασης} \\ 0, & \text{ζώνες απόσβεσης} \end{cases}$$

Κατηγορίες Φίλτρων

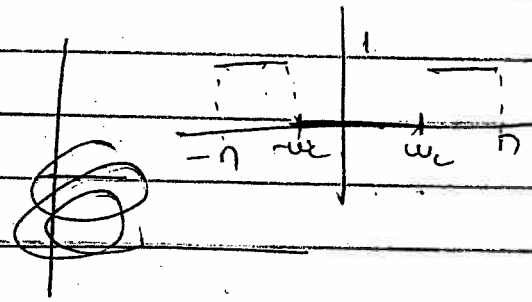
Χαμηλοπερατά

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \le \omega \le \omega_c \\ 0 & \omega_c \le \omega \le \pi \end{cases}$$



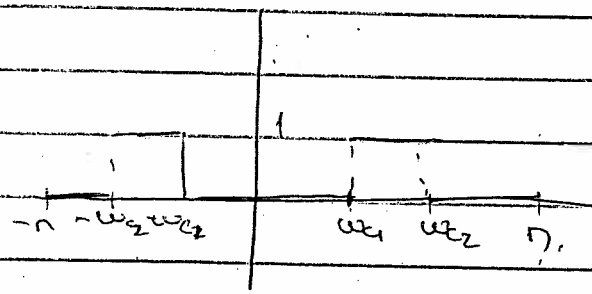
2. Ανωπερατά

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \omega_c \le \omega \le \pi \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



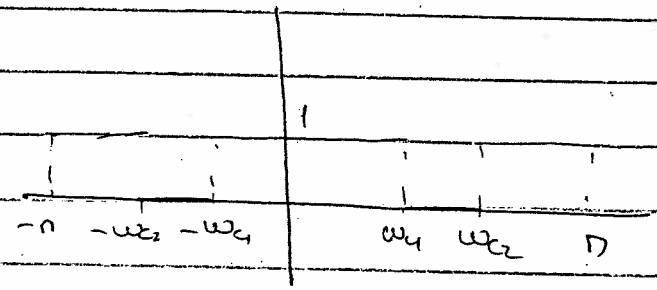
3. Ζωνοπερατά

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \omega_{c1} \le \omega \le \omega_{c2} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



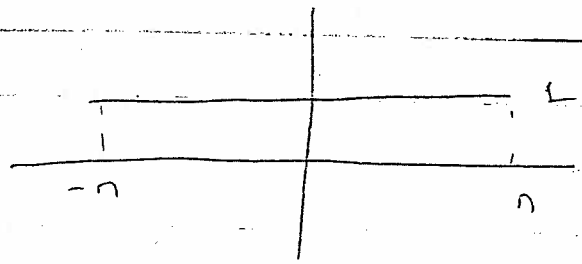
4. Απόκοπής Ζώνης

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & \omega_{c1} \le \omega \le \omega_{c2} \\ 1 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



5. Ολοπερατά

$$D(e^{j\omega}) = 1$$



Ιδανική Κρουστική Απόκριση

$$d(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} D(j\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega})\, e^{jn\omega}\, d\omega$$

Όμως για αναλογικά φίλτρα η $d(t)$ δεν είναι υλοποιήσιμη ενώ για ψηφιακά φίλτρα η d_n απαιτεί πεπερασμένο αριθμό πράξεων. Και κάτι από τη 2η δεν είναι χρήσιμη.

Προσέγγιση ιδανικών προδιαγραφών

Η ιδανική χαρακτηριστική $D(e^{j\omega})$ είναι πραγματική η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ που έχουν τα πραγματικά φίλτρα είναι γενικά μιγαδική συνάρτηση και δεν μπορώ να προσεγγίσω μια πραγματική συνάρτηση με μια μιγαδική συνάρτηση.

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)}\,\boxed{|H(e^{j\omega})|}$$

$\phi(\omega)$ → συνάρτηση φάσης

$|H(e^{j\omega})|$ → απόκριση πλάτους

$$R(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| = e^{j\phi(\omega)}\, R(e^{j\omega})$$

$R(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$ άρα μπορώ να τη χρησιμοποιήσω για προσέγγιση των $D(e^{j\omega})$

Η $R(e^{j\omega})$ επιδιώκεται να είναι του ίδιου τύπου και να έχει τις ίδιες συμμετρίες με την $D(e^{j\omega})$

Σε ένα πραγματικό φίλτρο

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$= e^{-j\alpha\omega} R(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

Σε ένα ιδανικό φίλτρο

$$Y^{\epsilon}(e^{j\omega}) = D(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})| = |R(e^{j\omega})X(e^{j\omega})| = |D(e^{j\omega})X(e^{j\omega})| = |Y^{\epsilon}(e^{j\omega})|$$

Άρα οι δύο έξοδοι περιέχουν τις ίδιες συχνότητες με την ίδια ενέργεια. Η διαφορά στα δύο συχνοτικά περιεχόμενα οφείλεται στη διαφορά της φάσης μεταξύ επιθυμητής και πραγματικής έξοδου. Σε πολλές περιπτώσεις η διαφορά φάσης, δε θεωρείται σημαντική με αποτέλεσμα η επεξεργασία με το $H(e^{j\omega})$ να κρίνεται ικανοποιητική. Υπάρχουν όμως εφαρμογές που έχουν μεγάλη σημασία στη μορφή και η μεταβολή της φάσης είναι ανεπιθύμητη γιατί η μορφή παραμορφώνεται μεγάλη ευαισθησία στις μεταβολές της φάσης.

Προσέγγιση Ιδανικών Χαρακτηριστικών

$H(e^{j\omega}) \rightarrow$ απόκριση συχνότητας πραγματικών φίλτρων

$D(e^{j\omega}) \rightarrow$ " " ιδανικών "

$H \rightarrow$ φιγαδική $\qquad H(e^{j\omega}) = \underbrace{e^{j\Phi(\omega)}}_{\text{συνάρτηση φάσης}} \underbrace{R(e^{j\omega})}_{\underbrace{|H(e^{j\omega})|}_{\text{απόκριση πλάτους}}}$

$D \rightarrow$ πραγ.

Η H είναι φιγαδική συνάρτηση και δεν μπορώ να τη χρησιμοποιήσω για να προσεγγίσουμε την $D(e^{j\omega})$. Γράφουμε την $H(e^{j\omega})$ σε μορφή:

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\Phi(\omega)} \cdot |H(e^{j\omega})|$$

Αν θέσουμε: $|H(e^{j\omega})| = R(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\Phi(\omega)} R(e^{j\omega})$$

Αν θέσουμε $R(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|$ η προσέγγιση του $D(e^{j\omega})$ γίνεται από την $R(e^{j\omega})$, η οποία επιδέχεται να είναι ίδιου τύπου και να έχει τις ίδιες συμμετρίες με την $D(e^{j\omega})$.

$$X(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow Y(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{D(e^{j\omega})} \longrightarrow Y^{\epsilon}(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega}) = e^{j\Phi(\omega)} X(e^{j\omega}) \underline{R(e^{j\omega})} \qquad Y^{\epsilon}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) D(e^{j\omega})$$

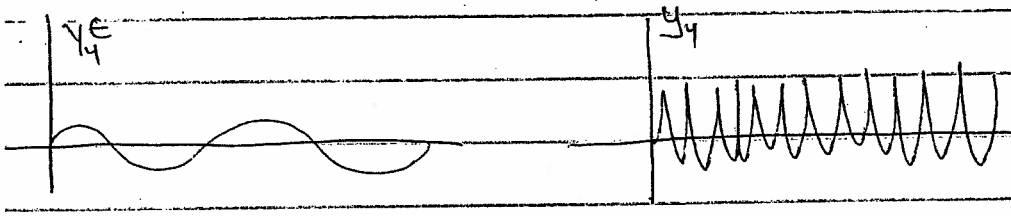
$R(e^{j\omega}) \approx D(e^{j\omega})$

$$= e^{j\Phi(\omega)} \underbrace{X(e^{j\omega}) D(e^{j\omega})}$$

$$= e^{j\Phi(\omega)} \underline{Y^{\epsilon}(e^{j\omega})}$$

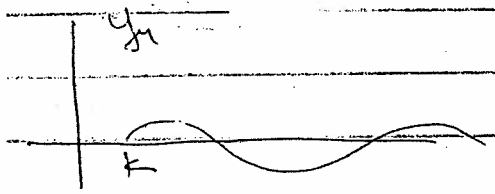
$$|Y(e^{j\omega})| = |Y^{\epsilon}(e^{j\omega})|$$

Οι δυο έξοδοι έχουν τις ίδιες συχνότητες, με την ίδια ενέργ
Η διαφορά τους εγκείται στη διαφορά φάσης. Σε πολλές περιπτώσεις αυτή η διαφορά, δε θεωρείται σημαντική, με αποτέλεσμα η επεξεργασία με το $H(e^{j\omega})$ να κρίνεται ικανοποιητική. Υπάρχουν όμως εφαρμογές που δίνουν μεγάλη σημασία στη μορφή του και η μεταβολή της φάσης είναι ανεπιθύμητη, γιατί η μορφή παρουσιάζει μεγάλη ευαισθησία στις μεταβολές της φάσης.



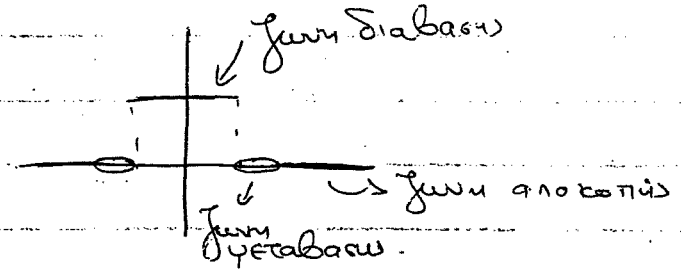
Πότε διατηρείται αναλλοίωτη η μορφή

$\phi(\omega) = -k\omega$ όταν η συνάρτηση φάσης είναι γραμμική ως προς ω.



Στην περίπτωση αυτή η πραγματική έξοδος είναι μία ολίσθηση κατα k χρονικές στιγμές μορφή της εξόδου

Τα FIR φίλτρα είναι δυνατό ~~σε~~ να έχουν γραμμική φάση ενώ τα IIR ικανοποιούν κατα προσέγγιση αυτη την ιδιότητα.



"ΖΩΝΕΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ"

Το επόμενο χαρακτηριστικό που θα μας απασχολήσει είναι οι συχνότητες που εμφανίζονται στη D. Για να υπάρξει κάποιο κριτήριο ελέγχου στον τρόπο που υλοποιούνται οι μεταβάσεις από τη ζώνη διάβασης στη ζώνη απόσβεσης, υπάρχει μία άλλη κατηγορία ζωνών. Οι ζώνες αυτές ονομάζονται ζώνες μετάβασης και μεσολαβούν στα σημεία όπου εμφανίζονται συχνότητα στην D.

Ακριβεία προσέγγισης:

$$|D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})| \leq \delta_i$$

↳ μεγάλο επιτρεπτό σφάλμα της ζώνης

Μέσω της R δεν είναι δυνατό να πετύχουμε τη τιμή που καθορίζεται από τη D στη ζώνη διάβασης και απόσβεσης, παρά μόνο να τη προσεγγίσουμε. [redacted] Ο [redacted] συνηθέστερος τρόπος μέτρησης της ποιότητας προσέγγισης είναι μέσω του μέγιστου απόλυτου σφάλματος μεταξύ D και R ανά ζώνη ενδιαφέροντος.

"ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΒΑΡΟΥΣ"

Αντί του λαθερισμού των δ_i ένας δυνατός τρόπος ορίσουμε την ποιότητα της προσέγγισης μέσω της συνάρτησης βάρους, που συμβολίζεται με $W(\omega)$. Η $W(\omega)$ ορίζεται για όλες τις συχνότητες που ανήκουν σε όλες τις ζώνες διάβασης και αποκοπής και ορίζεται ως $\boxed{W(\omega) = \frac{\delta_{max}}{\delta_i}}$, δ_{max} = μεγ. σφάλμα

$$W(\omega)\,|D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})| \le \delta_{max}$$

Μεταβατικά φαινόμενα

$$y_n = x_n + h_n$$

~~$y_n = x_n h_n$~~

$$y_n = h_0 x_n + h_1 x_{n-1} + \dots + h_{L-1} x_{n-L+1}$$

Η έξοδος ενός ΤΧΑΣ οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι γραμμικός συνδυασμός των προηγούμενων εισόδων. Το γεγονός ότι στην πράξη το φίλτρο τροφοδοτείται από κάποια χρονική στιγμή και μετά εξαιτίας αυτού το φίλτρο να παρουσιάζει διαφορετικά από ότι λαθεμένη η απόκριση συχνότητας. Η ανεπιθύμητη αυτή φάση είναι παροδική και τα φαινόμενα που παρουσιάζονται κατά τη διάρκειά της ονομάζονται μεταβατικά. Στα FIR φίλτρα η διάρκεια του είναι ίση με το μήκος του φίλτρου, άρα είναι προτιμότερα φίλτρα μικρού μήκους, ενώ στα IIR φίλτρα η διάρκειά του εξαρτάται από πόσο κοντά στο μοναδιαίο βρίσκονται οι πόλοι.

Κεφ 6

FIR

Ψηφιακά φίλτρα πεπερασμένης διαρκ.

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)} R(e^{j\omega})$$

Η R επιλέγεται να είναι του ίδιου τύπου και να έχει τις ίδιες συμμετρίες με την $D(e^{j\omega})$.

$$D(e^{j\omega}) = D_r(e^{j\omega}) + j D_i(e^{j\omega})$$

$$R(e^{j\omega}) = R_r(e^{j\omega}) + j R_i(e^{j\omega})$$

Αν $h_0, \dots, h_{L-1}$ είναι οι όροι της h_n τότε μπορώ να ορίσω δύο ακολουθίες a_n, b_n του ίδιου μήκους h_n και το άθροισμα τους όρο-όρο μου δίνει την h_n. Επιπλέον η a_n είναι άρτιας συμμετρίας, b_n περιττής. Ο διαχωρισμός αυτός υπάρχει πάντα.

$L = 2N+1$

	h_0	h_1	$\dots$	h_N	$\dots$	h_{2N}	
	a_N			$a_1\ a_0\ a_1$		a_N	άρτια συμ.
$-$	b_N			$b_1\ 0\ b_1$		$-b_N$	περιτ. συμ.

$L = 2N$

	h_0	h_1	$\dots$	h_{N-1}	h_N	$h_{N+1} \dots$	h_{2N-1}	
	a_N		a_2	a_1	a_1	a_2	a_N	αρτ.
$+$	b_N		b_2	b_1	$-b_1$	$-b_2$	$-b_N$	περ.

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)}\left(R_r(e^{j\omega}) + j R_i(e^{j\omega})\right)$$

$L = 2N+1$

$$R_r(e^{j\omega}) = a_0 + 2a_1\cos\omega + \cdots + 2a_N\cos N\omega$$
$$R_i(e^{j\omega}) = 2b_1\sin\omega + \cdots + 2b_N\sin N\omega$$

$$\phi(\omega) = -\frac{L-1}{2}\omega$$

$L = 2N$

$$R_r(e^{j\omega}) = 2a_1\cos\frac{\omega}{2} + \cdots + 2a_N\cos\frac{(2N-1)\omega}{2}$$

$$R_i(e^{j\omega}) = 2b_1\sin\frac{\omega}{2} + \cdots + 2b_N\sin\frac{(2N-1)\omega}{2}$$

$$\phi(\omega) = -\frac{L-1}{2}\omega$$

$D = D_r \quad R = R_r \quad b_n = 0 \quad$ (real)

$D = D_i \quad R = R_i \quad a_n = 0 \quad$ (imagine)

Μέθοδοι Σχεδιασμού FIR φίλτρων

1. Σχεδιασμός με χρήση παραθύρων (ή L_2 ή ελαχίστων τετραγώνων).

Ως κριτήριο χρησιμοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$E^2(a_0,\dots,a_N,b_1,\dots,b_N)=\int_{-\pi}^{\pi}|D(e^{j\omega})-R(e^{j\omega})|^2\,d\omega$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}|D_r(e^{j\omega})-R_r(e^{j\omega})|^2\,d\omega+\int_{-\pi}^{\pi}|D_i(e^{j\omega})-R_i(e^{j\omega})|^2\,d\omega$$

$L=2N+1$

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_r(e^{j\omega})\cos n\omega\,d\omega$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_i(e^{j\omega})\sin n\omega\,d\omega$$

$L=2N$

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_r(e^{j\omega})\cos\frac{(2n-1)\omega}{2}\,d\omega$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_i(e^{j\omega})\sin\frac{(2n-1)\omega}{2}\,d\omega$$

Άσκηση

Με χρήση τετραγωνικού παραθύρου σχεδιάστε κατώνεατο FIR φίλτρο γραμμικής φάσης $L=2N+1$ με

ζώνη διάβασης $[0 \quad 0{,}3\pi]$

ζώνη αποκοπής $[0{,}4\pi \quad \pi]$

που να προσεγγίζει την παρακάτω

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le 0{,}3\pi \quad -0{,}3\pi \le \omega \le 0{,}3\pi \\ 4-\frac{10}{\pi}|\omega| & 0{,}3\pi \le |\omega| \le 0{,}4\pi \quad 0{,}3\pi \le \omega \le 0{,}4\pi \quad -0{,}4\pi \le \omega \le -0{,}3\pi \\ 0 & |\omega| \ge 0{,}4\pi \quad \omega \ge 0{,}4\pi \quad \omega \le -0{,}4\pi \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Αφού η D είναι πραγματική και η R θα είναι πραγματική $\Big\} \Rightarrow b_n = 0$

Αφού $L=2N+1$

$$R(e^{j\omega}) = a_0 + 2a_1\cos\omega + \dots + 2a_N\cos N\omega$$

Πρέπει να βρω τα a_n.

Με τη χρήση παραθύρου και για $L=2N+1$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_r(e^{j\omega})\cos n\omega\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\Big[\cancel{\int_{-\pi}^{-0{,}4\pi} 0\cdot\cos n\omega\, d\omega}^{\,0} + \int_{-0{,}4\pi}^{-0{,}3\pi}\left(4+\frac{10}{\pi}\omega\right)\cos n\omega\, d\omega$$

$$+\int_{-0{,}3\pi}^{0{,}3\pi} 1\cdot\cos n\omega\, d\omega + \int_{0{,}3\pi}^{0{,}4\pi}\left(4-\frac{10}{\pi}\omega\right)\cos n\omega\, d\omega + \cancel{\int_{0{,}4\pi}^{\pi} 0\cdot\cos n\omega\, d\omega}^{\,0}\Big]$$

$=$

$$\int f \cdot g' = f \cdot g' - \int f' g$$

$$\frac{1}{2n}\Bigg[\int_{-0{,}4n}^{-0{,}3n} 4\cos n\omega \, d\omega + \frac{10}{\pi}\underbrace{\int_{-0{,}4n}^{-0{,}3n} \omega \cdot \left(+\frac{\sin n\omega}{n}\right)' d\omega}_{A} + \int_{0{,}3n}^{0{,}3n} \cos n\omega \, d\omega$$

$$+\int_{-0{,}3n}^{0{,}4n} 4\cos n\omega \, d\omega - \frac{10}{\pi}\int_{0{,}3n}^{0{,}4n} \omega \left(\frac{\sin n\omega}{n}\right)' d\omega \Bigg]$$

$$= \frac{1}{2n}\Bigg[4 \cdot \frac{\sin n\omega}{n}\Bigg|_{-0{,}4n}^{-0{,}3n} + \frac{10}{\pi}\left(\frac{\omega \cdot \sin n\omega}{n}\Bigg|_{0{,}4n}^{0{,}3n} - \int_{-0{,}4n}^{-0{,}3n} \omega' \frac{\sin n\omega}{n} \, d\omega\right) + \frac{\sin n\omega}{n}\Bigg|_{0{,}3n}^{0{,}4n}$$

$$+ \frac{4\sin n\omega}{n}\Bigg|_{0{,}3n}^{0{,}4n} - \frac{10}{\pi}\left(\frac{\omega \sin n\omega}{n}\Bigg|_{0{,}3n}^{0{,}4n} - \int_{0{,}3n}^{0{,}4n} \omega' \frac{\sin n\omega}{n} \, d\omega\right)\Bigg]$$

$$= \frac{1}{2n}\Bigg[\frac{4}{n}\left(\sin(-0{,}3\pi n) - \sin(-0{,}4\pi n)\right) + \frac{10}{\pi n}\left(-0{,}3n \sin(-0{,}3\pi n) + 0{,}4n \sin(-0{,}4\pi n)\right)$$

$$-\frac{10}{\pi n}\left(-\frac{\cos n\omega}{n}\Bigg|_{-0{,}4n}^{-0{,}3n}\right) + \frac{1}{n}\left(\sin(0{,}4\pi n) - \sin(0{,}3\pi n)\right) + \frac{4}{n}\left(\sin 0{,}4\pi n -\right.$$

$$\left.\sin(0{,}3\pi n)\right) - \frac{10}{\pi n}\left(0{,}4\pi n \sin 0{,}4\pi n - 0{,}3 \sin 0{,}3\pi n\right) + \frac{10}{\pi n^2} \cos \omega \Bigg|_{0{,}3n}^{0{,}4n}$$

$$= \frac{10}{\pi n^2}\left(\cos(0{,}3\pi n) - \cos(0{,}4\pi n)\right)$$

2. Σχεδίαση με χρήση συναρτήσεων αδιαφορίας

Βασίζεται στο μέσο τετραγωνικό σφάλμα και λαμβάνει υπόψη τις πρακτικές και όχι τις ιδανικές προδιαγραφές.

(στην περίπτωση που η D δεν είναι γνωστή στις γυμνές μεταβάσεις)

$$E^2(a_0,\dots,a_N,b_1,\dots,b_N) = \int_\tau W^2(\omega)\,|D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})|^2\,d\omega$$

τ: Γ γυμνή διαβάσεις ∪ Γ γυμνή απόκοπης

$$= \int_\Gamma W^2(\omega)\,|D_r(e^{j\omega}) - R_r(e^{j\omega})|^2\,d\omega + \int_\Gamma W^2(\omega)\,|D_i(e^{j\omega}) - R_i(e^{j\omega})|^2\,d\omega$$

$L = 2N+1$

$$\int_\Gamma W^2(\omega)\,D_r(e^{j\omega})\cos n\omega\,d\omega =$$

$$\alpha_0\int_\Gamma W^2(\omega)\cos n\omega\,d\omega + 2a_1\int_\Gamma W^2(\omega)\cos\omega\cos n\omega\,d\omega + \dots + 2a_N\int_\Gamma W^2(\omega)\cos N\omega\cos n\omega\,d\omega$$

$n = 0,\dots,N.$

$$\int_\Gamma W^2(\omega)\,D_i(e^{j\omega})\sin n\omega\,d\omega =$$

$$= 2b_1\int_\Gamma W^2(\omega)\sin n\omega\,d\omega + \dots + 2b_N\int_\Gamma W^2(\omega)\sin N\omega\sin n\omega\,d\omega$$

$n = 1,\dots,N$

$L=2N$

$$\int_T W^2(\omega) D_r(e^{j\omega}) \cos\frac{(2n-1)\omega}{2}\, d\omega = \qquad n=1,\dots,N$$

$$2a_1 \int_T W^2(\omega) \cos\frac{\omega}{2} \cos\frac{(2n-1)\omega}{2}\, d\omega + \dots$$

$$+\dots + 2a_N \int_T W^2(\omega) \cos\frac{(2N-1)\omega}{2} \cos\frac{(2n-1)\omega}{2}\, d\omega$$

$$\int_T W^2(\omega) D_i(e^{j\omega}) \sin\frac{(2n-1)\omega}{2}\, d\omega = \qquad n=1,\dots,N$$

$$= 2b_1 \int_T W^2(\omega) \sin\frac{\omega}{2} \sin\frac{(2n-1)\omega}{2}\, d\omega + \dots + 2b_N \int_T W^2(\omega) \sin\frac{(2N-1)\omega}{2} \sin\frac{(2n-1)}{2}\, d\omega,$$

Άσκηση

Σχεδιάστε κατωπεράτο FIR φίλτρο χαμηλών συχνοτ. $L=3$ με ζώνη διάβασης $[0\ 0{,}3\pi]$
ζώνη αποκοπής $[0{,}4\pi\ \ \pi]$
και $W(\omega)=1$

$$D=\begin{cases}1\\0\end{cases}$$

Λύση

Αφού D πραγ. $\rightarrow$ R πραγ. $\Rightarrow b_n=0$

$L=3 \Rightarrow 2N+1=3 \Rightarrow N=1$

Άρα $R(e^{j\omega}) = a_0 + 2a_1\cos\omega$

$$\int_{\Gamma} D(e^{j\omega})\cos n\omega \, d\omega = \alpha_0 \int_{\Gamma} \cos n\omega \, d\omega + 2a_1 \int_{\Gamma} \cos\omega \cos n\omega \, d\omega$$

$n=0,1$

$n=0$

$$\int_0^{0,3\pi} \cos 0 \, d\omega + \int_{0,4\pi}^{\pi} 0 \, d\omega = \alpha_0 \left[\int_0^{0,3\pi} \cos 0 \, d\omega + \int_{0,4\pi}^{\pi} \cos 0 \, d\omega \right]$$

$$+ 2a_1 \left[\int_0^{0,3\pi} \cos\omega \cdot \cos 0 \, d\omega + \int_{0,4\pi}^{\pi} \cos\omega \cos 0 \, d\omega \right]$$

$$\int_0^{0,3\pi} 1 \, d\omega = a_0 \left[\int_0^{0,3\pi} 1 \, d\omega + \int_{0,4\pi}^{\pi} 1 \, d\omega \right] + 2a_1 \left[\int_0^{0,3\pi} \cos\omega \, d\omega + \int_{0,4\pi}^{\pi} \cos\omega \, d\omega \right]$$

$n=1$

$$\int_0^{0,3\pi} \cos\omega \, d\omega + \int_{0,4\pi}^{\pi} 0 \cdot \cos\omega \, d\omega = a_0 \left[\int_0^{0,3\pi} \cos\omega \, d\omega + \int_{0,4\pi}^{\pi} \cos\omega \, d\omega \right]$$

$$+ 2a_1 \left[\int_0^{0,3\pi} \cos^2\omega \, d\omega + \int_{0,4\pi}^{\pi} \cos^2\omega \, d\omega \right]$$

$\alpha_0 = 0,3621$

$a_1 = 0,2860$

Aqui $R(e^{j\omega}) = 0,3621 + 2 \cdot 0,2860 \cos\omega$

Μαρτιος '09 / Ιανουαριος '08.

Θέμα 3b

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})|^2 \, d\omega \quad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{W^2(\omega)\, |D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})|^2}_{*} \, d\omega \quad (2)$$

$[0 \quad a\pi]$ διαβ.

$[b\pi \quad \pi]$ ανοικ.

$$(1) \int_{-\pi}^{-b\pi} * \, d\omega + \underbrace{\int_{-b\pi}^{-a\pi} * \, d\omega}_{=0} + \int_{-a\pi}^{a\pi} * \, d\omega + \underbrace{\int_{a\pi}^{b\pi} * \, d\omega}_{=0} + \int_{b\pi}^{\pi} * \, d\omega$$

$$(2) \int_{-\pi}^{-b\pi} x \, d\omega + \int_{-a\pi}^{a\pi} x \, d\omega + \int_{b\pi}^{\pi} x \, d\omega$$

1. $W^2(\omega) = 1$

2. Για να δίνουν τα δυο ολοκληρώματα τα ίδια αποτελέσματα για $a\pi$, $b\pi$ πρέπει

$D = R$ στις ζώνες μετάβασης

3 Min-Max

Χρησιμοποιείται ως κριτήριο ελαχιστοποίησης

$$E^{\infty}(a_0,\dots,a_N,b_1,\dots,b_N) = \max_{\omega} W(\omega)\,|D(e^{j\omega})-R(e^{j\omega})|$$

$$= \max_{\omega} W(\omega)\sqrt{(D_r(e^{j\omega})-R_r(e^{j\omega}))^2+(D_i(e^{j\omega})-R_i(e^{j\omega}))^2}$$

Σχεδιάστε Min-max κατωπεράτο FIR φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων με L=3 με ζώνη διαβάσης [0 0,3π], ζώνη απόσβεσης [0,4π π], ζώνη μετάβασης [0,3π 0,4π] και $W(\omega)=1$ που θα προσεγγίζει την $D=\begin{cases}1\\0\end{cases}$

ΛΥΣΗ

Αφού η $D\in R$ και η $R\in R \Rightarrow b_n=0$

Αφού $L=3 \Rightarrow 2N+1=3 \Rightarrow N=1$

Άρα $R=a_0+2a_1\cos\omega$

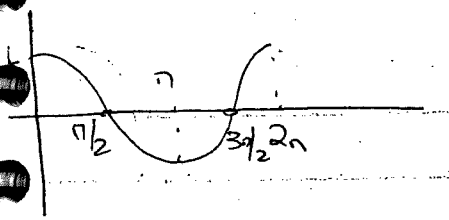
Σύμφωνα με το Θ. Εναλλαγής

Αναζητώ $K+1$ σημεία ($K=N+1$) (3 σημεία) στα οποία η συνάρτηση σφάλματος $|D(e^{j\omega})-R(e^{j\omega})|$ να είναι μέγιστη και να εναλλάσσεται

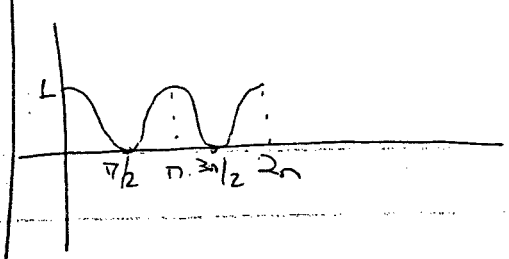
Πρόσημο

$$|D(e^{j\omega_1})-R(e^{j\omega_1})| = -|D(e^{j\omega_2})-R(e^{j\omega_2})| = |D(e^{j\omega_3})-R(e^{j\omega_3})|$$

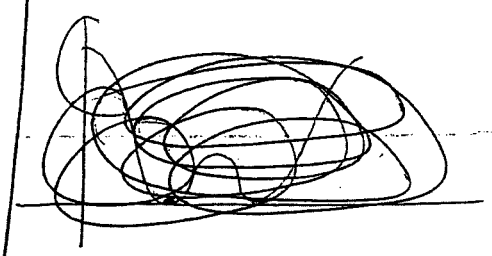
$\cos\omega$

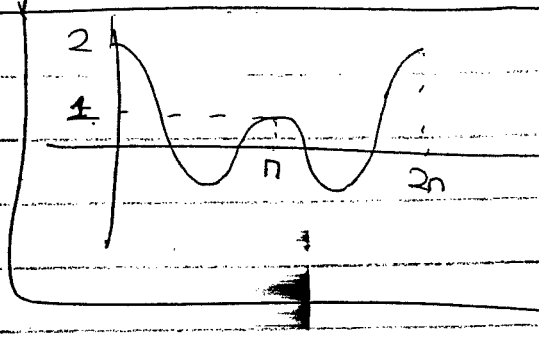


$\cos 2\omega$

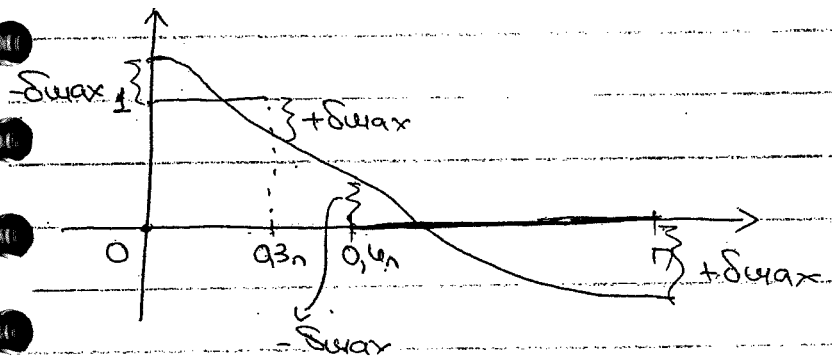


$\cos\omega + \cos 2\omega$





Θα σχεδιάσουμε



Τα 3 σημεία θα τα βρίσκω από τα ακρα των διων μεταβάσεων και τα 0, π

Τα πιθανα σημεία είναι (0 0,3π 0,4π) ή (0,3π 0,4π

Επιλέγω τα 0 0,3π 0,4π και αντικαθιστω στη συναρτηση σφάλματος

$D(0) - R(0) = -\delta max$ $\quad$ $1 - a_0 - 2a_1\cos 0 = -\delta max$

$D(0,3\pi) - R(0,3\pi) = \delta max$ $\quad$ $1 - a_0 - 2a_1\cos 0,3\pi = \delta max$

$D(0,4\pi) - R(0,4\pi) = -\delta max$ $\quad$ $0 - a_0 - 2a_1\cos 0,4\pi = -\delta max$

$a_0 = -0,1489$

$a_1 = 0,7236$

$\delta max = 0,2983$

Επειδή η D δεν είναι συμμετρική πρέπει να κάνω ένα λάθος στο η.

$$D(\eta) - R(\eta) = 0 - a_0 - 2a_1 \cos\eta$$
$$= -(-0{,}1489) + 2a_1$$
$$= 0{,}1489 + 2 \cdot 0{,}7236 = 1{,}5961 > \delta_{max}$$

Άρα έχω λάθος τριάδα και πάω στην (0,3η, 0,4η η) και ανακαθίστω.

Άσκηση

Υποθέστε ότι η ιδανική απόκριση πλάτους ενός ψηφιακού φίλτρου δίνεται από τη σχέση $D(\omega) = \sum_{n=0}^{N+1} d_n \cos n\omega$. Βρείτε την απόκριση συχνότητας του βέλτιστου φίλτρου μήκους $L=2N+1$ και γραμμικής φάσης R.

a. Min-Max

b. Με χρήση παραθύρων (ή L_2 ή ελαχίστων τετραγώνων).

Λύση

Επειδή η $D(\omega)$ είναι πραγματική και η $R(e^{j\omega})$ θα είναι πραγματική. $\Rightarrow$ $b_n=0$

$$R(e^{j\omega}) = a_0 + 2a_1\cos\omega + \dots + 2a_N\cos N\omega$$
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{N} 2a_k\cos k\omega$$

$$D(\omega) = \sum_{n=0}^{N+1} d_n\cos n\omega = d_0 + \sum_{n=1}^{N+1} d_n\cos n\omega$$

a. Min-Max

Με τη min-max αναζητούμε $k+1$ σημεία ωι στα οποία η συνάρτηση σφάλματος να είναι ίση και να εναλλάσσει πρόσημο.

$$|D(\omega) - R(e^{j\omega})| = \left| d_0 + \sum_{n=1}^{N+1} d_n\cos n\omega - a_0 - \sum_{n=1}^{N} 2a_n\cos n\omega \right| \quad \frac{a_0 = d_0}{2a_k = d_k \;\; \boxed{a_k = d_k/2}}$$

$$= \left| d_0 + \sum_{n=1}^{N+1} d_k\cos n\omega - d_0 - \sum_{k=1}^{N} d_k\cos n\omega \right| = |d_{N+1}\cos(N+1)\omega|$$

Η συνάρτηση σφάλματος θα είναι ίση όταν

$$\cos(N+1)\omega = \pm 1$$
$$(N+1)\omega = k\pi$$
$$\omega_k = \frac{k\pi}{N+1}$$

άρα αυτά βρίσκονται τα σημεία ωι στα οποία η συνάρτηση σφάλματος είναι ίση και εναλλάσσει

$\cos a \cos b =$
$\frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos($
$\cos^2 a = \frac{1}{2}\cos 2a +$

Os coeficientes são $R(e^{j\omega})$ para $L = 2N+1$

$$a_\ell = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_r(e^{j\omega})\cos \ell\omega \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{N+1} d_n \cos n\omega \cos \ell\omega \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{N+1} d_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\omega \cos \ell\omega \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big[d_0 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos 0 \cos \ell\omega \, d\omega}_{0} + d_1 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos\omega \cos \ell\omega \, d\omega}_{0} + \dots + d_\ell \int_{-\pi}^{\pi} \cos \ell\omega \cos \ell\omega \, d\omega + \dots + d_{N+1} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(N+1)\omega \cos \ell\omega \, d\omega}_{0}$$

- $n \neq \ell$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\omega \cos \ell\omega \, d\omega \overset{①}{=} \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+\ell)\omega \, d\omega + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-\ell)\omega \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sin(n+\ell)\omega}{n+\ell}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\frac{\sin(n-\ell)\omega}{n-\ell}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_\ell = \frac{1}{2\pi} d_\ell \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \ell\omega \, d\omega = \frac{1}{2\pi} d_\ell \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\ell\omega}{2} \, d\omega + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, d\omega \right]$$

$$\frac{1}{2\pi} d_\ell \left[\frac{1}{2}\frac{\sin 2\ell\omega}{2\ell}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\omega\Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \frac{1}{2\pi} d_\ell \frac{1}{2}(\pi - (-\pi))$$

$$= \frac{1}{2\pi} d_\ell \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{d_\ell}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} d_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos 0 \cos 0 \, d\omega = \frac{1}{2\pi} d_0 \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, d\omega = \frac{1}{2\pi} d_0 (\pi - (-\pi)) = d_0$$

Άσκηση 710 - Ιανιος

$\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1$

$\cos^2\omega = \frac{1}{2}\cos 2\omega + \frac{1}{2}$

$$D(\Omega) = -\sum_{n=0}^{N+1} d_n \sin^2\left(\frac{n\omega}{2}\right) \qquad L = 2N+1$$

$$= -\sum_{n=0}^{N+1} d_n \left(1 - \cos^2\left(\frac{n\omega}{2}\right)\right)$$

$$= -\sum_{n=0}^{N+1} d_n \left(1 - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2n\omega}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\sum_{n=0}^{N+1} d_n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos n\omega\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N+1} \frac{1}{2} d_n \cos n\omega - \sum_{n=0}^{N+1} \frac{d_n}{2}$$

Με τη μέθοδο min-max:

$$|D(\Omega) - R(e^{j\omega})| = \left|\sum_{n=0}^{N+1} \frac{1}{2} d_n \cos n\omega - \sum_{n=0}^{N+1} \frac{d_n}{2} - d_0 - \sum_{n=1}^{N} 2d_n \cos n\omega\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2} d_0 + \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{2} d_n \cos n\omega - \sum_{n=0}^{N+1} \frac{d_n}{2} - d_0 - \sum_{n=1}^{N} 2d_n \cos n\omega\right| =$$

$$\xRightarrow[\substack{d_n = 2d_n \\ \Rightarrow d_n = \frac{d_n}{2}}]{d_0 = d_0/2} \left|\cancel{\frac{1}{2} d_0} + \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{2} d_n \cos n\omega - \sum_{n=0}^{N+1} \frac{d_n}{2} - \cancel{\frac{d_0}{2}} - \sum_{n=1}^{N} \cancel{2}\frac{d_n}{\cancel{2}} \cos n\omega\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2} d_{N+1} \cos(N+1)\omega - \sum_{n=0}^{N+1} \frac{d_n}{2}\right|$$

Η συνάρτηση σφάλματος γίνεται ελάχιστη όταν $\cos(N+1)\omega = \pm 1$

$$\boxed{\omega_k = \frac{k\pi}{n+1}}$$

Η μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων:

Οι συντελεστές του $R(e^{jw})$ για $L=2N+1$:

$$\alpha_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{N+1}\frac{1}{2}\, d_n \cos n\cdot w - \sum_{n=0}^{N+1}\frac{d_n}{2}\right)\cos lw\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{N+1}\frac{1}{2}\, d_n\cdot\cos n\cdot w\cdot\cos lw\, dw - \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{N+1}\frac{d_n}{2}\cos lw\cdot dw\right]$$

(A) (B) $\to 0$

B): $\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{N+1}\frac{d_n}{2}\cdot\cos lw\cdot dw = \sum_{n=0}^{N+1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d_n}{2}\cdot\cos lw\cdot dw =$

$= \sum_{n=0}^{N+1}\frac{d_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos lw\, dw = \phi$ $\to 0$ (για $l\neq 0$ $d_n = \pi$ και η Α διάσταση ολοκληρώνει ολόκληρη κυμ/τα)

A): $\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{N+1}\frac{1}{2}\, d_n\cdot\cos n\cdot w\cdot\cos lw\, dw =$

$= \sum_{n=0}^{N+1}\frac{d_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\cdot w\cdot\cos lw\, dw = \frac{1}{2\pi}\left[d_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos 0\cos lw\, dw + d_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos w\cos lw\, dw\right.$ $\to 0$

$\left. + \dots + \frac{d_l}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos lw\cdot\cos lw\, dw + \dots + \frac{d_{N+1}}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(N+1)w\cos lw\, dw\right]$ $\to 0$

$n \neq l$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n w \cos l w \, dw = \dots = \phi$$

$$\alpha_l = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha_l}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos lw \cdot \cos lw \, dw\right) = \frac{1}{2\pi}\left|\alpha_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 lw \, dw\right. =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\alpha_l}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2lw}{2} \, dw + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dw\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\alpha_l}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2lw}{2l}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\left(w\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\alpha_l}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2\pi l}{2l} - \frac{\sin(-2\pi l)}{2l}\right) + \frac{2}{4}\pi\right]$$

$$= \frac{\alpha_l}{4}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{\alpha_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 0 \cdot \cos 0 \, dw = \frac{1}{2\pi}\frac{\alpha_0}{2} 2\pi = \frac{\alpha_0}{4} = \frac{\alpha_0}{2}$$

Σελίδα 07

Μια εκφώνηση : $D(\underline{0}) = \sum_{n=0}^{N+1} d_n \cos^n \omega$ (1)

Λόγω του πολυωνύμου Chebyshev $T_N(x) = 2x T_{N-1}(x) - T_{N-2}(x)$

με $x = \cos\omega$

$T_N(x) = \cos N\omega$ προκύπτει ότι $\cos n\omega = \sum_{m=0}^{n} d_m \cos^m \omega$ (2)

Παρατηρούμε ότι η (1) έχει προκύψει από μία σχέση της μορφής

(3) $D(\underline{0}) = \sum_{n=0}^{N+1} d_n \cos n\omega$ στην οποία αντικαταστήσαμε τη (2)

Άρα είτε πρόσεξαν τη (3) είτε τη (1) είναι το ίδιο.

Σελίδα 10

$$D(\underline{0}) = \sum_{n=0}^{N+1} a_n \left(\cos^2\frac{\omega}{2} - \sin^2\frac{\omega}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{N+1} a_n \left(\cos^2\frac{\omega}{2} + \cos^2\frac{\omega}{2} - 1\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{N+1} a_n \left(2\cos^2\frac{\omega}{2} - 1\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{N+1} a_n \left(\cos\omega + 1 - 1\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{N+1} a_n (\cos\omega)^n = \sum_{n=0}^{N+1} a_n \cos^n \omega.$$

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$

$\cos^2 a = \frac{1}{2}\cos 2a + \frac{1}{2}$

$2\cos^2 a = \cos 2a + 1$

Σεπτ 09

Θεμα 3b

$$h(n) = \frac{2}{N+1} \qquad n=0,\dots,2N$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)} R(e^{j\omega}) \qquad \phi(\omega) = -\frac{L-1}{2}\omega$$

$R(e^{j\omega})$ = αποκριση πλατους

$$= -\frac{2N+1-1}{2}\omega$$

$$= -N\omega$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{2N} h(n) e^{-jn\omega}$$

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$$

$$e^{-j\phi} = \cos\phi - j\sin\phi$$

$$= h_0 + h_1 e^{-j\omega} + h_2 e^{-2j\omega} + \dots + h_{2N} e^{-j2N\omega}$$

$$= e^{-jN\omega}\left(h_0 e^{jN\omega} + h_1 e^{j(N-1)\omega} + \dots + h_N + \dots + h_{2N-1} e^{-j(N-1)\omega} + h_{2N} e^{-jN\omega}\right)$$

$$= e^{-jN\omega}\left(h_0(\cos N\omega + j\sin N\omega) + h_1(\cos(N-1)\omega + j\sin(N-1)\omega) + \dots + h_N + \dots + h_{2N-1}(\cos(N-1)\omega - j\sin(N-1)\omega) + h_{2N}(\cos N\omega - j\sin N\omega)\right)$$

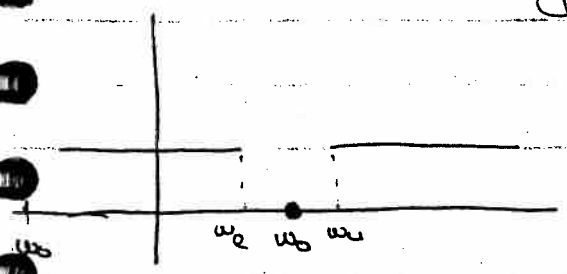
$$= e^{-jN\omega}\Big[\left(h_0\cos N\omega + h_1\cos(N-1)\omega + \dots + h_N + \dots + h_{2N-1}\cos(N-1)\omega + h_{2N}\cos N\omega\right) + j\left(h_0\sin N\omega + h_1\sin(N-1)\omega + \dots - h_{2N-1}\sin(N-1)\omega - h_{2N}\sin N\omega\right)\Big]$$

$$= e^{-jN\omega}\left[(h_0 + h_{2N})\cos N\omega + \dots + h_N\right] + j\left[\sin N\omega\,\cancel{(h_0 - h_{2N})}^{0} + \dots + \sin\omega\,\cancel{(h_{N-1} - h_{N+1})}^{0}\right]$$

$$= e^{-jN\omega}\underbrace{\left(\frac{2}{N+1} + \frac{4}{N+1}\cos\omega + \dots + \frac{4}{N+1}\cos N\omega\right)}_{R(e^{j\omega})}$$

Η αποκριση συχνοτητας αφορα ενα FIR φιλτρο γραμμικης φασης $\phi(\omega) = -N\omega$ του προσεγγιζει πραγματικη D (αφου R είναι πραγματ

Φίλτρα εγκοπής



Τα φίλτρα εγκοπής είναι αυτά με τα οποία μπορούμε να διαμορφώνουμε δυναμικά συχνότητα από ένα σήμα. Ένα επιθυμητό να εξαλειφθεί ή παρεμβαλλόμενη συχνότητα από το σήμα χωρίς να επηρεαστεί η υπόλοιπη πληροφορία.

Υπάρχει μία μόνη συχνότητα (ω_l ή ω_{up}) εκτός της οποίας η D είναι 1.

Η ανάγκη πρώτα εξασφαλίζεται ότι η ω_0 εξαλείφεται πλήρως

$$H(e^{j\omega_0}) = 0 \quad \text{άρα και η} \quad \boxed{R(e^{j\omega_0}) = 0}$$

Για να μην εμφανίζει το φίλτρο μονοτονη συμπεριφορά στις μεταβάσεις πρέπει το ω_0 να είναι σημείο ελαχίστου της $R(e^{j\omega})$.

Δηλαδή πρέπει $\boxed{R'(e^{j\omega})\big|_{\omega=\omega_0} = 0}$

Θέμα 4α - Ιανουάριος 2009

$L = 5$

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2 & 0 \le \omega \le \pi/4 \\ 0 & \omega = \pi/2 \\ 2 & 3\pi/4 \le \omega \le \pi \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Επειδή η $D=0$ σε ένα σημείο είναι φίλτρο εγκοπής

Επειδή

$D \in \mathbb{R} \Rightarrow R \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{b_n = 0}$

Επειδή $L=5 \Rightarrow 2N+1=5 \Rightarrow N=2$

Άρα $R(e^{j\omega}) = a_0 + 2a_1\cos\omega + 2a_2\cos 2\omega$.

Επειδή έχουμε φίλτρο εγκοπής

$R(\pi/2)=0 \qquad a_0 + 2a_1\cos\frac{\pi}{2} + 2a_2\cos\pi = 0$

$a_0 - 2a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 2a_2}$

$\underline{R'(\pi/2)=0}$

$R'(e^{j\omega}) = -2a_1\sin\omega - 4a_2\sin 2\omega$

$R'(\pi/2)=0 \qquad -2a_1\overset{1}{\sin\pi/2} - 4a_2\overset{0}{\sin\pi} = 0$

$-2a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$

Άρα η $R(e^{j\omega}) = 2a_2 + 2a_2\cos 2\omega \qquad \cos^2\omega = \frac{1}{2}\cos 2\omega + \frac{1}{2}$

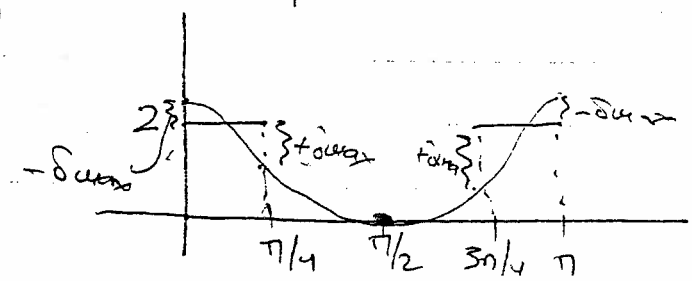
$= 2a_2(1+\cos 2\omega) \qquad 2\cos^2\omega = \cos 2\omega + 1$

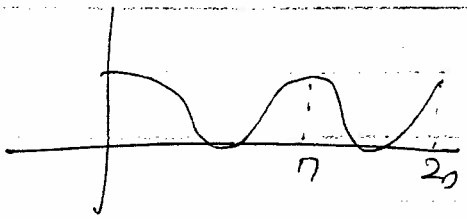
$= 4a_2\cos^2\omega$

Στη μέθοδο win-max αναζητώ $k+1$ $(k=N-1)$ σημεία ώστε στα οποία συνάρτηση σφάλματος να είναι μέγιστη και να εναλλάσσεται

Πρόσημο

Αναζητώ 2 σημεία.





$\cos\pi/4 = \sqrt{2}/2$

Θα Αναζητω τα σημεια στα οποια των Jωνων μεταβασης καθε και στα 0, π.

Θα επιλεξω από τα $\underline{(0\ \pi/4)}$ ή $(0\ 3\pi/4)$ ή $(\pi/4\ \pi)$ ή $(3\pi/4\ \pi)$

Επιλεγω τα $(0\ \pi/4)$ και αντικαθιστω στη συναρτηση εξασθενησης.

$$\left.\begin{array}{ll} D(0)-R(0) = -\delta_{max} & 2-4a_2 = -\delta_{max} \\ D(\pi/4)-R(\pi/4) = \delta_{max} & 2-\cancel{4}^{2}a_2\frac{1}{\cancel{2}} = \delta_{max} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$4-6a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 2/3$$

$$2-\frac{4}{3} = \delta_{max} \Rightarrow \delta_{max} = 2/3$$

Δ χρειαζεται επαληθευση γιατι η $D(e^{j\omega})$ ειναι συμμετρικη.

Αρα $\boxed{R(e^{j\omega}) = \frac{4}{3}\cos^2\omega.}$

Π/Ω

Σεπτ '02	Σεπτ '06	Σεπτ '07
Θεμα 3.	Θεμα 2α	Θεμα 2.

10/10/2010

$$D(\Omega) = +\sum_{n=0}^{N+1} d_n \cos^2\left(\frac{n\omega}{2}\right)$$

(α) Μεγ.min = max

(β) Μεταβλητή παραδίδεται (ελάχιστη τετράγωνα)

Εάν η $D(\Omega)$ είναι πραγματική και η $R(e^{j\omega})$ θα είναι πραγματική. Δη-
λ. $b_n = 0$

Δρα: $R(e^{j\omega}) = \alpha_0 + 2\alpha_1 \cos\omega + \dots + 2\alpha_N \cos N\omega$

$$= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N} 2\alpha_n \cos n\omega \qquad \cos^2\omega = \frac{1}{2}\cos 2\omega + \frac{1}{2}$$

$$D(\Omega) = +\sum_{n=0}^{N+1} d_n \cos^2\left(\frac{n\omega}{2}\right) = \sum_{n=0}^{N+1} d_n \left(\frac{1}{2}\cos n\omega + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N+1} d_n \frac{1}{2}\cos n\omega + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N+1} d_n$$

$$= \frac{d_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N+1} d_n \cos n\omega + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N+1} d_n$$

$$\Rightarrow |D(\Omega) - R(e^{j\omega})| = \left|\frac{d_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N+1} d_n \cos n\omega + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N+1} d_n - \alpha_0 - \sum_{n=1}^{N} 2\alpha_n \cos n\omega\right| =$$

$2\alpha_n = \frac{d_n}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha_n = \frac{d_n}{4}} \Rightarrow \boxed{\alpha_0 = \frac{d_0}{2}}$

$$= \left|\frac{\cancel{d_0}}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N+1} d_n \cos n\omega + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N+1} d_n - \frac{\cancel{d_0}}{2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{d_n}{2}\cos n\omega\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2} d_{(N+1)} \cos(N+1)\omega + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N+1} d_n\right|$$

Συνεπώς υπάρχουν ίσοι [illegible] τέτοιοι

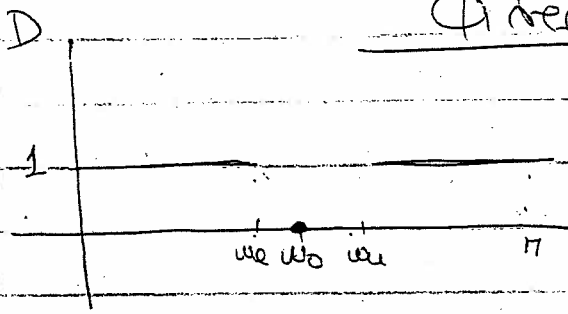
$$\cos(N+1)\omega = \pm 1$$

$$(N+1)\omega = k\pi$$

$$\boxed{\omega_k = \frac{k\pi}{N+1}}$$

Φίλτρα Εγκοπής

10/12



Υπάρχει για ζώνη συχνοτήτων εκτός αυτής η $D(e^{j\omega})$ είναι 1 $[\omega_c, \omega_u]$. Στο εσωτερικό αυτής της ζώνης υπάρχει η ω_0 όπου θέλουμε

$$D(\omega_0)=0$$

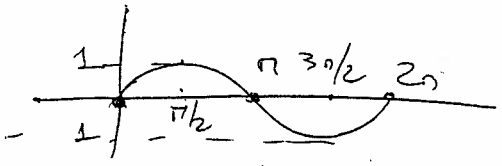
Άρα πρέπει $H(e^{j\omega_0})=0 \Rightarrow \boxed{R(e^{j\omega_0})=0}$

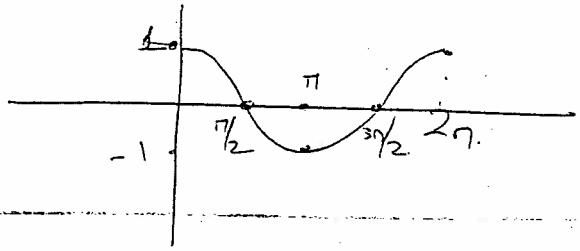
Το φίλτρο θεωρείται σα φίλτρο αποκοπής ζώνης με μόνο για συχνότητα και ζώνες μεταβάσεις $[\omega_c\ \omega_0]$, $[\omega_0\ \omega_u]$

Τα FIR υλοποιούνται με μία από τις 3 μεθόδους σχεδίασης των FIR φίλτρων

Επειδή η $R(e^{j\omega})$ πρέπει να μην εμφανίζει μονοτονη συμπεριφορά στο ω_0 και αυτό να είναι ελάχιστο της συνάρτησης πρέπει

$$\boxed{R'(e^{j\omega})\Big|_{\omega_0}=0}$$





Θέμα Ιουν'10 / Ιουν'09

Να σχεδιαστεί με τη μέθοδο min-max ένα FIR φίλτρο γραμμικής φάσης, L=5 που να προσεγγίζει την παρακάτω $D(e^{j\omega})$.

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2 & 0 \le \omega \le \pi/4 \\ 0 & \omega = \pi/2 \\ 2 & 3\pi/4 \le \omega \le \pi \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Αφού η $D(e^{j\omega})$ είναι 0 σε ένα γνωστό σημείο τότε το φίλτρο είναι εγκοπής.

$R(\pi/2) = 0$

$R'(\pi/2) = 0$

Αφού η $D \in \mathbb{R}$ και η $R \in \mathbb{R} \Rightarrow b_n = 0$

$L = 5$

$2N+1 = 5$

$\boxed{N=2}$

Άρα $R(e^{j\omega}) = a_0 + 2a_1\cos\omega + 2a_2\cos 2\omega$

$R(\pi/2) = 0 \Rightarrow a_0 + 2a_1\cos\frac{\pi}{2} + 2a_2\cos\pi = 0$

$a_0 - 2a_2 = 0$

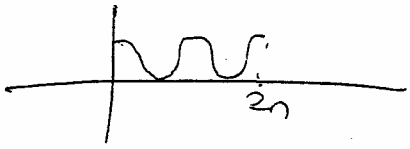
$\boxed{a_0 = 2a_2}$

$R'(e^{j\omega}) = -2a_1\sin\omega - 4a_2\sin 2\omega$

$R'(\pi/2) = 0$

$-2a_1\sin\frac{\pi}{2} - 4a_2\sin\pi = 0$

$-2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$



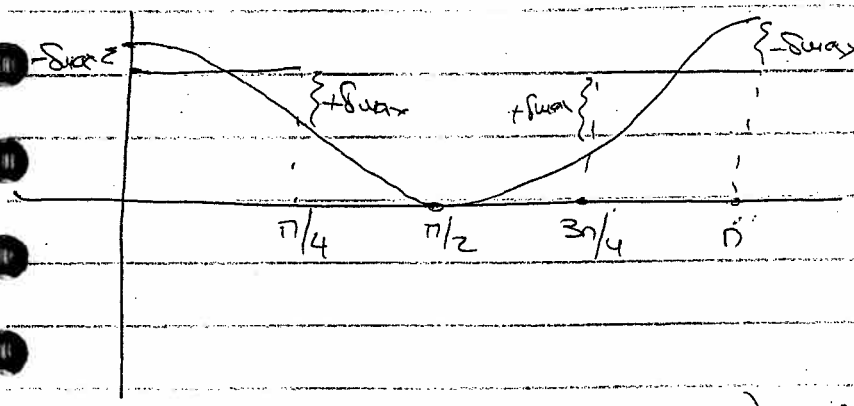
Άρα η $R(e^{j\omega}) = 2a_2 + 2a_2\cos 2\omega$ $\quad \cos^2\omega = \frac{1}{2}\cos 2\omega + \frac{1}{2}$

$= 2a_2(1+\cos 2\omega)$ $\quad 1+\cos 2\omega = 2\cos^2\omega$

$= 4a_2\cos^2\omega$

Με τη μέθοδο min-max

για βρούμε $k+1$ σημεία ώστε $(k = N-1)$ στα οποία η διαφορά σφάλματος να είναι μέγιστη και να εναλλάσσεται πρόσημο.



$\Rightarrow$ Πιθανά σημεία εύρεσης τα ακρα μεγιστου μεταβασης και τα $(0,\pi)$.

Πιθανά διαστήματα είναι $(0, \pi/4)$, $(0\ 3\pi/4)$, $(\pi/4\ \pi)$, $(\frac{3\pi}{4}\ \pi)$

Επιλέγω τα $(0, \pi/4)$ και αντικαθιστώ στη συνάρτηση σφάλματος.

$D(0) - R(0) = -\delta_{max}$ $\qquad 2 - 4a_2 = -\delta_{max}$

$D(\pi/4) - R(\pi/4) = \delta_{max}$ $\qquad 2 - 4a_2\frac{1}{2} = \delta_{max}$

$4 - 6a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 2/3$

$\delta_{max} = 2 - \frac{4}{3} = 2/3$

Άρα $R(e^{j\omega}) = 4\cdot\frac{2}{3}\cos^2\omega = \frac{8}{3}\cos^2\omega$

Άσκηση

Να σχεδιαστεί FIR φίλτρο γραμμικής φάσης ~~τάξης~~ τάξης $L=5$ που να προσεγγίζει την παρακάτω συνάρτηση

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0{,}2\pi \le \omega \le 0{,}8\pi \\ 0 & \omega = 0 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Αφού η $D(e^{j\omega})$ είναι 0 ~~[illegible]~~ σε ένα μόνο σημείο τότε το φίλτρο είναι εξωτικό.

$D(\omega)=0$

$D'(\omega)=0$

Αφού η $D \in R$ και η $R \in R$ άρα: $b_n=0$

$L=5 \Rightarrow 2N+1=5 \Rightarrow \boxed{N=2}$

Άρα: $R(e^{j\omega}) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{2} 2\alpha_n \cos n\omega$

$$\Rightarrow \boxed{R(e^{j\omega}) = \alpha_0 + 2\alpha_1 \cos\omega + 2\alpha_2 \cos 2\omega}$$

$R(0) = \alpha_0 + 2\alpha_1 \cos 0 + 2\alpha_2 \cos 0$

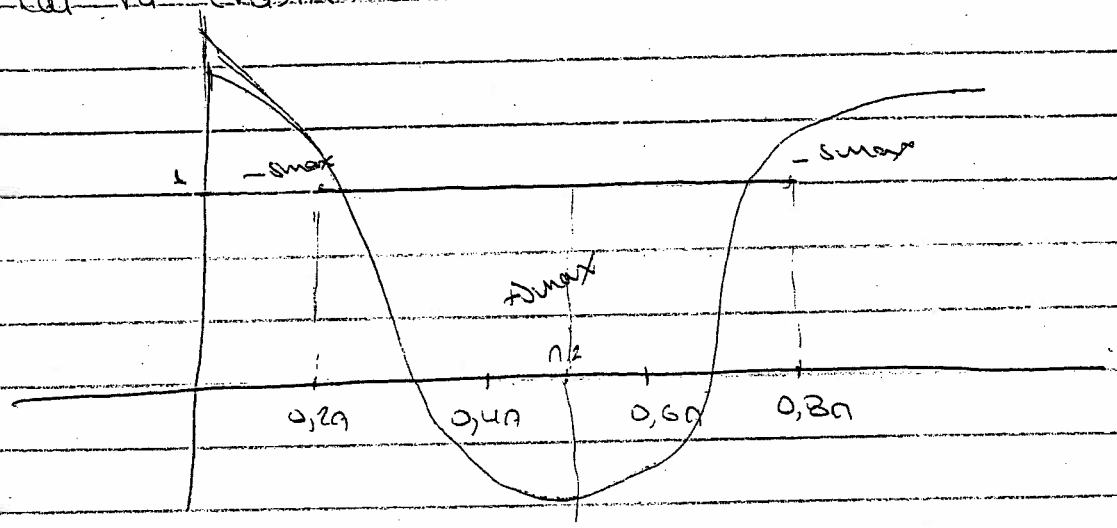
$= \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 0}$ (1) $\Rightarrow \alpha_0 = -2\alpha_1 - 2\alpha_2$

$R'(e^{j\omega}) = -2\alpha_1 \sin\omega - 4\alpha_2 \sin 2\omega$

$\Rightarrow R'(0) = -2\alpha_1 \sin 0 - 4\alpha_2 \sin 0 \Rightarrow \boxed{0=0}$

$\Rightarrow R(e^{j\omega}) = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_1 \cdot \cos\omega + 2\alpha_2 \cdot \cos 2\omega$

Σύμφωνα με τη μέθοδο min-max αναζητούμε ~~[illegible]~~ τρία σημεία στα οποία η συνάρτηση σφάλματος να είναι μέγιστη και να εναλλάσσει



Δημιουργούμε τα σημεία του συνάρτησης σφάλματος:

$$\left.\begin{aligned} |D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})| &= D(0{,}2\pi) - R(0{,}2\pi) = -\delta_{max} \\ &= D(0{,}5\pi) - R(0{,}5\pi) = \delta_{max} \\ &= D(0{,}8\pi) - R(0{,}8\pi) = -\delta_{max} \end{aligned}\right\}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $\alpha_1, \alpha_2, \delta$

Ψηφιακοί Διαφοριστές.

Ένα ψηφιακό σήμα δεν έχει νόημα να ορίσουμε τη παράγωγο του ίδιου το σήμα αυτό αποτελεί δειγματοληψία ενός αναλογικού σήματος και επιθυμία να αναπτύξουμε και δειγματοληψία του παράγωγου του $x(t)$.

Έστω αναλογικό $x_a(t) \xrightarrow{MF} X_a(j\Omega)$

$$x_n = x_a(nT_s) \xrightarrow{MF} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} X_a\left(j\frac{\omega}{T_s}\right)$$

Έστω $y_a(t) = \dot{x}_a(t) \xrightarrow{MF} Y_a(j\Omega) = j\Omega X_a(j\Omega)$

$$y_n = y_a(nT_s) \xrightarrow{MF} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} Y_a\left(j\frac{\omega}{T_s}\right)$$

$$= \frac{1}{T_s} j\Omega X_a\left(j\frac{\omega}{T_s}\right)$$

$$= \frac{1}{T_s} j\frac{\omega}{T_s} X_a\left(j\frac{\omega}{T_s}\right)$$

$f = \lambda f_s$

$\Omega = \frac{\omega}{T_s}$

$\Omega f = 2\pi\lambda \cdot f_s$

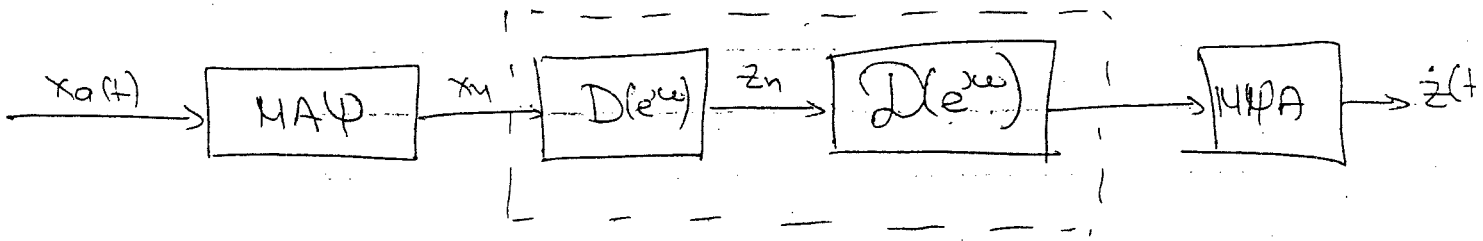
$\Omega = \frac{\omega}{T_s}$

$$Y(e^{j\omega}) = \underbrace{\left(j\frac{\omega}{T_s}\right)}_{D(e^{j\omega})} X(e^{j\omega})$$

$$\longrightarrow \boxed{D(e^{j\omega})} \longrightarrow$$

η απόκριση συχνότητα του ιδανικού διαφοριστή

Έστω $x_a(t) = z_a(t) + n_a(t)$



$$\bar{D}(e^{j\omega}) = D(e^{j\omega}) \cdot D(e^{j\omega})$$

Η ασυμμετρία του ιδανικού διαφορικού δεν είναι υπερβολικά σημαντική και αυξάνει κάποιο φορά στον θόρυβο σαν έξοδο τον δημιουργούμενο της παραμόρφωσης του σήματος πληροφορίας τότε ανιχνεύουμε φιλτράρισμα και διαφόριση.

Άσκηση

Να βρείτε την ποιότητα του προσεγγιστικού ιδανικού διαφοριστή από τον αριθμητικό διαφοριστή πεπερασμένου φάσματος :

$$y_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{T_s} \quad (1)$$

ΛΥΣΗ

Εφαρμόζω Μ/Ζ στον (1) :

$$Y(z) = \frac{X(z) - z^{-1}X(z)}{T_s} = \frac{X(z)(1-z^{-1})}{T_s}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-z^{-1}}{T_s}$$

$$z = e^{j\omega} \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-j\omega}}{T_s} = e^{-j\omega/2}\,\frac{2j\sin\omega/2}{T_s}$$

σταθερή χρονική καθυστέρηση

$$\frac{|D-R|}{|D|} = \frac{\left|\frac{j\omega}{T_s} - \frac{2j\sin\omega/2}{T_s}\right|}{\left|\frac{j\omega}{T_s}\right|}$$

Το οποίο είναι μεγάλο για $\omega = \pi$

Φηφ. Ολοκληρωτές

Σε αντιστοιχία με ψηφιακή διαφόριση είναι δυνατόν να ορισθεί και ψηφιακή ολοκλήρωση.

Έστω αναλογικό $x_a(t) \xrightarrow{MF} X_a(j\Omega)$

$$x_n = x_a(nT_s) \xrightarrow{MF} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} X_a\left(\frac{j\omega}{T_s}\right)$$

$$\text{Έστω } y_a(t) = \int_{-\infty}^{t} x_a(\tau)\,d\tau \xrightarrow{MF} Y_a(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega} X_a(j\Omega)$$

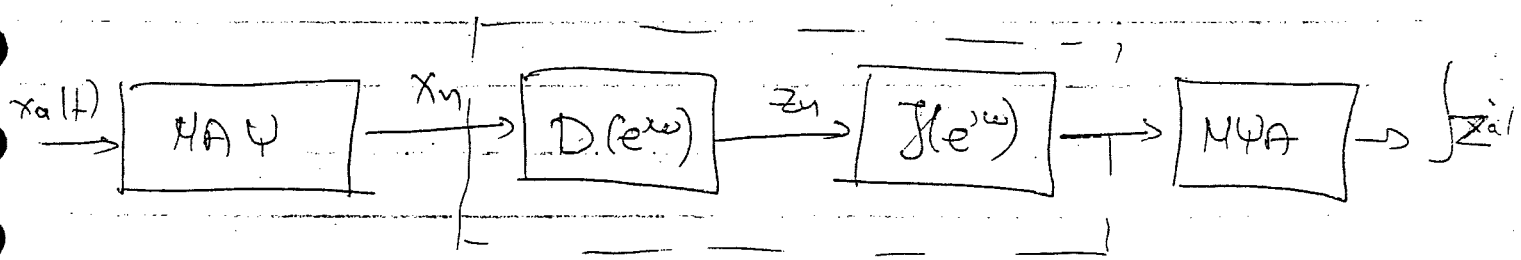
$$y_n = y_a(nT_s) \xrightarrow{MF} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} Y_a\left(\frac{j\omega}{T_s}\right)$$

$$= \frac{1}{T_s} \cdot \frac{T_s}{j\omega} X_a\left(\frac{j\omega}{T_s}\right)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{T_s}{j\omega} X(e^{j\omega})$$

$$J(e^{j\omega})$$

η απόκριση συχνότητας του ψηφιακού ολοκληρωτή



$$\bar{D}(e^{j\omega}) = D(e^{j\omega})\,J(e^{j\omega})$$

Άσκηση

Να δείτε την ποιότητα της προσέγγισης του αριθμητικού ολοκληρωτή ~~σε~~ για γραμμικό ολοκλήρωμα

κανόνας ορθογωνίου

$$y_n = y_{n-1} + T_s x_{n-1}$$

κανόνας τραπεζίου (HW)

$$y_n = y_{n-1} + 0{,}5 T_s (x_n + x_{n-1})$$

κανόνας simpson

$$y_n = y_{n-2} + \frac{T_s}{3}(x_n + 4x_{n-1} + x_{n-2}) \quad (HW)$$

Λύση

Εφαρμόζω Μz στον κανόνα ορθογωνίου:

$$Y(z) = z^{-1} Y(z) + T_s z^{-1} X(z) \Rightarrow Y(z) - z^{-1} Y(z) = z^{-1} X(z) T_s$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(z) = \frac{z^{-1} X(z) T_s}{1 - z^{-1}}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} =$$

$$= \frac{z^{-1} T_s}{1 - z^{-1}} \Rightarrow \boxed{H(z) = T_s \cdot \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}}$$

$$\text{για } z = e^{j\omega} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = T_s \frac{e^{-j\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega/2} \frac{T_s}{2j \sin \omega/2}$$

φάση που δίνει καθυστέρηση

$$\frac{|J(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|}{|J(e^{j\omega})|}$$

είναι μικρό για $\omega = \eta$.

Άσκηση

Να σχεδιάσετε αναλογικό χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth τάξης $L=3$ με $\Omega_c=0,5$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου Butterworth $L=3$ δίνεται από τη σχέση:

$$H(s)=\frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s^2+\Omega_c\cdot s+\Omega_c^2)}$$

$$=\frac{(0,5)^3}{(s+0,5)(s^2+0,5s+0,5^2)}$$

Άσκηση

Να σχεδιάσετε αναλογικό χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth τάξης $L=2$ με $\Omega_c=0,2\pi$

Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου Butterworth $L=2$ είναι από τη σχέση:

$$H(s)=\frac{\Omega_c^2}{s^2+\sqrt{2}\,\Omega_c s+\Omega_c^2}=\frac{(0,2\pi)^2}{s^2+\sqrt{2}\cdot 0,2\pi s+(0,2\pi)^2}$$

Άσκηση

Σχεδιάστε αναλογικό κατωπεράτο φίλτρο Butterworth $n=2$ με $\Omega_p = 1\,kHz$, $\Omega_s = 2\,kHz$ και $W_p = 1$, $W_s = 10$

ΛΥΣΗ

$$W_p = \frac{W_p}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2n}}} = \frac{W_s}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2n}}}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\Omega_c}\right)^4}} = \frac{10}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{\Omega_c}\right)^4}} \quad (1)$$

γίνεται τετράγωνο

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\Omega_c}\right)^4}} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\Omega_c}\right)^4} = \frac{100}{1+16\left(\frac{1}{\Omega_c}\right)^4}$$

Θέτω $\left(\frac{1}{\Omega_c}\right)^4 = x$

$$1 - \frac{2}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{1+x} = \frac{100}{1+16x}$$

γίνεται τετράγωνο

$$\Rightarrow \left(\left(1+\frac{1}{1+x}\right) - \frac{100}{1+16x}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{1+x}}\right)^2$$

$$\left(1+\frac{1}{1+x}\right)^2 - 2\left(1+\frac{1}{1+x}\right)\left(\frac{100}{1+16x}\right) + \frac{10^4}{(1+16x)^2} = \frac{4}{1+x} \quad (4)$$

Από την (4) θα προκύψουν 4 ρίζες για το x και κρατάμε τις θετικές τιμές

$x_1 = 11,9303$ $\qquad \Omega_{c1} = 0,5301$

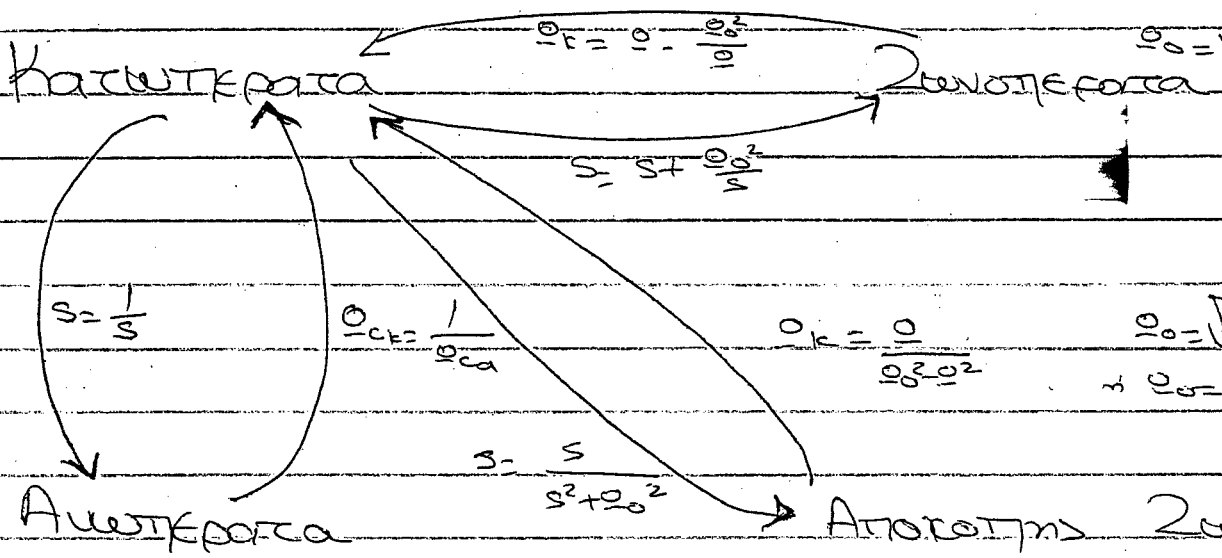
$x_2 = 2,6239$ $\qquad \Omega_{c2} = 0,7857$

Πρέπει να δώσω την Ω_c που επαληθεύει την (1)

Άρα $\Omega_c = 0,5381$

Άρα $H(s) = \dfrac{(0{,}5381)^2}{s^2+\sqrt{2}(0{,}5381)s+(0{,}5381)^2}$

Σχεδιαγράμμα δομών ανωπεράτων φίλτρων



π.χ. Σχεδιάστε αναλογικό ανωπεράτο φίλτρο Butterworth τάξης $L=3$ με $\Omega_c = 0{,}3\pi$.

ΛΥΣΗ

Πρέπει να μετατρέψω τη συχνότητα του ανωπεράτου σε συχνότητα χαμηλοπεράτου

$$\Omega_c = \frac{1}{\Omega_c} = \frac{1}{0{,}3\pi}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του χαμηλοπεράτου φίλτρου Butterworth τάξης $L=3$ είναι

$$H(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s^2+\Omega_c s+\Omega_c^2)} = \frac{\left(\frac{1}{0{,}3\pi}\right)^3}{\left(s+\frac{1}{0{,}3\pi}\right)\left(s^2+\frac{1}{0{,}3\pi}s+\left(\frac{1}{0{,}3\pi}\right)^2\right)}$$

Για να πάρω τη συνάρτηση μεταφοράς του αντίστοιχου συνεχούς θέτω όπου $s \to 1/s$

$$H(s) = \frac{\left(\frac{1}{93n}\right)^3}{\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{93n}\right)\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{93ns} + \left(\frac{1}{93n}\right)^2\right)}$$

Να σχεδιάστε αναλογικό αντιστροφο φίλτρο Butterworth τέταρτης τάξης με $\Omega_c = \sqrt{3}/3$.

Λύση

$$\Omega_c = \frac{1}{\Omega_c} = \frac{1}{\sqrt{3}/3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του κανονικοποιημένου φίλτρου Butterworth τάξης L=2 είναι

$$H(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\,\Omega_c s + \Omega_c^2} = \frac{(\sqrt{3})^2}{s^2 + \sqrt{2}\sqrt{3}s + (\sqrt{3})^2} = \frac{3}{s^2 + (\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\,s + 3)}$$

$$= \frac{3}{s^2 + (\sqrt{6}s + 3)}$$

Θέτω όπου $s = \frac{1}{s}$

$$H(s) = \frac{3}{\left(\frac{1}{s}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\frac{1}{s} + 3\right)} = \frac{3}{1/s^2 + (\sqrt{6}/s + 3)}$$

Θέμα 3b / Ιαν '09 – 3α – Σεπτ '09

κανονικοποιημένα $\boxed{\Omega_c = 1}$ $\quad |H(j\Omega)|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2L}}$

κατωπεράτα

Butterworth

$L=3$

$$= \frac{1}{1+\Omega^{2L}}$$

$\Omega^3 = \Omega^3 - 3/4\,\Omega$

$$= \frac{1}{1+\Omega^6}$$

Τι φίλτρο πρόκειται

$C_N(x) = 2x\,C_{N-1}(x) - C_{N-2}(x)$

$C_0(x) = 1$

$C_1(x) = x$

$$= \frac{1}{1+\left(\Omega^3 - \frac{3}{4}\Omega\right)^2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{1+\frac{1}{16}\left(4\Omega^3 - 3\Omega\right)^2}}$$

Η απόκριση μέτρου στο τετράγωνο του Chebyshev 1ου τύπου

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)} = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_3^2(\Omega)} \quad (1)$$

$$C_3(\Omega) = 2\Omega \cdot C_2(\Omega) - C_1(\Omega) = 2\Omega\cdot(2\Omega^2 - 1) - \Omega$$
$$= 4\Omega^3 - 3\Omega$$

$$C_2(\Omega) = 2\Omega \cdot C_1(\Omega) - C_0(\Omega)$$
$$= 2\Omega^2 - 1$$

$$(1)\quad |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2(4\Omega^3 - 3\Omega)^2}$$

Κανοντας την παραπανω ανάλυση για πρόκειται φίλτρο Chebyshev 1ου τύπου για $\epsilon = 1/4$.

Να βρεθεί το δ_p

$$\epsilon = \sqrt{\frac{1}{(1-\delta_p)^2} - 1}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{(1-\delta_p)^2} - 1$$

$$\frac{17}{16} = \frac{1}{(1-\delta_p)^2} \Rightarrow (1-\delta_p)^2 = \frac{16}{17}$$

$$1-\delta_p = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\delta_p = 1 \mp \frac{4}{\sqrt{17}}$$

Όταν το κατωπεράτο φίλτρο είναι κανονικοποιημένο ($\Omega_c = 1$)

Κατωπεράτο

$\Omega_c = 1$

$s = \frac{\Omega_{ca}}{\hat{s}}$

Ανωπεράτο

π.χ. Αν ζητ. 1 για κανονικοποιημένο

Η $H(s)$ του κανονικοποιημένου κατωπεράτου Butterworth

$L = 2$

$$H(s) = \frac{\Omega_c^2}{\hat{s} + \sqrt{2}\,\Omega_c \cdot s + \Omega_c^2} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}\,s}$$

Θέτω $s = \frac{\sqrt{3}}{3\hat{s}}$

$$H(s) = \frac{1}{(\sqrt{3})^2 \ldots} = \frac{1}{\frac{1}{3\hat{s}^2} + \frac{\sqrt{6}}{3\hat{s}} + \ldots} = \frac{3}{1 + \frac{\sqrt{6}}{\ldots} + \ldots}$$

Σχεδιάστε αναλογικό ~~[illegible]~~ χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth τάξης $L=1$ με $\Omega_c = 0,2$. Υπολογίστε/σχεδιάστε κανονικοποιημένο χαμηλοπερατό

ΛΥΣΗ

$$H(s) = \frac{\Omega_c}{s+\Omega_c} = \frac{1}{s+1}$$

Έχουμε το χαμηλοπερατό φίλτρο ενός κανονικοποιημένου στην $\Omega_c = 1$

Για να αποφύγουμε τη συχνότητα κατωφέρειας του αναλογικού χαμηλοπερατού στην ~~[illegible]~~ όπου $s = 0,2/s$

$$\text{Δρχ}(H(s)) = \frac{\Omega_c}{s+\Omega_c} = \frac{1}{\frac{0,2}{s}+1} = \frac{1}{\frac{0,2+s}{s}} = \frac{s}{0,2+s}$$

"Σχεδιασμός Ψηφιακών IIR φίλτρων.

Υπάρχουν δύο μέθοδοι με τη βοήθεια των οποίων ένα αναλογικό φίλτρο μετατρέπεται σε ψηφιακό. Οι μέθοδοι αυτοί θα πρέπει να εξασφαλίζουν στις βασικές ιδιότητες:

(i) Η συχνοτική απόκριση πρέπει να' ναι ρητή συνάρτηση του Z

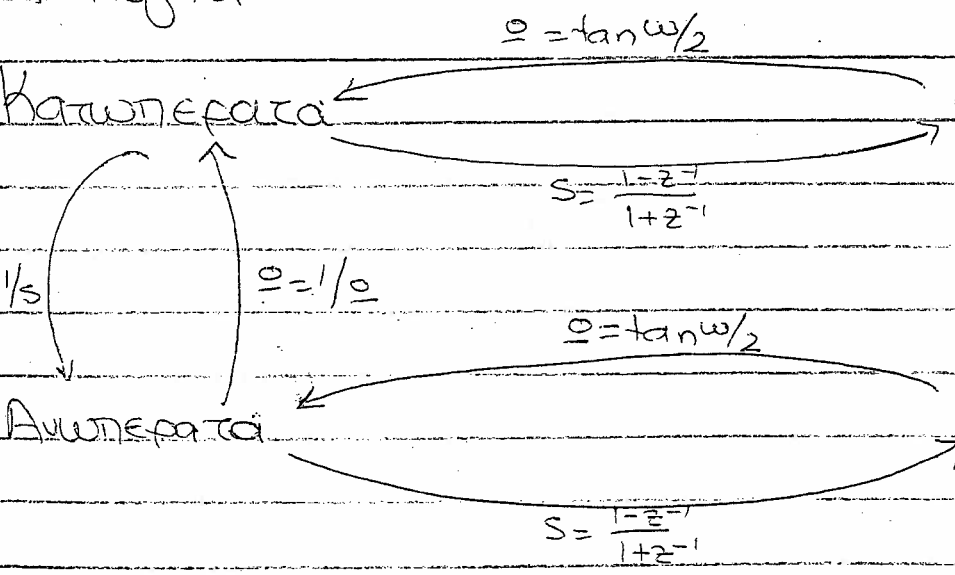
(ii) Οι πόλοι του συστήματος πρέπει να βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου (πολ. ευσταθές σύστημα)

(iii) Θα ικανοποιούνται οι προκαθορισμένες προδιαγραφές.

Α. ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

$\Omega = \tan \omega/2 \qquad s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

Αναλογικά — Ψηφιακά



1.x Σχεδιάστε ψηφιακό ανωπέρατο φίλτρο Butterworth τάξης $L=3$ με $\omega_c = \pi/2$

Λύση

1.º Μετατρέπω τη συχνότητα σε συχνότητα αναλογικού ανωπεράτου $\Omega = \tan\frac{\omega}{2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

1ο: Μετατρέπω τη συχνότητα σε συχνότητα αναλογικού πρωτοτύπου

$$\Omega_{ck} = \frac{1}{\Omega_c} = \frac{1}{1} = 1$$

2ο: Βρίσκω την $H(s)$ του αναλογικού πρωτοτύπου

$$H_3(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s^2+\Omega_c s+\Omega_c^2)}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

4ο: Θέτω όπου $s = 1/s$ για να πάρω την $H(s)$ του αναλογικού πρωτοτύπου

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{1}{s}+1\right)\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}+1\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1+s}{s}\right)\left(\frac{1+s+s^2}{s^2}\right)}$$

$$= \frac{s^3}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

5ο: Θέτω όπου $s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ για να πάρω την $H(z)$ του ψηφιακού πρωτοτύπου

$$H(z) = \frac{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+1\right)\left(\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+1\right)}$$

Θέμα 3α (Ιούνιος 2009)

$N=2$; $\omega_c = \pi/4$ (Σχεδιάστε ένα γραμμικό ψηφιακό φίλτρο IIR μετασχηματίζοντας ένα αναλογικό IIR butterworth φίλτρο)

Λύση

$$\Omega_c = \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \tan(\pi/8) = \alpha$$

$$\Omega_c = \frac{1}{\Omega_c} = 1/\alpha$$

Έχω ⇒ $H(s) = \dfrac{\Omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\,\Omega_c \cdot s + \Omega_c^2} = \dfrac{1/\alpha^2}{s^2 + \frac{\sqrt{2}}{\alpha} s + \frac{1}{\alpha^2}}$

Έστω

$$s = \frac{1}{s}$$

Δρ2: $H(s) = \dfrac{1/\alpha^2}{1/s^2 + \frac{\sqrt{2}}{\alpha \cdot s} + 1/\alpha^2} = \dfrac{1/\alpha^2}{1/s^2 + \frac{\sqrt{2}}{\alpha s} + 1/\alpha^2}$

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Δρ2: $\boxed{H(s) = \dfrac{1/\alpha^2}{\dfrac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2} + \dfrac{\sqrt{2}}{\alpha\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)} + 1/\alpha^2}}$

ΑΣΚΗΣΗ

Σχεδιάστε ένα ψηφιακό κατωπερατό φίλτρο Butterworth $L=1$, $\omega_c = \pi/6$ μετασχηματίζοντας ένα κατωπερατό Butterworth IIR φίλτρο.

ΛΥΣΗ

$$\Omega_c = \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3$$

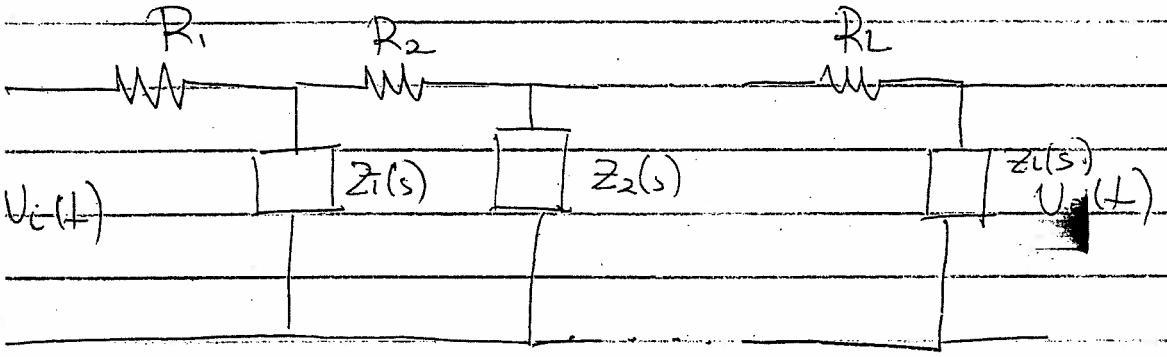
$$H(s) = \frac{\Omega_c}{s+\Omega_c} = \frac{\sqrt{3}/3}{s+\sqrt{3}/3}$$

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$\text{άρα: } \boxed{H(z) = \frac{\sqrt{3}/3}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \sqrt{3}/3}}$$

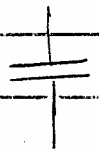
Υλοποίηση Αναλογικών IIR Φίλτρων

Υλοποιούνται στον κυκλωματα



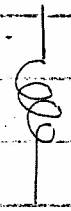
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

Χαμηλοπεράτο φίλτρο



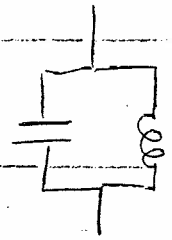
πυκνωτής $Z_k = \frac{1}{sC_k}$

Ανωπεράτο φίλτρο



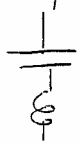
$Z_k = sL_k$

Ζωνοπεράτο φίλτρο



$$Z_k(s) = \frac{sL_k}{1 + s^2 L_k C_k}$$

Αυτό κοψίς ζωνης

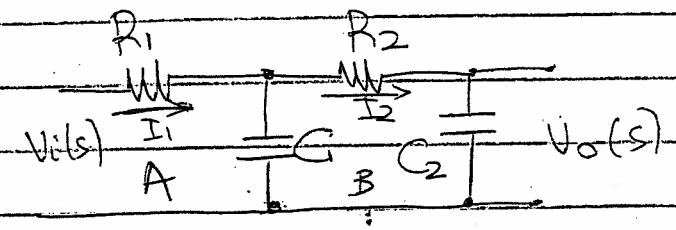


$$Z_k(s) = sL_k + \frac{1}{sC_k}$$

Θεμα 4 / Φεβ 203

Χαμηλοπερατό φίλτρο

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$



$$V_o(s) = \frac{I_2(s)}{sC_2}$$

$$I_1 = x + I_2$$
$$x = I_1 - I_2$$

1ος νομος Kirchoff

A: $V_i(s) - R_1 I_1(s) - \frac{1}{sC_1}(I_1 - I_2) = 0$

B: $(I_2 - I_1)\frac{1}{sC_1} + R_2 I_2 + \frac{1}{sC_2} I_2 = 0$

Λύνω το B ως προς I_1

$$I_1 = I_2 + sR_2 I + \frac{C_1}{C_2} I_2$$

Αντικαθιστω το I_1 στην A:

$$V_i(s) - R_1\left[I_2 + s\left(R_2 I + \frac{C_1}{C_2} I_2\right)\right] - \frac{1}{sC_1}\left[\left(I_2 + s\left(R_2 I + \frac{C_1}{C_2} I_2\right)\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow V_i(s) - R_1\left(I_2 + R_2 s I + \frac{sC_1 I_2}{C_2}\right) - \frac{1}{sC_1}\left[\left(I_2 + R_2 I s + \frac{C_1}{C_2} I_2 s\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow V_i(s) - I_2 R_1 - R_1 R_2 s I + s\frac{C_1}{C_2} I_2 R_1 - \frac{I_2}{sC_1} + \frac{R_2}{C_1} I s + \frac{C_1}{C_2} I_2 s = 0 \quad \cdots \Rightarrow$$

$$I_2(s) = \frac{sC_2 V_i(s)}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) + 1}$$

$$V_o(s) = \frac{I_2(s)}{sC_2} = \frac{V_i(s)}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) + 1}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) + 1}$$

Η αναπτυγμένη μεταφορά ενός Butterworth $L=2$ με $\omega_c = 5 \cdot 10^3 Hz$

$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\,\omega_c s + \omega_c^2} = \frac{25 \cdot 10^6}{s^2 + \sqrt{2}\, 5 \cdot 10^3 s + 25 \cdot 10^6}$$

$$= \frac{1}{\frac{s^2}{25 \cdot 10^6} + \frac{\sqrt{2}}{5 \cdot 10^3} s + 1}$$

Για να υλοποιήσω το κυκλωμα το φίλτρο Butterworth πρέπει:

$$R_1 R_2 C_1 C_2 = 1/(25 \cdot 10^6)$$

$$R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 = \frac{\sqrt{2}}{5 \cdot 10^3}$$

Θέτω $R_1C_1 = x$

$R_2C_2 = y$

$x \cdot y = \frac{1}{25} \cdot 10^{-6}$ $\qquad$ $x + y + R_1C_2 = \frac{\sqrt{2}}{5} 10^{-3}$

Οι μικρότερες τιμές για τα x, y που κάνουν

$x \cdot y = \frac{1}{25} \cdot 10^{-6}$ και κάνουν και το $x+y$ το μικρότερο

δυνατό είναι $x = y = \frac{1}{5} \cdot 10^{-3}$

Τότε

$$x + y + R_1C_2 = \frac{\sqrt{2}}{5} 10^{-3}$$

$$\frac{1}{5} \cdot 10^{-3} + \frac{1}{5} \cdot 10^{-3} + R_1C_2 = \frac{\sqrt{2}}{5} 10^{-3}$$

$$R_1C_2 = \frac{\sqrt{2}}{5} 10^{-3} - \frac{2}{5} 10^{-3}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 2}{5} \cdot 10^{-3} < 0$$

Αφού το $R_1C_2 < 0$ για τους x, y που δίνουν το μικρότερο αθροίσμα θα είναι πάντα αρνητικό. Άρα δεν υπάρχουν τιμές που να υλοποιούν το φίλτρο.

B. Αμεταβλητός κρουστικής απόκρισης Α.Κ.Α.

Έστω $H(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του αναλογικού φίλτρου

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_k s^k}{1 + a_1 s + \dots + a_L s^L} = \frac{A_1}{s - s_1} + \dots + \frac{A_L}{s - s_L}$$

$\downarrow$ Εφαρμόζω Αντίστροφο ΜΛ $\quad \frac{1}{s-a} \Leftrightarrow e^{at} u(t)$

$\frac{1}{s+a} \Leftrightarrow e^{-at} u(t)$

$$h(t) = \left(A_1 e^{s_1 t} + \dots + A_L e^{s_L t}\right) u(t)$$

$\downarrow$ Δειγματοληψία του $h(t)$

$$h(nT_s) = h_n = \left(A_1 e^{s_1 n T_s} + \dots + A_L e^{s_L n T_s}\right) u(nT_s)$$

$\downarrow$ Εφαρμόζω ΜΖ $\quad a^n u(n) \Leftrightarrow \frac{z}{z-a}$

$H(z)$

$$H(z) = A_1 \frac{z}{z - e^{s_1 T_s}} + \dots + A_L \frac{z}{z - e^{s_L T_s}}$$

Η μέθοδος σχεδιασμού είναι η ακόλουθη:

Δε μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα πλαστικό υπερβολικό φίλτρο με συγκεκριμένο προδιαγραφές τότε σχεδιάζουμε ένα αναλογικό φίλτρο με τις ίδιες προδιαγραφές και με ζώνες συνοριακές ~~[illegible]~~ που προκύπτουν από τις ζώνες συνοριακές του υπερβολικού φίλτρου μέσω της $\Omega = \frac{\omega}{T_s}$. Τη συνάρτηση μεταφοράς (H(s)) που προκύπτει τη αναλύουμε σε απλά κλάσματα και υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του υπερβολικού φίλτρου. Το τελικό φίλτρο που προκύπτει με τη Α.Κ.Α είναι ανάλογο του αρχικού σε περίπτωση δειγματοληψίας εάν επιλέξουμε $T_s = 1$

$$\Omega = \omega$$

$$H(z) = \frac{A_1 z}{z - e^{s_1}} + \dots + A_L \frac{z}{z - e^{s_L}}$$

Πρέπει $|e^{s_i}| < 1$

Αν το αναλογικό φίλτρο είναι ευσταθές $s_i < 0$

$$\left| e^{\left(\frac{1}{e}\right)^{-s_i}} \right| < 1$$

Άσκηση

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός αναλογικού ΙΙΒ φίλτρου δίνεται από τη σχέση:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

Με την Α.Κ.Α. να γίνει μιφιάρα. Ζητείται;

ΛΥΣΗ

$s^2+5s+6=0$

$\Delta = b^2-4a\gamma$

$= 25-24 = 1$

$s = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2}$ → -2, -3

$$H(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

$$= \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

$$A = \lim_{s \to -2} \cancel{(s+2)} \frac{(s+1)}{\cancel{(s+2)}(s+3)} = \frac{-2+1}{-2+3} = -1$$

$$B = \lim_{s \to -3} \cancel{(s+3)} \frac{(s+1)}{(s+2)\cancel{(s+3)}} = \frac{-3+1}{-3+2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Εφαρμόζω αντίστροφο ΜΛ

$$h(t) = -e^{-2t} \cdot u(t) + 2 \cdot e^{-3t} u(t)$$
$$= (-e^{-2t} + 2e^{-3t})\, u(t)$$

Δειγματοληψία με $T_s = 1$

$h_n = h(nT_s) = h(n)$

$= \left(-e^{-2n} + 2e^{-3n}\right)u(n)$

Εφαρμόζω MZ

$$H(z) = -\frac{z}{z - e^{-2}} + 2\frac{z}{z - e^{-3}}$$

$|z_1| = |e^{-2}| = \left|\left(\frac{1}{e}\right)^2\right| < 1$

$|z_2| = |e^{-3}| = \left|\left(\frac{1}{e}\right)^3\right| < 1$

Άρα οι πόλοι στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου => άρα σύστημα ευσταθές

Θέμα 3b / Ιούνιος '10

Κατώτη $L=2$

Α.Κ.Δ Υψ. φ. ανω $\omega_c = \pi/2$

Η συχν. του αναλ. ανωτη $\Omega_c = \omega_c = \pi/2$

Τη μετατρεπω σε συχν. αναλ. κατωτη $\Omega_c = \frac{1}{\Omega_c} = \frac{2}{\pi}$

Η συναρτηση μεταφορας του κατωπεραστου Butterworth $L=2$

$$H(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\Omega_c s + \Omega_c^2} = \frac{\frac{4}{\pi^2}}{s^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot s + \frac{4}{\pi^2}}$$

Θετω $s = 1/s$ για να παρω την $H(s)$ του αναλ. ~~ανω~~ ανωτη.

$$H(s) = \frac{\frac{4}{\pi^2}}{\frac{1}{s^2} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi s} + \frac{4}{\pi^2}} = \frac{\frac{4}{\cancel{\pi^2}}}{\frac{\pi^2 + 2\sqrt{2}\pi s + 4s^2}{\cancel{\pi^2} s^2}}$$

$$= \frac{4s^2}{4s^2 + 2\pi\sqrt{2}s + \pi^2} = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2}$$

Εφ. Αντιστροφο ΜΣ

$$h(t) = \left(A \cdot e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}\right) u(t)$$

Δεν χρ. με $T_s = 1$

$$h_n = h(n) = \left(A e^{s_1 n} + B e^{s_2 n}\right) u(n)$$

Εφαρμόζω ΜΖ

$$H(z) = A \cdot \frac{z}{z - e^{s_1}} + B \cdot \frac{z}{z - e^{s_2}}$$

$$4s^2 + 2n\sqrt{2}s + n^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4a\gamma$$

$$= 8n^2 - 16n^2 = -8n^2 = (j2\sqrt{2}n)^2$$

$A = a + j\beta$

$B = a - j\beta$

$$s = \frac{-2n\sqrt{2} \pm j2\sqrt{2}n}{8}$$

$$s_1 = \frac{-\sqrt{2}n + j\sqrt{2}n}{4} \qquad s_2 = \frac{-\sqrt{2}n - j\sqrt{2}n}{4}$$

$$A = \lim_{s \to s_1} \frac{4s_1^2}{s_1 - s_2} = \frac{\cancel{4}\,\frac{(-\sqrt{2}n - j\sqrt{2}n)^2}{\cancel{16}}}{\frac{-\cancel{\sqrt{2}n} + j\sqrt{2}n + \cancel{\sqrt{2}n} + j\sqrt{2}n}{\cancel{4}}}$$

$$= \frac{\cancel{2n^2} - 2\sqrt{2}\sqrt{2}n^2 j - \cancel{2n^2}}{2 \times \sqrt{2}n} = \frac{-\sqrt{2}n}{} = B$$

Θεμα 3b / Σεπτ '10

- Θεμα 2 / Σεπτ '02

- Θεμα 3 / Ιουλιος '07

- Θεμα 4 / Ιανιος '08

ΚΕΦ 10

"ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ"

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΔΕΙΓΜΑΤΟΧΩΡΟΣ Θ: Ονομάζεται το σύνολο των πιθανοτικών αποτελεσμ

ΜΕΤΡΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ P: Είναι μία απεικόνιση από το σύνολο F στο [0,1] με $P(\emptyset)=0$ και $P(\Theta)=1$. και $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1)+P(A_2)$

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ: Είναι μία συνάρτηση από το δειγματοχώρο στο σύνολο των πραγματικών τιμών. Ο χαρακτηρισμός της τυχαίας μεταβλητής δίνεται στατιστικά μέσω της ανάλυσης πιθανοτήτων στις τιμές μεταβλητής.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ: Ονομάζουμε μία ή αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής x, που παίρνει μία τιμή με πιθανότητα P ως:

$$\boxed{\bar{x} = E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)\, dx}$$

Η μέση τιμή μιας συνάρτησης $g(x)$ της τυχαίας μεταβλητής x είναι:

$$\boxed{E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_x(x)\, dx}$$

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του μέσου όρου είναι ο αριθμητικός μέσος όρος: $\bar{x} = \dfrac{x(\zeta_1) + \dots + x(\zeta_n)}{n}$

ΙΙΑΖΗΟΡΑ: Μια τυχαίας μεταβλητής είναι η ποσότητα που δείχνει το πόσο "παίζει" η τυχαία μεταβλητή γύρω από τη μέση τιμή

$$Var(x) = \sigma_x^2 = E\left\{(x(\zeta) - \bar{x})^2\right\} = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \cdot f_x(x)\, dx}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ: Ορίζεται ως:

$$F_x(x) = P\{x(\zeta) \le x\}$$

Είναι αύξουσα συνάρτηση και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $F_x(-\infty) = 0$

(ii) $F_x(\infty) = 1$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ: (ή PDF): Είναι η παράγωγος της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας και ισχύουν:

(i) $f_x(x) = \dfrac{d}{dx} F_x(x)$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\, dx = 1$

(iii) $\int_{x_1}^{x_2} f_x(x)\, dx = P\{x_1 < x < x_2\}$

ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΝΟΜΕΣ: Όταν εξαρτώνται περισσότερες από μία μεταβλητές πρέπει να λάβουμε υπόψη και τη στατιστική εξάρτηση που υπάρχει μεταξύ τους.

- **Δύο κοινές συνάρτηση κατανομής:** $F_{x,y} = P\{x(\zeta) \le x_0 , y(\zeta) \le y\}$

- **Δύο κοινή pdf:** $f_{x,y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{xy}(x,y)$

- **Συσχετίση:** $r_{xy} = E\{xy^*\}$

- **Συνδιακυμανσή:** $C_{xy} = cov(x,y) = E\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})\} = r_{xy} - \bar{x}\bar{y}$

- **Συντελεστής συσχέτισης:** $\rho_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$

⇒ Όταν η τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής x δεν εξαρτάται από την τιμή μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής y, τότε οι τυχαίες μεταβλητές x και y ονομάζονται στατιστικά ανεξάρτητες και ισχύει:

$$f_{xy}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

⇒ Όταν η συνδιακυμανσή είναι μηδέν, δηλαδή $cov(x,y)=0$, οι τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν τη σχέση ονομάζονται ασυσχέτιστες.

⇒ Δύο τυχαίες μεταβλητές είναι στατιστικά ανεξάρτητες είναι και ασυσχέτιστες. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

=> GAUSSIAN ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ: Μία τυχαία μεταβλητή ονομάζεται Gaussian ή κανονική, όταν η pdf της είναι η:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Η δύο από κοινού Gaussian τυχαία μεταβλητές είναι ασυσχετίστες εάν και στατιστικά ανεξάρτητες.

=> ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ: Μία τυχαία μεταβλητή ονομάζεται ομοιόμορφη στο $[\alpha, \beta]$ όταν η pdf της είναι της μορφής:

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-\alpha}, & \alpha \le x \le b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}}$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΣΗΜΑ - ΤΥΧΑΙΑ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ.

Είναι μια συλλογή από σήματα, πιθανά ανακτώμενη στο χρόνο τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικά φαινόμενα ενδιαφέροντος. Σε κάθε χρονική στιγμή η τιμή μιας τυχαίας διαδικασίας είναι μία τυχαία μεταβλητή.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ.

Ορίζουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας τυχαίας διαδικασίας ως:

$$R_{xx}(n_1,n_2) = E\{(x_{n_1}(\zeta) - \bar{x}_{n_1})(x_{n_2}(\zeta) - \bar{x}_{n_2})\}$$

$$R_{xx}(n) = E\{(x_n(\zeta) - \bar{x}_n)^2\}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΤΕΡΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ: Ορίζεται ως εξής:

$$R_{xy}(n_1,n_2) = E\{(x_{n_1}(\zeta) - \bar{x}_{n_1})(y_{n_2}(\zeta) - \bar{y}_{n_2})\}$$

$$R_{xy}(n) = E\{(x_n(\zeta) - \bar{x}_n)(y_n(\zeta) - \bar{y}_n)\}$$

"**ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑ**": Η έννοια της στασιμότητας μιας τυχαίας διαδικασίας αντίθετα με την έννοια της στατιστικής χρονικής σταθερότητας, δηλαδή οι στατιστικές ιδιότητες ή οι μέσοι όροι της τυχαίας διαδικασίας είναι ανεξάρτητοι του χρόνου. Έστω οι χρονικές στιγμές $t_1, \dots, t_k$. Ένα σύμπλεγμα $x_n(\theta)$ θα λέγεται <u>ισχυρά στάσιμο τάξης k</u>, αν η συνάρτηση κατανομής δεν εξαρτάται από τις στιγμές χρονικές τιμές αλλά μόνο από τις σχετικές:

$$\boxed{F_X(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) = F_X(x_1, \dots, x_k, t_2 - t_1, \dots, t_k - t_1)}$$

Ένα σύμπλεγμα $x_n(\theta)$ είναι <u>ισχυρά στάσιμο 1ης τάξης</u>, αν η συνάρτηση κατανομής του δεν εξαρτάται από τον χρόνο.

Όταν η pdf μιας τυχαίας διαδικασίας είναι ανεξάρτητη του χρόνου τότε η διαδικασία ονομάζεται <u>στάσιμη 1ης τάξης</u>.

Όταν η από κοινού pdf δύο στοχαστικών συμπλεγμάτων είναι ανεξάρτητη του χρόνου τότε οι διαδικασίες αυτές είναι στάσιμες 2ης τάξης.

Αν μία διαδικασία είναι στάσιμη 2ης τάξης, τότε είναι και 1ης τάξης.

Μια διαδικασία ονομάζεται δίνεται στάσιμη 1ης τάξης όταν η μέση τιμή της είναι ανεξάρτητη του χρόνου:

$$\boxed{\bar{X}_n = E\{x_n(\theta)\} = \bar{x}}$$

Η εκτίμηση αυτή ισχύει στην πραγματική μας τιμή, τότε η δοθείσα στοχαστική διαδικασία 1ης τάξης. Μία εκτίμηση της αυτοσυσχέτισης είναι η εξής:

$$\boxed{R_{xx}(k) = R_{xx}(n+k-n) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \cdot \sum_{n=1}^{k} (x_n(\zeta) - \bar{x}_n)(x_{k+n}(\zeta) - \bar{x}_{k+n})}$$

Αν η εκτίμηση αυτή ισχύει στην πραγματική αυτοσυσχέτιση, τότε το στοχαστικό σύστημα ταυτίζεται εργοδικό 2ης τάξης.

Για να είναι ένα σύστημα εργοδικό, πρέπει να είναι και στάσιμο.

Πυκνότητα φάσματος

Ονομάζουμε πυκνότητα φάσματος ενός στοχαστικού συστήματος το ΜΕ της μόρφωσης αυτοσυσχέτισης ή ετεροσυσχέτισης:

(α): $\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = F\{R_{xx}(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xx}(n)\, e^{-jn\omega}$

(β): $\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = F\{R_{xy}(n)\}$

Μια διαδικασία ονομάζεται στάσιμη 2ης τάξης όταν η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά $n_2 - n_1$:

$$R_{xx}(n_1, n_2) = R_{xx}(n_2 - n_1) = E\{(x_{n_1}(\zeta) - \bar{x}_{n_1})(x_{n_2}(\zeta) - \bar{x}_{n_2})\}$$

Δύο στοχαστικά σήματα ονομάζονται από κοινού στάσιμα, όταν είναι στάσιμα 2ης τάξης και επιπλέον η ετεροσυσχέτιση ικανοποιεί τον παρακάτω τύπο.

$$R_{xy}(n_1, n_2) = R_{xy}(n_2 - n_1) = E\{(x_{n_1}(\zeta) - \bar{x}_{n_1})(y_{n_2}(\zeta) - \bar{y}_{n_2})\}$$

Όταν ένα σήμα είναι στάσιμο τότε ισχύει:

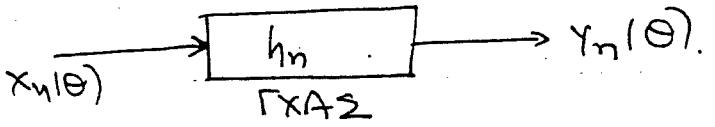
$$R_{xx}(-n) = R_{xx}(n)$$

"ΕΡΓΟΔΙΚΟΤΗΤΑ"

Η μέση τιμή και η αυτοσυσχέτιση μιάς τυχαίας διαδικασίας αποτελούν στατιστικούς μέσους όρους που αναφέρονται σ' όλη τη συνάρτηση-δείγμα της διαδικασίας. Στην πραγματικότητα όμως έχουμε διαθέσιμο ένα μόνο παρατηρούμενο δείγμα μιας μόνο πραγματοποίησης της διαδικασίας και από αυτήν τη παρατηρούμενη πληροφορία να εξαγάγουμε τις παραπάνω μεγέθη. Έστω ένα στοχαστικό σήμα για το οποίο έχουμε μια υπόταξη από k υλοποιήσεις. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να κάνουμε μία εκτίμηση της μέσης τιμής ως εξής:

$$\bar{x} = \lim_{k \to \infty} \frac{x_1(\zeta) + \dots + x_k(\zeta)}{k}$$

Φιλτράρισμα στοχαστικού σήματος.



$$\boxed{y_n(\theta) = x_n(\theta) * h_n}$$

Έστω ένα στοχαστικό σήμα $x_n(\theta)$ με μέση τιμή $\bar{x}$ και αυτοσυσχέτιση $R_{xx}(n)$.
Το σήμα έξοδου $y_n(\theta)$ είναι στοχαστικό

$$\bar{y}_n = E\{y_n(\theta)\} = \bar{x}_n \cdot \underline{H(e^{j\omega})}\Big|_{\omega=0}$$

Όταν $\bar{x}_n = 0$ τότε $\bar{y}_n = 0$

Διασυσχέτιση

$$R_{yx}(n_1, n_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m \cdot R_{xx}(n_1 - n_2 - m)$$

Αυτοσυσχέτιση εξόδου.

$$R_{yy}(n_1 + n_2, n_1) = R_{yy}(n_2)$$

Διασπορά εξόδου

$$\sigma_y^2(n) = R_{yy}(0) - \bar{y}_n \bar{y}_n$$

$$\boxed{\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega})}$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

Λευκός θόρυβος: Ένα στοχαστικό σήμα λέγεται λευκός θόρυβος $w_n(\theta)$ με μέση τιμή $\bar{w}_n$ και διασπορά σ_w^2, όταν είναι ασυσχέτιστο με όλα τα άλλα σήματα και με τον ίδιο του τον εαυτό σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. $R_{wx}(n) = 0$ $R_{ww}(n_1, n_2) = 0$

Ιανουάριος '10

Θέμα 4

1. Στασιμη 1ης τάξης – ισχυρα / ασθενώς

$x(t) = A$

2. Εργοδικη 1ης τάξης

Α.τ.μ. $[-a \quad a]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a-(-a)} = \frac{1}{2a} & [-a, a] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Λύση

Για να είναι η στ. διαδ. ισχυρα στασιμη 1ης τάξης πρεπει η pdf της να είναι ανεξαρτητη του χρονου.

Η pdf $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & [-a, a] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$ η οποια είναι σταθερη και ανεξαρτητη του χρονου.

Για να είναι η στ. διαδ. ασθενώς στασιμη 1ης τάξης πρεπει η $\bar{x}$ να είναι ανεξαρτητη του χρονου.

$$\bar{x} = \int_{-a}^{a} x \cdot f_X(x)\, dA = \int_{-a}^{a} A \cdot \frac{1}{2a}\, dA$$

$$= \frac{1}{2a} \frac{A^2}{2}\Big|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{4a}\left(a^2 - (-a)^2\right) = 0$$ άρα σταθερη και ανεξαρτητη του χρο

Αφου είναι στασιμη η στ. διαδ. μπορω να ελεγξω οτι είναι εργοδικη

Η επιτυγχανη της μεσης τιμης

$$\bar{x} = \lim_{k\to\infty} \frac{A + A + \dots + A}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k \cdot A}{k} = A \neq 0$$

Άρα δεν είναι εργοδικη

Σεπτ '09

Θεμα 4

α Θεωρια

β. $X(t) = G\sin\omega_0 t$

G τ.μ. $[-1, 1]$

$$f_G(G) = \begin{cases} \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} & -1 \le G \le 1 \\ 0 & \text{αλλιως} \end{cases}$$

Για

pdf ανεξαρτητη του χρονου

$$f_X(G) = \begin{cases} \frac{1}{\sin\omega_0 t - (-\sin\omega_0 t)} = \frac{1}{2\sin\omega_0 t} & -1 \le G \le 1 \\ 0 & \text{αλλιως} \end{cases}$$

η οποια εξαρτατα απο το χρονο.

$$\bar{X} = \int_{-1}^{1} G\sin\omega_0 t \cdot f_G(G)\, dG =$$

$$= \sin\omega_0 t \int_{-1}^{1} G \cdot \frac{1}{2}\, dG$$

$$= \frac{1}{2}\sin\omega_0 t \left.\frac{G^2}{2}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\sin\omega_0 t \left(1^2 - (-1)^2\right) = 0$$ που ειναι σταθερη

αρα ο θεωρω στασιμη.

Ασκηση 4

Έστω το σήμα του $x(t) = A \sin \theta t$. Με A τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[-1, 1]$. Να χαρακτηριστεί η παραστατικά σταθερότητα η στοχαστική διαδικασία.

Λύση

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \le A \le 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$pdf_x = \begin{cases} \frac{1}{\sin\theta t + \sin\theta t}, & -1 \le A \le 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = 2pdf \begin{cases} \frac{1}{2\sin\theta t}, & -1 \le A \le 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άρα δεν σταθερό διότι εξαρτάται από το χρόνο.

Αφού δεν είναι ισχυρά στάσιμο 1ης τάξης δεν μπορούμε να εξετάσουμε αν είναι ισχυρά στάσιμο 2ης τάξης.

$$\bar{x} = \int_{-1}^{1} A \cdot \sin\theta t \, f_A(A)\, dA = \frac{1}{2}\sin\theta t \cdot \frac{A^2}{2}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4}\sin\theta t \cdot \cancel{-1 \le (1)}^{\,0} = 0 \text{ άρα σταθερή.}$$

Άρα τώρα μπορούμε να εξετάσουμε αν είναι ασθενώς στάσιμη 2ης τάξης.

$\sin a \cdot \sin b =$

$= \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b)$

Πρέπει $R_{xx}(t_1,t_2) = R_{xx}(t_2-t_1)$

$R_{xx}(t_1,t_2) = E\{(x(t_1) - \cancel{\bar{x}_{t_1}}^{0})(x(t_2) - \cancel{\bar{x}_{t_2}}^{0})\}$

$= E\{A\sin\omega_0 t_1 \cdot A\sin\omega_0 t_2\}$

$= E\{A^2 \sin\omega_0 t_1 \cdot \sin\omega_0 t_2\}$

$= E\{A^2\} \cdot [\sin\omega_0 t_1 \cdot \sin\omega_0 t_2]$

$= E\{A^2\} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(\omega_0(t_1-t_2)) - \frac{1}{2}\cos(\omega_0(t_1+t_2))\right]$

Άρα η $R_{xx}(t_1,t_2)$ δεν εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά t_2-t_1 άρα <u>ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ</u> αστάθμητο 2ης τάξης.

Ασκηση

Έστω μια στοχαστική διαδικασία $x(t) = A\sin(\Omega_0 t + \Theta)$ όπου A, και Θ τυχαίες μεταβλητές. Η A ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[-1, 1]$ και η Θ στο $[0, 2\pi]$. Να τη χαρακτηρίσετε ως προς την αυστηρή στασιμότητα. Α & Θ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές.

Λύση

$$pdf_A = \begin{cases} \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}, & -1 \le A \le 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$pdf_\Theta = \begin{cases} \frac{1}{2\pi - 0} = \frac{1}{2\pi}, & 0 \le \Theta \le 2\pi \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(n+1)ός A και Θ ανεξάρτητες

$$\bar{x} = E\{x(t)\} = E\{A\sin(\Omega_0 t + \Theta)\} = \underbrace{E\{A\}}_{\bar{x}_1} \cdot \underbrace{E\{\sin(\Omega_0 t + \Theta)\}}_{\bar{x}_2}$$

$$E\{\bar{x}_2\} = \int_0^{2\pi} \sin(\Omega_0 t + \theta) \cdot f_\Theta(\theta) \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin(\Omega_0 t + \theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\Omega_0 t + \theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \left(-\cos(\Omega_0 t + \theta) \right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\cancel{-\cos(\Omega_0 t + 2\pi) + \cos \Omega_0 t} \right) = 0$$

$$E\{\bar{x}_1\} = \int_{-1}^{1} A \cdot f_A(A)\, dA = \int_{-1}^{1} A \cdot \frac{1}{2} \cdot dA = \frac{1}{2} \left. \frac{A^2}{2} \right|_{-1}^{1} = 0$$

Δηλ. είναι αυστηρώς στάσιμο 1ης τάξης γιατί η διασπορά αυτής είναι σταθερή

στάσιμο 2ης τάξης.

Αρα: $R_{xx}(t_2-t_1) = R_{xx}(t_1,t_2)$

$$R_{xx}(t_1,t_2) = \cancel{E\{x(t_1)\cdot x(t_2)\}}$$

$$= E\{(x(t_1)-\cancel{x(t_1)})\cdot(x(t_2)-\cancel{x(t_2)})\} = E\{x(t_1)\cdot x(t_2)\}$$

$$= E\{A\sin(\omega_0 t_1+\theta)\cdot A\sin(\omega_0 t_2+\theta)\}$$

$$= E\{A^2\cdot\sin(\omega_0 t_1+\theta)\cdot\sin(\omega_0 t_2+\theta)\}$$

$$= E\{A^2\}\cdot E\{\sin(\omega_0 t_1+\theta)\cdot\sin(\omega_0 t_2+\theta)\}$$

$$= E\{A^2\}\cdot E\left\{\frac{1}{2}\cos(\omega_0 t_1+\cancel{\theta}-\omega_0 t_2-\cancel{\theta}) - \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t_1+\theta+\omega_0 t_2+\theta)\right\}$$

$$= E\{A^2\}\,\frac{1}{2}\,E\{\cos(\omega_0(t_1-t_2)) - \cos(\omega_0(t_1+t_2)+2\theta)\}$$

$$= E\{A^2\}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos(\underline{\omega_0(t_1-t_2)}) - \underbrace{\frac{1}{2}E\{A^2\}\cdot E\{\underline{\cos(\omega_0(t_1+t_2)+2\theta)}\}}_{0}$$

$$E\{\cos(\omega_0(t_1+t_2)+2\theta)\} = \int_0^{2\pi}\cos(\omega_0(t_1+t_2)+2\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(\omega_0(t_1+t_2)+2\theta)}{2}\Bigg|_0^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\underline{\sin(\omega_0(t_1+t_2)+4\pi)} - \underline{\sin(\omega_0(t_1+t_2))}\right) = 0$$

Οπα εξαρτάται ~~μόνο~~ από τη χρονική διαφορά t_1-t_2. Οπα είναι αυτήν στάσιμο 2ης τάξης

Μοντέλο Αυτοπαλινδρόμησης

Στο ΓΧΑΣ και αιτιατό συστήμα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς είναι δοσμένη πολυωνύμων

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}}$$

$$= \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_L z^{-L}}$$

$$w_n(\theta) \longrightarrow \boxed{\text{ΓΧΑΣ}} \longrightarrow x_n(\theta)$$

$$\frac{X(z)}{W(z)} = H(z)$$

$$\frac{X(z)}{W(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} - \dots - a_L z^{-L}}$$

$$W(z) = X(z) - a_1 X(z) z^{-1} - \dots - a_L X(z) z^{-L}$$

$$w_n = x_n - a_1 x_{n-1} - \dots - a_L x_{n-L}$$

$$\boxed{x_n(\theta) = w_n(\theta) + a_1 x_{n-1}(\theta) + \dots + a_L x_{n-L}(\theta)}$$

Το $x_n(\theta)$ δίνεται μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης.

Άσκηση

Υπολογίστε τη διασπορά και την ακολουθία αυτοσυσχετίσεως για AR διαδικασία τάξης p

$$\boxed{y_n(\theta) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-k}(\theta) + w_n(\theta)} \quad (1)$$

$w_n(\theta)$ λευκός

$\bar{w}_n = 0$

σ_w^2

Λύση

$$w_n(\theta) \longrightarrow \boxed{\Gamma\Chi A\Sigma} \longrightarrow y_n(\theta)$$

Αφού η είσοδος του συστήματος έχει μέση τιμή 0 και η έξοδος επίσης μέση τιμή 0.

$$\bar{w}_n = 0 \Rightarrow \bar{y}_n = 0$$

$$\sigma_y^2 = E\{(y_n(\theta) - \bar{y}_n)^2\} = E\{(y_n(\theta))^2\} = E\{y_n(\theta) y_n(\theta)\} = R_{yy}(n,n)$$

$$= R_{yy}(n-n) = R_{yy}(0)$$

$$y_n(\theta) y_{n-l}(\theta) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-k} y_{n-l}(\theta) + w_n(\theta) y_{n-l}(\theta)$$

$$E\{y_n(\theta) y_{n-l}(\theta)\} = -\sum_{k=1}^{p} a_k E\{y_{n-k}(\theta) y_{n-l}(\theta)\} + E\{w_n(\theta) y_{n-l}(\theta)\}$$

$$\underline{R_{yy}(n,n-l)} = -\sum_{k=1}^{p} a_k \underline{R_{yy}(n-k,n-l)} + \underline{E\{w_n(\theta) y_{n-l}(\theta)\}}$$

$$R_{yy}(n-l-n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k R_{yy}(n-l-n+k) + E\{w_n(\theta) y_{n-l}(\theta)\}$$

$$R_{YY}(l) = -\sum_{k=1}^{p} a_k R_{YY}(k-l) + \underbrace{E\{w_n(\theta) y_{n-l}(\theta)\}}_{1}$$

1) Έχουμε πει ότι ο λευκός θόρυβος $w_n(\theta)$ είναι ασυσχέτιστος με άλλα σήματα και ασυσχέτιστος με τον εαυτό του σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Όμως

$$y_{n-l}(\theta) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-l-k}(\theta) + w_{n-l}(\theta) \quad (1)$$

- Η μόνη περίπτωση το $E\{w_n(\theta) \cdot y_{n-l}(\theta)\} \neq 0$ είναι όταν η (1) περιέχει τον τύπο $w_n(\theta)$ δηλ. όταν $l=0$

Για $l=0$

$$E\{w_n(\theta) \cdot y_n(\theta)\} = E\{w_n(\theta) \cdot \left(-\sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-k}(\theta) + w_n(\theta)\right)\}$$

$$= \left(-\sum_{k=1}^{p} a_k \cancel{E\{w_n(\theta) y_{n-k}(\theta)\}}^{\to 0}\right) + E\{w_n(\theta) \cdot w_n(\theta)\}$$

$$= E\{w_n(\theta) \cdot w_n(\theta)\} = \sigma_w^2$$

Apa

$$R_{yy}(l) = -\sum_{k=1}^{p} a_k R_{yy}(k-l) + \begin{cases} \sigma_w^2 & l=0 \\ 0 & l \neq 0 \end{cases}$$

$$\sigma_y^2 = R_{yy}(0) = -\sum_{k=1}^{p} a_k R_{yy}(k) + \sigma_w^2$$

Σεπτ '07. ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρείστε το ακόλουθο ΓΧΑ του αυτόματου ελέγχου

$y_n(\theta) = \alpha \cdot y_{n-1}(\theta) = k\, x_n(\theta)$. Στις είσοδο του συστήματος εφαρμόζεται λευκός θόρυβος $w_n(\theta)$ μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς σ_w^2. Προσδιορίστε αν υπάρχουν τιμές του k που εξασφαλίζουν διασπορά του συστήματος εξόδου ίση με αυτή του σήματος εισόδου.

ΛΥΣΗ

$$w_n(\theta) \longrightarrow \boxed{\text{ΓΧΑΣ}} \longrightarrow y_n(\theta)$$

Δηλ. $\bar{w}_n = 0 \Rightarrow \bar{y}_n = 0$

$$\sigma_y^2 = E\{(y_n(\theta) - \cancel{\bar{y}_n(\theta)}^{\,0})^2\} = E\{(y_n(\theta))^2\} =$$

$$= R_{yy}(n,n) = R_{yy}(n-n) = R_{yy}(0)$$

Για να βρω τη αυτοσυσχέτιση πρέπει με τον τύπο φορέα σε κάποια άλλη χρονική στιγμή

$$y_n(\theta) \cdot y_{n-l}(\theta) = \alpha \cdot y_{n-1}(\theta) \cdot y_{n-l}(\theta) + k\, w_n(\theta) \cdot y_{n-l}(\theta)$$

$$E\{y_n(\theta) \cdot y_{n-l}(\theta)\} = \alpha\, E\{y_{n-1}(\theta) \cdot y_{n-l}(\theta)\} + k \cdot E\{w_n(\theta) \cdot y_{n-l}(\theta)\}$$

$$R_{yy}(n, n-l) = \alpha \cdot R_{yy}(n-1, n-l) + k \cdot E\{w_n(\theta) \cdot y_{n-l}(\theta)\}$$

$$\Rightarrow R_{yy}(\cancel{n}-l-\cancel{n}) = \alpha \cdot R_{yy}(\cancel{n}-l-\cancel{n}-1) + k \cdot E\{w_n(\theta) \cdot y_{n-l}(\theta)\}$$

$$\Rightarrow R_{yy}(l) = \alpha \cdot R_{yy}(l-1) + k \cdot E\{w_n(\theta) \cdot y_{n-l}(\theta)\}$$

Για $l=0$

$$E\{w_n(\theta)\cdot y_n(\theta)\} = E\{w_n(\theta)\cdot(\alpha\cdot y_{n-1}(\theta) + k\cdot w_n(\theta))\}$$

$$= \underbrace{E\{w_n(\theta)\cdot \alpha\cdot y_{n-1}(\theta)\}}_{\text{για } l\neq 0 \to 0} + E\{w_n(\theta)\cdot k\cdot w_n(\theta)\}$$

$$= k\cdot E\{w_n(\theta)\cdot w_n(\theta)\}$$

$$= k\cdot \sigma_w^2$$

Για $l=0$ η Αυτοσυσχέτιση $R_{yy}(0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow R_{yy}(0) = \alpha\cdot \overset{R_{yy}(1)}{\overset{\parallel}{R_{yy}(-1)}} + k^2\cdot\sigma_w^2 \quad (1)$$

Για $l=1 \Rightarrow R_{yy}(1) = \alpha\cdot R_{yy}(0)$ (2)

$$\overset{1,2}{\Rightarrow} R_{yy}(0) = \alpha^2 R_{yy}(0) + k^2\cdot\sigma_w^2$$

$$\Rightarrow R_{yy}(0)(1-\alpha^2) = k^2\cdot\sigma_w^2$$

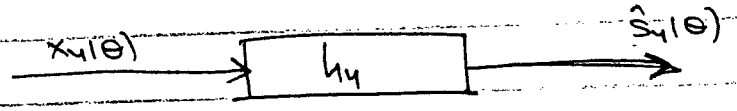
$$\Rightarrow \boxed{R_{yy}(0) = \frac{k^2\cdot\sigma_w^2}{1-\alpha^2}}$$

Θέλουμε ίσους $\sigma_w^2 = \sigma_y^2 \Rightarrow \frac{k^2}{1-\alpha^2} = 1 \quad k^2 = 1-\alpha^2$

$$\Rightarrow \boxed{k = \pm\sqrt{1-\alpha^2}}$$

Βέλτιστα Φίλτρα Wiener

$$x_n(\theta) = \underbrace{s_n(\theta)}_{\text{πληροφορία}} + \underbrace{w_n(\theta)}_{\text{θόρυβος}}$$



Δοθείσες στοχαστικές διαδικασίες $x_n(\theta), s_n(\theta), w_n(\theta)$ όπου $s_n(\theta)$ και $w_n(\theta)$ είναι από κοινού στάσιμα τότε στόχος είναι η υπολογισμός των συντελεστών του φίλτρου ώστε η έξοδος $\hat{s}_n(\theta)$ να αποτελεί τη βέλτιστη εκτίμηση του $s_n(\theta)$ κατά την ενοια η $E\{(s_n(\theta) - \hat{s}_n(\theta))^2\}$

FIR

$h_n \rightarrow$ πεπερασμένη κρουστική απόκριση μήκους L

Τότε $\hat{s}_n(\theta) = x_n(\theta) * h_n$

$$= h_0 x_n(\theta) + h_1 x_{n-1}(\theta) + \dots + h_{L-1} x_{n-L+1}(\theta)$$

Βρίσκω τα $h_0, \dots, h_{L-1}$ παραγωγίζοντας το μέσο τετραγωνικό σφάλμα και εξισώνοντας με το 0

$$E\{(s_n(\theta) - \hat{s}_n(\theta))^2\} =$$

$$E\{(s_n(\theta) - h_0 x_n(\theta) - h_1 x_{n-1}(\theta) - \dots - h_{L-1} x_{n-L+1}(\theta))^2\}$$

$$\frac{\partial E}{\partial h_0} = 0 \Rightarrow E\{\cancel{2}(s_n(\theta) - h_0 x_n(\theta) - \dots - h_{L-1} x_{n-L+1}(\theta)) \cdot (-x_n(\theta))\} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial E}{\partial h_{L-1}} = 0 \Rightarrow E\{\cancel{2}(s_n(\theta) - \dots - h_{L-1} x_{n-L+1}(\theta)) \cdot (-x_{n-L+1}(\theta))\} = 0$$

$$R_{sx}(n) = R_{xs}(-n)$$
$$R_{xx}(n) = R_{xx}(-n)$$

$$E\{s_n(\theta)\, x_n(\theta)\} - h_0\, E\{x_n(\theta)\, x_n(\theta)\} - \cdots - h_{L-1}\, E\{x_{n-L+1}(\theta)\, x_n(\theta)\} = 0$$

$$E\{s_n(\theta) \cdot x_{n-L+1}(\theta)\} - h_0\, E\{x_n(\theta)\, x_{n-L+1}(\theta)\} - \cdots - h_{L-1}\, E\{x_{n-L+1}(\theta)\, x_{n-L+1}(\theta)\} =$$

$$\vdots$$

$$R_{sx}(n,n) - h_0 R_{xx}(n,n) - \cdots - h_{L-1} R_{xx}(n-L+1, n) = 0$$

$$\vdots$$

$$R_{sx}(n, n-L+1) - h_0 R_{xx}(n, n-L+1) - \cdots - h_{L-1} R_{xx}(n-L+1, n-L+1) = 0$$

$$R_{sx}(0) = h_0 R_{xx}(0) + \cdots + h_{L-1} R_{xx}(L-1)$$

$$\vdots$$

$$R_{sx}(-L+1) = h_0 R_{xx}(L-1) + \cdots + h_{L-1} R_{xx}(0)$$

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & \cdots & R_{xx}(L-1) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{xx}(L-1) & \cdots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_{L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sx}(0) \\ \vdots \\ R_{sx}(-L+1) \end{bmatrix}$$

Αν $s_n(\theta)$, $w_n(\theta)$ είναι ασυσχέτιστα με μηδενικές μέσες τιμές τότε ισχύουν:

$$\begin{cases} R_{sx}(n) = R_{ss}(n) \\ R_{xx}(n) = R_{ss}(n) + R_{ww}(n) \end{cases}$$

*

Μη αιτιατό Γραμμικό Φίλτρο Wiener

Η h_n είναι άγνωστη και η ανάλογη συνάρτηση δίνεται από τη σχέση

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\Phi_{xs}(e^{j\omega})}{\Phi_{xx}(e^{j\omega})}$$

Αν τότε

$$\Phi_{xs}(e^{j\omega}) = \Phi_{ss}(e^{j\omega})$$
$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Phi_{ss}(e^{j\omega}) + \Phi_{ww}(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\Phi_{ss}(e^{j\omega})}{\Phi_{ss}(e^{j\omega}) + \Phi_{ww}(e^{j\omega})}$$

Ιούνιος '08 – Μαρτιος '09

Θεμα 4

$x_n(\theta) = s_n(\theta) + w_n(\theta)$

$s_n(\theta), w_n(\theta)$ ασυσχ.

$\bar{s}_n = \bar{w}_n = 0$

$R_{ss}(n) = 0{,}8^{|n|}$

$R_{ww}(n) = 0{,}36\,\delta(n)$

ΛΥΣΗ

Η αναλογια συχνοτητας του μη αιτιατου γραμμικου συστηματος Wiener δινεται απο τη σχεση

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\Phi_{xs}(e^{j\omega})}{\Phi_{xx}(e^{j\omega})}$$

$$\left.\begin{aligned} R_{sx}(n) &= R_{ss}(n) \\ R_{xx}(n) &= R_{ss}(n) + R_{ww}(n) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{F} \begin{aligned} \Phi_{xs}(e^{j\omega}) &= \Phi_{ss}(e^{j\omega}) \\ \Phi_{xx}(e^{j\omega}) &= \Phi_{ss}(e^{j\omega}) + \Phi_{ww}(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

$$\Phi_{ss}(e^{j\omega}) = F\{0{,}8^{|n|}\} =$$

$$= \frac{\dfrac{1-0{,}8^2}{1+0{,}8^2}}{1 - \dfrac{2\cdot 0{,}8}{1+0{,}8^2}\cos\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\Phi_{ss}(e^{j\omega})}{\Phi_{ss}(e^{j\omega}) + \Phi_{ww}(e^{j\omega})}$$

$$\Phi_{ww}(e^{j\omega}) = F\{0{,}36\,\delta(n)\} = \underline{0{,}36}$$

FIR

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\Phi(\omega)} R(e^{j\omega})$$

Για $L=2N+1$

$$H(e^{j\omega}) = e^{jN\omega}\underbrace{(a_0 + 2a_1\cos\omega + \dots + 2a_N\cos N\omega)}_{R_r(e^{j\omega})} + j\underbrace{(2b_1\sin\omega + \dots + 2b_N\sin N\omega)}_{R_i(e^{j\omega})}$$

Για $L=2N$

$$H(e^{j\omega}) = e^{j(N-0.5)\omega}\underbrace{\left(2a_1\cos\frac{\omega}{2} + \dots + 2a_N\cos\left(\frac{2N-1}{2}\right)\omega\right)}_{R_r(e^{j\omega})} + j\underbrace{\left(2b_1\sin\frac{\omega}{2} + \dots + 2b_N\sin\left(\frac{2N-1}{2}\right)\omega\right)}_{R_i(e^{j\omega})}$$

① ΧΡΗΣΗ ΠΑΡΑΘΥΡΩΝ

$$\epsilon^2(a_0,\dots,a_N,b_1,\dots,b_N) = \int_{-\pi}^{\pi} |D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$L=2N+1$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_r(e^{j\omega})\cos n\omega\, d\omega \\ b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_i(e^{j\omega})\sin n\omega\, d\omega \end{cases}$$

$$h_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega})\, e^{j(n-N)\omega}\, d\omega$$

$L=2N$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_r(e^{j\omega})\cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)\omega\, d\omega \\ b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_i(e^{j\omega})\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\omega\, d\omega \end{cases}$$

$$h_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j0.5\omega} D(e^{j\omega})\, e^{j(n-N)\omega}\, d\omega$$

② ΧΡΗΣΗ ΣΩΝΩΝ ΑΔΙΑΦΟΡΙΑΣ

$$\bar{\epsilon}^2(a_0,\dots,a_N,b_1,\dots,b_N) = \int_T W^2(\omega)\, |D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$L=2N+1$

$$\int_T W^2(\omega) D_r(e^{j\omega})\cos n\omega = a_0\int_T W^2(\omega)\cos n\omega\, d\omega + \dots + 2a_N\int_T W^2(\omega)\cos N\omega\cos n\omega\, d\omega$$

$$\int_T W^2(\omega) D_i(e^{j\omega})\sin n\omega = 2b_1\int_T W^2(\omega)\sin\omega\sin n\omega\, d\omega + \dots + 2b_N\int_T W^2(\omega)\sin N\omega\sin n\omega\, d\omega$$

$L=2N$

$$\int_T W^2(\omega)\, D_r(e^{j\omega}) \cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)\omega \, d\omega = 2a_1 \int_T W^2(\omega) \cos\frac{\omega}{2} \cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)\omega \, d\omega + \dots$$
$$+ 2a_N \int_T W^2(\omega) \cos\left(\frac{2N-1}{2}\right)\omega \cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)\omega \, d\omega$$

$$\int_T W^2(\omega)\, D_i(e^{j\omega}) \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\omega \, d\omega = 2b_1 \int_T W^2(\omega) \sin\frac{\omega}{2} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\omega \, d\omega + \dots +$$
$$2b_N \int_T W^2(\omega) \sin\left(\frac{2N-1}{2}\right)\omega \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\omega \, d\omega$$

$$L = \frac{-20\log_{10}\left(\sqrt{\delta_p \delta_s}\right) - 1}{14{,}6 \, \frac{|\omega_s - \omega_p|}{2\pi}}$$

③ MIN-MAX

$$\epsilon^{\infty}(a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N) = \max_{\omega} W(x) \sqrt{\left(D_r(e^{j\omega}) - R_r(e^{j\omega})\right)^2 + \left(D_i(e^{j\omega}) - R_i(e^{j\omega})\right)^2}$$

ΤΕΝΙΚΟ:

$$\epsilon(\omega, c_1, \dots, c_k) = W(\omega)\left[\Delta(\omega) - c_1 y_1(\omega) - \dots - c_k y_k(\omega)\right]$$

$L = 2N+1 \quad k = N+1 \quad \Delta(\omega) = D_r(e^{j\omega})$

$\epsilon_r^{\infty} \qquad y_n = \cos(n-1)\omega \quad c_n = a_{n-1}$

$\epsilon_i^{\infty} \qquad k = N \quad \Delta(\omega) = D_i(e^{j\omega}) \quad y_n = \sin n\omega \quad c_n = b_n$

Αν τυπώσουμε τα σημεία ω_i

$$\epsilon(\omega_i, c_1, \dots, c_k) = (-1)^{i-1}\delta_{max}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(\omega_1) & \dots & y_k(\omega_1) & \frac{1}{W(\omega_1)} \\ & & & \\ y_1(\omega_{k+1}) & \dots & y_k(\omega_{k+1}) & \frac{(-1)^k}{W(\omega_{k+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ \delta_{max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta(\omega_1) \\ \vdots \\ \Delta(\omega_{k+1}) \end{bmatrix}$$

$$L = \frac{-20\log_{10}\left(\sqrt{\delta_p \delta_s}\right) - 13}{14{,}6 \, \frac{|\omega_s - \omega_p|}{2\pi}}$$

IIR

Οι τύποι ισχύουν ΜΟΝΟ για αναλογικά κατωπεράτα.

Butterworth

συχνότητα αποκοπής των 3dB

συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{\Omega_c^L}{(s-s_0)\cdots(s-s_{L-1})}$$

$$s_n = \Omega_c\, e^{j\left(\frac{1}{2}+\frac{2n+1}{2L}\right)\pi}$$

απόκριση πλάτους στο τετράγωνο

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2L}}$$

$$\Omega_c = \Omega_p^{\frac{\log(a_s)}{\log(a_s)-\log(a_p)}}\ \Omega_s^{\frac{\log(a_p)}{\log(a_p)-\log(a_s)}}$$

→ αν δεν δίνονται ούτε Ω_c, ούτε L.

$$L = \left\lceil \frac{\log\frac{a_s}{a_p}}{2\log\frac{\Omega_s}{\Omega_p}} \right\rceil \qquad a_s = \frac{1}{\delta_s^2}-1 \qquad a_p = \frac{1}{(1-\delta_p)^2}-1$$

$$H_2(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2+\sqrt{2}\Omega_c s+\Omega_c^2} \quad (L=2) \qquad H_3(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s^2+\Omega_c s+\Omega_c^2)} \quad (L=3) \qquad H_1(s) = \frac{\Omega_c}{s+\Omega_c} \quad (L=1)$$

ΟΤΑΝ ΠΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΟ L αλλά όχι το Ω_c

$$(a-1)\delta^4_{max} + 2(1-a)\omega_p\delta^3_{max} + (\omega_s^2-\omega_p^2)\delta^2_{max} - 2\omega_s^2\omega_p\delta_{max} + \omega_s^2\omega_p^2 = 0$$

$$\alpha = \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^{2L}$$

$$W_p = \frac{W_p}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2L}}} = \frac{W_s}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2L}}} = \delta_{max}$$

W_p: μαρκάρισμα βάρους ζώνης διάβασης

W_s: μαρκάρισμα βάρους ζώνης αποκοπής

δ_{max}: συχνότητα ζώνης διάβασης

συχνότητα ζώνης αποκοπής

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2L]{\frac{1}{\left(1-\frac{\delta_{max}}{\omega_p}\right)^2}-1}} = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2L]{\left(\frac{\omega_s}{\delta_{max}}\right)^2-1}}$$

CHEBYSHEV 1ου ΤΥΠΟΥ

$$H(s) = \frac{\frac{\Omega_c^L}{\epsilon 2^{L-1}}}{(s-s_0)\cdots(s-s_{L-1})}$$

$$s_n = \sigma_n + j\Omega_n$$

$$\sigma_n = A_c\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)$$

$$\Omega_n = B_c\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)$$

απόκριση πλάτους στο τετράγωνο

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 T_L^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

πολυώνυμο Chebyshev.

$$T_L(x) = 2xT_{L-1}(x) - T_{L-2}(x)$$
$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$

$$A_c = \Omega_c\frac{\gamma^2-1}{2\gamma} \qquad B_c = \Omega_c\frac{\gamma^2+1}{2\gamma} \qquad \gamma = \left(\frac{1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon}\right)^{1/L}$$

$$\Omega_c = \Omega_p \qquad \epsilon = \sqrt{\frac{1}{(1-\delta_p)^2}-1} \qquad L = \left\lceil \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\sqrt{\frac{1}{\delta_s^2}-1}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} \right\rceil$$

CHEBYSHEV 2ου ΤΥΠΟΥ

$$H(s) = C \cdot \frac{(s-z_0)\cdots(s-z_{L-1})}{(s-s_0)\cdots(s-s_{L-1})} \qquad |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 T_L^2\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}$$

$$C = \frac{s_0 s_1 \cdots s_{L-1}}{z_0 z_1 \cdots z_{L-1}} \qquad \sigma_n = \Omega_s \frac{v_n}{v_n^2+\psi_n^2}$$

$$z_n = j\frac{\Omega_s}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)} \qquad s_n = \sigma_n + j\Omega_n \qquad \Omega_n = -\Omega_s \frac{\psi_n}{v_n^2+\psi_n^2}$$

$$v_n = A_c \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right) \qquad \psi_n = B_c \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)$$

$$A_c = \Omega_p \frac{\gamma^2-1}{2\gamma} \qquad B_c = \Omega_p \frac{\gamma^2+1}{2\gamma} \qquad \gamma = \left(D+\sqrt{D^2-1}\right)^{1/L}$$

$$D = \sqrt{1+T_L^2\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}$$

L, ϵ, Ω_c ίδια με Chebyshev 1ου τύπου

ΑΝΩΠΕΡΑΤΑ

$\phi(s) = \frac{1}{s} \qquad \Omega' = -\frac{1}{\Omega}$

$\Omega_p' = \frac{1}{\Omega_p} \qquad \Omega_s' = \frac{1}{\Omega_s}$

$[0, \Omega_s]$ απόκοπή

$[\Omega_p, \infty)$ διαβάσμα

ΖΩΝΟΠΕΡΑΤΑ

$s'\phi(s) = \frac{\Omega_0^2}{s} + s$

$\Omega' = \Omega - \frac{\Omega_0^2}{\Omega}$

$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}}$

$[\Omega_p, \Omega_p] \Leftrightarrow [\Omega_{p1}, \Omega_{p2}]$

$[\Omega_s, \infty) \Leftrightarrow [0, \Omega_s]\ [\Omega_{s2}, \infty)$

ΑΠΟΚΟΠΗΣ ΖΩΝΗΣ

$s' = \frac{s}{s^2+\Omega_0^2} \qquad \Omega' = \frac{\Omega}{\Omega_0^2-\Omega^2}$

$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}}$

$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{s1}\Omega_{s2}}$

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

1) Κατωπεράτα $\Rightarrow$ πυκνωτής $Z_C = \frac{1}{sC}$ $\qquad H_L(s) = \frac{1}{1+\alpha_1 s + \dots + \alpha_L s^L}$

$$H_1(s) = \frac{1}{1+sR_1C_1} \qquad H_2(s) = \frac{1}{1+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+(R_1R_2C_1C_2)s^2}$$

2) Ανωπεράτα $\Rightarrow$ πηνίο $Z_L = sL$ $\qquad H_L(s) = \frac{s^L}{s^L+\alpha_1 s^{L-1}+\dots+\alpha_L}$

$$H_1(s) = \frac{s}{s+\frac{R_1}{L_1}} \qquad H_2(s) = \frac{s^2}{s^2+\left(\frac{R_1}{L_1}+\frac{R_2}{L_2}+\frac{R_1}{L_2}\right)s+\frac{R_1}{L_1}\frac{R_2}{L_2}}$$

3) Ζωνοπεράτα $Z_L(s) = \frac{sL}{1+s^2LC}$ $\qquad$ 4) Απόκοπη ζώνης $Z_L(s) = \frac{1}{sC}+Ls$

IIR ΨΗΦΙΑΚΑ

① ΑΝΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

$\Omega = \frac{\omega}{T_s}$ $\quad H(z) = \frac{T_s A_1}{1-z^{-1}e^{s_1 T_s}} + \dots + \frac{T_s A_L}{1-z^{-1}e^{s_L T_s}}$ $\quad H(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \dots + \frac{A_L}{s-s_L}$

$z_k = e^{s_k T_s} < 1.$

② ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ $\quad z_k = \frac{1-s_k}{1+s_k}$

$\Omega = \tan\frac{\omega}{2}$ $\quad H(z) = H(\Phi(z))$

ΦΙΛΤΡΑ ΕΓΚΟΠΗΣ

$H(e^{j\omega_0}) = 0 \quad R'(e^{j\omega_0}) = 0$

$a_0 = -2a_1\cos\omega_0 - \dots - 2a_N\cos N\omega_0$

$a_1 = -(\sin\omega_0)^{-1}(2a_2\sin 2\omega_0 + \dots + N a_N \sin N\omega_0)$

$\Rightarrow$ και αντικαθιστούμε στην $R(e^{j\omega})$

1) Ζώνες αδιαφορίας

3) Min-Max $\quad K = N+1 \quad \Delta(\omega) = 1 \quad W(\omega) = 1 \quad Y_n(\omega) = \Phi_{n+2}(\omega) \quad C_n = 2n+2$

ΨΗΦΙΑΚΟΙ ΔΙΑΦΟΡΙΣΤΕΣ

$Y(e^{j\omega}) = D(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$

$D(e^{j\omega}) = j\frac{\omega}{T_s} \quad d_n = \frac{(-1)^n}{nT_s}$

$\bar{D}(e^{j\omega}) = D(e^{j\omega})\,D(e^{j\omega}) = j\frac{\omega}{T_s}D(e^{j\omega}) = j\,\bar{D}_i(e^{j\omega})$ φανταστικό

Συνάρτηση βάρους σύνδεσμου $\quad W(\omega) = \frac{T_s}{|\omega|}$

1) ΠΑΡΑΘΥΡΑ

$\alpha_n = 0 \quad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\omega}{T_s}D_r(e^{j\omega})\sin n\omega\, d\omega$

2) ΖΩΝΕΣ ΑΔΙΑΦΟΡΙΑΣ

$\int_{\pi} D_r(e^{j\omega})\frac{\sin n\omega}{\omega}d\omega = 2T_s\sum_{k=1}^{N} b_k \int_{\pi}\frac{\sin k\omega \sin n\omega}{\omega^2}d\omega$

3) MIN-MAX

ΨΗΦΙΑΚΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΗΣ

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{T_s}{j\omega} X(e^{j\omega})$$

$$J(e^{j\omega}) = \frac{T_s}{j\omega} = -j\frac{T_s}{\omega} = j J_i(e^{j\omega})$$

$$\bar{D}(e^{j\omega}) = J(e^{j\omega}) D(e^{j\omega}) = \frac{T_s}{j\omega} D(e^{j\omega})$$ ~~[illegible]~~

$\omega = 0 \Longrightarrow$ ΖΩΝΗ ΔΙΑΒΑΣΗΣ

$$y_n = y_{n-1} + \int_{(n-1)T_s}^{nT_s} x_a(\tau)\, d\tau.$$

$$y_n = y_{n-1} \quad (h_0 x_n + \dots + h_{L-1} x_{n-L+1})$$

$$H(z) = \frac{h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{L-1} z^{-(L-1)}}{1 - z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(N-0,5)\omega} \frac{a_0 + 2a_1 \cos\omega + \dots + 2a_N \cos N\omega}{2j \sin\frac{\omega}{2}}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ HILBERT

$$H(e^{j\omega}) = j\,\mathrm{sign}(\omega)$$

$$\bar{D}(e^{j\omega}) = J(e^{j\omega}) D(e^{j\omega})$$

ΚΑΝΟΝΑΣ	ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ	$y_n = y_{n-1} + x_n T$
— " —	ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ	$y_n = y_{n-1} + 0,5T(x_n + x_{n-1})$
— " —	SIMPSON	$y_n = y_{n-2} + \frac{T}{3}(x_n + 4x_{n-1} + x_{n-2})$

ΔΙΑΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

$$X_k = \sum_{l=0}^{L-1} x_l e^{-j\frac{2\pi}{L}lk} \qquad x_n = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{L}nk}$$

Ιδιότητες $ax_n + by_n$	$aX_k + bY_k$
$x_{\langle n-n_0\rangle_L}$	$e^{-j\frac{2\pi}{L}kn_0}X_k$
$e^{j\frac{2\pi}{L}kn_0}x_n$	$X_{\langle k-k_0\rangle_L}$
$\sum_{l=0}^{L-1} x_l y_{\langle n-l\rangle_L}$	$X_k Y_k$
$x_n y_n$	$\frac{1}{L}\sum_{l=0} X_l Y_{\langle k-l\rangle_L}$

ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ

IIR $\quad T = \frac{1}{1-r}$

FIR όσο το μήκος του φίλτρου

ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ $\left|\frac{D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})}\right|$

$$|D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})| \le \delta_i$$

$$W(\omega)\,|D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})| \le \delta_{max}$$

$$W(\omega) = \frac{\delta_{max}}{\delta_i}$$

$$1 - e^{-j\omega} = e^{-j\frac{\omega}{2}}\, 2j\sin\frac{\omega}{2}$$

$$\frac{1+e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{\cos\frac{\omega}{2}}{2j\sin\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{2j}\cot\frac{\omega}{2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega})e^{-j(n-N)\omega}\,d\omega = \frac{\sin(n-N)\omega_c}{\pi(n-N)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\omega}{T_s}\sin n\omega\, d\omega = -\frac{\omega\cos\omega_c}{\pi T_s n} + \frac{\sin(n\omega_c)}{\pi T_s n^2}$$

$$\cos^2(n\omega) = \frac{\cos(2n\omega)+1}{2} \qquad \cos(n\omega)\cos(l\omega) = \frac{\cos[(n+l)\omega]}{2} + \frac{\cos[(n-l)\omega]}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{L-1} a^n = \frac{1-a^L}{1-a}$$

$$e^{j\left(\frac{2\pi}{L}k-\omega\right)} = e^{j(2\pi k-\omega L)} = e^{-j\omega L}\, e^{j2\pi k} = e^{-j\omega L}$$

$$\sum_{n=0}^{L-1} e^{j\left(\frac{2\pi}{L}k-\omega\right)n} = \frac{1-e^{j\left(\frac{2\pi}{L}k-\omega\right)L}}{1-e^{j\left(\frac{2\pi}{L}-\omega\right)}}$$

$$D''(e^{j\omega}) = D''(\omega) = \frac{10}{\pi}\left[\delta(\omega+0.4\pi) - \delta(\omega+0.3\pi) - \delta(\omega-0.3\pi) + \delta(\omega-0.4\pi)\right]$$

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D''(\omega)\, e^{-j\omega n}\, d\omega = \frac{10}{\pi^2}\left(\cos(0.4\pi n) - \cos(0.3\pi n)\right)$$

$$\cos n\omega = \sum_{m=0}^{n} \lambda_m (\cos^m \omega)$$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

(1)

Σεπτέμβριος 2010

ΘΕΜΑ 1ο

α) $x(n) = d(n) + \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$, $f_s = 7514\,Hz$

Λύση

$2\pi\lambda n = \frac{\pi n}{4} \Rightarrow \lambda = 1/8$, $f = \lambda \cdot f_s = \frac{1}{8} 7514 = \ldots Hz$

$x_1(t) = d(t) + \cos\left(2\pi \cdot \frac{7514}{8} t\right) = d(t) + \cos\left(\frac{7514\pi}{4} t\right)$

$f' = \frac{7514}{8} + k f_s$

$x_2(t) = d(t) + \cos(2\pi \cdot f' t)$

Δύο διαφορετικές υπερκαλυπτόμενες ώστε ως οι συχνότητες του δεύτερου κατά αντίταση πολλαπλ. της f_s, έχει ίσες από στιγμιότυπα το ίδιο γνήσιο ώστε.

Ιούνιος 2009 (ΘΕΜΑ 1)

(α) $x(t) = \cos(5t) * \cos(t) - 0{,}5\cos(4t)$

Από τριγωνομετρία: $\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$

Άρα: $x(t) = \frac{1}{2}\cos(5-1)t + \frac{1}{2}\cos(5-1)t - 0{,}5\cos(4t)$

$= \frac{1}{2}\cos 6t + \frac{1}{2}\cos 4t - 0{,}5\cos(4t)$

$= \frac{1}{2}\cos 6t + \cancel{\frac{1}{2}\cos 4t} - \cancel{\frac{1}{2}\cos 4(t)} = \frac{1}{2}\cos 6t$

$2\pi f = \omega = 6$

$f = 3/\pi$, $f < f_s/2 \Rightarrow f_s > 2f \Leftrightarrow f_s > \frac{2 \cdot 3}{\pi} \Rightarrow \boxed{f_s > 6/\pi}$

b) $x(n) = \cos\left(\frac{n4}{8}\right)$ με $f_s = 50\,kHz$

$\lambda 4 = \frac{4n}{8} \Rightarrow \lambda = 1/4$, $f = \lambda \cdot f_s = \frac{1}{4} \cdot 50 \cdot 10^3\,Hz$

$x_1(t) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 50 \cdot 10^3\, t\right)$

$x_2(t) = \cos\left(\underbrace{2\pi\left[\frac{50 \cdot 10^3}{4} + k \cdot f_s\right]}_{f'} t\right)$

c) $x(t) = \cos(2\pi\sqrt{2}\, t)$

Δειγματοληψία το σήμα: δηλ. $x_n = x(nT_s)$

δηλ: $x(nT_s) = \cos(2\pi\sqrt{2} \cdot n \cdot T_s)$

Για να είναι η περιοδικότητα θα πρέπει: $x_n = x_{n+N}$

$\cos(2\pi\sqrt{2}\, n T_s) = \cos(2\pi\sqrt{2}\,(n+N) T_s)$

$\Leftrightarrow 2\pi\sqrt{2}\,(N+n) T_s = 2\lambda\pi \pm 2\pi\sqrt{2}\, n T_s$

$\Rightarrow \sqrt{2}\,(N+n) T_s = \lambda \pm \sqrt{2}\, n T_s$

$(+)$ $(-)$

$\sqrt{2} N T_s + \cancel{\sqrt{2} n T_s} = \lambda + \cancel{\sqrt{2} n T_s}$

$\lambda = \sqrt{2} N T_s$

Άρα πρέπει: $T_s = \alpha \cdot \sqrt{2}$

ή $T_s = \alpha/\sqrt{2}$

με α ανάλογο ακέραιο και όχι ρητό

d) אם התמרת פורייה של $x(t)$ נתונה ע"י $X(j\omega)$, מהי התמרת פורייה של $x(2t)$;

נגדיר

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt =$$

נסמן $x(2t) = y(t)$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(2t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$\tau = 2t$

$t = \tau/2$

$dt = d\tau/2$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-j\omega \tau/2}\, \frac{d\tau}{2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{2}\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2} X(j\omega/2)$$

$\omega' = \omega/2$

$\omega_s' = \omega_s/2$

$2\pi f_s' = 2\pi f_s/2 \Rightarrow \boxed{f_s' = f_s/2}$

$$\cos\phi = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}$$

Σεπτεμβριου 2020 (Θεμα 2)

(α) $x(n) = \cos(\omega_0 n)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$ ... DFT ενός τόνου:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega_0 \cdot n)\, e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\left(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right)}{2}\, e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{e^{j\omega_0 n}}{2} + \frac{e^{-j\omega_0 n}}{2}\right) e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{e^{j\omega_0 n}}{2}\, e^{-j\frac{2\pi k n}{N}} + e^{-j\omega_0 n} \cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{jn\left(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N}\right)} + e^{jn\left(-\omega_0 - \frac{2\pi k}{N}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{\left(j\left(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N}\right)\right)N}}{1 - e^{j\left(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N}\right)}} + \left(\frac{1 - e^{\left[-j\left(\omega_0 + \frac{2\pi k}{N}\right)\right]N}}{1 - e^{-j\left(\omega_0 + \frac{2\pi k}{N}\right)}}\right)\right]$$

b) Θεωρία βλ. αποδεικτικά Κεφ. 4:

$\cos^2\omega = \frac{1}{2}\cdot\cos 2\omega + \frac{1}{2}$

(3)

ΘΕΜΑ 3ο: (Σεπτέμβριος '10)

(α) $L = 2N+1$

$$D(\underline{\omega}) = \sum_{n=0}^{N+1} d_n \cdot \left(\cos^2(\omega/2) - \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^n$$, κατά τον L₂ έννοια

$$= \sum_{n=0}^{N+1} d_n \left[\cos^2(\omega/2) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\right]^n$$

$$= \sum_{n=0}^{N+1} d_n \left[\cos^2(\omega/2) - 1 + \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^n = \sum_{n=0}^{N+1} d_n \left[2\cos^2(\omega/2) - 1\right]^n$$

$$= \sum_{n=0}^{N+1} d_n \left[\cancel{2}\cdot\left(\frac{1}{\cancel{2}}\left(\cos\cancel{2}\,\frac{\omega}{\cancel{2}}\right) + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\right) - \cancel{1}\right]^n$$

$$= \sum_{n=0}^{N+1} d_n \cdot (\cos\omega)^n$$

Ο πολυωνυμικός Chebyshev ικανοποιεί $T_n(x) = 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$

για $x = \cos\omega$ και ότι $T_n(x) = \cos n\omega$ ισχύει:

$$\cos n\omega = \sum_{m=0}^{n} \eta_{m} \cdot (\cos)^m \omega$$

Άρα η σχέση που μας ζητείται να αποδείξουμε είναι πρόταση από μια σχέση της μορφής: $D(\underline{\omega}) = \sum_{n=0}^{N+1} d_n \cos n\omega$

Ενώ μέσω L₂ οι συντελεστές d_l δίνονται από τη σχέση:

$$d_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_T(e^{j\omega}) \cos l\omega \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{N+1} d_n \cos n\omega \cdot \cos l\omega \cdot d\omega$$

$$= \sum_{n=0}^{N+1} d_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\omega \cos l\omega \, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{ d_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos 0 \cdot \cos l\omega \, d\omega + d_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos\omega \cdot \cos l\omega \, d\omega + d_{\ldots} + \ldots \right.$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi} \Big[d_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos l\omega \, d\omega + d_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos\omega \cdot \cos l\omega \, d\omega + \dots +$$

$$+ d_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos l\omega \cdot \cos l\omega \, d\omega + \dots + d_{N+1} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(N+1)\omega \cos l\omega \, d\omega \Big] =$$

Για $n \neq l$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\omega \cdot \cos l\omega \, d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left[\cos(n\omega + l\omega) + \cos(n\omega - l\omega)\right]}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((n+l)\omega)}{n+l} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin \omega(n-l)}{n-l} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right]$$

$$= 0$$

Για $n = l$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 l\omega \, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2l\omega + \cancel{\cos 0}^{\,1} \, d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2l\omega + 1) \, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2l\omega}{2l} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \omega \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \frac{1}{2} \left[\pi - (-\pi) \right] = \pi$$

Άρα: $\alpha_l = \frac{d_l \cdot \pi}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\alpha_l = \frac{d_l}{2}}$

για $n=l=0 \Rightarrow d_0 = \frac{1}{2\pi} d_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos 0 \cdot \cos 0 \, d\omega$

$= \frac{1}{2\pi} \cdot d_0 \cdot 2\pi \Rightarrow d_0 = d_0$

$$|D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=0}^{N+1} d_n \cos n\omega - d_0 + \sum_{n=1}^{N} 2d_n \cos n\omega \right| =$$

$$= \left| d_0 + \sum_{n=1}^{N+1} d_n \cos n\omega - d_0 + \sum_{n=1}^{N} 2d_n \cos n\omega \right| \overset{d_0 = d_0}{\underset{2d_n = d_n}{=}}$$

$$= \left| d_{N+1} \cos (N+1)\omega \right|$$

Δρα: $\cos(N+1)\omega = \pm 1$

$(N+1)\omega = k\pi$

$\omega = \frac{k\pi}{N+1}$

b) Με τη βοήθεια αλεξιβλιζικών ιδιοτήτων ανάλογου:

$\Omega_c = \omega_c = \pi/2$ για ανάλογο ανωτέρου

Δρα $\Omega_{c_L} = 1/\Omega_{c_A} = 2/\pi$ " καταστατικό

Δρα: για $l=2$

$$H(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\,\Omega_c s + \Omega_c^2} = \frac{4/\pi^2}{s^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} s + \frac{4}{\pi^2}}$$ ανάλογο Butterworth

$$H(s) = \frac{4/\pi^2}{1/s^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi s} + 4/\pi^2} = \frac{4s^2}{4s^2 + 2\sqrt{2}\pi s + \pi^2}$$ ανάλογο Butterworth

Σκάλα σε απλά πλάτη, δηλαδή θέτουμε $T_s = 1$ και εφαρμόζουμε $M(z)$

ΘΕΜΑ 3 (Ιούνιος '10)

(κ) $D(\underline{\omega}) = -\sum_{n=0}^{N+1} d_n \cdot \sin^2\left(\frac{n\omega}{2}\right)$

$= -\sum_{n=0}^{N+1} d_n \cdot \left(1 - \cos^2\left(\frac{n\omega}{2}\right)\right)$

$= -\sum_{n=0}^{N+1} d_n \left(1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \cos n\omega + \frac{1}{2}\right)\right)$

$= -\sum_{n=0}^{N+1} d_n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos n\omega\right)$

$= -\sum_{n=0}^{N+1} \frac{1}{2} d_n + \sum_{n=0}^{N+1} \frac{1}{2} \cdot \cos n\omega \, d_n$

ΘΕΜΑ 4 ΣΕΠΤ '10

6

$A \sim [-2, 2]$

$$f_A(A) = \begin{cases} \frac{1}{2-(-2)} = \frac{1}{4} & -2 \le A \le 2 \\ 0 & \alpha \lamb� \alpha \end{cases}$$

$$f_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\cos\omega_0 t - (-2\cos\omega_0 t)} = \frac{1}{4\cos\omega_0 t} & -2 \le A \le 2 \\ 0 & \alpha \lamb� \alpha \end{cases}$$

Ισχυρή στασιμότητα 1ης $f_A(x)$: Δεν είναι ανεξ. του χρόνου

άρα όχι

Ασθενής στασιμότητα 1ης $E\{x(t)\}$

$$E\{x(t)\} = E\{A\cos\omega_0 t\} = \cos\omega_0 t\, E\{A\} \quad (1)$$

$$E\{A\} = \int_{-2}^{2} A f_A(A)\, dA = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} A\, dA = \frac{1}{4}\frac{A^2}{2}\Big|_{-2}^{2} =$$

$$\frac{1}{8}(2^2 - (-2)^2) = 0 \quad \text{ΔΣ}$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} 0$$

Άρα στάσιμη, ανεξ. του χρόνου, άρα ασθ. στασιμ. 1ης τάξης

b. $X(t) = A$ $\quad f_A(x) = \frac{1}{4}$ Είναι ισχυρά στασιμη 1ης

$E\{X\} = E\{A\} = 0$ ασθ. στασιμη 1ης

$$\bar{X} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_1(\theta) + \cdots + x_k(\theta)}{k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{A + A + \cdots + A}{k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{kA}{k} = A \neq 0$$ οχι εφ' όσον ισχύει η τάξη

ΘΕΜΑ 4 (Ιούνιος '10)

α) $x(t) = A$, στο $[-\alpha, \alpha]$

$$f_A(A) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha}, & -\alpha \le A \le \alpha \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$f_A(A)$

Αν εξαρτάται από τον χρόνο, άρα ισχυρά στάσιμη.

$$E\{x(t)\} = E\{A\} = \int_{-\alpha}^{\alpha} A\, f_A(A)\, dA = \int_{-\alpha}^{\alpha} A \cdot \frac{1}{2\alpha}\, dA =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{A^2}{2}\Big|_{-\alpha}^{\alpha}\right) = \frac{A^2}{4\alpha}\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{\alpha^2}{4\alpha} - \left(\frac{(-\alpha)^2}{4\alpha}\right)$$

$$= \cancel{\frac{\alpha^2}{4\alpha}} - \cancel{\frac{\alpha^2}{4\alpha}} = 0$$

Άρα $E\{A\} = 0 = E\{x(t)\}$ άρα σταθερή. Άρα ανάλογο στάσιμο 1ης τάξης.

β) Για να είναι ergodikή 1ης τάξης πρέπει να είναι στάσιμη 1ης τάξης. Δηλ. είναι στάσιμη 1ης τάξης. Μπορώ να δείξω ότι είναι και ergodikή.

$$\bar{X} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_1(\theta) + \dots + x_k(\theta)}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{A + A + \dots + A}{k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{kA}{k} = A \neq \bar{X}$$

Άρα δεν ergodikή πρώτης τάξης.